

УДК 519.8

DOI 10.46698/n5870-2157-0771-b

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРАВИЛО РАЗРЕШЕНИЯ КОНКУРЕНЦИИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ БИНАРНОЙ ЦЕПОЧКИ

А. Г. Таташев<sup>1,2</sup>, М. В. Яшина<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),  
Россия, 125319, Москва, Ленинградский проспект, 64;

<sup>2</sup> Московский технический университет связи и информатики,  
Россия, 123423, Москва, ул. Народного Ополчения, 32;

<sup>3</sup> Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),  
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: a-tatashev@yandex.ru, mv.yashina@madi.ru

**Аннотация.** Исследуется динамическая система типа бинарной цепочки Буслаева. Система содержит  $N$  контуров. На каждом контуре имеются две ячейки и одна частица. Для каждого контура имеется по одной общей точке, называемой узлом, с каждым из двух соседних контуров. В детерминированном варианте системы в любой дискретный момент времени каждая частица перемещается в другую ячейку, если нет задержки. Задержки обусловлены тем, что две частицы не могут проходить через узел одновременно. Если две частицы стремятся пересечь один и тот же узел, то перемещается только одна частица в соответствии с заданным правилом разрешения конкуренции. В стохастическом варианте частица стремится переместиться, если система находится в состоянии, соответствующем состоянию детерминированной системы, в котором частица перемещается. Эта попытка реализуется в соответствующей системе с вероятностью  $1 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малая величина. Получено правило разрешения конкуренции, называемое правилом длинного кластера. Это правило переводит систему в такое состояние, что все частицы перемещаются без задержек в настоящий момент и в будущем (состояние свободного движения), причем система попадает в состояние движения за минимальное возможное время. Среднее число  $v_i$  перемещений частицы  $i$ -го контура в единицу времени называется средней скоростью этой частицы,  $i = 1, \dots, N$ . В предположении, что  $N = 3$ , для стохастического варианта системы получены следующие результаты. Для правила длинного кластера получена следующая формула для средней скорости частиц:  $v_1 = v_2 = v_3 = 1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Для левоприоритетного правила, в соответствии с которым при конкуренции приоритет имеет частица контура с меньшим номером, для средней скорости частиц получена следующая формула:  $v_1 = v_2 = v_3 = \frac{6}{7} + o(\sqrt{\varepsilon})$ .

**Ключевые слова:** динамические системы, клеточные автоматы, случайные процессы с запретами, модели трафика.

**AMS Subject Classification:** 93B70, 93E03.

**Образец цитирования:** Таташев А. Г., Яшина М. В. Оптимальное правило разрешения конкуренции для управляемой бинарной цепочки // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 1.—С. 142–153. DOI: 10.46698/n5870-2157-0771-b.

### 1. Введение

Класс математических моделей трафика образуется динамическими системами, в которых частицы движутся на замкнутой или бесконечной решетке. Аналитические результаты для таких систем получены, например, в [1–7]. Более сложные системы данного класса, в частности, модели с сетевой структурой исследуются преимущественно с помощью имитационного моделирования. Модели данного класса могут формулироваться

в терминах клеточных автоматов [8] или случайных процессов с запретами [9]. В [10–12] рассматриваются модели, в которых частицы движутся в двух перпендикулярных направлениях на тороидальной решетке.

В [13] исследовалась динамическая система, в которой частицы движутся по каналам системы в соответствии с заданными правилами. В [14] введено понятие кластерного движения в математических моделях трафика. В дискретном варианте кластеры представляют собой группы частиц, располагающихся в соседних ячейках и перемещающихся одновременно. В непрерывном варианте кластеры представляют собой движущиеся отрезки. А. П. Буслаев ввел класс динамических систем, которые были названы *контурными сетями* (*сетями Буслаева*) [15]. Контурная сеть содержит контуры, причем соседние контуры имеют общие точки, называемые *узлами*. На контурах находятся частицы или кластеры. Частицы (кластеры) перемещаются по заданному правилу. В узлах возникают задержки, обусловленные тем, что частицы (кластеры) не могут проходить через узлы одновременно. Контурные сети могут использоваться как транспортные модели и иметь другие приложения, в том числе, могут использоваться при моделировании систем связи и компьютерных сетей. В [15–23] получены аналитические результаты для контурных сетей.

В [16] рассматривается динамическая система, называемая *бинарной цепочкой контуров*. На каждом контуре имеются две ячейки и одна частица. На каждом контуре располагаются два узла. Эти узлы представляют собой общие точки для данного узла с двумя соседними. Если две частицы стремятся пересечь один и тот же узел одновременно, то возникает конкуренция. В [16] бинарная цепочка исследуется при трех правилах разрешения конкуренции. Этими правилами являются стохастическое правило, при котором каждая из двух конкурирующих частиц пересекает узел первой (выигрывает конкуренцию) равновероятно, правоприморитетное правило (конкуренцию выигрывает частица, которая находится на контуре, расположенном справа от узла), и правило, при котором конкуренцию выигрывает частица, находящаяся на контуре с четным номером. В работе [17] рассматривается вероятностный вариант системы, рассматривавшейся в [16]. Если вероятностная система находится в таком состоянии, что в соответствующей детерминированной системе частица должна переместиться, то в вероятностной системе частица перемещается с вероятностью  $1 - \varepsilon$ . Поведение системы исследуется в предположении, что  $\varepsilon$  стремится к 0. Получена формула для средней скорости частиц при правиле разрешения конкуренции, при котором конкуренции выигрывают частицы, находящиеся в ячейках с четными номерами. В [18] исследуется бинарная цепочка контуров с правилом, при котором ни одна из конкурирующих частиц не перемещается в текущий момент и в будущем. В [19] рассматривается замкнутая цепочка контуров. Имеется  $m$  ячеек и кластер, содержащий  $l < m$  частиц на каждом контуре,  $m$  — четное число. Непрерывный вариант этой системы рассматривался в [20]. В [21, 22] рассматривалась двухконтурная система с двумя несимметрично расположенными узлами, причем в [22] найдено правило разрешения конкуренции, оптимальное в смысле максимизации средней скорости кластеров. В [23] исследовалась несимметричная двухконтурная система с одним узлом.

В настоящей работе рассматривается бинарная цепочка с произвольным конечным числом контуров. Найдено правило разрешения конкуренции, которое оптимально в следующем смысле. При этом правиле система из любого начального состояния попадает в состояние свободного движения, причем за минимальное возможное время. Это правило названо *правилом длинного кластера*. Рассматривается также вероятностный вариант системы. В этом варианте вероятность того, что попытка частицы переместиться реализуется равна  $1 - \varepsilon$ . Система исследуется при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для левоприморитетного

правила разрешения конкуренции и правила длинного кластера. Пространство состояний рассматриваемой системы конечно и эргодичность системы обосновывается легче, чем в случае бесконечного пространства состояний, как, например, для системы, рассматриваемой в [24].

## 2. Описание детерминированной системы

Рассмотрим систему, содержащую  $N$  контуров (рис. 1). Контуров имеют номера  $0, 1, \dots, N - 1$ . На каждом контуре имеются две ячейки — нижняя ячейка 0 и верхняя ячейка 1. Будем говорить, что контур  $i$  находится в состоянии  $j$ , если частица этого контура (частица  $i$ ) находится в ячейке  $j$ ,  $j = 0, 1$ . Для каждого контура имеются два соседних — один контур слева и один контур справа. Контур  $i - 1$  (вычитание по модулю  $N$ ) находится слева от контура  $i$ , а контур  $i + 1$  (сложение по модулю  $N$ ) находится справа от контура  $i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ . Имеется общая точка узлов  $i, i + 1$  называется узлом  $(i, i + 1)$  (сложение по модулю  $N$ ). Переходя из ячейки 0 в ячейку 1, частица контура  $i$  (частица  $i$ ) пересекает узел  $(i, i + 1)$ , а переходя из ячейки 1 в ячейку 0, частица  $i + 1$  пересекает узел  $(i, i + 1)$  (движение против часовой стрелки),  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ .

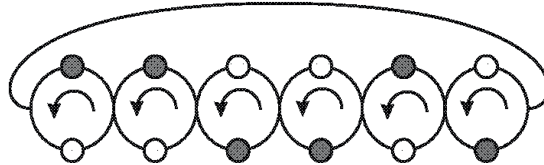


Рис. 1. Бинарная замкнутая цепочка контуров.

Если две частицы стремятся пройти одновременно через один и тот же узел, то возникает *конкуренция*. В этом случае перемещается только одна частица, выбираемая в соответствии с *правилом разрешения конкуренции*.

Состояние системы есть вектор

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}),$$

где  $x_i$  — номер ячейки, в которой находится частица  $i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ . Множество единиц в соседних позициях вектора называем *1-кластером*, причем позиции  $x_{N-1}, x_0$  считаются соседним (циклический вектор). Кластеры единиц отделены друг от друга нулями. Число единиц в 1-кластере называется длиной этого кластера. Аналогично определяются *0-кластер* и его длина.

Начальное состояние системы задается.

## 3. Описание стохастической системы

В вероятностном варианте системы вероятность перемещения частицы равна  $1 - \varepsilon$ , если система находится в состоянии, при нахождении в котором детерминированной системы эта частица перемещается. Если в соответствующем состоянии детерминированной системы частица не перемещается, то эта частица не перемещается и в стохастической системе.

## 4. Описание правила длинного кластера

Пусть  $l_0(x)$  — длина самого длинного 0-кластера в предположении, что система находится в состоянии  $x$ , и  $l_1(x)$  — длина самого длинного 1-кластера в этом предположении. Если система находится в состоянии  $x$  и  $l_0(x) \leq l_1(x)$ , то в соответствии с *правилом длинного кластера* для любой пары конкурирующих частиц частица, расположенная справа,

т. е. частица, переходящая из ячейки 1 в ячейку 0, перемещается первой. Если система находится в состоянии  $x$  и  $l_0(x) > l_1(x)$ , то в соответствии с *правилом длинного кластера* для любой пары конкурирующих частиц первой перемещается частица, которая расположена слева, т. е. частица, переходящая из ячейки 0 в ячейку 1. Если в векторе состояния  $x$  нет нулей или нет единиц, то полагаем соответственно  $l_0(x) = 0$  или  $l_1(x) = 0$ .

### 5. Понятие средней скорости

Пусть  $H(t)$  — математическое ожидание суммарного числа перемещений частиц в интервале времени  $(0, t)$ . Предел

$$v_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t}, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1,$$

называется *средней скоростью частицы*  $i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Значение

$$v = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} v_i$$

называется *средней скоростью частиц*.

Будем говорить, что система находится в состоянии свободного движения в момент времени  $t_0$ , если в любой момент  $t \geq t_0$  все частицы перемещаются. Если система попадает в состояние свободного движения, то  $v = v_0 = v_1 = \dots = v_{N-1} = 1$ .

### 6. Оптимизационное свойство правила длинного кластера

Правило длинного кластера будем называть также *правилом*  $S_0$ .

Пусть

$$l(x(t)) = \min(l_0(x(t)), l_1(x(t))),$$

где  $x(t)$  — состояние системы в момент  $t$ .

**Лемма 1.** При любом правиле разрешения конкуренции выполняется неравенство

$$l(x(t+1)) \geq l(x(t)) - 1. \tag{1}$$

◁ Если  $l(x(t)) = 1$ , то правая часть неравенства (1) равна 0 и, таким образом, выполнение неравенства (1) очевидно. Пусть  $l(x(t)) \geq 1$  и в векторе  $x(t)$  имеется 0-кластер, занимающий позиции  $i_0, i_0 + 1, \dots, i_0 + s - 1$  (сложение по модулю  $N$ ). Тогда при переходе от момента времени  $t$  к моменту  $t + 1$  частица  $i_0 + s - 1$  — конкурирующая частица и частицы  $i_0, i_0 + 1, \dots, i_0 + s - 1$  переходят в ячейки с индексом 1. Таким образом, в векторе  $x(t + 1)$  имеется 1-кластер длиной не меньше, чем  $l_0(x(t)) - 1$ . Следовательно,

$$l_1(x(t+1)) \geq l_0(x(t)) - 1. \tag{2}$$

Доказательство неравенства

$$l_0(x(t+1)) \geq l_1(x(t)) - 1 \tag{3}$$

аналогично.

Из (2), (3) следует (1). ▷

**Лемма 2.** Пусть  $l(x(t)) \geq 1$ . Тогда для правила длинного кластера  $S_0$  выполняется следующее равенство:

$$l(x(t+1)) = l(x(t)) - 1.$$

◁ Если  $l(x(t)) = l_0(x(t)) = 1$ , то в соответствии с правилом длинного кластера в момент времени все частицы будут в ячейках 0 и, следовательно,  $l(x(t+1)) = l_1(x(t+1)) = 0$ . Аналогично рассматривается случай, когда  $l(x(t)) = l_1(x(t)) = 1$ . Предположим, что  $2 \leq l_0(x(t)) \leq l_1(x(t))$  и в векторе  $x(t)$  имеется 0-кластер, занимающий позиции  $i_0, i_0 + 1, \dots, i_0 + s - 1$  (сложение по модулю  $N$ ). Тогда при переходе от момента  $t$  к моменту  $t + 1$  частицы  $i_0, i_0 + 1, \dots, i_0 + s - 2$  перейдут в ячейки 1 и в соответствии с правилом длинного кластера частица  $i_0 - 1$  (вычитание по модулю  $N$ ) переходит из ячейки 1 в ячейку 0, а частица  $i_0 + s - 1$  остается в ячейке 0. Таким образом, в векторе  $x(t + 1)$  будет иметься 1-кластер длиной  $l(t) - 1$ . Все частицы, которые находились в момент  $t$  в ячейках 1, в соответствии с правилом длинного кластера перейдут в ячейки 0. Следовательно, в векторе  $x(t + 1)$  есть 0-кластеры длиной больше  $l(x(t)) - 1$  и нет 1-кластеров длиной больше  $l(x(t))$ . Таким образом, при  $2 \leq l_0(x(t)) \leq l_1(x(t))$  утверждение леммы верно. В предположении, что  $2 \leq l_1(x(t)) < l_0(x(t))$  доказательство аналогично. ▷

Предположим, что из состояния  $x$  система за  $a(x, S)$  шагов попадает в состояние свободного движения при начальном состоянии  $x$  и правиле разрешения конкуренции  $S$ . Если система при правиле  $S$  не попадает в состояние свободного движения, то полагаем  $a(x, S) = \infty$ .

**Теорема 1.** Для любого правила разрешения конкуренции  $S$  и начального состояния  $x$  выполняется неравенство

$$a(x, S_0) = l(x) \leq a(x, S),$$

т. е. правило длинного кластера из любого начального состояния за минимальное возможное время переводит систему в состояние свободного движения.

◁ Теорема 1 следует из лемм 1 и 2. ▷

## 7. Вероятностная система с тремя контурами и левоприоритетным правилом

Рассмотрим систему с левоприоритетным правилом разрешения конкуренции, т. е. предположим, что частица  $i$  выигрывает конкуренцию частиц  $i$  и  $i + 1$  (сложение по модулю  $N$ ),  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ . Предположим, что  $N = 3$ . Имеется 8 состояний

$$\begin{aligned} E_0 &= (0, 0, 0), & E_1 &= (0, 0, 1), & E_2 &= (0, 1, 0), & E_3 &= (0, 1, 1), \\ E_4 &= (1, 0, 0), & E_5 &= (1, 0, 1), & E_6 &= (1, 1, 0), & E_7 &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Разобьем множество состояний системы на четыре подмножества

$$G_1 = \{E_0\}, \quad G_2 = \{E_7\}, \quad G_3 = \{E_3, E_5, E_6\}, \quad G_4 = \{E_1, E_2, E_4\}.$$

Вследствие симметрии вероятность перехода из состояния  $G_i$  в состояние  $G_j$  не зависит от состояния, принадлежащему  $G_i$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Таким образом,  $G_1, G_2, G_3, G_4$  — состояния цепи Маркова (макросостояния системы). Обозначим через  $p_{ij}$  вероятность того, что система  $G_i$  переходит в состояние  $G_j$  за один шаг,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Имеем

$$p_{11} = o(\varepsilon), \quad p_{12} = 1 - 3\varepsilon + o(\varepsilon), \quad p_{13} = 3\varepsilon + o(\varepsilon), \quad p_{14} = o(\varepsilon), \quad (4)$$

$$p_{21} = 1 - 3\varepsilon + o(\varepsilon), \quad p_{22} = o(\varepsilon), \quad p_{23} = o(\varepsilon), \quad p_{24} = 3\varepsilon + o(\varepsilon), \quad (5)$$

$$p_{31} = 0, \quad p_{32} = \varepsilon + o(\varepsilon), \quad p_{33} = 1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon), \quad p_{34} = \varepsilon + o(\varepsilon), \quad (6)$$

$$p_{41} = 0, \quad p_{42} = 1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon), \quad p_{43} = 2\varepsilon + o(\varepsilon), \quad p_{44} = o(\varepsilon). \quad (7)$$

Состояния цепи Маркова образуют единственный непериодический класс сообщающихся состояний и, следовательно, [25] существуют стационарные вероятности состояний системы, не зависящие от начального состояния. Обозначим через  $p_i$  стационарную вероятность макросостояния  $G_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Используя (4)–(7), получаем уравнения для стационарных вероятностей макросостояний

$$p_1 = (1 - 3\varepsilon)p_2 + o(\varepsilon), \quad (8)$$

$$p_2 = (1 - 3\varepsilon)p_1 + \varepsilon p_3 + (1 - 2\varepsilon)p_4 + o(\varepsilon), \quad (9)$$

$$p_3 = 3\varepsilon p_1 + (1 - 2\varepsilon)p_3 + 2\varepsilon p_4 + o(\varepsilon), \quad (10)$$

$$p_4 = 3\varepsilon p_2 + \varepsilon p_3 + o(\varepsilon), \quad (11)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1. \quad (12)$$

Используя (8)–(12), получаем

$$p_1 = \frac{2}{7} + o(\sqrt{\varepsilon}), \quad (13)$$

$$p_2 = \frac{2}{7} + o(\sqrt{\varepsilon}), \quad (14)$$

$$p_3 = \frac{3}{7} + o(\sqrt{\varepsilon}), \quad (15)$$

$$p_4 = o(\sqrt{\varepsilon}). \quad (16)$$

Если система находится в макросостоянии  $G_1$  или  $G_2$ , то делают попытку переместиться все частицы. Если система находится в макросостоянии  $G_3$ , то происходит задержка одной из частиц. Отсюда, используя (13)–(16), получаем следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Если  $N = 3$ , то при левоприоритетном правиле разрешения конкуренции средняя скорость частиц равна

$$v = v_1 = v_2 = v_3 = \frac{6}{7} + o(\sqrt{\varepsilon}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При четном  $N$  и правиле разрешения конкуренции, при котором конкуренцию выигрывает частица, находящаяся на контуре с четным номером (правило чет-нечет) в соответствии с результатами, полученными в [16], средняя скорость кластеров равна

$$v_i = 1 - \varepsilon, \quad i = 0, 2, \dots, N - 2,$$

$$v_i = \frac{3}{4} - o(\sqrt{\varepsilon}), \quad i = 1, 3, \dots, N - 1,$$

$$v = \frac{7}{8} - o(\sqrt{\varepsilon}).$$

## 8. Стохастическая система с правилом длинного кластера

Рассмотрим вероятностную систему с правилом длинного кластера.

Пусть число контуров равно  $N$  и вероятность перемещения частицы равна  $1 - \varepsilon$  в предположении, что система находится в состоянии, соответствующем состоянию детерминированной системы, при котором частица перемещается.

**Теорема 2.** *Для вероятностной системы с правилом длинного кластера средняя скорость частиц равна*

$$v = 1 - \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

◁ Из состояния  $(0, \dots, 0)$  система переходит с положительной вероятностью за один шаг в любое другое состояние и с положительной вероятностью остается в состоянии  $(0, \dots, 0)$ . Из любого состояния система с положительной вероятностью переходит в состояние  $(1, \dots, 1)$ , а из состояния  $(1, \dots, 1)$  система попадает в состояние  $(0, \dots, 0)$ . Таким образом, процесс работы системы представляет собой цепь Маркова с единственным непериодическим классом состояний и, следовательно, существуют положительные стационарные вероятности всех состояний, не зависящие от начальных состояний системы.

Разобьем множество состояний системы на подмножества  $S_0, S_1, \dots, S_{[N/2]}$ , где  $[N/2]$  — целая часть  $N/2$ , при этом  $S_i$  — множество всех состояний  $x$ , для которых  $l(x) = i$ ,  $i = 0, 1, \dots, [N/2]$ . Обозначим через  $P_i$  стационарную вероятность того, что система находится в состоянии, принадлежащем множеству  $S_i$ .

Если система находится в состоянии из множества  $S_0$ , то вероятность того, что на следующем шаге система будет также находиться в состоянии, принадлежащем множеству  $S_0$ , равна  $1 - N\varepsilon + o(\varepsilon)$ , а вероятность того, что система перейдет в состояние, принадлежащее  $S_1$ , равна  $N\varepsilon + o(\varepsilon)$ , а вероятность того, что система будет в состоянии, не принадлежащем  $S_0 \cup S_1$ , равна  $o(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Вероятность перехода за один шаг из состояния, принадлежащего  $S_i$ , в состояние, принадлежащее  $S_{i-1}$ ,  $i = 2, \dots, [N/2]$ , равна  $1 - o(\sqrt{\varepsilon})$ . Отсюда следует, что

$$P_0 = 1 - N\varepsilon + o(\varepsilon), \quad (17)$$

$$P_1 = N\varepsilon + o(\varepsilon), \quad (18)$$

$$P_i = o(\varepsilon). \quad (19)$$

Используя (17)–(19), получаем

$$v = P_0 + \frac{(N-1)P_1}{N} + o(\varepsilon) = 1 - \varepsilon + o(\varepsilon)$$

состояний, не зависящие от начальных состояний системы. ▷

## 9. Сравнение спектров детерминированной и стохастической бинарных цепочек

Множество возможных значений средней скорости частиц при различных начальных состояниях системы называем *спектром скоростей системы*.

В соответствии с результатами, полученными в разделах 2, 8, при правиле длинного кластера спектр средних скоростей как детерминированной, так и вероятностной системы содержит только значение 1.

В соответствии с результатами [13] спектр детерминированной бинарной цепочки с левоприоритетным правилом, которая содержит  $N$  контуров, состоит из значений

$$v = 1 - \frac{k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, [N/3],$$

где  $[a]$  — целая часть числа  $a$ .

Среднее арифметическое значение средней скорости частиц по всем начальным состояниям бинарной цепочки с левоприоритетным правилом при любом числе контуров  $N$  в соответствии с результатами [16] равно  $7/8$ , как и при правиле чет-нечет. При  $N = 3$  имеются 5 начальных состояний, которые либо являются состояниями свободного движения, либо из этих состояний система попадает в состояние свободного движения,  $v = 1$ , и 3 начальных состояния, при которых реализуется предельный цикл, на каждом шаге которого не перемещается ровно одна частица из трех,  $v = 2/3$  (эти состояния образуют множество  $G_3$  в обозначениях раздела 7). На цикле со скоростью  $2/3$  система последовательно находится в состояниях  $E_3$ ,  $E_6$  и  $E_5$ . Состояния  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_4$  не принадлежат циклам. Система может находиться в каком-либо из этих состояний только в начальный момент. На цикле со скоростью 1 чередуются состояния  $E_1$  и  $E_7$ . Спектр стохастической цепочки содержит единственное значение  $v = 6/7$  (лемма 1). Вероятность пребывания стохастической системы в множестве состояний  $G_3$  равна  $3/7 > 3/8$  и в соответствии с этим средняя скорость, равная  $6/7$ , меньше чем усредненная по множеству состояний средняя скорость для детерминированной цепочки, равная  $7/8$ .

## 10. Заключение

Для детерминированной цепочки контуров найдено правило разрешения конкуренции, оптимальное в следующем смысле. Из любого начального состояния система попадает в состояние свободного движения, которое оптимально в следующем смысле. Из любого начального состояния система попадает в состояние свободного движения за минимальный интервал времени. Рассматривается стохастический вариант системы. В этом варианте вероятность реализации попытки частицы переместиться равна  $1 - \varepsilon$ . Доказано, что средняя скорость частиц стремится к 1 при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для правила длинного кластера. В предположении, что число контуров равно 3, исследовано асимптотическое поведение системы при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для левоприоритетного правила. Для этого правила средняя скорость частиц не стремится к 1 при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## Литература

1. Schreckenberg M., Shadshneider M., Nagel K., Ito N. Discrete stochastic models for traffic flow // Phys. Rev.—1995.—Vol. 51, № 4.—P. 2939–2949. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.2939.
2. Бланк М. Л. Точный анализ динамических систем, возникающих в моделях транспортных потоков // Успехи матем. наук.—2000.—Т. 55, № 3 (333).—С. 167–168. DOI: 10.4213/rm295.
3. Belitsky V., Ferrari P. A. Invariant measures and convergence properties for cellular automaton 184 and related processes // J. Stat. Phys.—2005.—Vol. 118, № 3/4.—P. 589–523. DOI: 10.1007/s10955-004-8822-4.
4. Gray L., Griffeath D. The ergodic theory of traffic jams // J. Stat. Phys.—2001.—Vol. 105, № 3/4.—P. 413–452. DOI: 10.1023/A:1012202706850.
5. Kanai M., Nishinary K., Tokihiro T. Exact solution and asymptotic behaviour of the asymmetric simple exclusion process on a ring // J. Phys. A: Math. Gen.—2006.—Vol. 39, № 29.—9071. DOI: 10.1088/0305-4470/39/29/004.
6. Kanai M. Two-lane traffic-flow model with an exact steady-state solution // Phys. Rev. E.—2010.—Vol. 82, 066107. DOI: 10.1103/PhysRevE.82.066107.



7. Yashina M. V., Tatashev A. G. Traffic model based on synchronous and asynchronous exclusion processes // *Math. Method. Appl. Sci.*—2020.—Vol. 43, № 14.—P. 8136–8146. DOI: 10.1002/mma.6237.
8. Wolfram S. Statistical mechanics of cellular automata // *Rev. Mod. Phys.*—1983.—Vol. 55, № 3.—P. 601–644. DOI: 10.1103/RevModPhys.55.601.
9. Spitzer F. Interaction of Markov processes // *Advances in Math.*—1970.—Vol. 5, № 2.—P. 246–290. DOI: 10.1016/0001-8708(70)90034-4.
10. Biham O., Middleton A. A., Levine D. Self-organization and a dynamical transition in traffic-flow models // *Phys. Rev. A.*—1992.—Vol. 46, № 10.—P. R6124–R6127. DOI: 10.1103/PhysRevA.46.R6124.
11. Angel O., Horlovd A. E., Martin J. B. The Jammed phase of the Biham–Middleton–Levine traffic flow model // *Electron. Commun. Probab.*—2005.—Vol. 10.—P. 167–178. DOI: 10.1214/ECP.V10-1148.
12. Moradi H. R., Zardadi A., Heydarbeygi Z. The number of collisions in Biham–Middleton–Levine model on a square lattice with limited number of cars // *Applied Math. E-Notes.*—2019.—P. 243–249.
13. Buslaev A. P., Yashina M. V. On holonomic mathematical  $F$ -pendulum // *Math. Method. Appl. Sci.*—2016.—Vol. 39, № 16.—P. 4820–4828. DOI: 10.1002/mma.3810.
14. Bugaev A. S., Buslaev A. P., Kozlov V. V., Yashina M. V. Distributed problems of monitoring and modern approaches to traffic modeling // 14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC).—Washington: IEEE, 2011.—P. 477–481. DOI: 10.1109/ITSC.2011.6082805.
15. Kozlov V. V., Buslaev A. P., Tatashev A. G. On synergy of totally connected flows on chainmails // *Proceed. of International Conference of CMMSE.*—Spain, 2013.—Vol. 3.—P. 861–874.
16. Kozlov V. V., Buslaev A. P., Tatashev A. G. Monotonic walks on a necklace and a coloured dynamic vector // *International Journal of Computer Math.*—2015.—Vol. 92, № 9.—P. 1910–1920. DOI: 10.1080/00207160.2014.915964.
17. Kozlov V. V., Buslaev A. P., Tatashev A. G. A dynamic communication system on a network // *Journal of Computational and Applied Math.*—2015.—P. 247–261. DOI: 10.1016/j.cam.2014.07.026.
18. Tatashev A. G., Yashina M. V. Spectrum of elementary cellular automata and closed chains of contours // *Machines.*—2019.—Vol. 7, № 2.—P. 28. DOI: 10.3390/machines7020028.
19. Buslaev A. P., Fomina M. Yu., Tatashev A. G., Yashina M. V. On discrete flow networks model spectra: statements, simulation, hypotheses // *Journal of Physics: Conference Series.*—2018.—Vol. 1053, 012034.—P. 1–7. DOI: 10.1088/1742/6596/1053/1/012034.
20. Бугаев А. С., Таташев А. Г., Яшина М. В. Спектр непрерывной замкнутой цепочки с произвольным числом контуров // *Матем. моделирование.*—2021.—Т. 33, № 4.—С. 21–44. DOI: 10.20948/mm-2021-04-02.
21. Yashina M. V., Tatashev A. G. Spectral cycles and average velocity of clusters in discrete two-contours system with two nodes // *Math. Method. Appl. Sci.*—2020.—Vol. 43, № 7.—P. 4303–4316. DOI: 10.1002/mma.6194.
22. Yashina M. V., Tatashev A. G., Fomina M. Y. Optimization of velocity mode in buslaev two-contour networks via competition resolution rules // *International Journal of Interactive Mobile Technologies.*—2020.—Vol. 14, № 10.—P. 61–73. DOI: 10.3991/ijim.v14i10.14641.
23. Мышкис П. А., Таташев А. Г., Яшина М. В. Кластерное движение в двухконтурной системе с приоритетным правилом разрешения конфликта // *Изв. РАН. Теория и системы управления.*—2020.—№ 3.—С. 3–13. DOI: 10.31857/S0002338820030117.
24. Головнева Е. В. Об эргодических свойствах однородной марковской цепи // *Владикавказ. матем. журнал.*—2012.—Т. 14, № 1.—С. 37–46. DOI: 10.23671/VNC.2012.14.10952.
25. Kemeny J. G., Snell J. L. *Finite Markov Chains.*—N. Y.—Berlin–Heidelberg–Tokyo: Springer-Verlag, 1976.

*Статья поступила 7 февраля 2023 г.*

ТАТАШЕВ АЛЕКСАНДР ГЕННАДЬЕВИЧ  
 Московский автомобильно-дорожный государственный  
 технический университет (МАДИ),  
 профессор кафедры высшей математики  
 РОССИЯ, 125319, Москва, Ленинградский проспект, 64;  
 Московский технический университет связи и информатики,  
 профессор кафедры матем. кибернетики и информационных технологий  
 РОССИЯ, 123423, Москва, ул. Народного Ополчения, 32  
 E-mail: a-tatashev@yandex.ru  
<https://orcid.org/0000-0001-6000-188X>

ЯШИНА МАРИНА ВИКТОРОВНА  
Московский автомобильно-дорожный государственный  
технический университет (МАДИ),  
заведующая кафедрой высшей математики  
РОССИЯ, 125319, Москва, Ленинградский проспект, 64;  
Московский технический университет связи и информатики,  
профессор кафедры матем. кибернетики и информационных технологий  
РОССИЯ, 123423, Москва, ул. Народного Ополчения, 32;  
Московский авиационный институт  
(Национальный исследовательский университет),  
РОССИЯ, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4  
E-mail: mv.yashina@madi.ru  
<https://orcid.org/0000-0001-8810-918X>

*Vladikavkaz Mathematical Journal*  
2024, Volume 26, Issue 1, P. 142–153

## THE OPTIMAL COMPETITION RESOLUTION RULE FOR A CONTROLLED BINARY CHAIN

Tatashev, A. G.<sup>1,2</sup> and Yashina, M. V.<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> Moscow Automobile and Road Engineering State Technical University (MADI),  
64 Leningradsky Prospect, Moscow 125319, Russia;

<sup>2</sup> Moscow Technical University of Communications and Informatics,  
32 Narodnaya Opolcheniya St., Moscow 123423, Russia;

<sup>3</sup> Moscow Aviation Institute (National Research University),  
4 Volokolamsk Highway, Moscow 125993, Russia

E-mail: a-tatashev@yandex.ru, mv.yashina@madi.ru

**Abstract.** A dynamical system that belongs to the class introduced by A. P. Buslaev is investigated. The system contains  $N$  contours. There are two cells and one particle on each contour. For each contour there is one common point, called a node, with each of the neighboring nodes. In the deterministic version of the system, at any discrete moment, each particle moves to another cell if there is no delay. The delays are due to the fact that two particles cannot pass through the node at the same time. If two particles tend to cross the same node, then only one particle moves in accordance with a given rule of competition resolution. In the stochastic version the particle tends to move in a state corresponding to the state of the deterministic system in which the particle is moving. This attempt is implemented in the corresponding system with a probability of  $1 - \varepsilon$ , where  $\varepsilon$  — is a small value. A rule for resolving competition, called the long cluster rule, is obtained, such that this rule puts the system in such a state that all particles move without delay at the present moment and in the future (the state of free movement), and the system gets into a state of motion in the shortest possible time. The average number of  $v_i$  displacements of a particle of the  $i$ -th contour per unit of time is called the average velocity of this particle,  $i = 1, \dots, N$ . For the stochastic version of the system, the following is established under the assumption that  $N = 3$ . For the long rule, the average particle velocities  $v_1 = v_2 = v_3 = 1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). For the left-priority rule, according to which, in competition, the particle of the contour with the lower number has priority, the average particle velocity  $v_1 = v_2 = v_3 = \frac{6}{7} + o(\sqrt{\varepsilon})$ .

**Keywords:** dynamical systems, cellular automata, random exclusion processes, traffic models.

**AMS Subject Classification:** 93B70, 93E03.

**For citation:** Tatashev, A. G. and Yashina, M. V. The Optimal Competition Resolution Rule for a Controlled Binary Chain, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 1, pp. 142–153 (in Russian). DOI: 10.46698/n5870-2157-0771-b.

## References

1. Schreckenberg, M., Shadshneider, M., Nagel, K. and Ito, N. Discrete Stochastic Models for Traffic Flow, *Physical Review*, 1995, vol. 51, no. 4, pp. 2939–2949. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.2939.
2. Blank, M. L. Exact Analysis of Dynamical Systems Arising in Models of Traffic Flow, *Russian Mathematical Surveys*, 2000, vol. 55, no. 3, pp. 562–563. DOI: 10.4213/rm95.
3. Belitsky, V. and Ferrari, P. A. Invariant Measures and Convergence Properties for Cellular Automaton 184 and Related Processes, *Journal of Statistical Physics*, 2005, vol. 118, no. 3/4, pp. 589–523. DOI: 10.1007/s10955-004-8822-4.
4. Gray, L. and Griffeath, D. The Ergodic Theory of Traffic Jams, *Journal of Statistical Physics*, 2001, vol. 105, no. 3/4, pp. 413–452. DOI: 10.1023/A:1012202706850.
5. Kanai, M., Nishinary, K. and Tokihiro, T. Exact Solution and Asymptotic Behavior of the Asymmetric Simple Exclusion Process on a Ring, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2006, vol. 39, no 29, 9071. DOI: 10.1088/0305-4470/39/29/004.
6. Kanai, M. Two-Lane Traffic-Flow Model with an Exact Steady-State Solution, *Physical Review E*, 2010, vol. 82, 066107. DOI: 10.1103/PhysRevE.82.066107.
7. Yashina, M. V. and Tatashev, A. G. Traffic Model Based on Synchronous and Asynchronous Exclusion Processes, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018, vol. 43, no. 14, pp. 8136–8146. DOI: 10.1002/mma.6237.
8. Wolfram, S. Statistical Mechanics of Cellular Automata, *Reviews of Modern Physics*, 1983, vol. 55, no. 3, pp. 601–644. DOI: 10.1103/RevModPhys.55.601.
9. Spitzer, F. Interaction of Markov Processes, *Advances in Mathematics*, 1970, vol. 5, no. 2, pp. 246–290. DOI: 10.1016/0001-8708(70)90034-4.
10. Biham, O., Middleton, A. A. and Levine, D. Self-Organization and a Dynamic Transition in Traffic-Flow Models, *Physical Review A*, 1992, vol. 46, no. 10, pp. R6124–R6127. DOI: 10.1103/PhysRevA.46.R6124.
11. Angel, O., Horloyd, A. E. and Martin, J. B. The Jammed Phase of the Biham–Middleton–Levine Traffic Flow Model, *Electronic Communication in Probability*, 2005, vol. 10, pp. 167–178. DOI: 10.1214/ECP.V10-1148.
12. Moradi, H. R., Zardadi, A. and Heydarbeygi, Z. The Number of Collisions in Biham–Middleton–Levine Model on a Square Lattice with Limited Number of Cars, *Applied Mathematics E-Notes*, 2019, pp. 243–249.
13. Buslaev, A. P. and Yashina, M. V. On Holonomic Mathematical  $F$ -Pendulum, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2016, vol. 39, no. 16, pp. 4820–4828. DOI: 10.1002/mma.3810.
14. Bugaev, A. S., Buslaev, A. P., Kozlov, V. V. and Yashina, M. V. Distributed Problems of Monitoring and Modern Approaches to Traffic Modeling, *14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, Washington, IEEE, 2011, pp. 477–481. DOI: 10.1109/ITSC.2011.6082805.
15. Kozlov, V. V., Buslaev, A. P. and Tatashev, A. G. On Synergy of Totally Connected Flows on Chainmails, *Proceed. of International Conference of CMMSE*, Spain, 2013, vol. 3, pp. 861–874.
16. Kozlov, V. V., Buslaev, A. P. and Tatashev, A. G. Monotonic Walks on a Necklace and a Coloured Dynamic Vector, *International Journal of Computer Mathematics*, 2015, vol. 92, no. 9, pp. 1910–1920. DOI: 10.1080/00207160.2014.915964.
17. Kozlov, V. V., Buslaev, A. P. and Tatashev, A. G. A Dynamic Communication System on a Network, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, pp. 247–261. DOI: 10.1016/j.cam.2014.07.026.
18. Tatashev, A. G. and Yashina, M. V. Spectrum of Elementary Cellular Automata and Closed Chains of Contours, *Machines*, 2019, vol. 7, no. 2, pp. 28. DOI: 10.3390/machines7020028.
19. Buslaev, A. P., Fomina, M. Yu., Tatashev, A. G. and Yashina, M. V. On Discrete Flow Networks Model Spectra: Statements, Simulation, Hypotheses, *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1053, 012034, pp. 1–7. DOI: 10.1088/1742/6596/1053/1/012034.
20. Bugaev, A. S., Tatashev, A. G. and Yashina, M. V. Spectrum of a Continuous Closed Symmetric Chain with an Arbitrary Number of Contours, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2021, vol. 13, no. 6, pp. 1014–1027. DOI: 10.1134/S207004822106003X.
21. Yashina, M. V. and Tatashev, A. G. Spectral Cycles and Average Velocity of Clusters in Discrete Two-Contours System with Two Nodes, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, vol. 43, no. 7, pp. 4303–4316. DOI: 10.1102/mma6194.
22. Yashina, M. V., Tatashev, A. G. and Fomina, M. Y. Optimization of Velocity Mode in Buslaev Two-contour Networks via Competition Resolution Rules., *International Journal of Interactive Mobile Technologies*, 2020, vol. 14, no. 10, pp. 61–73. DOI: 103991/ijim.v14i10.14641

23. Myshkis, P. A., Tatashev, A. G. and Yashina, M. V. Cluster Motion in a Two-Contour System with Priority Rule for Conflict Resolution, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2020, vol. 59, no. 3, pp. 311–321. DOI: 10.1134/S1064230720030119.
24. Golovneva, E. V. On Ergodic Properties Homogeneous Markov Chains, *Vladikavkaz Math. J.*, 2012, vol. 14, no. 1, pp. 37–46 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2012.14.10952.
25. Kemeny, J. G. and Snell, J. L. *Finite Markov Chains*, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, Springer-Verlag, 1976.

*Received February 7, 2023*

ALEXANDER G. TATASHEV

Moscow Automobile and Road Engineering State

Technical University (MADI),

64 Leningradsky Prospect, Moscow 125319, Russia,

*Head of Higher Mathematics Department;*

Moscow Technical University of Communications and Informatics,

32 Narodnaya Opolcheniya St., Moscow 123423, Russia,

*Professor*

E-mail: [a-tatashev@yandex.ru](mailto:a-tatashev@yandex.ru)

<https://orcid.org/0000-0001-6000-188X>

MARINA V. YASHINA

Moscow Automobile and Road Engineering State

Technical University (MADI),

64 Leningradsky Prospect, Moscow 125319, Russia,

*Head of Higher Mathematics Department;*

Moscow Technical University of Communications and Informatics,

32 Narodnaya Opolcheniya St., Moscow 123423, Russia,

*Professor;*

Moscow Aviation Institute (National Research University),

4 Volokolamsk Highway, Moscow 125993, Russia,

*Professor*

E-mail: [mv.yashina@madi.ru](mailto:mv.yashina@madi.ru)

<https://orcid.org/0000-0001-8810-918X>