Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 1, С. 106–122

УДК 517.9
DOI 10.46698/h0288-6649-3374-o

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ 3-ГО ПОРЯДКА В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

М. В. Коровина[1], О. А. Матевосян[2], И. Н. Смирнов[1,3]

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1;
[2] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4;
[3] Ереванский государственный университет,
Армения, 0025, Ереван, ул. Алека Манукяна, 1

E-mail: betelgeuser@yandex.ru, hmatevossian@graduate.org, ismirnov@ysu.am

Аннотация. Статья посвящена построению равномерных асимптотик решений уравнения 3-го порядка с голоморфными коэффициентами с произвольной иррегулярной особенностью в пространстве функций экспоненциального роста. В общем виде задача построения асимптотик решений дифференциальных уравнений в окрестностях иррегулярных особых точек была сформулированна Пуанкаре в его статьях посвященных аналитической теории дифференциальных уравнений. Задача построения асимптотик для уравнений с вырождениями произвольного порядка в случае кратных корней решена только для некоторых частных случаев, например, когда уравнение имеет второй порядок. Основным методом решения задачи для уравнений с вырождениями старших порядков являются метод повторного квантования, основанный на преобразовании Лапласа — Бореля, который был создан для построения асимптотик решений дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярных особых точек в случае, когда основной символ дифференциального оператора имеет кратные корни. Задача о построении асимптотик решений уравнений старших порядков значительно сложнее. Для ее решения применяется метод повторного квантования, который не потребовался при решении аналогичной задачи для уравнений 2-го порядка. Здесь решается модельная задача, которая является важным следующим шагом к решению общей проблемы сформулированной Пуанкаре, проблемы построения асимптотик решений в окрестности произвольной иррегулярной особой точки для уравнения произвольного порядка. Задача дальнейших исследований состоит в обобщении метода решения, изложенного в статье на уравнения произвольных порядков.

Ключевые слова: асимптотики решений, уравнение 3-го порядка, иррегулярные особенности, ресургентный анализ, преобразование Лапласа — Бореля.

AMS Subject Classification: 34M05, 35J05.

Образец цитирования: *Коровина М. В., Матевосян О. А., Смирнов И. Н.* Асимптотики решений уравнения 3-го порядка в окрестности иррегулярной особой точки // Владикавк. мат. журн.—2024.— Т. 26, вып. 1.—С. 106–122. DOI: 10.46698/h0288-6649-3374-o.

1. Введение

Любые задачи о построении асимптотик решений дифференциальных уравнений, описывающих физические процессы связаны с анализом поведения функций при очень больших или очень малых значениях одного из физических параметров. В частности, при рассмотрении асимптотик решения задач теории колебаний и задач теории дифракции.

Существует формальная теория асимптотических разложений, построенная на некоторых, на первый взгляд, неожиданных свойствах дифференциальных операторов, так как она оперирует расходящимися рядами, которые как показал Пуанкаре, являются асимптотическими. Для подробного ознакомления с теорией асимптотических рядов см., например, [1, 2].

Асимптотическая теория была развита для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и применяется, в том числе, при изучении задач для уравнений математической физики в окрестностях особых точек, одной из которых является бесконечность. Примеры применения этой теории к уравнениям математической физики приведены в [3].

Развивая этот подход для уравнений высших порядков, в настоящей работе мы изучаем уравнение третьего порядка. При исследовании возникает ряд технических трудностей, одной из которых является необходимость применения метода повторного квантования, успешно разработанного для задач построения асимптотик решений уравнений с вырождением второй степени. С помощью метода повторного квантования задача построения асимптотик решений для уравнений с вырождением второй степени произвольного порядка ранее представлена в [4, 5].

В данной статье преодолены эти трудности, что может позволить сделать следующий шаг к общему случаю, т. е. к изучению асимптотик решений уравнений произвольного порядка.

Рассмотрим уравнение вида

$$\alpha_3(r)\left(\frac{d}{dr}\right)^3 u+\alpha_2(r)\left(\frac{d}{dr}\right)^2 u+\alpha_1(r)\left(\frac{d}{dr}\right) u+\alpha_0(r)u= 0, \tag{1}$$

где $\alpha_{\mathrm{i}}(r)$, $i = 0, 1, 2, 3,$ — произвольные голоморфные коэффициенты. Без ограничения общности будем считать, что точка $r = 0$ является особой точкой решения уравнения (1). В этом случае $a_3(0) = 0$.

В работе [6] доказано, что любое дифференциальное уравнение с голоморфными или мероморфными коэффициентами, а именно уравнение (1) может быть приведено к виду

$$\left(-r^m\frac{d}{dr}\right)^3 u+a_2(r)\left(-r^m\frac{d}{dr}\right)^2 u+a_1(r)\left(-r^m\frac{d}{dr}\right) u+a_0(r)u= 0, \tag{2}$$

где $a_i(r)$, $i = 0, 1, 2,$ — голоморфные функции, а m — некоторое целое неотрицательное число. Также в этой работе найдено минимальное m. Если $m = 0$, то ноль является неособой точкой, если $m = 1$, то точка $r = 0$ является регулярной особой точкой и асимптотики решений являются конормальными, т. е. будут иметь вид

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} r^{\sigma_i}\ln^i r\sum_{k=0}^{\infty}A_i^k r^k.$$

Конормальные асимптотики исследованы, в частности, для параболических уравнений в [7], эллиптических уравнений в [8], эллиптических уравнений и систем в весовых пространствах в [9, 10].

Если $m > 1$, $m \in N$, то точка $r = 0$ является иррегулярной особой точкой, и именно этот случай для произвольного m до сих пор не исследован. Заметим, что в работах [4, 5] построены равномерные асимптотики для случая $m = 2$, что соответствует построению асимптотики решения уравнения (1) в бесконечно удаленной особой точки в случае, когда $\alpha_3(r) = 1$.

В работе [3] построены асимптотики для уравнений 2-го порядка с произвольными особенностями в нуле. Однако метод, примененный для уравнений 2-го порядка, не подходит для уравнения старших порядков.

В этой статье мы будем использовать метод повторного квантования, который был сформулирован в работах [11, 12]. Данным методом в работах [4, 5] была решена задача о построении асимптотик решений обыкновенных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечно удаленной особой точки. Этот же метод мы будем применять в настоящей работе. Здесь мы развиваем этот метод так, чтобы он мог в дальнейшем быть применен к уравнениям любого порядка.

В работе [13] построены равномерные асимптотики решений волнового уравнения с мероморфным коэффициентом в окрестности особой точки. Далее в работе [3] строятся равномерные асимптотики для любых дифференциальных уравнений 2-го порядка с мероморфными коэффициентами, что соответствует произвольному порядку вырождения. Исходя из полученных результатов для уравнений 2-го порядка, здесь получены равномерные асимптотики решений для уравнений математической физики с мероморфными коэффициентами в окрестностях особых точек. Кроме этого, в работах [11, 12] строятся равномерные асимптотики решений для дифференциальных уравнений порядка n с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечности при условии $a_n(r) = 1$, которая, вообще говоря, является иррегулярной особенностью.

Отметим также работы [14–16], в которых изучены поведения решений задачи Коши при больших значениях времени; точнее, получение асимптотического разложения, характеризующего поведение решения задачи Коши для одномерного гиперболического уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами при больших значениях временного параметра t. Для получения асимптотик при $t \to \infty$ используются методы спектральной теории дифференциальных операторов, а также свойства спектра оператора Хилла с периодическими коэффициентами.

Определим основные понятия и сформулируем теоремы, которые мы будем использовать для построения асимптотики.

2. Определения и вспомогательные утверждения

Определение 1. Функция f, аналитическая на $S_{R,\varepsilon} = \{r| -\varepsilon < \arg r < \varepsilon, |r| < R\}$, имеет k-экспоненциальный рост, если существуют такие неотрицательные константы C и α, что в секторе $S_{R,\varepsilon}$ выполнено неравенство $|f| < Ce^{\frac{a}{|r|^k}}$.

Через $E_k(S_{R,\varepsilon})$ обозначим пространство функций, голоморфных в области $S_{R,\varepsilon}$, которые k-экспоненциально растут в нуле. Назовем это пространство пространством функций k-экспоненциального роста.

Если ε может быть выбран любым $0 < \varepsilon < 2\pi$, то будем обозначать это пространство как $E_k(S_R)$. Через $E(C)$ обозначим пространство целых функций экспоненциального роста на плоскости.

Введем обозначение $E(S_{R,\varepsilon}) = E_1(S_{R,\varepsilon})$. Пространство $E(S_{R,\varepsilon})$ будем называть пространством функций экспоненциального роста.

Определение 2. k-преобразованием Лапласа — Бореля функции $f(r) \in E_k(S_{R,\varepsilon})$

называется отображение $B_k : E_k(S_{R,\varepsilon}) \to \mathrm{E}(\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon})/E(C)$ такое, что

$$\tilde{f} = B_k f = \int\limits_0^{r_0} e^{-\frac{p}{r^k}} f(r)\,\frac{dr}{r^{k+1}}\,.$$

Обратное k-преобразование Лапласа — Бореля определяется формулой

$$B_k^{-1}\tilde{f} = \frac{k}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}} e^{\frac{p}{r^k}}\,\tilde{f}(p)\,dp.$$

Контур $\widetilde{\gamma}$ изображен на рис. 1.

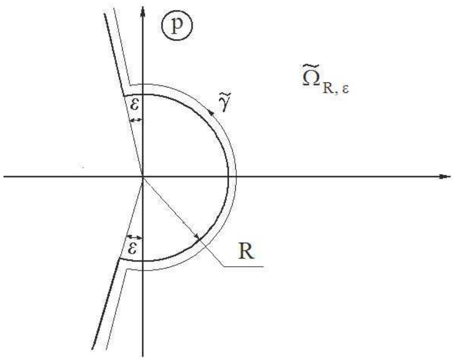

Рис. 1. Контур $\widetilde{\gamma}$ и область $\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon}$.

Более подробное описание и свойства преобразования Лапласа — Бореля можно найти в работе [17].

Определение 3. Функция $\tilde{f}$ называется бесконечно-продолжимой, если для любого числа R существует такое дискретное множество точек Z_R в C, что функция $\tilde{f}$ аналитически продолжается из первоначальной области определения вдоль любого пути длины меньше R, не проходящего через Z_R.

Определение 4. Элемент f пространства $E_k(S_{R,\varepsilon})$ называется k-ресургентной функцией, если его k-преобразование Лапласа — Бореля $\tilde{f} = B_k f$ является бесконечно-продолжимым.

Заметим, что для k-преобразования Лапласа — Бореля верны формулы:

$$B_k \circ \left(-\frac{1}{k}\,r^{k+1}\frac{\partial}{\partial r}\right) f(r) = pB_k f, \quad \frac{\partial}{\partial p}\circ B_k f = -B_k\left(\frac{1}{r^k}\,f(r)\right).$$

Доказательство этих формул можно найти в работах [18, 19].

Сформулируем основные результаты, которые были получены в работах [18, 19].

Введем обозначение:

$$H\left(-r^m\,\frac{d}{dr},\,r\right) = \left(-r^m\,\frac{d}{dr}\right)^3 + \sum_{i=0}^{2} a_i(r)\left(-r^m\,\frac{d}{dr}\right)^i.$$

Функция $H(p,r)$ называется символом дифференциального оператора $H\big(-r^m\frac{d}{dr}, r\big)$, а многочлен $H_0(p) = H(p,0)$ называется основным символом оператора.

Теорема 1. *Решение уравнения* $H\big(-r^{k+1}\frac{d}{dr}, r\big)u = 0$ *является* k*-ресургентной функцией в пространстве* $E_k(S_R)$. *Если полином* $H_0(p)$ *имеет простые корни в точках*

$p_1, \ldots, p_m$, а функция f является голоморфной, тогда асимптотики решения в пространстве $E_k(S_R)$ уравнения $H\big(-r^{k+1}\frac{d}{dr}, r\big)u = f(r)$ в пространстве $E_k(S_R)$ имеют вид:
при $k = 0$ асимптотики решений являются конормальными;
при $k = 1$

$$u(r) \approx \sum_{j=1}^{m} \exp\left(\frac{p_j}{r}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} B_i^j r^i; \tag{3}$$

при $k > 1$, $k \in N$

$$u(r) \approx \sum_{j=1}^{m} \exp\left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{k-i}^1}{r^{k-i}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i;$$

при $k = \frac{m}{n}$, $m \in N$, $n \in N$, $m > n$

$$u \approx \sum_{j} \exp\left(\frac{p_j}{r^{\frac{m}{k}-1}} + \sum_{i=1}^{m-k-1} \frac{\alpha_{m-k-i}^1}{r^{\frac{m-i}{k}-1}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i, \tag{4}$$

где сумма берется по объединению всех корней полинома $H_0(p)$. Здесь через B_i^j, σ_j, $j = 1, \ldots, m$, обозначены некоторые числа.

Понятие ресургентной функции было введено в работе [20].

Введем обозначение:

$$\hat{r}^n = B r^n B^{-1}. \tag{5}$$

В работе [21] установлено, что

$$\hat{r}^n \tilde{f}(p) = (-1)^n \int_{p_0}^{p} \frac{(p-p')^{n-1}}{\Gamma(n)} \tilde{f}(p')\, dp'.$$

В частном случае, при $n = 1$

$$\hat{r} \tilde{f}(p) = (-1) \int_{p_0}^{p} \tilde{f}(p')\, dp'. \tag{6}$$

Теорема 2. *Асимптотика функции $B^{-1} e^{-\frac{\alpha}{p^{k/n}}} g(p)$ в окрестности нуля имеет вид*

$$\sum_{j=1}^{n+k} \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{i}{n+k}}}\right) r^{\frac{\sigma_j}{n+k}} \sum_{l} c_l^j r^{\frac{l}{n+k}}. \tag{7}$$

Здесь α_{n-1}^j, $j = 1, \ldots, k+n$, — корни полинома $p^{n+k} + \left(\frac{n+k}{k}\right)^{n+k} (-1)^{n+1} \left(\frac{\alpha k}{n}\right)^n$, а коэффициенты α_i^j при $i < n-1$, c_i^j — некоторые константы.

3. Основные результаты

Из [6] следует, что любое линейное дифференциальное уравнение 3-го порядка может быть представлено в виде

$$\begin{gathered}\left(-r^m \frac{d}{dr}\right)^3 u + a_2 r^{k_2} \left(-r^m \frac{d}{dr}\right)^2 u + a_1 r^{k_1} \left(-r^m \frac{d}{dr}\right) u + a_0 r^{k_0} u \\ + r^{k_2+1} c_2(r) \left(-r^m \frac{d}{dr}\right)^2 u + \ldots + c_1(r) r^{k_1+1} \left(-r^m \frac{d}{dr}\right) u + c_0(r) r^{k_0+1} u = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

где m — целое неотрицательное число, a_i, $i = 0, 1, 2,$ — ненулевые константы, c_i, $i = 0, 1, 2,$ — соответствующие голоморфные функции. Вид асимптотики уравнения (8) зависит от значений k_i, $i = 0, 1, 2,$ и m. Во многих случаях уравнение (8) можно привести к виду, когда основной символ имеет простые корни, тогда асимптотика решения строится с помощью теоремы 1. Однако это возможно сделать не всегда. В остальных случаях мы будем иметь уравнение с кратными корнями основного символа и будем использовать метод повторного квантования и применять теорему 2.

Очевидно, что первые четыре слагаемых в левой части уравнения (8) являются главными, а остальные — младшими членами и не влияют на вид асимптотик решений. Таким образом, вид асимптотик решений уравнения (8) совпадает с видом асимптотик уравнения

$$\begin{gathered}\left(-\frac{1}{m-1}\,r^m\frac{d}{dr}\right)^3 u + a_2 r^{k_2}\left(-\frac{1}{m-1}\,r^m\frac{d}{dr}\right)^2 u \\ + a_1 r^{k_1}\left(-\frac{1}{m-1}\,r^m\frac{d}{dr}\right) u + a_0 r^{k_0} u = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

В работе [3] построены асимптотики для уравнений, где $m = 2$, здесь будем считать, что $m \geqslant 3$. Как известно, вид асимптотики решения зависит от вида основного символа.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 3. 1. *Пусть основной символ оператора имеет три ненулевых корня*

$$H_0(p) = (p - a_1)(p - a_2)(p - a_3). \tag{10}$$

Тогда асимптотика принадлежит пространству функций экспоненциального роста тогда и только тогда, когда $m = 2$. Асимптотики решения имеют вид

$$u(r) \approx \sum_{j=1}^{3} \exp\left(\frac{a_i}{r}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i. \tag{11}$$

Если $m > 2$, то асимптотика решений имеет вид

$$u(r) \approx \exp\left(\sum_{i=1}^{m-2} \frac{\alpha^1_{m-1-i}}{r^{m-1-i}}\right) r^{\sigma_1} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^0 r^i \tag{12}$$

и будет принадлежать пространству функций экспоненциального роста тогда и только тогда, когда

$$\alpha^1_{m-2} = \alpha^1_{m-3} = \ldots = \alpha^1_2 = 0.$$

2. *Пусть основной символ имеет два корня $H_0(p) = p^2(p+a)$ при условии $0 > m-2-k_1$ и $2m - 3 - k_0 = 0$. Асимптотики решений в пространстве функций экспоненциального роста при m= 2 имеют вид*

$$u(r) \approx \exp\left(\frac{-a}{r}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i + \sum_{j=1}^{2} \exp\left(\frac{\alpha_j}{r^{\frac{1}{2}}}\right) r^{\sigma_j^1} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r, \tag{13}$$

а при $m > 2$ асимптотики в пространстве функций экспоненциального роста будут иметь вид

$$u(r) \approx \sum_{j=1}^{2} \exp\left(\frac{\alpha_j}{r^{\frac{1}{2}}}\right) r^{\sigma_j^1} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r. \tag{14}$$

Здесь α_j, $j = 1, 2,$ *— корни полинома* $p^2 + 4(m-1)^2 \frac{a_0}{a}$. *В остальных случаях асимптотика либо конормальна, либо решение регулярно.*

3. *Пусть основной символ имеет вид* $H_0(p) = p^3$, *тогда асимптотики либо являются конормальными, либо представимы в виде* (10)–(14).

$\triangleleft$ Рассмотрим три случая.

1. Пусть основной символ имеет три простых корня и представим в виде

$$H_0(p) = (p - b_1)(p - b_2)(p - b_3),$$

где b_i, $i = 1, 2, 3,$ — различные числа. Тогда из теоремы 1 следует, что асимптотики решений имеют вид

$$u(r) \approx \sum_{j=1}^{3} \exp\left(\frac{b_i}{r^{m-1}} + \sum_{i=1}^{m-2} \frac{\alpha^j_{m-1-i}}{r^{m-1-i}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b^j_i r^i. \tag{15}$$

Пусть корни $H_0(p)$ не нулевые. Тогда асимптотика решения уравнения (9) имеет три асимптотических члена и принадлежит пространству $E(S_{R,\varepsilon})$ тогда и только тогда, когда $m = 2$. В этом случае асимптотики решения имеют вид

$$u(r) \approx \sum_{j=1}^{3} \exp\left(\frac{a_i}{r}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b^j_i r^i.$$

Если один из корней равен нулю, то асимптотики решения имеют вид

$$u(r) \approx \exp\left(\sum_{i=1}^{m-2} \frac{\alpha^1_{m-1-i}}{r^{m-1-i}}\right) r^{\sigma_1} \sum_{i=0}^{\infty} b^0_i r^i + \sum_{j=2}^{3} \exp\left(\frac{a_i}{r^{m-1}} + \sum_{i=1}^{m-2} \frac{\alpha^j_{m-1-i}}{r^{m-1-i}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b^j_i r^i.$$

Если $m > 2$, то два последних слагаемых в асимптотике отсутствуют, а асимптотика будет иметь вид

$$u(r) \approx \exp\left(\sum_{i=1}^{m-2} \frac{\alpha^1_{m-1-i}}{r^{m-1-i}}\right) r^{\sigma_1} \sum_{i=0}^{\infty} b^0_i r^i$$

и будет принадлежать пространству функций экспоненциального роста тогда и только тогда, когда

$$\alpha^1_{m-2} = \alpha^1_{m-3} = \ldots = \alpha^1_2 = 0.$$

2. Пусть основной символ имеет два корня. В этом случае основной символ имеет вид $H_0(p) = p^2(p + a)$, а уравнение (9) имеет вид

$$\left(-\frac{1}{m-1} r^m \frac{d}{dr}\right)^3 u + a\left(-\frac{1}{m-1} r^m \frac{d}{dr}\right)^2 u + a_1 r^{k_1}\left(-\frac{1}{m-1} r^m \frac{d}{dr}\right) u + a_0 r^{k_0} u = 0. \tag{16}$$

Из теоремы 1 следует, что асимптотика, соответствующая корню $p = -a$, имеет вид

$$u_{-a}(r) \approx \exp\left(\frac{-a}{r^{m-1}} + \sum_{i=1}^{m-2} \frac{\alpha^j_{m-1-i}}{r^{m-1-i}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b^j_i r^i. \tag{17}$$

Теперь построим асимптотику, соответствующую кратному корню $p = 0$. Очевидно, что уравнение (16) можно привести к виду

$$\begin{aligned} & r^{3(m-2)}\left(\frac{1}{m-1}\right)^3\left(r^2\frac{d}{dr}\right)^3 u(r) + c_1 r^{3(m-2)+1}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)^2 u(r) \\ & + c_2 r^{3(m-2)+2}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)u(r) + c_3 r^{3(m-2t)+3}u(r) + a r^{2(m-2)}\left(\frac{1}{m-1}\right)^2\left(r^2\frac{d}{dr}\right)^2 u(r) \\ & + a_1^0 r^{2(m-2)+1}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)u(r) + a_2^0 r^{2(m-2)+2}u(r) + a_1 r^{k_1+(m-2)}\left(\frac{1}{m-1}\right)\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)u \\ & + a_1^1 r^{k_1+(m-2)+1}u + a_0 r^{k_0}u(r) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь c_i, $i = 1,2,3$, и a_i^j, $i = 1,2$, — соответствующие коэффициенты. Преобразуем уравнение (18) к виду

$$\begin{aligned} & \left(r^2\frac{d}{dr}\right)^3 u + c_1(m-1)^3\, r\left(r^2\frac{d}{dr}\right)^2 u + c_2(m-1)^3\, r^2\left(r^2\frac{d}{dr}\right)u + c_3(m-1)^3 r^3 u \\ & + a(m-1)r^{-(m-2)}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)^2 u + a_1^0(m-1)^3\, r^{-(m-2)+1}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)u \\ & + a_2^0(m-1)^3\, r^{-(m-2)+2} + a_1(m-1)^2\, r^{k_1-2(m-2)}\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)u \\ & + a_1^1(m-1)^3\, r^{k_1-2(m-2)+1}u + a_0(m-1)^3\, r^{k_0-3(m-2)} = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Применяя преобразование Лапласа — Бореля к (19), получим уравнение

$$\begin{aligned} & p^3\hat{u}(p) + c_1(m-1)^3\,\hat{r}p^2\hat{u}(p) + c_2(m-1)^3\,\hat{r}^2 p\hat{u}(p) + c_3(m-1)^3\,\hat{r}^3\hat{u}(p) \\ & + a(m-1)\left(\frac{d}{dp}\right)^{m-2} p^2\hat{u}(p) + a_1^0(m-1)^3\left(\frac{d}{dp}\right)^{m-3} p\hat{u}(p) \\ & + a_2^0(m-1)^3\left(\frac{d}{dp}\right)^{m-4}\hat{u}(p) + a_0(m-1)^3\,\hat{r}^{k_0-3m+6}\hat{u}(p) \\ & + a_1\hat{r}^{k_1-2(m-2)}(m-1)^2\, p\hat{u}(p) + a_1^1(m-1)^3\,\hat{r}^{k_1-2(m-2)+1}\hat{u}(p) = f(p). \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь через $f(p)$ обозначена произвольная голоморфная функция. Вид асимптотики и метод ее построения зависит от значений k_0, k_1. Применим метод повторного квантования, продифференцируем уравнение (20) три раза получим дифференциальное уравнение с вырождением:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dp}\right)^3 p^3\hat{u}(p) + c_1\,(m-1)^3\left(\frac{d}{dp}\right)^2 p^2\hat{u}(p) + c_2\,(m-1)^3\,\frac{d}{dp}\,p\hat{u}(p) + c_3\,(m-1)^3\,\hat{u}(p) \\ & + a\,(m-1)\left(\frac{d}{dp}\right)^{m+1} p^2\hat{u}(p) + a_1^0\,(m-1)^3\left(\frac{d}{dp}\right)^m p\hat{u}(p) + a_2^0\,(m-1)^3\left(\frac{d}{dp}\right)^{m-1}\hat{u}(p) \\ & + \left(a_0\,(m-1)^3\left(\frac{d}{dp}\right)^{3m-3-k_0} + a_1^1\,(m-1)^3\left(\frac{d}{dp}\right)^{2m-2-k_1}\right)\hat{u}(p) \\ & + a_1\,(m-1)^2\left(\frac{d}{dp}\right)^{2m-1-k_1} p\hat{u}\,(p) = \left(\frac{d}{dp}\right)^3 f\,(p)\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Очевидно, что если $k_0 \geqslant 3(m-1)$, $k_1 \geqslant 2m-1$, то асимптотика решения является конормальной.

Пусть $3m-3-k_0 \geqslant 2m-2-k_1$. Тогда если $3m-3-k_0 > m$, то решение, очевидно, регулярно; а если $3m-3-k_0 < m$, асимптотики решения являются конормальными. Это следует из того, что при умножении уравнения (21) на p^{m-1}, мы получим уравнение с коническим вырождением.

В случаях $3m-3-k_0 < 2m-2-k_1$ и $2m-2-k_1 \neq m$, асимптотика решения (21) является конормальным.

Рассмотрим случай $3m-3-k_0 > 2m-2-k_1$ и $3m-3-k_0 = m$. В этом случае уравнение (21) имеет вид

$$\begin{gathered}\left(\frac{d}{dp}\right)^3 p^3\hat{u}(p) + c_1\,(m-1)^3\left(\frac{d}{dp}\right)^2 p^2\hat{u}(p) + c_2\,(m-1)^3\,\frac{d}{dp}\,p\hat{u}(p) + c_3\,(m-1)^3\,\hat{u}(p)\\ + a\,(m-1)\left(\frac{d}{dp}\right)^{m+1} p^2\hat{u}(p) + a_1^0\,(m-1)^3\left(\frac{d}{dp}\right)^m p\hat{u}(p) + a_2^0\,(m-1)^3\left(\frac{d}{dp}\right)^{m-1}\hat{u}(p)\\ + a_0\,(m-1)^3\left(\frac{d}{dp}\right)^m\hat{u}(p) + a_1^1\,(m-1)^3\left(\frac{d}{dp}\right)^{m_0}\hat{u}(p)\\ + a_1\,(m-1)^2\left(\frac{d}{dp}\right)^{m_0+1} p\hat{u}(p) = \left(\frac{d}{dp}\right)^3 f\,(p)\,,\end{gathered} \tag{22}$$

здесь $m_0 = 2m-2-k_1$.

Применим к уравнению (22) оператор $\hat{r}^m$. Получим уравнение

$$\begin{gathered}a\,(m-1)\left(p^2\frac{d}{dp}\right)\hat{u}\,(p) + a_0\,(m-1)^3\,\hat{u}\,(p) + \hat{r}^{m-3}p^3\hat{u}\,(p) + c_1\,(m-1)^3\,\hat{r}^{m-2}p^2\hat{u}\,(p)\\ + c_2\,(m-1)^3\,\hat{r}^{m-1}p\hat{u}\,(p) + (m-1)^3\,c_3\hat{r}^m\hat{u}\,(p) + (m-1)\big(a_1^0\,(m-1)^2 + 2a\big)p\hat{u}\,(p)\\ + a_2^0\,(m-1)^3\,\hat{r}\hat{u}\,(p) + a_1^1\,(m-1)^3\,\hat{r}^{m-m_0}\hat{u}(p)\\ + b^1\,(m-1)^2\,\hat{r}^{m-m_0-1}p\hat{u}(p) = \hat{r}^m\left(\frac{d}{dp}\right)^3 f\,(p)\,.\end{gathered} \tag{23}$$

Так как $m-m_0 > 0$, то основной символ уравнения (23) имеет вид

$$H_0\,(q) = (m-1)\big(-aq + (m-1)^2\,a_0\big).$$

Корень многочлена $H_0(q)$ равен $q_1 = \frac{(m-1)^2 a_0}{a}$. Отсюда следует, что асимптотика решения имеет вид

$$\hat{u}_0(p) = e^{\frac{q_1}{p}} p^{\sigma_1}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^1 p^i.$$

По теореме 2 получаем

$$u_0\,(r) \approx B_2^{-1} e^{\frac{q_1}{p}} p^{\sigma_1}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^1 p^i = \sum_{j=1}^{2}\exp\left(\frac{\alpha_j}{r^{\frac{1}{2}}}\right) r^{\sigma_j}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i,$$

где α_j, $j=1,2$, — корни полинома $p^2 + 4(m-1)^2\frac{a_0}{a}$. Окончательно получим, что все асимптотики решений уравнения (16) при $m > 2m-2-k_1$ и $3m-3-k_0 = m$ имеют вид

$$\begin{gathered}u(r) = u_0(r) + u_{-a}(r)\\ \approx \exp\left(\frac{-a}{r^{m-1}} + \sum_{i=1}^{m-2}\frac{\alpha_{m-1-i}^j}{r^{m-1-i}}\right) r^{\sigma_j}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i + \sum_{j=1}^{2}\exp\left(\frac{\alpha_j}{r^{\frac{1}{2}}}\right) r^{\sigma_j^1}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i.\end{gathered} \tag{24}$$

Отсюда следует, что при $m = 2$ асимптотика решения примет вид

$$u(r) \approx \exp\left(\frac{-a}{r}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i + \sum_{j=1}^{2} \exp\left(\frac{\alpha_j}{r^{\frac{1}{2}}}\right) r^{\sigma_j^1} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r.$$

А при $m > 2$ асимптотики в пространстве функций экспоненциального роста будут иметь вид

$$u(r) \approx \sum_{j=1}^{2} \exp\left(\frac{\alpha_j}{r^{\frac{1}{2}}}\right) r^{\sigma_j^1} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r.$$

Случай, когда $3m-3-k_0 < 2m-2-k_1$ и $2m-2-k_1 = m$ рассматривается аналогично. Введем обозначение $\hat{u}(p) = p^{m-1}\hat{u}_1(p)$, тогда уравнение (21) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &a_1 (m-1)^2 \left(\frac{d}{dp}\right)^{m+1} p^m \hat{u}_1(p) + a_1^1 (m-1)^3 \left(\frac{d}{dp}\right)^{m} p^{m-1} \hat{u}_1(p) \\ &+ a (m-1) \left(\frac{d}{dp}\right)^{m+1} p^{m+1} \hat{u}_1(p) + a_1^0 (m-1)^3 \left(\frac{d}{dp}\right)^{m} p^{m} \hat{u}_1(p) \\ &+ a_2^0 (m-1)^3 \left(\frac{d}{dp}\right)^{m-1} p^{m-1} \hat{u}_1(p) + \left(\frac{d}{dp}\right)^{3} p^{2+m} \hat{u}_1(p) \\ &+ c_1 (m-1)^3 \left(\frac{d}{dp}\right)^{2} p^{1+m} \hat{u}_1(p) + c_2 (m-1)^3 \frac{d}{dp} p^{m+1} \hat{u}_1(p) \\ &+ c_3 (m-1)^3 p^m \hat{u}_1(p) + a_0 (m-1)^3 \left(\frac{d}{dp}\right)^{3m-3-k_0} p^{m-1} \hat{u}_1(p) = \left(\frac{d}{dp}\right)^{3} f(p). \end{aligned}$$

Асимптотики решения этого уравнения конормальны.

Пусть $3m-3-k_0 = 2m-2-k_1 = m$, тогда уравнение (21) примет вид

$$\begin{aligned} &a_1 (m-1)^2 \left(\frac{d}{dp}\right)^{m+1} p^m \hat{u}_1(p) + a_1^1 (m-1)^3 \left(\frac{d}{dp}\right)^{m} p^{m-1} \hat{u}_1(p) \\ &+ a_0 (m-1)^3 \left(\frac{d}{dp}\right)^{m} p^{m-1} \hat{u}_1(p) + a (m-1) \left(\frac{d}{dp}\right)^{m+1} p^{m+1} \hat{u}_1(p) \\ &+ a_1^0 (m-1)^3 \left(\frac{d}{dp}\right)^{m} p^{m} \hat{u}_1(p) + a_2^0 (m-1)^3 \left(\frac{d}{dp}\right)^{m-1} p^{m-1} \hat{u}_1(p) \\ &+ \left(\frac{d}{dp}\right)^{3} p^{2+m} \hat{u}_1(p) + c_1 (m-1)^3 \left(\frac{d}{dp}\right)^{2} p^{1+m} \hat{u}_1(p) \\ &+ c_2 (m-1)^3 \frac{d}{dp} p^{m+1} \hat{u}_1(p) + c_3 (m-1)^3 p^m \hat{u}_1(p) = \left(\frac{d}{dp}\right)^{3} f(p). \end{aligned}$$

Асимптотики решения этого уравнения конормальны.

3. Рассмотрим теперь третий пункт теоремы. Докажем, что в случае, когда основной символ оператора имеет третий порядок кратности, исследование уравнения можно свести к первым двум случаям. Пусть ноль — корень, кратность которого равна 3. Тогда уравнение (9) примет вид

$$\left(-r^m \frac{d}{dr}\right)^3 u + a_2 r^{k_2} \left(-r^m \frac{d}{dr}\right)^2 u + a_1 r^{k_1} \left(-r^m \frac{d}{dr}\right) u + a_0 r^{k_0} u = 0, \tag{25}$$

где $k_i \in N$, $i = 0, 1, 2$.

Приведем уравнение (25) к виду

$$r^{3x}\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right)^3 u + a_2 r^{k_2+2x}\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right)^2 u + a_1 r^{k_1+x}\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right) u + a_0 r^{k_0} u + r^{3x}\sum_{i=0}^{2} c_i^2 r^{(3-i)(m-x-1)}\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right)^i u + r^{k_2+2x}\sum_{i=0}^{1} c_i^1 r^{(2-i)(m-x-1)}\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right)^i u = 0. \tag{26}$$

Здесь x — некоторое неотрицательное целое число, c_i^j, $j = 1, 2$, — соответствующие числа. Перепишем уравнение (26) в виде

$$\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right)^3 u + a_2 r^{k_2-x}\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right)^2 u + a_1 r^{k_1-2x}\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right) u + a_0 r^{k_0-3x} u + \sum_{i=0}^{2} c_i^2 r^{(3-i)(m-x-1)}\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right)^i u + r^{k_2-x}\sum_{i=0}^{1} c_i^1 r^{(2-i)(m-x-1)}\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right) u = 0. \tag{27}$$

Для чисел k_0, k_1, k_2 существуют четыре взаимоисключающих случая:

1) $k_1 \geqslant 2k_2$, $k_0 \geqslant 3k_2$;

2) $k_1 < 2k_2$, $k_0 \geqslant 3k_2 \Rightarrow k_2 > \frac{k_1}{2}$, $k_0 \geqslant 3k_2 > 3\frac{k_1}{2}$;

3) $k_1 \geqslant 2k_2$, $k_0 < 3k_2 \Rightarrow k_2 > \frac{1}{3}k_0$, $k_1 \geqslant 2k_2 > 2\frac{k_0}{3}$;

4) $k_1 < 2k_2$, $k_0 < 3k_2$.

Рассмотрим все четыре случая и покажем, что в каждом из них уравнение преобразуется к уравнению с основным символом оператора, имеющим корни меньшей кратности.

Случай 1. $k_1 \geqslant 2k_2$, $k_0 \geqslant 3k_2$.

$$\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right)^3 u + a r^{k_2-x}\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right)^2 u + b^1 r^{k_1-2x}\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right) u + b^2 r^{k_0-3x} u + \sum_{i=0}^{2} c_i^2 r^{(3-i)(m-x-1)}\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right)^i u + r^{k_1-x}\sum_{i=0}^{1} c_i^1 r^{(2-i)(m-x-1)}\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right) u = 0.$$

Пусть $k_2{>}m$, тогда асимптотика является конормальной. Это следует из того, что если в (27) положить $x{=}m-1$, то мы получим уравнение с коническим вырождением. Если $k_2{=}m$, то решение регулярно.

Пусть $k_2{<}m$, тогда положим $x{=}k_2$. Если $k_2{=}m-1$, то решение имеет конормальную асимптотику.

Пусть $k_2 < m-1$, тогда перепишем (27) в виде

$$\left(-r^{m-k_2}\frac{d}{dr}\right)^3 u + a_2\left(-r^{m-k_2}\frac{d}{dr}\right)^2 u + a_1 r^{k_1-2k_2}\left(-r^{m-k_2}\frac{d}{dr}\right)u$$
$$+ a_0 r^{k_0-3k_2}u + \sum_{i=0}^{2} c_i^2 r^{(3-i)(m-k_2-1)}\left(-r^{m-k_2}\frac{d}{dr}\right)^i u \tag{28}$$
$$+ r^{k_1-k_2}\sum_{i=0}^{1} c_i^1 r^{(2-i)(m-k_2-1)}\left(-r^{m-k_2}\frac{d}{dr}\right)u = 0.$$

Тогда при условии $k_1 > 2k_2$, $k_0 > 3k_2$, основной символ оператора в уравнении (27) имеет корень 2-го порядка. Асимптотики его решения строятся по формулам (13)–(14).

При условии и $k_1 = 2k_2$, $k_0 > 3k_2$, основной символ имеет вид $H_0(p) = p^3 + ap^2 + b_1 p = p(p^2 + ap + b_1)$. Обозначим корни многочлена $p^2 + ap + b_1$ через a_1, a_2.

В случае $a_2 \neq a_1$ асимптотика строится по формулам (11), (12).

Если $a_2 = a_1$ асимптотика строится по формулам (13), (14).

Если $k_1 = 2k_2$, $k_0 = 3k_2$, то основной символ будет иметь вид $H_0(p) = p^3 + ap^2 + b^1 p + b^2$.

Если все корни различны, то асимптотика строится по формуле формулам (11), (12). Если есть корень 2-го порядка a_0, то его необходимо сдвинуть в ноль с помощью замены $u(r) = \exp\frac{a_0}{r^{m-k_2-1}}$, а затем построить асимптотику по формулам (13), (14). Если корень единственный, то надо с помощью замены сдвинуть в ноль и снова решать полученное уравнение с другими значениями k.

Случай 2. $k_1 < 2k_2$, $k_0 \geqslant 3k_2 \Rightarrow k_2 > \frac{k_1}{2}$, $k_0 > 3\frac{k_1}{2}$.

Положим $x = \frac{k_1}{2}$ в (27), тогда получим уравнение

$$\left(-r^{m-\frac{k_1}{2}}\frac{d}{dr}\right)^3 u + a_2 r^{k_2-\frac{k_1}{2}}\left(-r^{m-\frac{k_1}{2}}\frac{d}{dr}\right)^2 u + a_1\left(-r^{m-\frac{k_1}{2}}\frac{d}{dr}\right)u$$
$$+ a_0 r^{k_0-3\frac{k_1}{2}}u + \sum_{i=0}^{2} c_i^2 r^{(3-i)\left(m-\frac{k_1}{2}-1\right)}\left(-r^{m-\frac{k_1}{2}}\frac{d}{dr}\right)^i u \tag{29}$$
$$+ r^{k_2-\frac{k_1}{2}}\sum_{i=0}^{1} c_i^1 r^{(2-i)\left(m-\frac{k_1}{2}-1\right)}\left(-r^{m-\frac{k_1}{2}}\frac{d}{dr}\right)u = 0.$$

Основной символ $H_0(p) = p^3 + b^1 p = p(p^2 + b^1)$. Асимптотика строится по формулам (11), (12), где a_i, $i = 1, 2, 3,$ — корни полинома $H_0(p)$.

Случай 3. $k_1 \geqslant 2k_2$, $k_0 < 3k_2 \Rightarrow k_2 > \frac{1}{3}k_0$, $k_1 > 2\frac{k_0}{3}$.

Положим $x = \frac{k_0}{3}$ в (27), получим уравнение

$$\left(-r^{m-\frac{k_0}{3}}\frac{d}{dr}\right)^3 u + a_2 r^{k_2-\frac{k_0}{3}}\left(-r^{m-\frac{k_0}{3}}\frac{d}{dr}\right)^2 u + a_1 r^{k_1-2\frac{k_0}{3}}\left(-r^{m-x}\frac{d}{dr}\right)u$$
$$+ a_0 u + \sum_{i=0}^{2} c_i^2 r^{(3-i)\left(m-\frac{k_0}{3}-1\right)}\left(-r^{m-\frac{k_0}{3}}\frac{d}{dr}\right)^i u \tag{30}$$
$$+ r^{k_1-\frac{k_0}{3}}\sum_{i=0}^{1} c_i^1 r^{(2-i)\left(m-\frac{k_0}{3}-1\right)}\left(-r^{m-\frac{k_0}{3}}\frac{d}{dr}\right)u = 0.$$

Основной символ $H_0(p) = p^3 + b^2$. Его корни простые. Асимптотика строится по формулам (11), (12).

Случай 4. $k_1 < 2k_2$, $k_0 < 3k_2$.

Пусть $k_0 > 3\frac{k_1}{2}$, тогда $k_2 > \frac{k_1}{2}$, $k_0 > 3\frac{k_1}{2}$. Асимптотика в этом случае строится так же как и в случае 2.

Пусть $k_0 < 3\frac{k_1}{2}$, тогда $k_2 > \frac{1}{3}k_0$, $k_0 < 3\frac{k_1}{2}$. Асимптотика в этом случае строится так же как и в случае 3.

Пусть $k_0 = 3\frac{k_1}{2}$, тогда $\frac{k_1}{2} < k_2$, $3\frac{k_1}{2} = k_0$. Как и ранее, при $\frac{k_1}{2} \geqslant m-1$, асимптотики решений являются либо конормальными, либо решения регулярны.

Пусть $\frac{k_1}{2} < m-1$, тогда в (27) положим $x = \frac{k_1}{2}$. Получим

$$\left(-r^{m-\frac{k_1}{2}}\frac{d}{dr}\right)^3 u + a_2 r^{k_2-\frac{k_1}{2}}\left(-r^{m-\frac{k_1}{2}}\frac{d}{dr}\right)^2 u + a_1\left(-r^{m-\frac{k_1}{2}}\frac{d}{dr}\right) u + a_0 u$$
$$+\sum_{i=0}^{2} c_i^2 r^{(3-i)\left(m-\frac{k_1}{2}-1\right)}\left(-r^{m-\frac{k_1}{2}}\frac{d}{dr}\right)^i u + r^{k_2-\frac{k_1}{2}}\sum_{i=0}^{1} c_i^1 r^{(2-i)\left(m-\frac{k_1}{2}-1\right)}\left(-r^{m-\frac{k_1}{2}}\frac{d}{dr}\right) u = 0.$$

Основной символ этого оператора имеет вид $H_0(p) = p^3 + a_1 p + a_0$. Если этот многочлен имеет три различных корня, то асимптотики строятся по формулам (11), (12). А если один из корней имеет кратность, равную двум, то по формулам (13), (14). Таким образом, мы показали, что случай, когда корень имеет кратность равную трем, сводится к случаям с корнями меньшей кратности. Утверждение доказано. $\rhd$

В заключение отметим также работу [22], в которой определяется специальный класс непрерывных функций с заданной асимптотикой в окрестности нуля и доказывается, что если свободный член интегрального уравнения принадлежит этому классу, а само уравнение разрешимо, то его решение также принадлежит этому классу.

Литература

1. *Пуанкаре А.* Избранные труды в трех томах. Том. III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре.—М.: Наука, 1974.—772 с.
2. *Найфэ А. Х.* Введение в методы возмущений.—М.: Мир, 1984.—535 с.
3. *Korovina M. V., Matevossian H. A.* Uniform asymptotics of solutions of second-order differential equations with meromorphic coefficients in a neighborhood of singular points and their applications // Mathematics.—2022.—Vol. 10, № 14.—P. 2465. DOI: 10.3390/math10142465.
4. *Korovina M. V.* Asymptotics of solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely distant point // Mathematics.—2020.—Vol. 8, № 12.—P. 2249. DOI: 10.3390/math8122249.
5. *Korovina M. V.* Uniform asymptotics of solutions of the linear differential equations with holomorphic coefficients in a neighborhood of an infinitely distant point // Lobachevskii J. Math.—2023.—Vol. 44, № 7.—P. 2765–2780. DOI: 10.1134/s1995080223070260.
6. *Кац Д. С.* Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов // Дифференц. уравнения.—2015.—Т. 51.—С. 1612–1617.
7. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях // Труды Моск. матем. о-ва.—1966.—Т. 15.—С. 400–451.
8. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды Моск. матем. о-ва.—1967.—Т. 16.—С. 209–292.
9. *Матевосян О. А.* О решениях смешанных краевых задач для системы теории упругости в неограниченных областях // Изв. РАН. Сер. матем.—2003.—Т. 67, № 5.—С. 49–82. DOI: 10.4213/im451.
10. *Matevossian H. A.* On the Steklov-type biharmonic problem in unbounded domains // Russian J. Math. Phys.—2018.—Vol. 25, № 2.—P. 271–276. DOI: 10.1134/S1061920818020115.
11. *Korovina M. V.* Application of resurgent analysis to the construction of asymptotics of linear differential equations with degeneration in coefficients // J. Math. Sci.—2022.—Vol. 257, № 1.—P. 61–73. DOI: 10.1007/s10958-021-05470-8.
12. *Коровина М. В.* Метод повторного квантования и его применения к построению асимптотик решений уравнений с вырождением // Дифференц. уравнения.—2016.—Т. 52, № 1.—С. 60–77.

13. *Korovina M. V., Matevossian H. A., Smirnov I. N.* Uniform asymptotics of solutions of the wave operator with meromorphic coefficients // Applicable Analysis.—2023.—Vol. 102, № 1.—P. 239–252. DOI: 10.1080/00036811.2021.1949455.
14. *Matevossian H. A., Korovina M. V., Vestyak V. A.* Asymptotic behavior of solutions of the cauchy problem for a hyperbolic equation with periodic coefficients (case: $H_0 > 0$) // Mathematics.—2022.—Vol. 10, № 16.—P. 2963. DOI: 10.3390/math10162963.
15. *Matevossian H. A., Korovina M. V., Vestyak V. A.* Asymptotic behavior of solutions of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with periodic coefficients II // Axioms.—2022.—Vol. 11, № 9.—P. 473. DOI: 10.3390/axioms11090473.
16. *Matevossian H. A., Smirnov V. Yu.* Behavior as $t \to \infty$ of solutions of a mixed problem for a hyperbolic equation with periodic coefficients on the semi-axis // Symmetry.—2023.—Vol. 15, № 3.—P. 777. DOI: 10.3390/sym15030777.
17. *Sternin B. Yu., Shatalov V. E.* Borel–Laplace Transform and Asymptotic Theory. Introduction to Resurgent Analysis.—Boca Raton, FL.: CRC Press, 1996.
18. *Коровина М. В.* Асимптотики решений уравнений с высшими вырождениями // Дифференц. уравнения.—2012.—Т. 48, № 5.—С. 710–722.
19. *Коровина М. В.* Существование ресургентного решения для уравнений с вырождением высших порядков // Дифференц. уравнения.—2011.—Т. 47, № 3.—С. 349–357.
20. *Ecalle J.* Les Fonctions Resurgentes. Vol I, II, III.—Paris.: Publ. Math. Orsay, 1981–1985.
21. *Korovina M., Smirnov I., Smirnov V.* On a problem arising in application of the re-quantization method to construct asymptotics of solutions to linear differential equations with holomorphic coefficients at infinity // Math. Comput. Appl.—2019.—Vol. 24, № 1.—P. 16. DOI: 10.3390/mca24010016.
22. *Avsyankin O.* Asymptotic behavior of solutions of integral equations with homogeneous kernels // Mathematics.—2022.—Vol. 10, № 2.—P. 180. DOI: 10.3390/math10020180.

Статья поступила 12 апреля 2023 г.

Коровина Мария Викторовна
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 119991, Москва, Ленинские горы, 1
E-mail: betelgeuser@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-4366-8292

Матевосян Овик Амаякович
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет),
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4
E-mail: hmatevossian@graduate.org
https://orcid.org/0000-0002-9895-9628

Смирнов Илья Николаевич
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
доцент
РОССИЯ, 119991, Москва, Ленинские горы, 1;
Ереванский государственный университет,
научный сотрудник
АРМЕНИЯ, 0025, Ереван, ул. Алека Манукяна, 1
E-mail: ismirnov@ysu.am
https://orcid.org/0000-0002-8980-7163

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 1, P. 106–122

ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS TO A THIRD-ORDER EQUATION IN A NEIGHBORHOOD OF AN IRREGULAR SINGULAR POINT

Korovina, M. V.[1], Matevossian, H. A.[2] and Smirnov, I. N.[1,3]

[1] Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia;
[2] Moscow Aviation Institute (National Research University),
4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russia;
[3] Yerevan State University,
1 Alek Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia

E-mail: `betelgeuser@yandex.ru`, `hmatevossian@graduate.org`, `ismirnov@cs.msu.ru`

Abstract. The article is devoted to the construction of uniform asymptotics of solutions to a 3rd order equation with holomorphic coefficients with an arbitrary irregular singularity in the space of functions of exponential growth. In general, the problem of constructing asymptotics of solutions of differential equations in the neighborhood of irregular singular points was formulated by Poincaré in his articles devoted to the analytical theory of differential equations. The problem of constructing asymptotics for equations with degeneracies of arbitrary order, in the case of multiple roots, has been solved only for some special cases, for example, when the equation is of second order. The main method for solving the problem for equations with degenerations of higher orders is the re-quantization method based on the Laplace–Borel transform, which was created to construct asymptotics of solutions of differential equations in the neighborhood of irregular singular points in the case when the main symbol of the differential operator has multiple roots. The problem of constructing asymptotics of solutions to higher order equations is much more complicated. To solve it, the re-quantization method is used, which was not required when solving a similar problem for 2nd order equations. Here we solve a model problem, which is an important next step towards solving the general problem formulated by Poincare, the problem of constructing asymptotics of solutions in the neighborhood of an arbitrary irregular singular point for an equation of arbitrary order. The problem of further research is to generalize the solution method outlined in the article to equations of arbitrary orders.

Keywords: asymptotics of solutions, 3rd order equation, irregular singularities, resurgent analysis, Laplace–Borel transform.

AMS Subject Classification: 34M05, 35J05.

For citation: *Korovina, M. V., Matevossian, H. A. and Smirnov, I. N.* Asymptotics of Solutions to a Third-Order Equation in a Neighborhood of an Irregular Singular Point, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 1, pp. 106–122 (in Russian). DOI: 10.46698/h0288-6649-3374-o.

References

1. *Poincare, H. Izbrannye trudy v trekh tomah. Tom III. Matematika. Teoreticheskaya fizika. Analiz matematicheskih i estestvennonauchnyh rabot Henri Poincare* [Selected Works in Three Volumes. Volume III. Mathematics. Theoretical Physics. An Analysis of Mathematical and Natural Science Works by Henri Poincare], Moscow, Nauka, 1974, 772 p. (in Russian).
2. *Nayfeh, A. H. Introduction to Perturbation Techniques*, New York, 1981, 536 p.
3. *Korovina, M. V. and Matevossian, H. A.* Uniform Asymptotics of Solutions of Second-Order Differential Equations with Meromorphic Coefficients in a Neighborhood of Singular Points and Their Applications, *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 14, p. 2465. DOI: 10.3390/math10142465.
4. *Korovina, M. V.* Asymptotics of Solutions of Linear Differential Equations with Holomorphic Coefficients in the Neighborhood of an Infinitely Distant Point, *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 12, p. 2249. DOI: 10.3390/math8122249.

5. *Korovina, M. V.* Uniform Asymptotics of Solutions of the Linear Differential Equations with Holomorphic Coefficients in a Neighborhood of an Infinitely Distant Point, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, no 7, pp. 2765–2780. DOI: 10.1134/s1995080223070260.
6. *Kats, D. S.* Computation of the Asymptotics of Solutions for Equations with Polynomial Degeneration of the Coefficients, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, pp. 1589–1594. DOI: 10.1134/S001226611512006X.
7. *Kondrat'ev, V. A.* Boundary Value Problems for Parabolic Equations in Closed Regions, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva* [Proceedings of Moscow Mathematical Society], 1966, vol. 15, pp. 400–451 (in Russian).
8. *Kondrat'ev, V. A.* The Solvability of the First Boundary Value Problem for Strongly Elliptic Equations, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva* [Proceedings of Moscow Mathematical Society], 1967, vol. 16, pp. 293–318 (in Russian).
9. *Matevossian, H. A.* On Solutions of Mixed Boundary-Value Problems for the Elasticity System in Unbounded Domains, *Izvestiya: Mathematics*, 2003, vol. 67, no. 5, pp. 895–929. DOI: 10.1070/im2003v067n05abeh000451.
10. *Matevossian, H. A.* On the Steklov-Type Biharmonic Problem in Unbounded Domains, *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2018, vol. 25, no. 2, pp. 271–276. DOI: 10.1134/S1061920818020115.
11. *Korovina, M. V.* Application of Resurgent Analysis to the Construction of Asymptotics of Linear Differential Equations with Degeneration in Coefficients, *Journal of Mathematical Sciences*, 2021, vol. 257, no. 1, pp. 61–73. DOI: 10.1007/s10958-021-05470-8.
12. *Korovina, M. V.* Repeated Quantization Method and Its Applications to the Construction of Asymptotics of Solutions of Equations with Degeneration, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 58–75. DOI: 10.1134/S0012266116010055.
13. *Korovina, M. V., Matevossian, H. A. and Smirnov, I. N.* Uniform Asymptotics of Solutions of the Wave Operator with Meromorphic Coefficients, *Applicable Analysis*, 2023, vol. 102, no. 1, pp. 239–252. DOI: 10.1080/00036811.2021.1949455.
14. *Matevossian, H. A., Korovina, M. V. and Vestyak, V. A.* Asymptotic Behavior of Solutions of the Cauchy Problem for a Hyperbolic Equation with Periodic Coefficients (Case: $H_0 > 0$), *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 16, p. 2963. DOI: 10.3390/math10162963.
15. *Matevossian, H. A., Korovina, M. V. and Vestyak, V. A.* Asymptotic Behavior of Solutions of the Cauchy Problem for a Hyperbolic Equation with Periodic Coefficients II, *Axioms*, 2022, vol. 11, no. 9, p. 473. DOI: 10.3390/axioms11090473.
16. *Matevossian, H. A. and Smirnov, V. Yu.* Behavior as $t \to \infty$ of Solutions of a Mixed Problem for a Hyperbolic Equation with Periodic Coefficients on the Semi-Axis, *Symmetry*, 2023, vol. 15, no. 3, p. 777. DOI: 10.3390/sym15030777.
17. *Sternin, B. Yu. and Shatalov, V. E. Borel–Laplace Transform and Asymptotic Theory. Introduction to Resurgent Analysis*, Boca Raton, FL., CRC Press, 1996.
18. *Korovina, M. V.* Asymptotics of Solutions of Equations with Higher Degenerations, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 717–729. DOI: 10.1134/S0012266112050102.
19. *Korovina, M. V.* Asymptotics Solutions of Equations with Higher-Order Degeneracies, *Differential Equations*, 2011, vol. 83, no. 2, pp. 182–184. DOI: 10.1134/S1064562411020165.
20. *Ecalle, J. Les Fonctions Resurgentes. Vol. I, II, III*, Paris, Publ. Math. Orsay, 1981–1985.
21. *Korovina, M., Smirnov, I. and Smirnov, V.* On a Problem Arising in Application of the Re-Quantization Method to Construct Asymptotics of Solutions to Linear Differential Equations with Holomorphic Coefficients at Infinity, *Mathematical and Computational Applications*, 2019, vol. 24, no. 1, p. 16. DOI: 10.3390/mca24010016.
22. *Avsyankin, O.* Asymptotic Behavior of Solutions of Integral Equations with Homogeneous Kernels, *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 2, p. 180. DOI: 10.3390/math10020180.

Received April 12, 2023

Maria V. Korovina
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia,
Leading Scientific Researcher
E-mail: betelgeuser@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-4366-8292

Hovik A. Matevossian
Moscow Aviation Institute
(National Research University),
4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russia,
Leading Scientific Researcher
E-mail: hmatevossian@graduate.org
https://orcid.org/0000-0002-9895-9628

Ilya N. Smirnov
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia,
Associate Professor;

Yerevan State University,
1 Alek Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia,
Scientific Researcher
E-mail: ismirnov@ysu.am
https://orcid.org/0000-0002-8980-7163