Главный редактор

А. Г. КУСРАЕВ
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН;
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова

Редакционная коллегия

А. В. АБАНИН
Южный федеральный университет;
Южный математический
институт — филиал ВНЦ РАН

Н. А. ВАВИЛОВ
Санкт-Петербургский госуниверситет

А. О. ВАТУЛЬЯН
Южный федеральный университет;
Южный математический
институт — филиал ВНЦ РАН

С. К. ВОДОПЬЯНОВ
Институт математики
Сибирского отделения РАН

Е. И. ГОРДОН
Иллинойсский университет,
Урбана, США

А. И. КОЖАНОВ
Институт математики
Сибирского отделения РАН

В. А. КОЙБАЕВ
Южный математический
институт — филиал ВНЦ РАН;
Северо-Осетинский госуниверситет
им. К. Л. Хетагурова

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК
Южный федеральный университет;
Южный математический
институт — филиал ВНЦ РАН

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ
Институт математики
Сибирского отделения РАН

В. Д. МАЗУРОВ
Институт математики
Сибирского отделения РАН

А. М. НАХУШЕВ
Институт прикладной математики
и автоматизации КБНЦ РАН

С. Г. САМКО
Южный федеральный университет;
Университет Алгарве, Португалия

В. Г. ТРОИЦКИЙ
Альбертский университет,
Эдмонтон, Канада

Ш. С. ХУБЕЖТЫ
Южный математический
институт — филиал ВНЦ РАН

А. Б. ШАБАТ
Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН;
Карачаево-Черкесский государственный
университет им. У. Д. Алиева

И. И. ШАРАПУДИНОВ
Дагестанский государственный
педагогический университет;
Южный математический — филиал
институт ВНЦ РАН

Ответственный секретарь

Е. К. БАСАЕВА
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН;
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vmj.ru**

© Южный математический институт —
филиал ВНЦ РАН, 2016

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 18, выпуск 3 июль–сентябрь, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Алиев Р. А. Об определении коэффициентов при старших производных в линейном эллиптическом уравнении ... 3

Ayupov Sh. A., Arzikulov F. N. Reversible AJW-algebras ... 15

Гадзова Л. Х. Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка ... 22

Дряева Р. Ю., Койбаев В. А. Элементарная сеть, ассоциированная с элементарной группой ... 31

Гутнова А. К., Махнев А. А. Расширения псевдогеометрических графов для $pG_{s-5}(s,t)$ ... 35

Ибрагимов Э. Дж. О сходимости рядов Фурье — Якоби в среднем ... 43

Унучек С. А. Оптимальное восстановление производной функции по неточно заданным производным других порядков и самой функции ... 60

Хачатрян Р. А. О необходимых условиях экстремума в задачах с негладкими ограничениями типа равенств ... 72

Владикавказ
2016

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 3, С. 3–14

УДК **517.946**

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ В ЛИНЕЙНОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Р. А. Алиев

Исследуется обратная задача нахождения коэффициентов при старших производных эллиптического уравнения с различными граничными условиями в заданном прямоугольнике. Рассматриваемые в обратных задачах неизвестные коэффициенты также входят в дополнительные условия. Доказана теорема существования, единственности и устойчивости решения поставленной обратной задачи. С помощью метода последовательных приближений построен регуляризирующий алгоритм для определения коэффициентов.

Ключевые слова: обратная задача, эллиптическое уравнение.

1. Введение

Обратные задачи по определению коэффициентов дифференциальных уравнений с частными производными представляют интерес во многих прикладных исследованиях. Чаще всего такие задачи допускают только приближенное решение и некорректны в классическом смысле. К ним относятся задачи идентификации неизвестных плотностей источников и коэффициентов. Большое значение имеют коэффициентные задачи для эллиптических уравнений, в которых неизвестные коэффициенты не зависят от одной переменной [1–11]. Задача для прямоугольной области с дополнительным условием совпадения коэффициентов при старших производных исследовалась в [2] при $n = 2$. Нами рассмотрен более широкий класс обратных задач в прямоугольнике.

В настоящей работе исследуются вопросы корректности одного класса обратных задач определения коэффициентов эллиптического уравнения. Построен регуляризирующий алгоритм определения коэффициентов.

1. Постановка задачи

Пусть

$$I_1 = \{1, 2\},\ I_2 = \{3, 4\},\ I_3 = \{1, 3\},\ I_4 = \{2, 4\},\ p \in I_1,\ \omega = p + (-1)^{p+1},$$

$$\omega_1 = 1 + \frac{i_0 - p}{2}, \quad \omega_2 = 3 - \omega_1.$$

Пусть при $i_0 \in I_j \cap I_{2+p}$, $i_1 = \frac{(i_0-3)j+4}{(3-j)i_0-j}$, $i_2 = 5 - 2j$, $i_3 = 6 - 2j$, $j = 1, 2$.

© 2016 Алиев Р. А.

Рассмотрим при фиксированных параметрах i_0, p задачу определения функций $a_{i_0}(x_p)$, $u(x_1,x_2)$, удовлетворяющих уравнениям

$$-a_1(x_1)a_2(x_2)u_{x_1x_1} - a_3(x_1)a_4(x_2)u_{x_2x_2} + c(x_1,x_2)u = h(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in D, \quad (1)$$

$$u(0,x_2) = \phi_1(x_2), \quad u(l_1,x_2) = \phi_2(x_2), \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2, \quad (2)$$

$$u(x_1,0) = \varphi_1(x_1), \quad u(x_1,l_2) = \varphi_2(x_1), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1, \quad (3)$$

$$a_{i_0}(x_p)a_{i_1}(0)u_{x_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0} = g_{i_0}(x_p), \quad 0 \leqslant x_p \leqslant l_p, \quad (4)$$

при условиях $\phi_1(0) = \varphi_1(0)$, $\phi_1(l_2) = \varphi_2(0)$, $\phi_2(0) = \varphi_1(l_1)$, $\phi_2(l_2) = \varphi_2(l_1)$.

Здесь

$$D = \{(x_1,x_2): \ 0 < x_1 < l_1, \, 0 < x_2 < l_2\},$$

$a_{i_1}(x_\omega)$, $a_{i_{p+1}}(x_p)$, $a_{i_{4-p}}(x_\omega)$, $c(x_1,x_2)$, $h(x_1,x_2)$, $\phi_i(x_2)$, $\varphi_i(x_1)$, $g_{i_0}(x_p)$, $i = 1,2,$ — заданные функции $a_{i_1}(x_\omega), a_{i_{4-p}}(x_\omega) \in C^\alpha[0,l_\omega]$, $a_{i_{p+1}}(x_p) \in C^\alpha[0,l_p]$, $c(x_1,x_2) \in C^\alpha(\bar{D})$, $h(x_1,x_2) \in C^\alpha(\bar{D})$, $\phi_i(x_2) \in C^{2+\alpha}[0,l_2]$, $\varphi_i(x_1) \in C^{2+\alpha}[0,l_1]$, $g_{i_0}(x_p) \in C^\alpha[0,l_p]$, $i = 1,2$, $0 < \alpha < 1$.

В задачах теплофизики условие (4) является выражением теплового потока на границе $(p-1)x_1 + (2-p)x_2 = 0$.

Определение. Функции $\{a_{i_0}(x_p), u(x_1,x_2)\}$ назовем *решением задачи* (1)–(4), если $0 < a_{i_0}(x_p) \in C[0,l_p]$, $u(x_1,x_2) \in C^2(D)\bigcap C(\bar{D})$ и удовлетворяются соотношения (1)–(4).

Нетрудно проверить, что если решение задачи (1)–(4) существует, то при принятых предположениях о гладкости данных задачи $a_{i_0}(x_p) \in C^\alpha[0,l_p]$, $u(x_1,x_2) \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$. Действительно, при принятых предположениях из общей теории эллиптических уравнений следует, что $u(x_1,x_2) \in W^2_{p_1}(D) \subset C^{1+\alpha}(\bar{D})$ при $p_1 > 2$. Поэтому из дополнительного условия (4) следует, что $a_{i_0}(x_p) \in C^\alpha[0,l_p]$. Поэтому $u(x_1,x_2) \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$ [12, с. 157].

Уравнение (1) также можно записать в следующем виде:

$$-a_{i_0}(x_p)a_{i_1}(x_\omega)u_{x_{\omega_1}x_{\omega_1}} - a_{i_{p+1}}(x_p)a_{i_{4-p}}(x_\omega)u_{x_{\omega_2}x_{\omega_2}} + c(x_1,x_2)u = h(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in D.$$

2. Единственность и устойчивость

Пусть кроме задачи (1)–(4) задана еще задача $(\bar{1})$–$(\bar{4})$, где все функции, входящие в (1)–(4), заменены соответствующими функциями с чертой. Положим

$$Z(x_1,x_2) = \bar{u}(x_1,x_2) - u(x_1,x_2), \quad \lambda_{i_0}(x_p) = \bar{a}_{i_0}(x_p) - a_{i_0}(x_p),$$

$$\delta_{i_1}(x_\omega) = \bar{a}_{i_1}(x_\omega) - a_{i_1}(x_\omega), \quad \delta_{i_{p+1}}(x_p) = \bar{a}_{i_{p+1}}(x_p) - a_{i_{p+1}}(x_p),$$

$$\delta_{i_{4-p}}(x_\omega) = \bar{a}_{i_{4-p}}(x_\omega) - a_{i_{4-p}}(x_\omega), \quad \delta_{i_0}(x_1,x_2) = \bar{c}(x_1,x_2) - c(x_1,x_2),$$

$$\delta_5(x_1,x_2) = \bar{h}(x_1,x_2) - h(x_1,x_2), \quad \delta_{i+5}(x_2) = \bar{\phi}_i(x_2) - \phi_i(x_2),$$

$$\delta_{i+7}(x_1) = \bar{\varphi}_i(x_1) - \varphi_i(x_1), \quad \delta_{10}(x_p) = \bar{g}_{i_0}(x_p) - g_{i_0}(x_p), \quad i = 1,2.$$

Через $\tilde{\delta}_p(x_1,x_2)$ обозначим функцию, совпадающую на границе при каждом $p \in I_1$ с $\delta_{i+5}(x_2)$, $\delta_{i+7}(x_1)$, $i = 1,2$, соответственно и принадлежащую $C^{2+\alpha}(\bar{D})$. Обозначим

$$P_i(x_j) = \frac{(2-i)l_j - (-1)^{i+1}x_j}{l_j}, \quad i,j = 1,2.$$

Функция $\tilde{\delta}_p(x_1,x_2)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{\delta}_p(x_1,x_2)=\sum_{i=1}^{2}P_i(x_1)\delta_{i+5}(x_2)+P_i(x_2)\Big[\delta_{i+7}(x_1)+\frac{x_1-l_1}{l_1}\delta_{i+7}(0)+\frac{x_1}{l_1}\delta_7(il_2-l_2)\Big].$$

Лемма 1. *Пусть решение задачи (1)–(4) существует. Тогда верна следующая оценка:*

$$|u(x_1,x_2)|\leqslant\max\bigg\{\max_D\bigg|\frac{h(x_1,x_2)}{c(x_1,x_2)}\bigg|,\max_{x_1,\,x_2}\max_i\Big[|\phi_i(x_2)|,|\varphi_i(x_1)|\Big]\bigg\}.$$

$\lhd$ Оценка легко вытекает из принципа максимума. $\rhd$

Единственность решения обратной задачи (1)–(4), в предположении его существования, устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть при фиксированных параметрах i_0, p выполнены условия $g_{i_0}(x_p)\neq 0$, $Nl_1l_2<1$. Тогда решение задачи (1)–(4) единственно и верна следующая оценка:*

$$\begin{gathered}\|\bar{a}_{i_0}(x_p)-a_{i_0}(x_p)\|_{C[0,l_p]}+\|\bar{u}-u\|_{C(\bar{D})}\\ \leqslant N_1\Big\{\|\bar{a}_{i_1}(x_\omega)-a_{i_1}(x_\omega)\|_{C[0,l_\omega]}+\|\bar{a}_{i_{p+1}}(x_p)-a_{i_{p+1}}(x_p)\|_{C[0,l_p]}\\ +\|\bar{a}_{i_{4-p}}(x_p)-a_{i_{4-p}}(x_p)\|_{C[0,l_p]}+\|\bar{c}(x_1,x_2)-c(x_1,x_2)\|_{C(\bar{D})}\\ +\|\bar{h}(x_1,x_2)-h(x_1,x_2)\|_{C(\bar{D})}+\sum_{i=1}^{2}\Big[\|\bar{\phi}_i(x_2)-\phi_i(x_2)\|_{C^2[0,l_2]}\\ +\|\bar{\varphi}_i(x_1)-\varphi_i(x_1)\|_{C^2[0,l_1]}\Big]+\|\bar{g}_{i_0}(x_p)-g_{i_0}(x_p)\|_{C[0,l_p]}\Big\},\end{gathered}\tag{5}$$

где N, N_1 — положительные постоянные, зависящие от данных задачи и множества решений, соответственно.

$\lhd$ Из $(\bar{1})$–$(\bar{4})$ вычтем (1)–(4) и положим $Z_1(x_1,x_2)=Z(x_1,x_2)-\tilde{\delta}_p(x_1,x_2)$. Тогда получим

$$\begin{gathered}-\bar{a}_{i_0}(x_p)\bar{a}_{i_1}(x_\omega)Z_{1x\omega_1x_{\omega_1}}-\bar{a}_{i_{p+1}}(x_p)\bar{a}_{i_{4-p}}(x_\omega)Z_{1x\omega_2x_{\omega_2}}\\ =\delta_{11}(x_1,x_2)-\bar{c}(x_1,x_2)\tilde{\delta}_p(x_1,x_2)-\bar{c}(x_1,x_2)Z_1+\eta(x_1,x_2)\lambda_{i_0}(x_p),\quad (x_1,x_2)\in D,\end{gathered}\tag{6}$$

$$Z_1(0,x_2)=0,\quad Z_1(l_1,x_2)=0,\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2,\tag{7}$$

$$Z_1(x_1,0)=0,\quad Z_1(x_1,l_2)=0,\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1,\tag{8}$$

$$\lambda_{i_0}(x_p)=\delta_{12}(x_p)+\gamma(x_p)\tilde{\delta}_{px_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0}+\gamma(x_p)Z_{1x_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0},\quad 0\leqslant x_p\leqslant l_p.\tag{9}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\delta_{11}(x_1,x_2)=\bar{a}_{i_0}(x_p)\bar{a}_{i_1}(x_\omega)\tilde{\delta}_{px_{\omega_1}x_{\omega_1}}(x_1,x_2)+\bar{a}_{i_{p+1}}(x_p)\bar{a}_{i_{4-p}}(x_\omega)\tilde{\delta}_{px_{\omega_2}x_{\omega_2}}(x_1,x_2)\\ +a_{i_0}(x_p)u_{x_{\omega_1}x_{\omega_1}}(x_1,x_2)\delta_{i_1}(x_\omega)+\bar{a}_{i_{4-p}}(x_\omega)u_{x_{\omega_2}x_{\omega_2}}(x_1,x_2)\delta_{i_{p+1}}(x_p)\\ +a_{i_{p+1}}(x_p)u_{x_{\omega_2}x_{\omega_2}}\delta_{i_{4-p}}(x_\omega)-u\delta_{i_0}(x_1,x_2)+\delta_5(x_1,x_2),\quad \eta(x_1,x_2)=\bar{a}_{i_1}(x_\omega)u_{x_{\omega_1}x_{\omega_1}},\end{gathered}$$

$$\gamma(x_p)=\bar{a}_{i_0}(x_p)[-u_{x_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0}]^{-1},$$

$$\delta_{12}(x_1,x_2)=\big[\bar{a}_{i_1}(x_\omega)u_{x_\omega}(x_1,x_2)\big|_{x_\omega=0}\big]^{-1}\big[\delta_{11}(x_p)-\bar{a}_{i_0}(x_p)u_{x_\omega}(x_1,x_2)\big]\big|_{x_\omega=0}\delta_{i_1}(0),\quad i=1,2.$$

При помощи функции Грина [13] из (6)–(8) определим функцию $Z_1(x_1, x_2)$ через правую часть равенства и это выражение подставим в условие (9). Тогда получим

$$Z(x_1,x_2) = \tilde{\delta}_p(x_1,x_2) + \int\limits_D G(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) \times \Big[\delta_{11}(\xi_1,\xi_2) - \bar{c}(\xi_1,\xi_2)Z(\xi_1,\xi_2) + \eta(\xi_1,\xi_2)\lambda_{i_0}(\xi_p)\Big]\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

$$\lambda_{i_0}(x_p) = \delta_{12}(x_p) + \gamma(x_p) \int\limits_D G_{x_\omega}(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)\big|_{x_\omega=0} \times \Big[\delta_{11}(\xi_1,\xi_2) - \bar{c}(\xi_1,\xi_2)Z(\xi_1,\xi_2) + \eta(\xi_1,\xi_2)\lambda_{i_0}(\xi_p)\Big]\, d\xi_1 d\xi_2, \quad i = 1,2.$$

Функция Грина имеет следующую оценку [13]:

$$|G(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)| \leqslant M_1 \ln \frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}},$$

$$|G_{x_i}(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)| \leqslant M_{i+1}\big[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_1)^2\big]^{-1/2}, \quad M_i > 0,\ i = 1,2,3. \tag{10}$$

Положим

$$\chi = \max_{x_1,\,x_2} |Z(x_1,x_2)| + \max_{x_p} |\lambda_{i_0}(x_p)|.$$

Из (10) при достаточно малой мере D получим

$$\chi \leqslant N_2\Big[\big\|\delta_{i_1}(x_\omega)\big\|_{C[0,l_\omega]} + \big\|\delta_{i_{p+1}}(x_p)\big\|_{C[0,l_p]} + \big\|\delta_{i_{4-p}}(x_\omega)\big\|_{C[0,l_\omega]} + \big\|\delta_{i_0}(x_1,x_2)\big\|_{C(\bar{D})} + \big\|\delta_5(x_1,x_2)\big\|_{C(\bar{D})} + \big\|\tilde{\delta}_p(x_1,x_2)\big\|_{C^2(\bar{D})} + \|\delta_{10}(x_p)\|_{C[0,l_{p1}]}\Big] + \chi N_3(l_1 l_2)^{1/2},$$

где N_2, N_3 — некоторые положительные числа. Учитывая условие теоремы, получим, что при $(x_1, x_2) \in \bar{D}$ верна оценка устойчивости (5). Единственность решения задачи следует из оценки (5). $\triangleright$

3. Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений для решения задачи (1)–(4) применяется по схеме

$$\begin{gathered} -a_{i_0}^{(s)}(x_p)a_{i_1}(x_\omega)u^{(s+1)}_{x_{\omega_1}x_{\omega_1}} - a_{i_{p+1}}(x_p)a_{i_{4-p}}(x_\omega)u^{(s+1)}_{x_{\omega_2}x_{\omega_2}} \\ + c(x_1,x_2)u^{(s+1)} = h(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in D, \end{gathered} \tag{11}$$

$$u^{(s+1)}(0,x_2) = \phi_1(x_2), \quad u^{(s+1)}(l_1,x_2) = \phi_2(x_2), \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2, \tag{12}$$

$$u^{(s+1)}(x_1,0) = \varphi_1(x_1), \quad u^{(s+1)}(x_1,l_2) = \varphi_2(x_1), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1, \tag{13}$$

$$a_{i_0}^{(s+1)}(x_p)a_{i_1}(0)u^{(s+1)}_{x_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0} = g_{i_0}(x_p), \quad 0 \leqslant x_p \leqslant l_p. \tag{14}$$

Последовательные итерации по схеме (11)–(14) проводятся следующим образом. Сначала выбирается некоторое $a_{i_0}^{(0)}(x_p) > 0$, принадлежащее $C^\alpha[0,l_p]$, и подставляется в уравнение (11). Далее решается задача (11)–(13) и находится $u^{(1)}(x_1,x_2)$. По функции $u^{(1)}_{x_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0}$ из условий (14) находится $a^{(1)}_{i_0}(x_p)$ и эта функция используется для проведения следующего шага итерации.

Теорема 2. *Пусть при фиксированных параметрах i_0, p решение задачи (1)–(4) существует и $g_{i_0}(x_p)\neq 0$, $Nl_1l_2<1$, $u^{(s)}(x_1,x_2)\in C^2(D)$, $a^{(s)}_{i_0}(x_p)\in C^\alpha[0,l_p]$, $g_{i_0}(x_p)u^{(s)}_{x_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0}>0$ при всех $s=0,1,\ldots$; N — положительная постоянная, зависящая от данных задачи. Также допустим, что производные функции $u^{(s)}(x_1,x_2)$ по x_1, x_2 до второго порядка равномерно ограничены. Тогда функции $a^{(s)}_{i_0}(x_p)$, $u^{(s)}(x_1,x_2)$, полученные методом последовательных приближений (11)–(14) при $s\to+\infty$, равномерно сходятся к решению задачи (1)–(4) со скоростью геометрической прогрессии.*

$\lhd$ Положим

$$Z^{(s)}(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)-u^{(s)}(x_1,x_2),\quad \lambda^{(s)}_{i_0}(x_p)=a_{i_0}(x_p)-a^{(s)}_{i_0}(x_p).$$

Легко проверить,что эти функции удовлетворяют системе

$$\begin{gathered}-a_{i_0}(x_p)a_{i_1}(x_\omega)Z^{(s+1)}_{x_{\omega_1}x_{\omega_1}}-a_{i_{p+1}}(x_p)a_{i_{4-p}}(x_\omega)Z^{(s+1)}_{x_{\omega_2}x_{\omega_2}}+c(x_1,x_2)Z^{(s+1)}\\ =\eta^{(s)}(x_1,x_2)\lambda^{(s)}_{i_0}(x_p),\quad (x_1,x_2)\in D,\end{gathered}\tag{15}$$

$$Z^{(s+1)}(0,x_2)=0,\quad Z^{(s+1)}(l_1,x_2)=0,\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2,\tag{16}$$

$$Z^{(s+1)}(x_1,0)=0,\quad Z^{(s+1)}(x_1,l_2)=0,\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1,\tag{17}$$

$$\lambda^{(s+1)}_{i_0}(x_p)=\gamma^{(s)}(x_p)Z^{(s+1)}_{x_\omega}(x_1,x_2)\big|_{x_\omega=0},\quad 0\leqslant x_p\leqslant l_p,\tag{18}$$

где

$$\eta^{(s)}(x_1,x_2)=a_{i_1}(x_\omega)u^{(s+1)}_{x_{\omega_1}x_{\omega_1}},\quad \gamma^{(s)}(x_p)=a_{i_0}(x_p)\Big[-u^{(s+1)}_{x_\omega}(x_1,x_2)\big|_{x_\omega=0}\Big]^{-1},\quad i=1,2.$$

При помощи функции Грина из (15)–(17) выразим $Z^{(s+1)}(x_1,x_2)$ через правую часть равенства (15) и подставим это выражение в условия (18). Тогда получим

$$\lambda^{(s+1)}_{i_0}(x_p)=\gamma^{(s)}(x_p)\int\limits_D G_{x_\omega}(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)\big|_{x_\omega=0}\eta^{(s)}(\xi_1,\xi_2)\lambda^{(s)}_{i_0}(\xi_p)\,d\xi_1\,d\xi_2.\tag{19}$$

Положим $\chi^{(s)}=\max_{x_p}|\lambda^{(s)}_{i_0}(x_p)|$. Далее, как в доказательстве теоремы 1, из системы (18) следует $\chi^{(s+1)}\leqslant\chi^{(s)}N_3(l_1l_2)^{1/2}$. $\rhd$

4. Существование решения

Обозначим

$$f_i(x_p)=(2-p)\varphi_i(x_1)+(p-1)\phi_i(x_2),$$
$$\tilde f_i(x_\omega)=(2-p)\phi_i(x_2)+(p-1)\varphi_i(x_1),\quad i=1,2.$$

Пусть $\tilde f_i(0)=(2-p)\phi_i(0)+(p-1)\varphi_i(0)$, $i=1,2$.

Лемма 2. *Пусть система*

$$-a_1(x_1)a_2(x_2)u_{x_1x_1}-a_3(x_1)a_4(x_2)u_{x_2x_2}+c(x_1,x_2)u=h(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in D,\tag{20}$$

$$u(0,x_2)=\phi_1(x_2),\quad u(l_1,x_2)=\phi_2(x_2),\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2, \tag{21}$$

$$u(x_1,0)=\varphi_1(x_1),\quad u(x_1,l_2)=\varphi_2(x_1),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1, \tag{22}$$

$$a_{i_0}(x_p)a_{i_1}(0)u_{x_\omega}(x_1,x_2)\big|_{x_\omega=0}=g_{i_0}(x_p),\quad 0\leqslant x_p\leqslant l_p, \tag{23}$$

с начально-краевыми условиями $\phi_1(0)=\varphi_1(0)$, $\phi_1(l_2)=\varphi_2(0)$, $\phi_2(0)=\varphi_1(l_1)$, $\phi_2(l_2)=\varphi_2(l_1)$ *при заданных* $a_{2i-1}(x_1)$, $a_{2i}(x_2)\geqslant\mu_0>0$, $c(x_1,x_2)>0$, $i=1,2$, *имеет решение, принадлежащие* $C^2(D)\cap C(\bar D)$ *и*

$$0<c(x_1,x_2)\leqslant 1,\quad -M_pl_\omega\leqslant h(x_1,x_2)\leqslant 0,\quad \varphi_1(0)\geqslant 0,$$

$$(2-p)\phi_2(0)+(p-1)\varphi_1(0)\geqslant 0,\quad f_2(x_p)\geqslant 0,\quad f_{1x_px_p}(x_p)=0,$$

$$m(il_p-l_p)l_\omega^{-1}x_\omega\leqslant\tilde f_i(0)-\tilde f_i(x_p)\leqslant M_px_\omega,$$

$$m(x_p)\leqslant f_1(x_p)-f_2(x_p)\leqslant M_pl_\omega,\quad i=1,2.$$

Тогда

$$-M_p-(\sqrt2\mu_0)^{-2}l_\omega f_1(x_p)\leqslant u_{x_\omega}(x_1,x_2)\big|_{x_\omega=0}\leqslant -m(x_p)l_\omega^{-1}, \tag{24}$$

где

$$M_p=\max\Big\{l_\omega^{-1}\max_D|h(x_1,x_2)|,\ (2-p)\max_{x_2}\max_i|\phi_{ix_1}(x_2)|,$$
$$(p-1)\max_{x_1}\max_i|\varphi_{ix_1}(x_1)|,\ \max_{x_2}l_1^{-1}[\phi_1(x_2)-[\phi_1(x_2)]],\ \max_{x_1}l_2^{-1}[\varphi_1(x_1)-\varphi_2(x_1)]\Big\},$$

$$m(x_p)\in C^2[0,l_p],\quad m(x_p)>0,\quad m''(x_p)\geqslant 0.$$

◁ Положим

$$\upsilon(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)+(2-p)m(x_1)l_2^{-1}x_2+(p-1)m(x_2)l_1^{-1}x_1-f_1(x_p),$$

$$V(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)-M[(2-p)x_2+(p-1)x_1]$$
$$-(2-p)(\sqrt2\mu_0)^{-2}x_2(l_2-x_2)\varphi_1(x_1)-(p-1)(\sqrt2\mu_0)^{-2}x_2(l_2-x_2)\phi_1(x_2)+f_1(x_p).$$

Нетрудно проверить, что $\upsilon(x_1,x_2)$ удовлетворяет условиям задачи

$$-a_1(x_1)a_2(x_2)\upsilon_{x_1x_1}-a_3(x_1)a_4(x_2)\upsilon_{x_2x_2}+c(x_1,x_2)\upsilon=a_{2p-1}(x_1)a_{2p}(x_2)m''(x_p)l_\omega^{-1}x_\omega$$
$$+c(x_1,x_2)\big[m(x_p)l_\omega^{-1}-f_1(x_p)\big]+h(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in D,$$

$$\upsilon(0,x_2)=(2-p)\big[\phi_1(x_2)+m(0)l_2^{-1}x_2-\varphi_1(0)\big],\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2,$$

$$\upsilon(l_1,x_2)=(2-p)\big[\phi_2(x_2)+m(l_1)l_2^{-1}x_2-\varphi_1(l_1)\big]$$
$$+(p-1)\big[\phi_1(x_2)+m(x_2)-\phi_1(x_2)\big],\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2,$$

$$\upsilon(x_1,0)=(p-1)[\varphi_1(x_1)+m(0)l_1^{-1}x_1-\phi_1(0)],\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1$$

$$\upsilon(x_1,l_2)=(2-p)\big[\varphi_2(x_1)+m(x_1)-\varphi_1(x_1)\big]$$
$$+(p-1)\big[\varphi_2(x_1)+m(l_2)l_1^{-1}x_1-\phi_1(l_2)\big],\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1.$$

По условию леммы, наибольшее положительное значение функции $v(x_1,x_2)$ достигается при $(p-1)x_1+(2-p)x_2=0$. Тогда $v_{x_\omega}(x_1,x_2)\big|_{x_\omega=0}\leqslant 0$. Учитывая, что $v(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)+m(x_p)l_\omega^{-1}x_\omega-f_1(x_p)$, получаем

$$u_{x_\omega}(x_1,x_2)\big|_{x_\omega=0}\leqslant -m(x_p)l_\omega^{-1}. \tag{25}$$

Как и выше, после подстановки $V(x_1,x_2)$ в (20)–(22) получим

$$-a_1(x_1)a_2(x_2)V_{x_1x_1}-a_3(x_1)a_4(x_2)V_{x_2x_2}+c(x_1,x_2)V=\mu_0^{-2}a_{5-2p}(x_1)a_{6-2p}(x_1)f_1(x_p)$$
$$+c(x_1,x_2)\big[1-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_\omega(l_\omega-x_\omega)\big]f_1(x_p)-M_px_\omega c(x_1,x_2)-h(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in D,$$

$$V(0,x_2)=(2-p)\big[-\phi_1(x_2)-Mx_2+\varphi_1(0)-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_2(l_2-x_2)\varphi_1(0)\big],\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2,$$

$$V(l_1,x_2)=(2-p)\big[-\phi_2(x_2)-Mx_2+\varphi_1(l_1)-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_2(l_2-x_2)\varphi_1(l_1)\big]$$
$$+(p-1)\big[-\phi_2(x_2)+\phi_1(x_2)-Ml_2\big],\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2,$$

$$V(x_1,0)=(p-1)\big[-\varphi_1(x_1)-Mx_1+\phi_1(0)-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_1(l_1-x_1)\phi_1(0)\big],\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1,$$

$$V(x_1,l_2)=(p-1)[-\varphi_2(x_1)-Mx_1+\phi_1(l_2)-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_1(l_1-x_1)\phi_1(l_2)]$$
$$+(2-p)[-\varphi_2(x_1)-Ml_2+\varphi_1(x_1),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1.$$

По условию леммы, наибольшее положительное значение функции $V(x_1,x_2)$ достигается при $(p-1)x_1+(2-p)x_2=0$. Поэтому $V_{x_\omega}(x_1,x_2)\leqslant 0$. Учитывая, что

$$V(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)-Mx_\omega-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_\omega(l_\omega-x_\omega)f_1(x_p)-f_1(x_p),$$

получаем

$$-M_p-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}l_\omega f_1(x_p)\leqslant u_{x_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0}. \tag{26}$$

Объединяя оценки (25) и (26), получим оценку (24). $\rhd$

Теорема 3. *Пусть*

$$0<c(x_1,x_2)\leqslant 1,\quad -M_pl_\omega\leqslant h(x_1,x_2)\leqslant 0,\quad \varphi_1(0)\geqslant 0,$$

$$(2-p)\phi_2(0)+(p-1)\varphi_1(0)\geqslant 0,\quad f_2(x_p)\geqslant 0,\quad f_{1x_px_p}(x_p)=0,$$

$$m(il_p-l_p)l_\omega^{-1}x_\omega\leqslant\tilde f_i(0)-\tilde f_i(x_p)\leqslant M_px_\omega,$$

$$m(x_p)\leqslant f_1(x_p)-f_2(x_p)\leqslant M_pl_\omega,$$

$$g_{i_0}(x_p)<0,\quad g_p\leqslant -g_{i_0}(x_p)\frac{\mu_0}{a_{i_1}(0)}-\frac{1}{2}l_\omega f_1(x_p),\quad i=1,2.$$

где $m(x_p)$ — такие неотрицательные функции, что $g_{i_0}(x_p)[m(x_p)]^{-1}$ ограничено, g_p — положительное число. Тогда задача (1)–(4) имеет хотя бы одно решение.

$\lhd$ Доказательство проводится методом последовательных приближений. Из утверждения леммы следует, что

$$-M_p-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}l_\omega f_1(x_p)\leqslant u_{x_\omega}^{(s+1)}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0}\leqslant -m(x_p)l_\omega^{-1},\quad 0<x_p<l_p.$$

Тогда

$$g_pM_p^{-1}\mu_0^{-1}\leqslant a_{i_0}^{(s+1)}(x_p)\leqslant\max_{x_p}\big\{-g_{i_0}(x_p)[m(x_p)]^{-1}\big\}\cdot l_\omega.$$

Таким образом, при всех приближениях $a_{i_0}^{(s)}(x_p)$ — строго положительная, непрерывная и равномерно ограниченная функция. Тогда из общей теории эллиптических уравнений следует, что при условиях теоремы последовательность $\{u^{(s)}(x_1,x_2)\}$ равномерно ограничена по норме $W^2_{p_1}$, $p_1>2$. Поэтому $\{u^{(s)}(x_1,x_2)\}$ компактна в $C^1(\bar D)$. При этом из условия (14) следует, что последовательность $a_{i_0}^{(s+1)}(x_p)$ будет компактна в $C[0,l_p]$. Отсюда и из (11)–(13) вытекает компактность $\{u^{(s)}(x_1,x_2)\}$ в $C^2(\bar D)$. В системе (11)–(14), переходя к пределу при $s\to+\infty$, получим, что существует пара функций $\{a_{i_0}(x_1),u(x_1,x_2)\}$, удовлетворяющих условиям (1)–(4). $\rhd$

5. Другие постановки обратных задач

Рассмотрим задачу при фиксированных параметрах i_0, p, определения функций $a_{i_0}(x_p),u(x_1,x_2)$, удовлетворяющих уравнениям

$$-a_1(x_1)a_2(x_2)u_{x_1x_1}-a_3(x_1)a_4(x_2)u_{x_2x_2}+c(x_1,x_2)u=h(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in D, \tag{27}$$

$$(2-p)u_{x_1}(0,x_2)+(p-1)u(0,x_2)=\phi_1(x_2),\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2, \tag{28}$$

$$(2-p)u_{x_1}(l_1,x_2)+(p-1)u(l_1,x_2)=\phi_2(x_2),\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2, \tag{29}$$

$$(p-1)u_{x_2}(x_1,0)+(2-p)u(x_1,0)=\varphi_1(x_1),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1, \tag{30}$$

$$(p-1)u_{x_2}(x_1,l_2)+(2-p)u(x_1,l_2)=\varphi_2(x_1),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1, \tag{31}$$

$$a_{i_0}(x_p)a_{i_1}(0)u_{x_\omega}\big|_{x_\omega=0}=g_{i_0}(x_p),\quad 0\leqslant x_p\leqslant l_p, \tag{32}$$

при условиях $(p-1)[\phi_{ix_2}(jl_2-l_2)-\varphi_j(il_1-l_1)]=(2-p)[\phi_i(jl_2-l_2)-\varphi_{jx_1}(il_1-l_1)]$, $i,j=1,2$.

Здесь $\phi_i(x_2)\in C^{p+\alpha}[0,l_2],\varphi_i(x_1)\in C^{3-p+\alpha}[0,l_1]$, $i=1,2$. Функция $\tilde\delta_p(x_1,x_2)$ определяется следующим образом:

$$\tilde\delta_p(x_1,x_2)=\sum_{i,j=1}^{2}P_i(x_\omega)\Big[\delta_{i-2p+9}(x_p)+(1-x_p)\delta_{(i-2p+9)x_p}(0) - \frac{x_p^2}{2l_p}\delta_{(i-2p+9)x_p}(l_p)\Big]+\Big(1-\frac{x_p}{2l_p}\Big)x_p\delta_{2p+4}(x_\omega)+\frac{x_p^2}{2l_p}\delta_{2p+5}(x_\omega).$$

Лемма 3. *Пусть решение задачи (27)–(32) существует и*

$$\tilde f_i(x_\omega)\geqslant 0,\quad \phi_{ix_2}(x_2)\leqslant 0,\quad \varphi_{ix_1}(x_1)\leqslant 0.$$

Тогда верна следующая оценка:

$$|u(x_1,x_2)|\leqslant\max\left[\max_D\left|\frac{h(x_1,x_2)}{c(x_1,x_2)}\right|,(2-p)\max_{x_2}\max_i\left|\phi_i(x_2)\right|,(p-1)\max_{x_1}\max_i|\varphi_i(x_1)|\right].$$

Теорема 4. *Пусть*

$$0<c(x_1,x_2)\leqslant 1,\quad -M_pl_\omega\leqslant h(x_1,x_2)\leqslant 0,$$

$$f_2(x_p)\geqslant 0,\quad f_{1x_px_p}(x_p)=0,$$

$$(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_\omega(x_\omega-l_\omega)\tilde f_1(0)\leqslant\tilde f_1(0)-\tilde f_i(x_\omega)\leqslant m'(0)l_\omega^{-1}x_\omega,$$

$$m'(l_p)l_\omega^{-1}x_\omega \leqslant \tilde f_2(0)-\tilde f_2(x_\omega)\leqslant(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_\omega(x_\omega-l_\omega)\tilde f_2(0),$$

$$m(x_p)\leqslant f_1(x_p)-f_2(x_p)\leqslant M_p l_\omega,$$

$$g_{i_0}(x_p)<0,\quad g_p\leqslant -g_{i_0}(x_p)\frac{\mu_0}{a_{i_1}(0)}-\frac{1}{2}l_\omega f_1(x_p),\quad i=1,2,$$

где $m(x_p)$ — такие неотрицательные функции, что $g_{i_0}(x_p)[m(x_p)]^{-1}$ ограничено, g_p — положительное число. Тогда задача (27)–(32) имеет хотя бы одно решение.

Рассмотрим при фиксированных параметрах i_0 и p задачу определения функций $a_{i_0}(x_p)$, $u(x_1,x_2)$, удовлетворяющих уравнениям

$$-a_1(x_1)a_2(x_2)u_{x_1x_1}-a_3(x_1)a_4(x_2)u_{x_2x_2}+c(x_1,x_2)u=h(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in D, \tag{33}$$

$$(2-p)u_{x_1}(0,x_2)+(p-1)u(0,x_2)=\phi_1(x_2),\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2, \tag{34}$$

$$u(l_1,x_2)=\phi_2(x_2),\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2, \tag{35}$$

$$(p-1)u_{x_2}(x_1,0)+(2-p)u(x_1,0)=\varphi_1(x_1),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1, \tag{36}$$

$$u(x_1,l_2)=\varphi_2(x_1),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1, \tag{37}$$

$$a_{i_0}(x_p)a_{i_1}(0)u_{x_\omega}\big|_{x_\omega=0}=g_{i_0}(x_p),\quad 0\leqslant x_p\leqslant l_p, \tag{38}$$

при условиях

$$(p-1)\phi_{1x_2}(0)+(2-p)\phi_1(0)=(p-1)\varphi_1(0)+(2-p)\varphi_{1G_1}(0),$$

$$(p-1)\phi_{2x_2}(0)+(2-p)\phi_2(0)=\varphi_1(l_1),$$

$$(2-p)\varphi_{2x_1}(0)+(p-1)\varphi_2(0)=\phi_1(l_2),\quad \phi_2(l_2)=\varphi_2(l_1).$$

Здесь $\phi_1(x_2)\in C^{p+\alpha}[0,l_2]$, $\phi_2(x_2)\in C^{2+\alpha}[0,l_2]$ $\varphi_1(x_1)\in C^{3-p+\alpha}[0,l_1]$, $\varphi_2(x_1)\in C^{2+\alpha}[0,l_1]$, $i=1,2$. Функция $\tilde\delta_p(x_1,x_2)$ определяется следующим образом:

$$\tilde\delta_p(x_1,x_2)=\sum_{i,j=1}^{2}P_i(x_\omega)\Big[\delta_{i-2p+9}(x_p)-(x_p-l_p)\delta_{(i-2p+9)x_p}(0)$$
$$-\frac{x_p^2}{2l_p}\delta_{2p+5}(il_\omega-l_\omega)\Big]+(x_p-l_p)\delta_{2p+4}(x_\omega)+\frac{x_p^2}{2l_p}\delta_{2p+5}(x_\omega).$$

Лемма 4. *Пусть решение задачи (33)–(38) существует и*

$$\tilde f_i(x_\omega)\geqslant 0,\quad \phi_{1x_2}(x_2)\leqslant 0,\quad \varphi_{1x_1}(x_1)\leqslant 0.$$

Тогда верна следующая оценка:

$$|u(x_1,x_2|\leqslant\max\Bigg[\max_D\left|\frac{h(x_1,x_2)}{c(x_1,x_2)}\right|,(p-1)\max_{x_2}\big|\phi_1(x_2)\big|,$$
$$\max_{x_2}\big|\phi_1(x_2)\big|,(2-p)\max_{x_1}\big|\varphi_1(x_1)\big|,\max_{x_1}\big|\varphi_2(x_1)\big|\Bigg].$$

Теорема 5. *Пусть*

$$0<c(x_1,x_2)\leqslant 1,\quad -M_pl_\omega\leqslant h(x_1,x_2)\leqslant 0,$$

$$f_2(x_p) \geqslant 0, \quad f_{1x_px_p}(x_p) = 0,$$

$$(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_\omega(x_\omega - l_\omega)\tilde{f}_1(0) \leqslant \tilde{f}_1(0) - \tilde{f}_i(x_\omega) \leqslant m'(0)l_\omega^{-1}x_\omega,$$

$$m(l_p)l_\omega^{-1}x_\omega \leqslant \tilde{f}_2(0) - \tilde{f}_2(x_\omega) \leqslant (\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_\omega(x_\omega - l_\omega)\tilde{f}_2(0) + (p-1)Mx_1,$$

$$m(x_p) \leqslant f_1(x_p) - f_2(x_p) \leqslant M_pl_\omega.$$

$$g_{i_0}(x_p) < 0, \quad g_p \leqslant -g_{i_0}(x_p)\frac{\mu_0}{a_{i_1}(0)} - \frac{1}{2}l_\omega f_1(x_p), \quad i = 1, 2,$$

где $m(x_p)$ *— такие неотрицательные функции, что* $g_{i_0}(x_p)[m(x_p)]^{-1}$ *ограничено,* g_p *— положительное число. Тогда задача* (33)–(38) *имеет хотя бы одно решение.*

$\lhd$ Рассмотрим при фиксированных параметрах i_0 и p задачу определения функций $a_{i_0}(x_p)$, $u(x_1, x_2)$, удовлетворяющих уравнениям

$$-a_1(x_1)a_2(x_2)u_{x_1x_1} - a_3(x_1)a_4(x_2)u_{x_2x_2} + c(x_1, x_2)u = h(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in D, \tag{39}$$

$$u(0, x_2) = \phi_1(x_2), \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2, \tag{40}$$

$$(2-p)u_{x_1}(l_1, x_2) + (p-1)u(l_1, x_2) = \phi_2(x_2), \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2, \tag{41}$$

$$u(x_1, 0) = \varphi_1(x_1), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1, \tag{42}$$

$$(p-1)u_{x_2}(x_1, l_2) + (2-p)u(x_1, l_2) = \varphi_2(x_1), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1, \tag{43}$$

$$a_{i_0}(x_p)a_{i_1}(0)u_{x_\omega}|_{x_\omega=0} = g_{i_0}(x_p), \quad 0 \leqslant x_p \leqslant l_p, \tag{44}$$

при условиях $\phi_1(0) = \varphi_1(0)$,

$$(p-1)\phi_{1x_2}(l_2) + (2-p)\phi_2(l_2) = \varphi_2(0), \quad (2-p)\varphi_{1x_1}(l_1) + (p-1)\varphi_1(l_1) = \phi_2(0),$$
$$(p-1)\phi_{2x_2}(l_2) + (2-p)\phi_1(l_2) = (p-1)\varphi_2(l_1) + (2-p)\varphi_{2x_1}(l_1).$$

Здесь $\phi_1(x_2) \in C^{2+\alpha}[0, l_2]$, $\phi_2(x_2) \in C^{p+\alpha}[0, l_2]$, $\varphi_1(x_1) \in C^{2+\alpha}[0, l_1]$, $\varphi_2(x_1) \in C^{3-p+\alpha}[0, l_1]$, $i = 1, 2$.

Функция $\tilde{\delta}_p(x_1, x_2)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{\delta}_p(x_1, x_2) = \sum_{i,j=1}^{2} P_i(x_\omega)\Big[-\Big(\frac{l_p - x_p}{l_p}\Big)^2\delta_{2p+4}(il_\omega - l_\omega) + \delta_{i+2p+9}(x_p)$$
$$- x_p\delta_{(i-2p+9)x_p}(l_p)\Big] + \Big(\frac{l_p - x_p}{l_p}\Big)^2\delta_{2p+4}(x_\omega) + x_p\delta_{2p+5}(x_\omega).$$

Лемма 5. *Пусть решение задачи* (39)–(44) *существует и*

$$\phi_1(x_2) \geqslant 0, \quad \varphi_1(x_1) \geqslant 0, \quad \phi_{2x_2}(x_2) \leqslant 0, \quad \varphi_{2x_1}(x_1) \leqslant 0.$$

Тогда верна следующая оценка:

$$|u(x_1, x_2| \leqslant \max\Big[\max_D\Big|\frac{h(x_1, x_2)}{c(x_1, x_2)}\Big|, \max_{x_2}|\phi_1(x_2)|, (p-1)\max_{x_2}|\phi_2(x_2)|,$$
$$\max_{x_1}|\varphi_1(x_1)|, (2-p)\max_{x_1}|\varphi_1(x_1)|\Big].$$

Теорема 6. *Пусть*

$$0 < c(x_1, x_2) \leqslant 1, \quad -M_p l_\omega \leqslant h(x_1, x_2) \leqslant 0,$$

$$f_2(x_p) \geqslant 0, \quad f_{1x_p x_p}(x_p) = 0,$$

$$m^{(i-1)}(il_p - l_p) l_\omega^{-1} x_\omega \leqslant \tilde{f}_i(0) - \tilde{f}_i(x_p) \leqslant (\sqrt{2}\mu_0)^{-2} x_\omega (x_\omega - l_\omega) \tilde{f}_2(0) + (2 - i) M x_\omega,$$

$$m(x_p) \leqslant f_1(x_p) - f_2(x_p) \leqslant M_p l_\omega,$$

$$g_{i_0}(x_p) < 0, \quad g_p \leqslant -g_{i_0}(x_p) \frac{\mu_0}{a_{i_1}(0)} - \frac{1}{4} l_\omega f_1(x_p), \quad i = 1, 2.$$

где $m(x_p)$ — такие неотрицательные функции, что $g_{i_0}(x_p)[m(x_p)]^{-1}$ ограничено, g_p — положительное число. Тогда задача (40)–(44) имеет хотя бы одно решение.

Для задачи (27)–(32) функция $\tilde{\delta}_p(x_1, x_2)$ в явном виде получает следующее выражение:

$$\tilde{\delta}_p(x_1, x_2) = \frac{l_\omega - x_\omega}{l_\omega} \left[\delta_{10-2p}(x_p) + \left(1 - \frac{x_p}{2l_p}\right) x_p \delta_{(10-2p)x_p}(0) - \frac{x_p^2}{2l_p} \delta_{(10-2p)x_p}(l_p) \right]$$
$$+ \frac{x_\omega}{l_\omega} \left[\delta_{11-2p}(x_p) - \left(1 - \frac{x_\omega}{l_\omega}\right) x_\omega \delta_{(11-2p)x_p}(0) - \frac{x_p^2}{2l_p} \delta_{(11-2p)x_p}(l_p) \right]$$
$$+ \left(1 - \frac{x_p}{2l_p}\right) x_p \delta_{2p+4}(x_\omega) + \frac{x_p^2}{2l_p} \delta_{2p+5}(x_\omega).$$

При $i_0 = p = 1$ для решения задачи (1)–(4) можно брать следующие функции:

$$u(x_1, x_2) = -\left(\frac{x_1^2}{2} + x_1 + 2 - x_2\right) x_2 + x_1 + \frac{5}{2}, \quad a_1(x_1) = x_1 + 1, \quad a_2(x_2) = 1,$$

$$a_3(x_1) = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{5}{2}\right), \quad a_4(x_2) = 1, \quad c(x_1, x_2) = 1.$$

В этом случае

$$m(x_1) = \left(\frac{x_1^2}{2} + 1\right) l_2.$$

Эти функции удовлетворяют условиям теоремы 3.

Теоремы 4, 5, 6 доказываются аналогично теореме 3. Доказательства лемм 3, 4, 5 легко получаются из принципа максимума. Для рассмотренных в этом разделе задач доказательства априорных оценок и сходимости итерационного алгоритма аналогичны теоремам 1, 2.

Литература

1. *Искендеров А. Д.* Обратная задача об определении коэффициентов квазилинейного эллиптического уравнения // Изв. АН. АзССР.—1978.—№ 2.—С. 80–85.
2. *Искендеров А. Д.* Обратная задача об определении коэффициентов эллиптического уравнения // Диф. уравнения.—1979.—Т. 15, № 5.—С. 858–867.
3. *Клибанов М. В.* Обратные задачи в целом и карлемановские оценки // Диф. уравнения.—1984.—Т. 20, № 6.—С. 1035–1041.
4. *Клибанов М. В.* Единственность в целом обратных задач для одного класса дифференциального уравнения // Диф. уравнения.—1984.—Т. 20, № 11.—С. 1947–1953.

5. *Хайдаров А.* Об одной обратной задаче для эллиптических уравнений // Некорректные задачи мат. физики и анализа / Под. ред. С. А. Алексева.—Новосибирск, 1984.—С. 245–249.
6. *Вабищевич П. Н.* О единственности некоторых обратных задач для эллиптических уравнений // Диф. уравнения.—1988.—Т. 24, № 12.—С. 2125–2129.
7. *Соловьев В. В.* Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике // Журн. вычислительной математики и мат. физики.—2007.—Т. 47, № 8.—С. 1365–1377.
8. *Yang R., Ou Y.* Inverse coefficient problems for elliptic equations // Anziam J.—2008.—Vol. 49, № 2.—P. 271–279.
9. *Пятков С. Г.* О некоторых обратных задача для эллиптических уравнений и систем // Сиб. журн. индустриальной математики.—2010.—Т. 13, № 4.—С. 83–96.
10. *Вахитов И. С.* Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии-реакции // Дальневост. мат. журн.—2010.—Т. 10, № 2.—С. 93–105.
11. *Алиев Р. А.* Об определении неизвестных коэффициентов при старших производных в линейном эллиптическом уравнении // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2014.—№ 3.—С. 31–43.
12. *Ладыженская О. Г., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.—М.: Наука, 1973.—576 с.
13. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1957.—252 с.

Статья поступила 5 февраля 2016 г.

Алиев Рамиз Аташ оглы
Азербайджанский университет кооперации,
доцент кафедры информатики
АЗЕРБАЙДЖАН, 1106, г. Баку, ул. Н. Нариманова, 8 в
E-mail: ramizaliyev3@rambler.ru

ABOUT THE DETERMINATION OF UNKNOWN COEFFICIENTS IN THE LINEAR ELLIPTIC EQUATION

Aliyev R. A.

Inverse problems of restoration of coefficients to partial differential equations are of interest in many applied researches. In this work an inverse problem for elliptic equation with various boundary values in a given rectangle is considered. The existence, uniqueness and stability of a solution to inversion problems under consideration are proved. Using successive approximation method a regularizing algorithm for determining of coefficients is also constructed.

Key words: inversion problem, elliptic equation.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 3, С. 15–21

УДК **517.98**

REVERSIBLE AJW-ALGEBRAS

Sh. A. Ayupov, F. N. Arzikulov

The main result states that every special AJW-algebra can be decomposed into the direct sum of totally irreversible and reversible subalgebras. In turn, every reversible special AJW-algebra decomposes into a direct sum of two subalgebras, one of which has purely real enveloping real von Neumann algebra, and the second one contains an ideal, whose complexification is a C*-algebra and the annihilator of this complexification in the enveloping C^*-algebra of this subalgebra is equal to zero.

Mathematics Subject Classification (2000): 17C65, 46L57.

AJW-algebra, reversible AJW-algebra, AW*-algebra, Enveloping C^*-algebra.

1. Introduction

This article is devoted to abstract Jordan operator algebras, which are analogues of abstract W*-algebras (AW*-algebras) of Kaplansky. These Jordan operator algebras can be characterized as a JB-algebra satisfying the following conditions

(1) in the partially ordered set of all projections any subset of pairwise orthogonal projections has the least upper bound in this JB-algebra;

(2) every maximal associative subalgebra of this JB-algebra is generated by it's projections (i. e. coincides with the least closed subalgebra containing all projections of the given subalgebra).

In the articles [3, 4] the second author introduced analogues of annihilators for Jordan algebras and gave algebraic conditions equivalent to (1) and (2). Currently, these JB-algebras are called AJW-algebras or Baer JB-algebras in the literature. Further, in [5] a classification of these algebras has been obtained. It should be noted that many of facts of the theory of JBW-algebras and their proofs hold for AJW-algebras. For example, similar to a JBW-algebra an AJW-algebra is the direct sum of special and purely exceptional Jordan algebras [5].

It is known from the theory of JBW-algebras that every special JBW-algebra can be decomposed into the direct sum of totally irreversible and reversible subalgebras. In turn, every reversible special JBW-algebra decomposes into a direct sum of a subalgebra, which is the hermitian part of a von Neumann algebra and a subalgebra, enveloping real von Neumann algebra of which is purely real [6, 7]. In this paper we prove a similar result for AJW-algebras, the proof of which requires a different approach. Namely, we prove that for every special AJW-algebra A there exist central projections e, f, $g \in A$, $e+f+g = 1$ such that (1) eA is reversible and there exists a norm-closed two sided ideal I of $C^*(eA)$ such that $eA = {}^{\perp}({}^{\perp}(I_{sa})_+)_+$; (2) fA is reversible and $R^*(fA) \cap iR^*(fA) = \{0\}$; (3) gA is a totally nonreversible AJW-algebra.

© 2016 Ayupov Sh. A., Arzikulov F. N.

2. Preliminary Notes

We fix the following terminology and notations.

Let $\mathscr{A}$ be a real Banach $*$-algebra. $\mathscr{A}$ is called a real C*-algebra, if $\mathscr{A}_c = \mathscr{A} + i\mathscr{A} = \{a + ib : a, b \in \mathscr{A}\}$, can be normed to become a (complex) C*-algebra, and keeps the original norm on $\mathscr{A}$ [11].

Let A be a JB-algebra, $P(A)$ be a set of all projections of A. Further we will use the following standard notations: $\{aba\} = U_a b := 2a(ab) - a^2 b$, $\{abc\} = a(bc) + (ac)b - (ab)c$ and $\{aAb\} = \{\{acb\} : c \in A\}$, where $a, b, c \in A$. A JB-algebra A is called an AJW-algebra, if the following conditions hold:

(1) in the partially ordered set $P(A)$ of projections any subset of pairwise orthogonal projections has the least upper bound in A;

(2) every maximal associative subalgebra A_o of the algebra A is generated by it's projections (i. e. coincides with the least closed subalgebra containing $A_o \cap P(A)$).

Let

$$(S)^{\perp} = \{a \in A : (\forall x \in S)\ U_a x = 0\},$$
$$^{\perp}(S) = \{x \in A : (\forall a \in S)\ U_a x = 0\},$$
$$^{\perp}(S)_+ = {}^{\perp}(S) \cap A_+.$$

Then for a JB-algebra A the following conditions are equivalent:

(1) A is an AJW-algebra;

(2) for every subset $S \subset A_+$ there exists a projection $e \in A$ such that $(S)^{\perp} = U_e(A)$;

(3) for every subset $S \subset A$ there exists a projection $e \in A$ such that $^{\perp}(S)_+ = U_e(A_+)$ [3].

Let A be a real or complex $*$-algebra, and let S be a nonempty subset of A. Then the set $R(S) = \{x \in A : sx = 0 \text{ for all } s \in S\}$ is called the right annihilator of S and the set $L(S) = \{x \in A : xs = 0 \text{ for all } s \in S\}$ is called the left annihilator of S. A $*$-algebra A is called a Baer $*$-algebra, if the right annihilator of any nonempty set $S \subseteq A$ is generated by a projection, i. e. $R(S) = gA$ for some projection $g \in A$ $(g^2 = g = g^*)$. If $S = \{a\}$ then the projection $1 - g$ such that $R(S) = gA$ is called the right projection and denoted by $r(a)$. Similarly one can define the left projection $l(a)$. A (real) C*-algebra A, which is a Baer (real) $*$-algebra, is called an (real) AW*-algebra [1, 8]. Real AW*-algebras were introduced and investigated in [1, 2]. In these papers it was shown that for a real AW*-algebra $\mathscr{A}$ the C*-algebra $M = \mathscr{A} + i\mathscr{A}$ is not necessarily a complex AW*-algebra.

Let A be an AJW-algebra. By [5, Theorem 2.3] we have the equality $A = A_I \oplus A_{II} \oplus A_{III}$, where A_I is an AJW-algebra of type I, A_{II} is an AJW-algebra of type II and A_{III} is an AJW-algebra of type III [5]. By [5, Theorem 3.7] A_I, in its turn, is a direct sum of the following form

$$A_I = A_\infty \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots,$$

where A_n for every n either is $\{0\}$ or an AJW-algebra of type I_n, A_∞ is a direct sum of AJW-algebras of type I_α with α infinite. If $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$ then A is called an AJW-algebra of type I_{fin} and denoted by $A_{I_{fin}}$ and if $A = A_\infty$ then A is called an AJW-algebra of type I_∞ and denoted by A_{I_∞}. We say that A is properly infinite if A has no nonzero central modular projection. The fact that an AJW-algebra A_{II} of type II is a JC-algebra can be proved similar to JBW-algebras [9]. Therefore, it is isomorphic to some AJW-algebra defined in [14] (i. e. to some AJW-algebra of self-adjoint operators), and by virtue of [14] $A_{II} = A_{II_1} \oplus A_{II_\infty}$, where A_{II_1} is a modular AJW-algebra of type II and A_{II_∞} is an AJW-algebra of type II, which is properly infinite. So, we have the decomposition

$$A = A_{I_{fin}} \oplus A_{I_\infty} \oplus A_{II_1} \oplus A_{II_\infty} \oplus A_{III}.$$

It is easy to verify that the part $A_{I_{fin}} \oplus A_{II_1}$ is modular, and $A_{I_\infty} \oplus A_{II_\infty} \oplus A_{III}$ is properly infinite (i. e. properly nonmodular).

3. Reversibility of AJW-algebras

Let A be a special AJW-algebra on a complex Hilbert space H. By $R^*(A)$ we denote the uniformly closed real $*$-algebra in $B(H)$, generated by A, and by $C^*(A)$ the C*-algebra, generated by A. Thus the set of elements of kind

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m_i} a_{ij} \quad (a_{ij} \in A)$$

is uniformly dense in $R^*(A)$. Let $iR^*(A)$ be the set of elements of kind ia, $a \in R^*(A)$. Then $C^*(A) = R^*(A) + iR^*(A)$ [7, 13].

Lemma 3.1. *The set $R^*(A) \cap iR^*(A)$ is a uniformly closed two sided ideal in $C^*(A)$.*

$\lhd$ If $a, b \in R^*(A)$ and $c = id \in R^*(A) \cap iR^*(A)$, then $(a+ib)c = ac+ibid = ac-bd \in R^*(A)$. Similarly $(a+ib)c \in iR^*(A)$, i. e. $(a+ib)c \in R^*(A) \cap iR^*(A)$. Since $R^*(A) \cap iR^*(A)$ is uniformly closed and the set of elements of kind $a + ib$, $a, b \in A$ is uniformly dense in $C^*(A)$, we have $R^*(A) \cap iR^*(A)$ is a left ideal in $C^*(A)$. By the symmetry $R^*(A) \cap iR^*(A)$ is a right ideal. $\rhd$

Let R be a $*$-algebra, R_{sa} be the set of all self-adjoint elements of R, i. e. $R_{sa} = \{a \in R : a^* = a\}$.

Definition 3.2. A JC-algebra A is said to be reversible if $a_1 a_2 \ldots a_n + a_n a_{n-1} \ldots a_1 \in A$ for all $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Similar to JW-algebras we have the following criterion.

Lemma 3.3. *An AJW-algebra A is reversible if and only if $A = R^*(A)_{sa}$.*

$\lhd$ It is clear that, if $A = R^*(A)_{sa}$, then A is reversible since

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=n}^{1} a_i\right)^* = \prod_{i=n}^{1} a_i + \prod_{i=1}^{n} a_i \in R^*(A)_{sa} = A,$$

for all $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Conversely, let A be a reversible AJW-algebra. The inclusion $A \subset R^*(A)_{sa}$ is evident. If $a = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m_i} a_{ij} \in R^*(A)_{sa}$, then

$$a = \frac{1}{2}(a + a^*) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{m_i} a_{ij} + \prod_{j=m_i}^{1} a_{ij}\right) \in A.$$

Hence the converse inclusion holds, i. e. $R^*(A)_{sa} = A$. $\rhd$

Lemma 3.4. *Let A be an AJW-algebra and let I be a norm-closed ideal of A. Then there exists a central projection g such that ${}^\perp({}^\perp(I_{sa})_+)_+ = gA_+$.*

$\lhd$ Since A is an AJW-algebra there exists a projection g in A such that

$${}^\perp(I_{sa})_+ = U_{(1-g)}(A_+), \quad {}^\perp({}^\perp(I_{sa})_+)_+ = U_g(A_+),$$

where ${}^\perp(S)_+ = \{x \in A_+ : (\forall\, a \in S)\ U_a x = 0\}$ for $S \subseteq A$.

Let (u_λ) be an approximate identity of the JB-subalgebra I and a be an arbitrary positive element in I. Then there exists a maximal associative subalgebra A_o of A containing a. Let

v_μ be an approximate identity of A_o. Then $(v_\mu) \subseteq (u_\lambda)$ and $\|av_\mu - a\| \to 0$. Let $b \in A_+$ and $U_{v_\mu} b = 0$ for every μ. Then $U_a U_{v_\mu} b = U_{av_\mu} b = 0$ and $U_c U_{av_\mu} b = 0$, where c is an element in A such that $b = c^2$. Hence $U_c U_{av_\mu} c^2 = 0$, $(U_c(av_\mu))^2 = 0$, $U_c(av_\mu) = 0$ and $U_c U_c(av_\mu) = U_b(av_\mu) = 0$ for every μ. We have

$$\|U_b(av_\mu) - U_b a\| = \|U_b(av_\mu) - a)\| \to 0$$

because $\|av_\mu - a\| \to 0$ and the operator U_b is norm-continuous. Hence $U_b a = 0$. We may assume that $a = d^2$ for some element $d \in A$. Then

$$U_d U_b a = U_d U_b d^2 = (U_d b)^2 = 0, \quad U_d b = 0.$$

Thus $U_d U_d b = U_{d^2} b = U_a b = 0$. Therefore, if $b \in^\perp ((u_\lambda))_+$ then $b \in^\perp (I_{sa})_+$. Hence $^\perp((u_\lambda))_+ \subseteq^\perp (I_{sa})_+$. It is clear that $^\perp(I_{sa})_+ \subseteq^\perp ((u_\lambda))_+$ and

$$^\perp(I_{sa})_+ =^\perp ((u_\lambda))_+.$$

This implies that $^\perp((u_\lambda))_+ = U_{(1-g)}(A_+)$ and

$$\sup_\lambda u_\lambda = g.$$

Let us prove that $U_g(A)$ is an ideal of A. Indeed, let x be an arbitrary element in A. Then $U_x u_\lambda \in I_{sa}$, i.e. $U_x u_\lambda \in U_g(A)$. By [9, Proposition 3.3.6] and the proof of [9, Lemma 4.1.5] we have U_x is a normal operator in A. Hence

$$\sup_\lambda U_x u_\lambda = U_x(\sup_\lambda u_\lambda) = U_x g.$$

At the same time

$$\sup_\lambda U_x u_\lambda \in U_g(A).$$

Hence $U_x g \in U_g(A)$. By [9, 2.8.10] we have

$$4(xg)^2 = 2gU_x g + U_x g^2 + U_g x^2 = 2gU_x g + U_x g + U_g x^2.$$

Therefore $(xg)^2 \in U_g(A)$ and $xg \in U_g(A)$.

Now, let y be an arbitrary element in $U_g A$. Then $y = U_g y$ and

$$xy = \big(U_g x + \{gx(1-g)\} + U_{1-g} x\big) U_g y = U_g x U_g y + \big\{gx(1-g)\big\} U_g y \in U_g A$$

since $\{gx(1-g)\} \in U_g A$. Hence $U_g A$ is a norm-closed ideal of A. Therefore $\{gA(1-g)\} = \{0\}$ and

$$A = U_g A \oplus U_{1-g} A.$$

This implies that g is a central projection in A and $^\perp(^\perp(I_{sa})_+)_+ = gA_+$. $\rhd$

Lemma 3.5. *Let A be a reversible AJW-algebra on a Hilbert space H. Then there exist two central projections e, f in A and a norm-closed two sided ideal I of $C^*(A)$ such that $e + f = 1$, $eA = {}^\perp(^\perp(I_{sa})_+)_+$ and $R^*(fA) \cap iR^*(fA) = \{0\}$.*

$\lhd$ Let $I = R^*(A) \cap iR^*(A)$. Since A is reversible by Proposition 3.3 we have $I_{sa} \subseteq A$. By [7, 3.1] I is a two sided ideal of $C^*(A)$. Hence I_{sa} is an ideal of the AJW-algebra A. By Proposition 3.4 we have there exists a central projection g such that $^\perp(^\perp(I_{sa})_+)_+ = gA_+$. It is clear that g is a central projection also in $C^*(A)$.

By the definitions of I and g we have

$$R^*((1-g)A) \cap iR^*((1-g)A) = \{0\}. \rhd$$

Lemma 3.6. *Let A be an AJW-algebra and let J be the set of elements $a \in A$ such that $bac + c^*ab^* \in A$ for all $b, c \in C^*(A)$. Then J is a norm-closed ideal in A. Moreover J is a reversible AJW-algebra.*

$\lhd$ Let $a, b \in J$, $s, t \in C^*(A)$. Then

$$s(a+b)t + t^*(a+b)s^* = (sat + t^*as^*) + (sbt + t^*bs^*) \in A,$$

i. e. J is a linear subspace of A. Now, if $a \in J$, $b \in A$, $s, t \in C^*(A)$, then

$$s(ab+ba)t + t^*(ab+ba)s^* = (sa(bt) + (bt)^*as^*) + ((sb)at + t^*a(sb)^*) \in A,$$

i. e. J is a norm-closed ideal of A.

Let $a_1 \in J$, $a_2, \dots, a_n \in A$ and $a = \prod_{i=2}^n a_i$. Then $a_1a + a^*a_1 \in A$ by the definition of J. Let us show that $a_1a + a^*a_1 \in J$; then, in particular, in the case of $a_2, \dots, a_n \in J$ this will imply that J is reversible. For all b, $c \in C^*(A)$ we have

$$b(a_1a + a^*a_1)c + c^*(a_1a + a^*a_1)b^* = (ba_1(ac) + (ac)^*a_1b^*) + ((ba^*)a_1c + c^*a_1(ba^*)^*) \in A,$$

i. e. $a_1a + a^*a_1 \in J$. $\rhd$

Definition 3.7.An AJW-algebra A is said to be *totally nonreversible*, if the ideal J in Lemma 3.6 is equal to $\{0\}$, i. e. $J = \{0\}$.

Theorem 3.8. *Let A be a special AJW-algebra. Then there exist central projections $e, f, g \in A$, $e + f + g = 1$ such that*

(1) $J = (e+f)A$, J is the ideal from Lemma 3.6;

(2) eA is reversible and there exists a norm-closed two sided ideal I of $C^*(eA)$ such that $eA = {}^{\perp}({}^{\perp}(I_{sa})_+)_+$;

(3) fA is reversible and $R^*(fA) \cap iR^*(fA) = \{0\}$;

(4) gA is a totally nonreversible AJW-algebra and

$$gA = \sum_{\omega \in \Omega} C(Q_\omega, \mathbf{R} \oplus H_\omega),$$

where Ω is a set of indices, $\{Q_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ is an appropriate family of extremal compacts and $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ is a family of Hilbert spaces.

$\lhd$ We have

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_{I_\infty} \oplus A_{II_1} \oplus A_{II_\infty} \oplus A_{III}$$

and the subalgebra (without the part A_2)

$$A_1 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus \dots \oplus A_{I_\infty} \oplus A_{II_1} \oplus A_{II_\infty} \oplus A_{III}$$

is reversible. The last statement can be proven similar to [9, Theorem 5.3.10]. By [10] the subalgebra A_2 can be represented as follows

$$A_2 = \sum_{i \in \Xi} C(X_i, \mathbf{R} \oplus H_i),$$

where Ξ is a set of indices, $\{X_i\}_{i \in \Xi}$ is a family of extremal compacts and $\{H_i\}_{i \in \Xi}$ is a family of Hilbert spaces. Hence by [9, Theorem 6.2.5] there exist central projections h, g such that $A = hA \oplus gA$, hA is reversible and gA is totally nonreversible. For all a, $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ in hA we have

$$b_1 \dots b_n a c_1 \dots c_m + c_m c_{m-1} \dots c_1 a b_n b_{n-1} \dots b_1 \in hA$$

since hA is reversible. Similarly for all $b, c \in R^*(hA)$, $a \in hA$ we have

$$bac + c^*ab^* \in hA.$$

Hence $hA = J$.

By Proposition 3.5 there exist two central projections e, f in hA and a norm-closed two sided ideal I of $C^*(hA)$ such that $e + f = h$, $eA = {}^\perp({}^\perp(I_{sa})_+)_+$, fA is a reversible AJW-algebra and $R^*(fA) \cap iR^*(fA) = \{0\}$. This completes the proof. $\triangleright$

Let A be a special AJW-algebra. Despite the fact that for the real AW*-algebra $R^*(A)$ the C*-algebra $\mathscr{M} = R^*(A) + iR^*(A)$ is not necessarily a complex AW*-algebra we consider, that

Conjecture. Under the conditions of Theorem 3.8 the following equality is valid

$$eA = I_{sa}.$$

References

1. *Albeverio S., Ayupov Sh. A. and Abduvaitov A. H.* On Real AW*-algebras. Methods of Functional Analysis and Topology.—2005.—Vol. 11, № 2.—P. 99–112.
2. *Albeverio S., Ayupov Sh. A. and Abduvaitov A. H.* On the coincidence of types of a real AW^*-algebra and its comlexification // News of Russian Acad. of Sci. Math. ser.—2004.—Vol. 68.—P. 3–12.—[Russian].
3. *Arzikulov F. N.* On abstract JW-algebras // Sib. Math. J.—1998.—Vol. 39.—P. 20–27.
4. *Arzikulov F. N.* On an analog of the Peirce decomposition // Sib. Math. J.—1999.—Vol. 40.—P. 413–419.
5. *Arzikulov F. N.* AJW-algebras of type I and their classification // Sib. Adv. Math.—1998.—Vol. 8.—P. 30–48.
6. *Ayupov Sh. A.* Traces on JW-algebras and enveloping W^*-algebras // Math. Z.—1987.—Vol. 194.—P. 15–23.
7. *Ayupov Sh.* Classification and representation of ordered Jordan algebras Fan.—Tashkent, 1986.—[Russian].
8. *Chilin V. I.* Partial ordered Baer involutive algebras // Sovrem. Problemy Matematiki, Itogi nauki i tehkniki. VINITI.—1985.—Vol. 27.—P. 99–128.—[Russian].
9. *Hanche-Olcen H., Størmer E.* Jordan Operator Algebras.—Boston etc: Pitman Publ. Inc., 1984.
10. *Kusraev A. G.* On the structure of AJW-algebras of type I_2 // Sib. Math. J.—1999.—Vol. 40.—P. 905–917.
11. *Li B.* Real operator algebras. Institute of Mathematics.—China: Acad. Sinica Beijing, 2002.
12. *Sakai S.* C^*-algebras and W^*-algebras.—Springer, 1971.
13. *Størmer E.* Jordan algebras of type I // Acta. Math.—1966.—Vol. 115.—P. 165–184.
14. *Topping D. M.* Jordan algebras of self-adjoint operators // Mem. Am. Math. Soc.—1965.—Vol. 53.

Received September 24, 2015.

Ayupov Shavkat Abdullayevich
National University of Uzbekistan,
Director of the Institute of Math.
Do'rmon yo'li st., Tashkent, 1000125, UZBEKISTAN
Email: sh_ayupov@mail.ru

Arzikulov Farhodjon Nematjonovich
Andizhan State University,
Department of Mathematics docent,
University street, Andizhan, 710020, UZBEKISTAN
Email: arzikulovfn@rambler.ru

ОБРАТИМЫЕ AJW-АЛГЕБРЫ

Аюпов Ш. А., Арзикулов Ф. Н.

Основной результат статьи гласит, что каждая специальная AJW-алгебра раскладывается в прямую сумму тотально необратимой и обратимой подалгебр. В свою очередь, каждая обратимая AJW-алгебра раскладывается в прямую сумму подалгебры, которая содержит идеал такой, что аннулятор комплексификации этого идеала в обертывающей C^*-алгебре этой подалгебры равен нулю и подалгебры, обертывающая вещественная алгебра фон Неймана которой является чисто вещественной.

Ключевые слова: AJW-алгебра, обратимая AJW-алгебра, AW^*-алгебра, обертывающая *-алгебра.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 3, С. 22–30

УДК **517.91**

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Л. Х. Гадзова

Решена задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами. Построена функция Грина, доказана конечность числа вещественных собственных значений.

Ключевые слова: краевая задача, оператор дробного дифференцирования, оператор Римана — Лиувилля, оператор Капуто.

1. Постановка задачи. В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\alpha_j \in]1,2[$, $\lambda, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\beta_1 > 0$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m$, $\partial_{0x}^{\gamma} u(x)$ — регуляризованная дробная производная (производная Капуто) [1, с. 11]:

$$\partial_{0x}^{\gamma} u(x) = D_{0x}^{\gamma-n} u^{(n)}(x), \quad n-1 < \gamma \leqslant n, \tag{2}$$

где D_{0x}^{γ} — оператор дробного интегро-дифференцирования порядка γ в смысле Римана — Лиувилля [1, с. 9] по переменной x, определяемый равенством:

$$D_{0x}^{\gamma} u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int\limits_0^x u(t)(x-t)^{-\gamma-1}\, dt, & \gamma < 0, \\ u(x), & \gamma = 0, \\ \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\gamma-n} u(t), & n-1 < \gamma \leqslant n,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Работа [2] играет важную роль в исследованиях, посвященных дифференциальным уравнениям дробного порядка. В работах [3, 4] были изучены линейные дифференциальные уравнения дробного порядка. Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, содержащего группу младших членов с производными Римана — Лиувилля, исследовалась в работе [5]. В монографии [1, с. 120] даны постановки видоизмененных задач Коши и Неймана для уравнения второго порядка с дробной производной порядка $\alpha \in]1,2[$. В работах [6–8] исследовались линейные обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами. Относительно изложения результатов и библиографии работ, связанных с линейными дифференциальными уравнениями дробного порядка, укажем работы [9] и [10].

© 2016 Гадзова Л. Х.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462.

Для уравнения (1) решена задача Дирихле методом функции Грина в работе [11], также найдено условие однозначной разрешимости [12].

Интерес к исследованию уравнений дробного порядка стимулируется практическими приложениями, которые обнаруживаются в физике и математическом моделировании фрактальных сред [1, с. 149], [13–15].

В данной работе доказана теорема существования и единственности решения задачи Неймана, получено явное представление решения исследуемой задачи и построена соответствующая функция Грина. Доказано, что исследуемая задача разрешима при любом параметре $\lambda \in \mathbb{R}$, за исключением, быть может, конечного числа значений параметра.

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x)$, имеющую абсолютно непрерывную производную первого порядка на отрезке [0,1] и удовлетворяющую уравнению (1) для всех $x \in]0,1[$.

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1) в интервале $]0,1[$, удовлетворяющее условиям

$$u'(0) = a, \quad u'(1) = b, \tag{3}$$

где a, b — заданные постоянные.

2. Основной результат. Рассмотрим функцию [12]

$$\mathscr{G}(x,t) = \frac{1}{\beta_1}\left(H(x-t)G_m^{\alpha_1}(x-t) - G_m^{\alpha_1-1}(1-t)\frac{1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)}{\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1)}\right), \tag{4}$$

где [8]

$$G_m^{\mu}(x) = G_m^{\mu}(x;\nu_1,\dots,\nu_m;\gamma_1,\dots,\gamma_m) \equiv \int_0^\infty e^{-t} S_m^{\mu}(x;\nu_1 t,\dots,\nu_m t;\gamma_1,\dots,\gamma_m)\,dt, \tag{5}$$

$$\nu_1 = -\frac{\lambda}{\beta_1}, \quad \nu_j = -\frac{\beta_j}{\beta_1}, \quad \gamma_1 = \alpha_1, \quad \gamma_j = \alpha_1 - \alpha_j \quad (j = 2,\dots,m), \tag{6}$$

$$S_m^{\mu}(x;z_1,\dots,z_m;\gamma_1,\dots,\gamma_m) = (h_1 * h_2 * \dots * h_m)(x), \tag{7}$$

$$(g*h)(x) = \int_0^x g(x-t)h(t)\,dt \text{ — свертка Лапласа функций } g(x) \text{ и } h(x),$$

$$h_j = h_j(x) \equiv x^{\mu_j-1}\phi(\gamma_j,\mu_j;z_j x^{\gamma_j}),$$

$$\phi(a,b;z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!\Gamma(ak+b)} \text{ — функция Райта [16];}$$

$$x > 0, \quad z_i \in \mathbb{R}, \quad \gamma_j > 0, \quad \mu_j > 0, \quad \mu = \sum_{j=1}^m \mu_j, \tag{8}$$

$$H(x-t) = \begin{cases} 1, & x \geqslant t, \\ 0, & x < t \end{cases} \text{ — функция Хевисайда.}$$

Для функции $G_m^{\mu}(x)$ справедливы равенства [7, 8]:

$$G_m^{\mu}(x) = O(x^{\mu-1}) \quad \text{при} \quad x \to 0, \tag{9}$$

$$D_{0x}^{\nu}G_m^{\mu}(x)=G_m^{\mu-\nu}(x),\quad \text{если}\quad \mu>\nu, \tag{10}$$

$$G_m^{\mu}(x)-\sum_{i=1}^{m}\nu_i D_{0x}^{-\gamma_i}G_m^{\mu}(x)=\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}. \tag{11}$$

В частности, из (11) следует формула

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j G_m^{\mu-\alpha_j}(x)+\lambda G_m^{\mu}(x)=\frac{\beta_1 x^{\mu-\alpha_1-1}}{\Gamma(\mu-\alpha_1)}. \tag{12}$$

Теорема 1. 1) *Пусть* $f(x)\in C]0,1]$ *представима в виде*

$$f(x)=D_{0x}^{\alpha_1-2}g(x),\quad g(x)\in L[0,1],$$

и выполнено условие

$$\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1)\neq 0. \tag{13}$$

Тогда существует регулярное решение задачи (1), (3), *которое имеет вид*

$$u(x)=\int\limits_0^1 \mathscr{G}(x,t)f(t)\,dt+a\left[\sum_{j=1}^{m}\beta_j D_{1t}^{\alpha_j-2}\mathscr{G}(x,t)\right]_{t=0}-b\left[\sum_{j=1}^{m}\beta_j D_{1t}^{\alpha_j-2}\mathscr{G}(x,t)\right]_{t=1}. \tag{14}$$

2) *Решение задачи* (1), (3) *единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие* (13).

◁ Для доказательства теоремы покажем справедливость следующих свойств функции $\mathscr{G}(x,t)$.

1. $D_{1x}^{\alpha_1-2}\mathscr{G}(x,t)\in C(\overline{\Omega})$, $\Omega=\{(x,t):\,0<x<1,\,0<t<1\}$.

Справедливость этого свойства следует из представления (4) и формул (9) и (10).

2. $\mathscr{G}(x,t)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\delta\to 0}\left[\sum_{j=1}^{m}\beta_j D_{1t}^{\alpha_j-1}\mathscr{G}(x,t)\Big|_{t=x+\delta}-\sum_{j=1}^{m}\beta_j D_{1t}^{\alpha_j-1}\mathscr{G}(x,t)\Big|_{t=x-\delta}\right]=1.$$

Действительно, в силу (4) и, принимая во внимание (9)–(11), получим

$$-\lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta_1}G_m^{\alpha_1-\alpha_j}(1-x+\delta)\frac{1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)}{\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1)}-\lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta_1}G_m^{\alpha_1-\alpha_j+1}(\delta)$$
$$+\lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta_1}G_m^{\alpha_1-\alpha_j}(1-x-\delta)\frac{1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)}{\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1)}=\lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{m}\nu_j G_m^{\alpha_1-\alpha_j+1}(\delta)=1.$$

3. При фиксированном значении x, функция $\mathscr{G}(x,t)$ является решением уравнения

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j D_{1t}^{\alpha_j}\mathscr{G}(x,t)+\lambda\mathscr{G}(x,t)=0 \tag{15}$$

в интервалах $(0,x)$ и $(x,1)$.

С учетом (9)–(12) получаем

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta_1}D_{1t}^{\alpha_j}\left[H(x-t)G_m^{\alpha_1}(x-t)-G_m^{\alpha_1-1}(1-t)\frac{1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)}{\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1)}\right]$$
$$+\frac{\lambda}{\beta_1}\left[H(x-t)G_m^{\alpha_1}(x-t)-G_m^{\alpha_1-1}(1-t)\frac{1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)}{\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1)}\right]$$
$$=H(x-t)\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta_1}G_m^{\alpha_1-\alpha_j}(x-t)+\frac{\lambda}{\beta_1}G_m^{\alpha_1}(x-t)\right)$$
$$-\frac{1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)}{\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1)}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta_1}G_m^{\alpha_1-\alpha_j-1}(1-t)+\frac{\lambda}{\beta_1}G_m^{\alpha_1-1}(1-t)\right)=0.$$

4. $\mathscr{G}(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\left[\sum_{j=1}^{m}\beta_j D_{1t}^{\alpha_j-1}\mathscr{G}(x,t)\right]_{t=1}=0,\quad \left[\sum_{j=1}^{m}\beta_j D_{1t}^{\alpha_j-1}\mathscr{G}(x,t)\right]_{t=0}=0.$$

Действительно, учитывая формулы (9) и (12), имеем

$$\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta_1}\left(H(x-t)G_m^{\alpha_1-\alpha_j+1}(x-t)-G_m^{\alpha_1-\alpha_j}(1-t)\frac{1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)}{\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1)}\right)\right]_{t=1}$$
$$=-\frac{1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)}{\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1)}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta_1}G_m^{\alpha_1-\alpha_j}(0)=0$$

и

$$\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta_1}\left(H(x-t)G_m^{\alpha_1-\alpha_j+1}(x-t)-G_m^{\alpha_1-\alpha_j}(1-t)\frac{1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)}{\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1)}\right)\right]_{t=0}$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta_1}G_m^{\alpha_1-\alpha_j+1}(x)-\frac{1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)}{\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1)}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta_1}G_m^{\alpha_1-\alpha_j}(1)=0.$$

Функцию $\mathscr{G}(x,t)$ назовем функцией Грина задачи (1)–(3).

Теперь покажем, что решение задачи (1)–(3) будет иметь вид (14). Заменив в уравнении (1) x на t и умножив обе части уравнения на функцию $\mathscr{G}=\mathscr{G}(x,t)$, проинтегрируем от 0 до 1 по переменной t, считая переменную x фиксированной,

$$\int_0^1\mathscr{G}(x,t)\sum_{j=1}^{m}\beta_j\partial_{0t}^{\alpha_j}u(t)\,dt+\lambda\int_0^1\mathscr{G}(x,t)u(t)\,dt=\int_0^1\mathscr{G}(x,t)f(t)\,dt.$$

Воспользовавшись соотношением (2) и формулой дробного интегрирования по частям [17, с. 15]

$$\int_0^1 g(s)D_{0s}^{\gamma}h(s)\,ds=\int_0^1 h(s)D_{1s}^{\gamma}g(s)\,ds\quad(\gamma\leqslant 0),$$

получаем

$$\int_0^1 u''(t)\sum_{j=1}^{m}\beta_j D_{1t}^{\alpha_j-2}\mathscr{G}(x,t)dt+\lambda\int_0^1\mathscr{G}(x,t)u(t)dt=\int_0^1\mathscr{G}(x,t)f(t)dt.\qquad(16)$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое равенства (16):

$$\int\limits_0^1 u''(t)\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_j-2}\mathscr{G}(x,t)\,dt = u'(t)\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_j-2}\mathscr{G}(x,t)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 u'(t)\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_j-1}\mathscr{G}(x,t)\,dt.$$

Разбив промежуток интегрирования на две части и учитывая свойства 2 и 4, из последнего выражения имеем:

$$u'(t)\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_j-2}\mathscr{G}(x,t)\Big|_0^1 - \left(\int\limits_0^x u'(t)\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_j-1}\mathscr{G}(x,t)\,dt\right.$$
$$\left. + \int\limits_x^1 u'(t)\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_j-1}\mathscr{G}(x,t)\,dt\right) = \left[u'(t)\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_j-2}\mathscr{G}(x,t)\right]_{t=1}$$
$$-\left[u'(t)\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_j-2}\mathscr{G}(x,t)\right]_{t=0} + u(x) + \int\limits_0^1 u(t)\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_j}\mathscr{G}(x,t)\,dt.$$

Полученное равенство подставляем в равенство (16)

$$\left[u'(t)\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_j-2}\mathscr{G}(x,t)\right]_{t=1} - \left[u'(t)\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_j-2}\mathscr{G}(x,t)\right]_{t=0}$$
$$+u(x) + \int\limits_0^1 u(t)\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_j}\mathscr{G}(x,t)dt + \lambda\int\limits_0^1 \mathscr{G}(x,t)u(t)dt = \int\limits_0^1 \mathscr{G}(x,t)f(t)dt,$$

откуда, учитывая (15), приходим к формуле (14). Таким образом, доказано, что если задача (1)–(3) имеет решение, то оно представимо в виде (14). Отсюда в частности следует единственность решения при выполнении условия (13).

Теперь покажем, что функция (14) является решением задачи (1)–(3). Формулу (14) можно переписать в виде

$$u(x) = au_1(x) - bu_2(x) - u_3(x) + u_4(x),$$

где

$$u_1(x) = \left[\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_j-2}\mathscr{G}(x,t)\right]_{t=0}, \quad u_2(x) = \left[\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_j-2}\mathscr{G}(x,t)\right]_{t=1},$$

$$u_3(x) = \frac{1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)}{\beta_1\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1)}\int\limits_0^1 f(t)G_m^{\alpha_1-1}(1-t)\,dt, \quad u_4(x) = \frac{1}{\beta_1}\int\limits_0^x f(t)G_m^{\alpha_1}(x-t)\,dt.$$

Учитывая равенства (9)–(12), получаем

$$u_1(x) = x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x) - \frac{\left(1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)\right)\left(1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(1)\right)}{\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1)},$$

$$u_2(x) = \frac{1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)}{\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1)}.$$

Из (12) следует, что каждая из функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ удовлетворяют однородному уравнению

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j\partial_{0x}^{\alpha_j}+\lambda\right)u_i(x)=0,\quad i=1,2,3.$$

Соотношения (9), (10) и (11) показывают выполнение краевых условий (3).

Для завершения доказательства остается показать, что

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j\partial_{0x}^{\alpha_j}+\lambda\right)u_4(x)=f(x). \tag{17}$$

Имея ввиду (9) и

$$\sum_{i=2}^{m}\nu_i G_m^{\gamma_i+\mu}(x)=G_m^{\mu}(x)-\nu_1 G_m^{\alpha_1+\mu}(x)-\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)},$$

(см. (10) и (11)), а также закон композиции операторов дробного интегро-дифференцирования [1, с. 87], получаем

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\beta_i}{\beta_1}\partial_{0x}^{\alpha_i}\int_0^x f(t)G_m^{\alpha_1}(x-t)dt=\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{m}\frac{\beta_i}{\beta_1}D_{0x}^{\alpha_i-\alpha_1}\left(\int_0^x D_{0x}^{\alpha_1-2}g(t)G_m^{1}(x-t)\,dt\right)$$
$$=\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{m}\frac{\beta_i}{\beta_1}D_{0x}^{\alpha_i-\alpha_1}\int_0^x f(t)G_m^{1}(x-t)dt=\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\left(\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x-t)+1\right)\,dt$$
$$=\frac{-\lambda}{\beta_1}\int_0^x f(t)G_m^{\alpha_1}(x-t)\,dt+f(x),$$

откуда следует (17). $\rhd$

Замечание. При положительных значениях параметров a, b и аргумента z функция Райта $\phi(a,b;z)$ принимает положительные значения. Следовательно, при

$$\lambda<0,\quad \beta_j\leqslant 0,\quad \beta_1>0 \tag{18}$$

функция, определяемая равенством (5), тоже является положительной. Тогда функция $G_m^{\mu}(x)>0$ для любого $\mu>0$. Таким образом, условия (18) обеспечивают выполнение (13) для всех $m\in\mathbb{N}$ и $\alpha_j\in]1,\alpha_1[$, $\alpha_1\in]1,2[$.

3. Интегральное представление функции $G_m^{\mu}(x)$. Обозначим через

$$\gamma(r,\omega\pi)=\{z:\,|z|=r,\,|\arg z|\leqslant\omega\pi\}\cup\{z:\,|z|\geqslant r,\,\arg z=\pm\omega\pi\}, \tag{19}$$

$1/2<\omega\leqslant 1$ — контур Ханкеля, направление обхода выбрано в сторону неубывания $\arg z$ [17, с. 12].

Лемма. *Для функции $G_m^{\mu}(x)$, при $\lambda>0$, с параметрами (6) и (8) справедливо следующее интегральное представление:*

$$G_m^{\mu}(x)=\frac{\beta_1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\omega\pi)}e^{xp}\frac{p^{\alpha_1-\mu}}{\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}+\lambda}\,dp. \tag{20}$$

◁ Используя интегральное представление функции Райта [17, с. 23], получаем

$$x^{\mu_j-1}\phi(\gamma_j,\mu_j;z_jx^{\gamma_j})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}e^{xp}p^{-\mu_j}e^{z_jp^{-\gamma_j}}\,dp.$$

Подставив последнее равенство в (6) и пользуясь теоремой умножения [18, с. 63], имеем

$$\begin{aligned}S_m^{\mu}(x;\nu_1t,\dots,\nu_mt;\gamma_1,\dots,\gamma_m)&=(h_1*h_2*\dots*h_m)(x)\\&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}e^{xp}p^{-\mu}\exp\left(t\sum_{j=1}^{m}\nu_jp^{-\gamma_j}\right)dp.\end{aligned}\tag{21}$$

Домножим (21) на e^{-t} и проинтегрируем по t от 0 до ∞. В (19) параметр r можно выбрать так, чтобы $\mathrm{Re}(1-\left(\sum_{j=1}^{m}\nu_jp^{\gamma_j}\right)>0$. Поэтому в равенстве (21) возможно изменение порядка интегрирования, с учетом (6) отсюда следует

$$\begin{aligned}G_m^{\mu}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}e^{xp}p^{-\mu}\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-t+t\sum_{j=1}^{m}\nu_jp^{-\gamma_j}\right)dt\,dp\\=\frac{\beta_1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}e^{xp}\frac{p^{\alpha_1-\mu}}{\beta_1p^{\alpha_1}+\sum\limits_{j=2}^{m}\beta_jp^{\alpha_j}+\lambda}dp.\ \triangleright\end{aligned}$$

4. О вещественных собственных значениях. Выражение $\nu_1G_m^{\alpha_1}(1)$ будем рассматривать как функцию параметра λ. Обозначим $\psi(\lambda)=\nu_1G_m^{\alpha_1}(1)$. Тогда условие (13) примет вид $\psi(\lambda)\neq0$. Из (20) следует, что

$$G_m^{\mu}(1)=\frac{\beta_1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}\frac{e^p}{\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_jp^{\alpha_j}+\lambda}\,dp.$$

Теорема 2. *Пусть $\lambda>0$ и*

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\Gamma(-\alpha_j)}\neq0.\tag{22}$$

Тогда задача Неймана (3) для уравнения (1) имеет единственное решение для всех (за исключением, быть может, конечного числа) значений λ.

◁ Для доказательства теоремы необходимо показать, что соотношение (13) выполняется для всех $\lambda\in\mathbb{R}$, за исключением не более чем конечного числа его значений.

Рассмотрим следующее предельное соотношение:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\psi(\lambda)=-\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda^2}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}\frac{e^p}{\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}+\lambda}\,dp$$

$$=-\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}e^p\frac{\lambda-\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}+\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}}{\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}+\lambda}\,dp$$

$$=-\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}e^p\left(1-\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}}{\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}+\lambda}\right)dp.$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}e^p dp=0,$$

то согласно [19, с. 311] получим

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\psi(\lambda)&=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}e^p\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}}{\lambda^{-1}\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}+1}\,dp\\&=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}e^p\sum_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}\,dp=\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\Gamma(-\alpha_j)}.\end{aligned}\tag{23}$$

Из (20) следует, что $\psi(\lambda)$ является целой функцией параметра λ. В силу того, что $\psi(\lambda)$ является целой, в ограниченной области она может иметь лишь конечное число вещественных нулей. Поэтому, если предположить, что функция $\psi(\lambda)$ имеет бесконечное число нулей, то они должны сгущаться в бесконечно удаленной точке, что противоречит (22) и (23). Следовательно, условие (13) может нарушаться только для конечного числа значений λ.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Barrett J. H.* Differential equations of non-integer order // Canadian J. Math.—1954.—Vol. 6, № 4.—P. 529–541.
3. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН Армянской ССР. Математика.—1968.—Т. 3, № 1.—С. 3–28.
4. *Джрбашян М. М.* Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма — Лиувилля // Изв. АН Армянской ССР.—1970.—№ 2.—С. 71–96.
5. *Нахушев А. М.* Задача Штурма — Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 234, № 2.—С. 308–311.
6. *Ozturk I.* On the theory of fractional differential equation // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.—1998.—Т. 3, № 2.—С. 35–39.

7. *Псху А. В.* К теории задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. акад. наук.—2009.—Т. 11, № 1.— С. 61–65.
8. *Псху А. В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сб.—2011.—Т. 202, № 4.—С. 111–122.
9. *Гадзова Л. Х.* Обобщенная задача Дирихле для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 1.—С. 121–125.
10. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations.—Amsterdam: Elsevier, 2006.—(North-Holland Math. Stud.; Vol. 204).
11. *Гадзова Л. Х.* Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. акад. наук.—2013.—Т. 15, № 2.—С. 36–39.
12. *Гадзова Л. Х.* К теории краевых задач для дифференциального уравнения дробного порядка с производной Капуто // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. акад. наук.—2014.—Т. 16, № 2.— С. 34–40.
13. *Bagley R. L., Torvik P. J.* Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures // AIAA J.—1985.—Vol. 23, № 6.—P. 918–925.
14. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск.: Наука и техника, 1987.—688 с.
15. *Нахушев А. М., Тхакахов Р. Б.* О континуальных аналогах реологических уравнений состояния и логистическом законе изменения вязкоупругих свойств полимера // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. акад. наук.—1995.—Т. 1, № 2.—С. 6–11.
16. *Wright E. M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc.—1933.—Vol. 8, № 29.—P. 71–79.
17. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка.—М.: Наука, 2005.—199 с.
18. *Штокала И. З.* Операционное исчисление (обобщение и приложения).—Киев: Наукова думка, 1972.—304 с.
19. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 2.—М.: Высшая школа, 1981.—584 с.

Статья поступила 1 апреля 2015 г.

Гадзова Луиза Хамидбиевна
Институт прикладной математики и автоматизации,
научный сотрудник отдела дробного исчисления
РОССИЯ, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 а
E-mail: macaneeva@mail.ru

NEUMANN PROBLEM FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF FRACTIONAL ORDER

Gadzova L. H.

A linear ordinary differential equation of fractional order with constant coefficients is considered in the paper. Such equation should be subsumed into the class of discretely distributed order, or multi-term differential equations. The fractional differentiation is given by the Caputo derivative. We solve The Nuemann problem for the equation under study, prove the existence and uniqueness of the solution, find an explicit representation for solution in terms of the Wright function, and construct the respective Green function. It is also proved that the real part of the spectrum of the problem may consist at most of a finite number of eigenvalues.

Key words: boundary value problem, operator of fractional differentiation, Riemann–Liouville operator, Caputo operator.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 3, С. 31–34

УДК **512.5**

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СЕТЬ, АССОЦИИРОВАННАЯ С ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГРУППОЙ

Р. Ю. Дряева, В. А. Койбаев[1]

Для элементарной сети Ω, ассоциированной с элементарной сетевой группой $E(\sigma)$ (определенной для элементарной сети σ) доказывается, что она является наименьшей дополняемой элементарной сетью, содержащей элементарную сеть σ. Устанавливается связь между элементарной сетью Ω и производной сетью ω (определенной для элементарной сети σ).

Ключевые слова: ковер, элементарный ковер, сеть, элементарная сеть, элементарная группа, трансвекция.

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число, $n \geqslant 3$. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца R называется *сетью* [1] над кольцом R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Для сети принята также терминология «ковер» [2]. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарный ковер* [3, 4, вопрос 15.46]). Для элементарной сети в [5] введено понятие производной элементарной сети.

Пусть e — единичная матрица порядка n, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули. Если $\alpha \in R$, то через $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ обозначается элементарная трансвекция. Положим, далее, $t_{ij}(A) = \{t_{ij}(\alpha) : \alpha \in A\}$.

Для элементарной сети σ через $E(\sigma)$ обозначается элементарная сетевая группа:

$$E(\sigma) = \big\langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \big\rangle.$$

Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называется *дополняемой*, если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} кольца R таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, является (полной) сетью. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является *дополняемой* (см., например, [1]) тогда и только тогда, когда $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ для любых $i \neq j$.

В [6] определены замкнутые (допустимые) сети. Для элементарной сети σ рассмотрим элементарную сеть $\bar\sigma = (\bar\sigma_{ij})$, индуцированную трансвекциями из элементарной группы $E(\sigma)$. Точнее, посмотрим, какие элементарные трансвекции появились (содержатся) в $E(\sigma)$. А именно, для любых $i \neq j$ положим

$$\bar\sigma_{ij} = \big\{\alpha \in R : t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)\big\}.$$

Очевидно, что $\bar\sigma_{ij}$ — аддитивные группы и в силу известного коммутаторного соотношения (для попарно различных i, r, j)

$$[t_{ir}(\alpha), t_{rj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta)$$

мы имеем $\bar\sigma_{ir}\bar\sigma_{rj} \subseteq \bar\sigma_{ij}$, а потому таблица $\bar\sigma = (\bar\sigma_{ij})_{i\neq j}$ является элементарной сетью.

© 2016 Дряева Р. Ю., Койбаев В. А.

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России и темы НИР ЮМИ ВНЦ РАН (рег. номер НИОКР 115033020013).

Определение. Элементарную сеть $\bar{\sigma}$ мы называем *замыканием сети* σ. Если $\sigma = \bar{\sigma}$, то сеть σ мы называем *замкнутой* (или *допустимой*).

Предложение 1. *Всякая дополняемая элементарная сеть является замкнутой.*

$\lhd$ Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — дополняемая элементарная сеть (и мы дополнили ее диагональю до (полной) сети). В этом случае в силу сетевого соотношения $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ (выполненное для всех $1 \leqslant i, r, j \leqslant n$) множество матриц

$$M(\sigma) = \{a = (a_{ij}) : \ a_{ij} \in \sigma_{ij}, \ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$$

является кольцом, следовательно, $e+M(\sigma)$ — полугруппа, в частности, $E(\sigma) \subseteq (e+M(\sigma))$, а потому никаких новых элементарных трансвекций в $E(\sigma)$ быть не может: если $\alpha \in \overline{\sigma}_{ij}$, т. е. $t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)$, то $t_{ij}(\alpha) \in (e + M(\sigma)) \Rightarrow \alpha e_{ij} \in M(\sigma) \Rightarrow \alpha \in \sigma_{ij} \Rightarrow \sigma = \overline{\sigma}$. $\rhd$

С другой стороны в [6] приводятся примеры замкнутых сетей, которые не являются дополняемыми. Интерес к дополняемым сетям состоит в том, что по таким сетям строятся сетевые группы [1].

Пусть α, β — подгруппы аддитивной группы кольца R. Для элементарной сети τ второго порядка

$$\tau = \begin{pmatrix} * & \alpha \\ \beta & * \end{pmatrix}$$

положим $\gamma = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha\beta)^k$. Рассмотрим элементарную группу $E(\tau) = \langle t_{21}(\beta), t_{12}(\alpha)\rangle$. Можно показать, что если $a \in E(\tau)$, $a = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1 + a_{22} \end{pmatrix}$, то $a_{11}, a_{22} \in \gamma$, $a_{12} \in \alpha + \alpha\gamma$, $a_{21} \in \beta + \beta\gamma$. Последнее замечание индуцирует следующее построение.

Для любых $i \neq j$ положим

$$\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty}(\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m.$$

Для произвольных $i \neq j$ положим $\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij}$.

Предложение 2 [5, предложение 5]**.** *Таблица* $\Omega = (\Omega_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, *является дополняемой элементарной сетью.*

С другой стороны в [5] для элементарной сети определяется производная элементарная сеть. А именно, Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом R порядка n. Рассмотрим набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца R, определенных для любых $i \neq j$ следующим образом:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj},$$

где, очевидно (так как σ — элементарная сеть), суммирование берется по всем k, отличным от i и j. Ясно, что $\omega_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$, следовательно, для любой тройки попарно различных чисел i, r, j, мы имеем

$$\omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}.$$

Таким образом, набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij}, $i \neq j$, кольца R является элементарной сетью, которую мы называем производной элементарной сетью.

Предложение 3. *Для любой тройки попарно различных индексов* i, r, j *справедливы включения*

$$\Omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \quad \Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \quad \omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}.$$

◁ Заметим, что второе и третье включения вытекают из первого и того, что $\omega_{rj} \subseteq \Omega_{rj}$, $\omega_{ir} \subseteq \Omega_{ir}$. Поэтому докажем первое.

Пусть i, r, j — попарно различные натуральные числа. Заметим вначале, что

$$\sigma_{ir}(\sigma_{jr}\sigma_{rj})^s \subseteq \sigma_{ir}, \quad \sigma_{rj}(\sigma_{ir}\sigma_{ri})^k \subseteq \sigma_{rj}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&(\sigma_{ir} + \sigma_{ir}(\sigma_{ir}\sigma_{ri})^k)(\sigma_{rj} + \sigma_{rj}(\sigma_{jr}\sigma_{rj})^s) \\
&= \sigma_{ir}\sigma_{rj} + \sigma_{ir}\sigma_{rj}(\sigma_{jr}\sigma_{rj})^s + (\sigma_{ir}\sigma_{rj})(\sigma_{ir}\sigma_{ri})^k(\sigma_{jr}\sigma_{rj})^s + (\sigma_{ir}\sigma_{rj})(\sigma_{ir}\sigma_{ri})^k \\
&= \sigma_{ir}\sigma_{rj} + [\sigma_{ir}(\sigma_{rj}\sigma_{jr})^s]\sigma_{rj} + [\sigma_{ir}(\sigma_{rj}\sigma_{jr})^s][(\sigma_{ri}\sigma_{ir})^k\sigma_{rj}] + \sigma_{ir}[(\sigma_{ri}\sigma_{ir})^k\sigma_{rj}] \\
&\subseteq \sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \omega_{ij}. \ \rhd
\end{aligned}$$

Как нетрудно видеть, элементарную сеть $\Omega = (\Omega_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, можно дополнить до сети кольцами

$$\Omega_{ii} = \sum_{k\neq i} \Omega_{ik}\Omega_{ki},$$

где суммирование берется по $k = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq i$. Заметим, что

$$\Omega_{ii} = \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{n} \gamma_{ik}.$$

Так, например, $\Omega_{11} = \gamma_{12} + \gamma_{13} + \ldots + \gamma_{1n}$.

Определение. Сеть $\Omega = (\Omega_{ij})$ мы называем *сетью*, ассоциированной с элементарной группой $E(\sigma)$ для элементарной сети σ.

Ясно, что $\sigma \subseteq \Omega$.

Теорема. *Сеть Ω является наименьшей (дополняемой) сетью, содержащей элементарную сеть σ.*

◁ Пусть τ — дополняемая сеть и $\sigma \subseteq \tau$. Покажем, что $\Omega \subseteq \tau$. Сначала покажем, что для $i \neq j$, $\Omega_{ij} \subseteq \tau_{ij}$. Напомним, что $(i \neq j)$

$$\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}(\sigma_{ji}\sigma_{ij}) + \sigma_{ij}(\sigma_{ji}\sigma_{ij})^2 + \ldots$$

Имеем $\sigma_{ij} \subseteq \tau_{ij}$, далее, в силу дополняемости сети τ мы имеем $\tau_{ij}\tau_{ji}\tau_{ij} \subseteq \tau_{ij}$, а потому

$$\sigma_{ij}(\sigma_{ji}\sigma_{ij}) \subseteq \tau_{ij}\tau_{ji}\tau_{ij} \subseteq \tau_{ij},$$

из последнего включения мы имеем

$$\sigma_{ij}(\sigma_{ji}\sigma_{ij})^2 \subseteq \tau_{ij}(\sigma_{ji}\sigma_{ij}) \subseteq \tau_{ij}\tau_{ji}\tau_{ij} \subseteq \tau_{ij}.$$

и так далее. Следовательно, для $i \neq j$ мы имеем $\Omega_{ij} \subseteq \tau_{ij}$. Далее, в силу того, что мы стандартным образом (т. е. наименьшей диагональю, определенной через недиагональные элементы сети Ω, которые, как мы уже доказали, не больше соответствующих элементов сети τ) дополнили элементарную сеть Ω диагональю, мы имеем $\Omega_{ii} \subseteq \tau_{ii}$. ▷

Литература

1. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
2. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.—М.: Наука, 1982.—288 с.
3. *Левчук В. М.* Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 4.—С. 421–434.
4. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд-е 17-е.—Новосибирск, 2010.
5. *Койбаев В. А.* Сети, ассоциированные с элементарными сетями // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, вып. 4.—С. 39–43.
6. *Койбаев В. А., Нужин Я. Н.* Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца // Фундамент. и прикл. матем.—2013.—Т. 18, вып. 1.—С. 75–84.

Статья поступила 21 декабря 2015 г.

Дряева Роксана Юрьевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
аспирант кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Россия, ул. Ватутина, 46
E-mail: `dryaeva-roksana@mail.ru`

Койбаев Владимир Амурханович
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
заведующий кафедрой алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Россия, ул. Ватутина, 46;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела функц. анализа
РОССИЯ, 362025, Россия, ул. Маркуса, 22
E-mail: `koibaev-K1@yandex.ru`

AN ELEMENTARY NET ASSOCIATED WITH THE ELEMENTARY GROUP

Dryaeva R. Y., Koibaev V. A.

Let R be an arbitrary commutative ring with identity, n a positive integer, $n \geqslant 2$. The set $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, of additive subgroups of the ring R is called a *net* (or *carpet*) over the ring R of order n, if the inclusions $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ hold for all i, r, j. The net without the diagonal, is called an *elementary net.* The elementary net $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, is called *complemented*, if for some additive subgroups σ_{ii} of the ring R the set $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ is a (full) net. The elementary net $\sigma = (\sigma_{ij})$ is complemented if and only if the inclusions $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ hold for any $i \neq j$. Some examples of not complemented elementary nets are well known. With every net σ can be associated a group $G(\sigma)$ called a *net* group. This groups are important for the investigation of different classes of groups.
It is proved in this work that for every elementary net σ there exists another elementary net Ω associated with the elementary group $E(\sigma)$. It is also proved that an elementary net Ω associated with the elementary group $E(\sigma)$ is the smallest elementary net that contains the elementary net σ.

Key words: carpet, elementary carpet, net, elementary net, net group, elementary group, transvection.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 3, С. 35–42

УДК **519.17**

РАСШИРЕНИЯ ПСЕВДОГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФОВ ДЛЯ $pG_{s-5}(s,t)$[1]

А. К. Гутнова, А. А. Махнев

В работе найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — исключительные псевдогеометрические графы для $pG_{s-5}(s,t)$.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, псевдогеометрический граф, собственное значение графа.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma(a)=\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается $[a]$, если граф Γ фиксирован. Положим $a^\perp=\{a\}\cup[a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Пусть $\mathscr{F}$ — некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально $\mathscr{F}$-графом*, если $[a]$ лежит в $\mathscr{F}$ для любой вершины a графа Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ $(\Gamma_{i-1}(u))$ с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0,b_1,\dots,b_{d-1};c_1,\dots,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i=0,\dots,d$. Положим $a_i=k-b_i-c_i$.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathscr{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой, и для любого антифлага $(a,l)\in(P,\mathscr{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих l (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). В случае $\alpha=1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s,t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=s-1+t(\alpha-1)$, $\mu=\alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами

© 2016 Гутнова А. К., Махнев А. А.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 15-11-10025 (теорема 1 и следствие), а также соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 2).

для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением меньше либо равным t для данного натурального числа t. Заметим, что сильно регулярный граф с нецелым собственным значением является графом в половинном случае, а вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы в половинном случае, либо имеет диаметр 2, либо является графом Тэйлора. Таким образом, задача Кулена сводится к описанию дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением t для $t = 1, 2, \dots$

В [1] завершено решение задачи Кулена для $t = 4$ и псевдогеометрических окрестностей вершин. В работе [2] получена редукция задачи Кулена для $t = 5$ к случаю, когда окрестности вершин — исключительные графы.

В данной работе рассматриваются дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин — исключительные псевдогеометрические графы для $pG_{s-5}(s,t)$. Выделим сначала параметры (s,t), которые имеет исключительный псевдогеометрический граф для $pG_{s-5}(s,t)$, вкладываемый в качестве окрестности вершины в дистанционно регулярный граф.

Предложение. *Пусть Γ — исключительный псевдогеометрический граф для $pG_{s-5}(s,t)$. Если Γ вкладывается в качестве окрестности вершины в дистанционно регулярный граф диаметра, большего 2, то его параметры (s,t) лежат в одном из следующих списков:*

(1) $(6,3)$, $(6,4)$, $(6,6)$, $(6,8)$, $(6,9)$, $(6,12)$, $(6,14)$, $(6,15)$, $(6,22)$, $(6,24)$, $(6,29)$, $(6,30)$, $(6,36)$;

(2) $(7,1)$, $(7,4)$, $(7,6)$, $(7,8)$, $(7,9)$, $(7,14)$, $(7,15)$, $(7,18)$, $(7,22)$, $(7,24)$, $(7,29)$, $(7,34)$, $(7,36)$, $(7,50)$, $(7,54)$;

(3) $(8,2)$, $(8,4)$, $(8,6)$, $(8,9)$, $(8,10)$, $(8,12)$, $(8,14)$, $(8,18)$, $(8,24)$, $(8,30)$, $(8,34)$, $(8,39)$, $(8,42)$, $(8,54)$, $(8,66)$, $(8,74)$, $(8,84)$;

(4) $(9,12)$, $(9,24)$, $(9,44)$, $(9,48)$, $(9,84)$, $(9,144)$, $(10,4)$, $(10,16)$, $(10,24)$, $(10,27)$, $(10,38)$, $(10,49)$, $(10,54)$, $(10,60)$, $(10,104)$, $(10,126)$, $(10,159)$, $(10,214)$.

Теорема 1. *Пусть Γ — вполне регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин — исключительные псевдогеометрические графы для $pG_{s-5}(s,t)$. Если диаметр Γ больше 3, то либо $s = 6$ и $t \in \{3,4,6,8,9\}$, либо $s = 7$ и $t = 1$. Если же диаметр Γ равен 3, то либо $s = 10$ и Γ — граф Тэйлора, либо выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $s = 9$, $t = 12$ *и* $118 \leqslant \mu \leqslant 162$;

(2) $6 \leqslant s \leqslant 8$.

Теорема 2. *Пусть Γ — вполне регулярный граф диаметра 3, в котором окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $GQ(6,t)$, $t \in \{3,4,6,9,12,14,15,22,24,29,30,36\}$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) $t = 3$, $\mu \in \{6,7,9,12,14,18,19,21,24,27,28,36,38,42,54,57,63,76,84\}$;

(2) $t = 4$, $\mu \in \{6,8,10,12,14,16,18,20,24,28,30,36,40,42,48,50,56,60,70,72,80,84,90,100,112,120,126,140\}$;

(3) $t = 6$, $\mu \in \{18,24,28,36,42,54,56,72,74,50,84,108,126,148,168\}$;

(4) $t = 8$, $\mu \in \{32,36,42,48,54,56,72,84,96,98,112,126,144,168,196,224,252\}$;

(5) $t=9$, $\mu \in \{36,42,44,45,54,55,60,63,66,70,77,81,84,90,99,105,108,$ $110,126,132,140,154,162,165,189,198,210,220,231,252,264,270,297,308,315\}$;

(6) $t=12$, $\mu \in \{72,84,108,112,126,144,146,168,216,252,292,336,378\}$;

(7) $t=14$, $\mu \in \{72,84,90,102,118,120,126,136,140,168,170,180,196,204,$ $210,238,252,280,294,306,360,392,408,420,476,490\}$;

(8) $t=15$, $\mu \in \{78,84,90,91,98,105,108,117,126,130,140,135,147,156,$ $180,182,189,195,196,210,234,245,252,260,270,273,294,315,351,364,378,$ $420,441,455,490,510,\}$;

(9) $t=22$, $\mu \in \{132,152,154,168,196,198,224,252,264,266,294,308,342,$ $392,396,418,456,462,504,528,588,616,684\}$;

(10) $t=24$, $\mu \in \{144,160,168,174,180,210,216,232,224,240,252,270,280,$ $288,290,336,348,360,378,406,420,432,464,480,504,522,540,560,580,630,$ $672,696,720,756,812,840\}$;

(11) $t=29$, $\mu \in \{180,203,210,225,252,261,290,300,315,348,350,406,420,$ $435,450,522,525,580,609,630,700,725,812,870,1015\}$;

(12) $t=30$, $\mu \in \{210,216,252,270,280,360,362,420,504,540,630,724,840\}$;

(13) $t=36$, $\mu \in \{248,252,294,324,336,372,378,392,432,434,496,504,558,$ $588,648,672,744,756,784,868,882,1008,1116,1134\}$.

Следствие. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geqslant 3$, в котором окрестности вершин — исключительные псевдогеометрические графы для $pG_{s-5}(s,t)$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) $s=10$ и Γ — граф Тэйлора;

(2) $s=7$ либо $t=1$ и Γ — локально $T(9)$-граф с массивом пересечений $\{36,21,10,3;1,6,15,28\}$ (половинный 9-куб) либо $t=18$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{512,378,1;1,189,512\}$;

(3) $s=6$ и либо $t=4$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{175,144,22;1,24,154\}$ или $\{175,144,1;1,12,175\}$, либо $t=8$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{343,288,1;1,96,343\}$.

Для доказательства следствия полезен следующий результат.

Лемма 1 [4, теорема 20]**.** *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geqslant 3$ и степени $k>2$. Если $k_2 \leqslant 3k/2$ (равносильно $c_2 \geqslant 2b_1/3$), то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $d=3$ и Γ — двудольный граф или граф Тэйлора;

(2) Γ — граф Джонсона $J(7,3)$ или 4-куб.

2. Вполне регулярные локально псевдо $pG_{s-5}(s,t)$-графы

Лемма 2. *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_{s-5}(s,t)$, Δ — регулярный подграф степени $(s-5)(t+1)$ на w вершинах. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $v(st-5t+s-10)/(st+s-5) \leqslant w \leqslant (s-4)v/(s+1)$, если одно из этих нестрогих неравенств превращается в равенство, то любая вершина из $\Gamma-\Delta$ смежна с $5(t+1)w/(v-w)$ вершинами из Δ;

(2) если X_i — множество вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i=|X_i|$, то $(2st+2s+t-4)^2 w \cdot x_0 \leqslant (v-w)(v-x_0)(t+6)^2$;

(3) если $w=x_0$, то $2(st+t+s+1)x_0 \leqslant v(t+6)$.

$\lhd$ Ввиду [4] верны неравенства $-(t+1) \leqslant (s-5)(t+1)-5(t+1)w/(v-w) \leqslant 5$.

Отсюда $v(st-5t+s-10)/(st+s-5)\leqslant w\leqslant(s-4)v/(s+1)$. Если одно из этих нестрогих неравенств превращается в равенство, то ввиду [6] любая вершина из $\Gamma-\Delta$ смежна точно с $5(t+1)w/(v-w)$ вершинами из Δ.

По предложению 4.6.1 из [5] имеем $w\cdot x_0\leqslant(v-w)(v-x_0)(t+6)^2/(2s(t+1)-5+(t+1))^2$. Поэтому $(2st+2s+t-4)^2w\cdot x_0\leqslant(v-w)(v-x_0)(t+6)^2$.

Если $w=x_0$, то $(2st+2s+t-4)x_0\leqslant(v-x_0)(t+6)$, поэтому $(2st+2s+2t+2)x_0\leqslant v(t+6)$. $\rhd$

Лемма 3. *Если диаметр Γ больше 3, то либо $s=6$ и $t\in\{3,4,6,8,9\}$, либо $s=7$ и $t=1$.*

$\lhd$ Пусть Γ содержит геодезический 4-путь u, w, x, y, z. Тогда в графе $[x]$ между $[u]\cap[x]$ и $[x]\cap[z]$ нет ребер и ввиду леммы 2 имеем $v(st-5t+s-10)/(st+s-5)\leqslant w\leqslant v(t+6)/(2st+2s+2t+2)$. Поэтому $2(st+s+t+1)(st-5t+s-10)\leqslant(st+s-5)(t+6)$.

В случае $s=6$ имеем $14(t+1)(t-4)\leqslant(6t+1)(t+6)$, поэтому $t\leqslant 9$. Ввиду предложения $t\in\{3,4,6,8,9\}$.

В случае $s=7$ имеем $16(t+1)(2t-3)\leqslant(7t+2)(t+6)$, поэтому $t\leqslant 3$. Так как псевдогеометрический граф для $pG_3(7,3)$ не является исключительным графом, то $t=1$.

В случае $s=8$ имеем $16(t+1)4t\leqslant 4(2t-1)(t+5)$ и $t=1$, противоречие. $\rhd$

Лемма 4. *Если диаметр Γ равен 3, то либо $s=10$ и Γ — граф Тэйлора, либо $s=9$, $t=12$ и $118\leqslant\mu\leqslant 162$, либо $6\leqslant s\leqslant 8$.*

$\lhd$ Если $s=10$, то Γ — граф Тэйлора.

Пусть $s=9$. Тогда $k=v'=(s+1)(1+st/(s-5))=5(9t+4)/2$, $\lambda=k'=s(t+1)=9(t+1)$, $b_1=6st/(s-5)=27t/2$ и t делится на 4. Ввиду леммы 2 имеем $(19t+14)^2\mu\cdot x_0\leqslant(5(9t+4)/2-\mu)(5(9t+4)/2-x_0)(t+6)^2$.

Если $t=24$, то $k=v'=550$, $\lambda=k'=225$, $b_1=324$, $238\leqslant\mu\leqslant 324$ и $4\cdot 238\cdot 242^2\cdot x_0\leqslant 4\cdot 242^2\mu\cdot x_0\leqslant 212(550-x_0)30^2$, поэтому $x_0=1$, противоречие.

Значит, $t=12$, $k=v'=280$, $\lambda=k'=117$, $b_1=162$, $118\leqslant\mu\leqslant 162$ и μ делит $280\cdot 162$.

Лемма 4, а вместе с ней и теорема 1 доказаны. $\rhd$

3. Вполне регулярные локально псевдо $GQ(6,t)$-графы

В леммах 5–9 предполагается, что Γ — вполне регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ) диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $GQ(6,t)$ с параметрами $(42t+7,6t+6,5,t+1)$ и неглавными собственными значениями $5,-(t+1)$. Заметим, что каждый μ-подграф регулярен степени $t+1$, поэтому в случае четного t параметр μ четен.

Лемма 5. *Пусть u, w — вершины из Γ с $d(u,w)=2$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$7(t-4)\leqslant\mu\leqslant 36t$ и μ делит $7\cdot 36t(6t+1)$;*

(2) *если X_i — множество вершин из $[w]-[u]$, смежных точно с i вершинами из $[u]\cap[w]$, $x_i=|X_i|$, то $(13t+8)^2\mu\cdot x_0\leqslant(42t+7-\mu)(42t+7-x_0)(t+6)^2$;*

(3) *если $x_0=\mu$, то $\mu\leqslant(t+6)(6t+1)/(2t+2)$.*

$\lhd$ Ввиду леммы 1 верны неравенства $7(t-4)\leqslant\mu\leqslant 36t$ и μ делит $7\cdot 36t(6t+1)$.

Имеем $(13t+8)^2\mu\cdot x_0\leqslant(42t+7-\mu)(42t+7-x_0)(t+6)^2$. Если $x_0=\mu$, то $(13t+8)\mu\leqslant(42t+7-\mu)(t+6)$, поэтому $\mu\leqslant(t+6)(6t+1)/(2t+2)$. $\rhd$

Лемма 6. *Если $t=3$, то верны следующие утверждения:*

(1) *$\mu\in\{6,7,9,12,14,18,19,21,24,27,28,36,38,42,54,57,63,76,84\}$;*

(2) *если диаметр Γ больше 3, то $\mu\leqslant 21$.*

$\lhd$ В случае параметров $(133, 24, 5, 4)$ по лемме 6 имеем $4 < \mu < 108$. Так как μ делит $28 \cdot 27 \cdot 19$, то $\mu \in \{6, 7, 9, 12, 14, 18, 19, 21, 24, 27, 28, 36, 38, 42, 54, 57, 63, 76, 84\}$.

Если диаметр Γ больше 3, то ввиду утверждения (3) леммы 5 имеем $\mu \leqslant 9 \cdot 19/8$, поэтому $\mu \leqslant 21$. $\rhd$

Аналогично доказываются следующие две леммы.

Лемма 7. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если* $t = 4$, *то* $\mu \in \{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 36, 40, 42, 48, 50, 56, 60, 70, 72, 80, 84, 90, 100, 112, 120, 126, 140\}$, *в случае* $d(\Gamma) > 3$ *имеем* $\mu \leqslant 25$;

(2) *если* $t = 6$, *то* $\mu \in \{18, 24, 28, 36, 42, 54, 56, 72, 74, 50, 84, 108, 126, 148, 168\}$, *в случае* $d(\Gamma) > 3$ *имеем* $\mu \leqslant 31$.

Лемма 8. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если* $t = 8$, *то* $\mu \in \{32, 36, 42, 48, 54, 56, 72, 84, 96, 98, 112, 126, 144, 168, 196, 224, 252\}$, *в случае* $d(\Gamma) > 3$ *имеем* $\mu = 32, 36$;

(2) *если* $t = 9$, *то* $\mu \in \{36, 42, 44, 45, 54, 55, 60, 63, 66, 70, 77, 81, 84, 90, 99, 105, 108, 110, 126, 132, 140, 154, 162, 165, 189, 198, 210, 220, 231, 252, 264, 270, 297, 308, 315\}$, *в случае* $d(\Gamma) > 3$ *имеем* $\mu = 36$.

Лемма 9. *Пусть* $t \geqslant 12$. *Тогда диаметр* Γ *равен* 3 *и верны следующие утверждения:*

(1) *если* $t = 12$, *то* $\mu \in \{72, 84, 108, 112, 126, 144, 146, 168, 216, 252, 292, 336, 378\}$;

(2) *если* $t = 14$, *то* $\mu \in \{72, 84, 90, 102, 118, 120, 126, 136, 140, 168, 170, 180, 196, 204, 210, 238, 252, 280, 294, 306, 360, 392, 408, 420, 476, 490\}$;

(3) *если* $t = 15$, *то* $\mu \in \{78, 84, 90, 91, 98, 105, 108, 117, 126, 130, 140, 135, 147, 156, 180, 182, 189, 195, 196, 210, 234, 245, 252, 260, 270, 273, 294, 315, 351, 364, 378, 420, 441, 455, 490, 510\}$;

(4) *если* $t = 22$, *то* $\mu \in \{132, 152, 154, 168, 196, 198, 224, 252, 264, 266, 294, 308, 342, 392, 396, 418, 456, 462, 504, 528, 588, 616, 684\}$;

(5) *если* $t = 24$, *то* $\mu \in \{144, 160, 168, 174, 180, 210, 216, 232, 224, 240, 252, 270, 280, 288, 290, 336, 348, 360, 378, 406, 420, 432, 464, 480, 504, 522, 540, 560, 580, 630, 672, 696, 720, 756, 812, 840\}$;

(6) *если* $t = 29$, *то* $\mu \in \{180, 203, 210, 225, 252, 261, 290, 300, 315, 348, 350, 406, 420, 435, 450, 522, 525, 580, 609, 630, 700, 725, 812, 870, 1015\}$;

(7) *если* $t = 30$, *то* $\mu \in \{210, 216, 252, 270, 280, 360, 362, 420, 504, 540, 630, 724, 840\}$;

(8) *если* $t = 36$, *то* $\mu \in \{248, 252, 294, 324, 336, 372, 378, 392, 432, 434, 496, 504, 558, 588, 648, 672, 744, 756, 784, 868, 882, 1008, 1116, 1134\}$.

$\lhd$ Если $t \geqslant 12$, то нарушается неравенство $7(t-4) \leqslant \mu \leqslant (t+6)(6t+1)/(2t+2)$, поэтому диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(511, 78, 5, 13)$ имеем $56 < \mu < 432$. Так как μ делит $84 \cdot 36 \cdot 73$, то $\mu \in \{72, 84, 108, 112, 126, 144, 146, 168, 216, 252, 292, 336, 378\}$.

В случае параметров $(595, 90, 5, 15)$ имеем $70 < \mu < 504$. Так как μ делит $98 \cdot 36 \cdot 85$, то $\mu \in \{72, 84, 90, 102, 118, 120, 126, 136, 140, 168, 170, 180, 196, 204, 210, 238, 252, 280, 294, 306, 360, 392, 408, 420, 476, 490\}$.

В случае параметров $(637, 96, 5, 16)$ имеем $77 < \mu < 540$. Так как μ делит $42 \cdot 90 \cdot 91$, то $\mu \in \{78, 84, 90, 91, 98, 105, 108, 117, 126, 130, 140, 135, 147, 156, 180, 182, 189, 195, 196, 210, 234, 245, 252, 260, 270, 273, 294, 315, 351, 364, 378, 420, 441, 455, 490, 510\}$.

В случае параметров $(931, 138, 5, 23)$ имеем $126 < \mu < 792$. Так как μ делит $931 \cdot 792$, то $\mu \in \{132, 152, 154, 168, 196, 198, 224, 252, 264, 266, 294, 308, 342, 392, 396, 418, 456, 462, 504, 528, 588, 616, 684\}$.

В случае параметров $(1015, 150, 5, 25)$ имеем $140 < \mu < 864$. Так как μ делит $1015 \cdot 864$, то $\mu \in \{144, 160, 168, 174, 180, 210, 216, 232, 224, 240, 252, 270, 280, 288, 290, 336, 348, 360, 378, 406, 420, 432, 464, 480, 504, 522, 540, 560, 580, 630, 672, 696, 720, 756, 812, 840\}$.

В случае параметров $(1225, 180, 5, 30)$ имеем $175 < \mu < 1044$. Так как μ делит $1225 \cdot 1044$, то $\mu \in \{180, 203, 210, 225, 252, 261, 290, 300, 315, 348, 350, 406, 420, 435, 450, 522, 525, 580, 609, 630, 700, 725, 812, 870, 1015\}$.

В случае параметров $(1267, 186, 5, 31)$ имеем $182 < \mu < 1080$. Так как μ делит $1267 \cdot 1080$, то $\mu \in \{210, 216, 252, 270, 280, 360, 362, 420, 504, 540, 630, 724, 840\}$.

В случае параметров $(1519, 252, 5, 37)$ имеем $224 < \mu < 1296$. Так как μ делит $1519 \cdot 1296$, то $\mu \in \{248, 252, 294, 324, 336, 372, 378, 392, 432, 434, 496, 504, 558, 588, 648, 672, 744, 756, 784, 868, 882, 1008, 1116, 1134\}$.

Лемма 9 и теорема 2 доказаны. $\rhd$

3. Дистанционно регулярные локально псевдо $pG_{s-5}(s,t)$-графы

В этом параграфе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geqslant 3$, в котором окрестности вершин — псевдогеометрические исключительные графы для $pG_{s-5}(s,t)$. Пусть $\theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_d$ — собственные значения графа Γ. Зафиксируем вершину $u \in \Gamma$ и положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Если $s = 6$, то по [8, теорема 4.4.3] верны неравенства $-(t+1) \geqslant b^- = -1 - b_1/(\theta_1 + 1)$ и $5 \leqslant b^+ = -1 - b_1/(\theta_d + 1)$. Так как $b_1 = 36$, то $\theta_d \geqslant -6t - 1$ и $\theta_1 \leqslant 35$. Ввиду границы Тервиллигера [6, следствие 5.2.2] имеем $d \leqslant (k + c_d)/(a_1 + 2)$, поэтому $d \leqslant 14(6t + 1)/(6t + 8)$.

Лемма 10. *Если $d \geqslant 4$, то верно одно из утверждений:*

(1) *$s = 6$, $t = 4$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{175, 144, 40, 1; 1, 10, 144, 175\}$;*

(2) *$s = 7$, $t = 1$ и Γ — половинный 9-куб.*

$\lhd$ Пусть диаметр Γ больше 3 и u, w, x, y, z — геодезический путь в Γ. В случае $s = 7$ по лемме 3 имеем $t = 1$ и $32\mu \leqslant 36 \cdot 7$, поэтому $\mu = 6$ и μ-подграфы в Γ — октаэдры. Далее, для вершины $u \in \Gamma$ граф $\Delta = [u]$ — треугольный граф $T(9)$. В этом случае Γ — половинный 9-куб.

Если $s = 6$, то по лемме 2 имеем $t \in \{3, 4, 6, 8, 9\}$ и $\mu \leqslant (t+6)(6t+1)/(2t+2)$. Далее, $7(t - 4) \leqslant \mu$ и в случае $t = 9$ имеем $35 \leqslant \mu \leqslant 41$. Так как μ делит $7(6t + 1)36t$, то в этом случае $\mu = 36$, $k_2 = 63 \cdot 55$. По лемме 2 имеем $125^2 36 b_2 \leqslant (385 - 36)(385 - b_2)15^2$, поэтому $b_2 \leqslant 47$. С другой стороны, $c_3 \geqslant 3\mu/2 = 54$, поэтому $d = 4$. С помощью компьютерных вычислений получим, что в этом случае допустимых массивов пересечений нет.

По [6, лемма 3.2.1] средняя степень графа не превосходит его наибольшего собственного значения, причем равенство достигается только в случае регулярного графа. Поэтому мы ищем шар наименьшего радиуса r, в котором средняя степень не меньше $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1$, где $\eta_1 > \eta_2$ — неглавные собственные значения окрестности вершины. Согласно [6, теорема 4.4.3] в графе Γ не может быть двух изолированных шаров радиуса r, значит, $d \leqslant 2r + 1$.

По условию окрестности вершин в Γ сильно регулярны с параметрами $(42t+7, 6t+6, 5, t+1)$. Тогда $b_1 = 36t$, $\eta_1 = 5, \eta_2 = -(t + 1)$. Если $d > 4$, то $\bar{k} = k - b_2 k_2/v_2 < -b_1/(\eta_2+1) - 1 = 35$, противоречие. Значит, $d \leqslant 4$. С помощью компьютерных вычислений получим, что $t = 4$ и Γ имеет массив пересечений $\{175, 144, 40, 1; 1, 10, 144, 175\}$. $\rhd$

Замечание. Графа с массивом пересечений $\{175, 144, 40, 1; 1, 10, 144, 175\}$ не существует.

$\lhd$ Граф с массивом пересечений $\{175, 144, 40, 1; 1, 10, 144, 175\}$ является $AT4(5, 5, 5)$-графом и согласно [7] не существует. $\rhd$

Лемма 11. *Если $d=3$ и $s\geqslant 7$, то $s=7$, $t=18$ и Γ — граф с массивом пересечений* $\{512,378,1;1,189,512\}$.

$\lhd$ Пусть диаметр Γ равен 3.

Если $s=9$, то по лемме 4 имеем $t=12$, $k=280$, $b_1=162$ и $118\leqslant\mu\leqslant 162$. Ввиду леммы 1 получим $\mu\leqslant 108$, противоречие.

Если $s=8$, то $t=2,4,6,9,10,12,14,18,24,30,34,39,42,54,66,74,84$ и ввиду леммы 2 имеем $k(3t-2)/(8t+3)\leqslant\mu\leqslant 4k/9$, где $k=3(8t+3)$. Так как $b_1=22t+1$, то по лемме 1 имеем $\mu<(44t+2)/3$. С помощью компьютерных вычислений получим, что в этом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $s=7$, то $t=1,4,6,8,9,14,15,18,22,24,29,34,36,50,54$ и ввиду леммы 2 имеем $k(2t-3)/(7t+2)\leqslant\mu\leqslant 3k/8$, где $k=4(7t+2)$. Так как $b_1=27t+1$, то по лемме 1 имеем $\mu<(54t+2)/3$. С помощью компьютерных вычислений получим, что в этом случае $t=18$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{512,378,1;1,189,512\}$. $\rhd$

Лемма 12. *Если $d=3$ и $s=6$, то либо $t=4$ и Γ — граф с массивом пересечений* $\{175,144,22;1,24,154\}$ *или* $\{175,144,1;1,12,175\}$, *либо $t=8$ и Γ — граф с массивом пересечений* $\{343,288,1;1,96,343\}$.

$\lhd$ Пусть диаметр Γ равен 3 и $s=6$.

Если $t=3$, то ввиду леммы 1 и теоремы 2 имеем $6\leqslant\mu\leqslant 63$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $t=4$, то ввиду леммы 1 и теоремы 2 имеем $6\leqslant\mu\leqslant 90$. С помощью компьютерных вычислений получим, что Γ — граф с массивом пересечений $\{175,144,22;1,24,154\}$ или $\{175,144,1;1,12,175\}$.

Если $t=6$, то ввиду леммы 1 и теоремы 2 имеем $18\leqslant\mu\leqslant 126$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $t=8$, то ввиду леммы 1 и теоремы 2 имеем $32\leqslant\mu\leqslant 168$. С помощью компьютерных вычислений получим, что Γ — граф с массивом пересечений $\{343,288,1;1,96,343\}$.

В случае $t>8$ допустимых массивов пересечений нет. Лемма 12 и следствие из § 1 доказаны. $\rhd$

Литература

1. *Гутнова А. К., Махнев А. А.* Расширения псевдогеометрических графов для $pG_{s-4}(s,t)$ // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 1.—С. 21–30.
2. *Makhnev A. A.* Strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue 5 and its extensions // International conference «Groups and Graphs, Algorithms and Automata».—Yekaterinburg: Abstracts, 2015.—С. 68.
3. *Koolen J. H., Park J.* Distance-regular graphs with a_1 or c_2 at least half the valency // J. Comb. Theory, Ser. A.—2012.—Vol. 119.—P. 546–555.
4. *Brouwer A. E., Haemers W. H.* The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb.—1993.—Vol. 14.—P. 397–407.
5. *Brouwer A. E., Haemers W. H.* Spectra of graphs (course notes).—http://www.win.tue.nl/ aeb/.
6. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular graphs.—Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.
7. *Jurisic A., Koolen J.* Classification of the family $AT4(qs,q,q)$ of antipodal tight graphs // J. Comb. Theory.—2011.—Vol. 118, № 3.—P. 842–852.

Статья поступила 18 февраля 2016 г.

Гутнова Алина Казбековна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: gutnovaalina@gmail.com

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

EXTENSIONS OF PSEUDOGEOMETRIC GRAPHS FOR $pG_{s-5}(s,t)$

Gutnova A. K., Makhnev A. A.

J. Koolen posed the problem of studying distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with the second eigenvalue $\leqslant t$ for a given positive integer t. This problem is reduced to the description of distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with non-principal eigenvalue t for $t = 1, 2, \dots$ In the article by A. K. Gutnova and A. A. Makhnev «Extensions of pseudogeometrical graphs for $pG_{s-4}(s,t)$» the Koolen problem was solved for $t = 4$ and for pseudogeometrical neighborhoods of vertices. In the article of A. A. Makhnev «Strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue 5 and its extensions» the Koolen problem for $t = 5$ was reduced to the case where the neighborhoods of vertices are exceptional graphs. In this paper intersection arrays for distance-regular graphs whose local subgraphs are exceptional pseudogeometric graphs for $pG_{s-5}(s,t)$ are found.

Key words: distance-regular graph, pseudogeometric graph, eigenvalue of graph.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 3, С. 43–59

УДК **517.518**

О СХОДИМОСТИ В СРЕДНЕМ РЯДОВ ФУРЬЕ — ЯКОБИ

Э. Дж. Ибрагимов

В настоящей статье найдены коэффициентные условия для сходимости в среднем рядов Фурье — Якоби.

Ключевые слова: базис, оптимальная последовательность, ряд Фурье — Якоби, суммы Валле-Пуссена, функция обобщенного сдвига.

Цель настоящей работы — найти условия сходимости в среднем рядов Фурье — Якоби. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x \tag{1}$$

— формальное разложение некоторой функции $f \in L^r_{2\pi}$, $\{S_n(f;x)\}$ — последовательность частичных сумм ряда (1), $\|f\|_r$ — норма функции $f \in L^r_{2\pi}$,

$$\|f\|_r = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty, \quad 1 \leqslant r < \infty.$$

Говорят, что ряд (1) сходится в среднем (с показателем r), если

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_r = 0. \tag{2}$$

М. Рисс [16] для функций $f \in L^r_{2\pi}$ при $1 < r < \infty$ установил неравенство

$$\|S_n(f)\|_r \leqslant C_r \|f\|_r, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

в котором C_r зависит только от r. Этот факт эквивалентен тому, что при $1 < r < \infty$ имеет место (2), т. е. тригонометрическая система образует базис в $L^r_{2\pi}$.

Затем Шаудер, Пэли, Катон и Хилле, Кобер доказали, что являются базисами в $L^r(0,1)$ система Хаара [22] при $1 \leqslant r < \infty$ и система Уолша [14] при $1 < r < \infty$, а в $L^r(-\infty,\infty)$, $1 < r < \infty$, — система преобразований Фурье многочленов Лагерра [4, 5].

В работе [19] Г. А. Фомин указал коэффициентные условия, при которых имеет место (2) при $r = 1$.

Удивительным фактом после этого оказался результат Г. Полларда [12, 13] о том, что система многочленов Лежандра $L^r(-1,1)$ является базисом при $\frac{4}{3} < r < 4$ и не является базисом, когда $r \in [1, \frac{4}{3}) \cup (4, \infty)$. В дальнейшем Дж. Нейман и У. Рудин [9] показали, что при $r = \frac{4}{3}$ и $r = 4$ система многочленов Лежандра также не является базисом в L^r.

© 2016 Ибрагимов Э. Дж.

В. П. Моторный [8] указал условия на функцию f, при которых имеет место (2) при всех $r \in [1, \frac{4}{3}) \bigcup (4, \infty)$, т. е. в случаях, когда многочлены Лежандра не образуют базис в $L^r(-1,1)$ так, что последовательность констант Лебега сумм Фурье — Лежандра не ограничена. Причем порядки приближений частными суммами в $L^r(1 < r \leqslant \frac{4}{3})$ совпадают с наилучшими на классах функций с достаточно хорошими дифференциально-разностными свойствами.

В. М. Бадков [1] исследовал порядки приближений суммами Фурье — Лежандра при условии, что $f \in H_r^{m+\alpha}$, $r \in \big[1, \frac{4}{3}\big] \bigcup [4, \infty)$, т. е.

$$\left(\int\limits_{-1}^{1} \left| f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x) \right|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C \cdot h^\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

и изучил порядок роста обобщенных констант Лебега ($r' = r/(r-1)$)

$$L_n(r, \gamma) = \sup_{\|f\|_{r'} \leqslant 1} \left\| \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^\gamma S_n^{(0,0)}(f; x) \right\|_r, \quad \gamma \geqslant 0.$$

Отметим также следующий результат, анонсированный Г. Полардом в [12]. Система

$$\left\{ (1-x)^{\frac{\alpha}{2}} (1+x)^{\frac{\beta}{2}} \widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right\} \quad \left(\alpha \geqslant -\frac{1}{2},\ \beta \geqslant -\frac{1}{2} \right)$$

является базисом в $L^r(-1,1)(\frac{4}{3} < r < 4)$; при $a \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ эта система не является базисом в $L^r(-1,1)$, если $r \in [1, \frac{4}{3}) \cup (4, \infty)$.

Обозначим

$$L_M^r = \big\{ f : M^{\frac{1}{r}} f \in L^r \big\}, \quad (QL)^r = \big\{ f : Qf \in L^r \big\},$$

где

$$M(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1,\ \alpha, \beta > -1),$$
$$Q(x) = (1-x)^A (1+x)^B \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1,\ A, B \in \mathbb{R}),$$

а

$$S_n(f) = S_n^{(\alpha,\beta)}(f; x) = \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu(f) \widehat{P}_\nu^{(\alpha,\,\beta)}(x)$$

— частная сумма ряда Фурье по ортонормированным с весом $M(x)$ многочленам Якоби $\widehat{P}_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)$,

$$L_{n,r}(M, Q) = \sup \Big\{ \|S_n(f) Q\|_r : f \in (QL)^r,\ \|fQ\|_r \leqslant 1 \Big\}.$$

В 1969 г. Б. Маккенхоупт [7] показал, что при $1 < r < \infty$ условия

$$\begin{aligned} \left| A + \frac{1}{r} - \frac{\alpha+1}{2} \right| &< \min \left(\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2} \right), \\ \left| B + \frac{1}{r} - \frac{\beta+1}{2} \right| &< \min \left(\frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2} \right) \end{aligned} \tag{3}$$

необходимы и достаточны для ограниченности констант Лебега $L_{n,r}(M, Q)$, т. е. система $\Big\{ (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) \Big\}$ $(\alpha, \beta > -1)$ образует базис в $L^r(-1,1)$ при $1 < r < \infty$. Л. Б. Ходак [21] дал оценки уклонения функции f от частичных сумм рядов Фурье —

Якоби в $L^r[-1,1]$ при условии, что хотя бы одно из неравенств (3) не выполняется, причем $f \in H_r^{\gamma+\alpha}$.

В работе [6] Н. М. Казакова дает порядок констант Лебега $L_{n,r}(M,Q)$ в пространстве $(QL)^r$.

Обозначим через $B_r^{\nu+\mu}$ $(0 < r < \infty,\ 0 < \mu \leqslant 1,\ \nu = 0,1,\ldots)$ — класс функций Бесова, заданных на $[-1,1]$, для которых $f^{(\nu)} \in L^r$ и конечен следующий интеграл

$$\int\limits_0^1 h^{-1-\mu r}\left\|f^{(\nu)}(x+h) - f^{(\nu)}(x)\right\|_{r[-1,1-h]}^r dh \leqslant C.$$

С. Г. Нещадим [10] указал достаточные условия на функцию, отличные от приведенных в [8], при которых имеет место (2), а также привел оценки сверху $f \in B_r^{\nu+\mu}$ частными суммами рядов Фурье — Якоби в L_1 и Фурье — Лежандра в L_r $(1 < r < \infty)$.

Обозначим через $L_{p,\mu}[-1,1]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — пространство функций суммируемых с p-ой степенью с весом $\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$ $(-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2})$, а $\|f\|_{p,\mu}$ — норму, $f \in L_{p,\mu}[-1,1]$,

$$\|f\|_{p,\mu} = \left(C(\alpha)\int\limits_{-1}^{1}|f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

где

$$C(\alpha) = \Gamma(\alpha+3/2)/2^{\alpha+3/2}\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$d\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Пусть

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x), \tag{4}$$

где

$$a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f) = \int\limits_1^1 f(x)P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\,d\mu(x)$$

— формальное разложение в ряд Фурье функции $f \in L_{p,\mu}[-1,1]$ по многочленам Якоби, образующих ортогональную систему на отрезке $[-1,1]$ с весом $\mu(x)$, т. е.

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)P_k^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\,d\mu(x) = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ h_n(\alpha), & k = n, \end{cases}$$

где

$$h_n(\alpha) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big)}{\big(2n+\alpha+\frac{1}{2}\big)\Gamma(n+1)\Gamma\big(n+\alpha+\frac{1}{2}\big)}.$$

Обозначим через $S_n^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(f;x)$ частичную сумму ряда (4).

В настоящей статье найдены коэффициентные условия для сходимости в среднем рядов Фурье — Якоби (4), т. е. выполнения соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\|f - S_n^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(f)\|_{p,\mu} = 0, \quad 1 \leqslant p < \infty. \tag{5}$$

Следуя [19], каждую последовательность $\{\overline{m}_n\}$ натуральных чисел $\overline{m}_n$ $(n=1,2,\ldots)$ будем называть *оптимальной* для функции f, если

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\overline{m}_n}\right)^{\alpha+\frac12}E_n(f)_{p,\mu}=0,\quad 1\leqslant p<\infty,\tag{6}$$

где

$$E_n(f)=\inf_{P_n\in H_n}\|f-P_n\|_{p,\mu}$$

— наилучшее приближение в метрике $L_{p,\mu}$ функции f алгебраическими многочленами степени меньше или равно n.

Отметим, что среди оптимальных для f последовательностей имеются и такие, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{m}_n}{n}=0.\tag{7}$$

Это следует из (6), если учесть, что для любого $f\in L_{p,\mu}$ и $E_n(f)_{p,\mu}\to 0$ при $n\to\infty$ (см., например, [18, с. 41]).

Лемма 1 [3]. *При любом $-\frac12<\alpha<\frac12$ справедливо равенство*

$$S_n^{(\alpha,-\frac12)}(f;x)=\int\limits_{-1}^{1}(\tau_u f)(x)K_n(u)\,d\mu(u),$$

где

$$K_n(u)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\left(2\nu+\alpha+\frac12\right)\Gamma\left(\nu+\alpha+\frac12\right)}{2^{\alpha+\frac12}\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\nu+\frac12\right)}P_\nu^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(u),$$

а

$$(\tau_u)f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac12\right)\Gamma(\alpha+\frac12)}\int\limits_{-1}^{1}(1-r^2)^{\alpha-\frac12}f(x,t,r)\,dr,$$

где

$$f(x,t,r)=f\left(xt+r\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}-\frac12(1-r^2)(1-x)(1-t)\right)$$

есть функция обобщенного сдвига [15].

Рассмотрим обобщенные суммы Валле-Пуссена

$$V_{\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac12)}(f;x)=\frac{1}{\overline{m}_n+1}\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}S_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f;x)\quad(n=1,2,\ldots).$$

Лемма 2. *При $-\frac12<\alpha<\frac12$ справедливо соотношение*

$$\left\|f-V_{\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac12)}(f)\right\|_{p,\mu}=O(1)\left(\left(\frac{n+\overline{m}_n}{\overline{m}_n+1}\right)^{\alpha+\frac12}+1\right)E_n(f)_{p,\mu},\quad 1\leqslant p<\infty.$$

$\lhd$ Пусть $Q_n(x)$ — алгебраический многочлен степени меньше или равной n наименее уклоняющийся в среднем от f. Так как

$$S_\nu^{(\alpha,-\frac12)}\{Q_n(x)\}=Q_n(x),\quad \nu=n,n+1,\ldots,$$

то

$$\left\|f-V^{(\alpha,-\frac12)}_{\overline{m}_n}(f)\right\|_{p,\mu}=\frac{1}{\overline{m}_n+1}\left\|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\left\{S^{(\alpha,-\frac12)}_{\nu}(f)-f\right\}\right\|_{p,\mu}$$
$$\leqslant\frac{1}{\overline{m}_n+1}\left\|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}S^{(\alpha,-\frac12)}_{\nu}(f-Q_n)\right\|_{p,\mu}+E_n(f)_{p,\mu}. \tag{8}$$

Заметим, что

$$J_n=\frac{1}{\overline{m}_n+1}\left\|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}S^{(\alpha,-\frac12)}_{\nu}(f-Q_n)\right\|_{p,\mu}$$
$$=\frac{1}{\overline{m}_n+1}\left\{C(\alpha)\int_{-1}^{1}\left\|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}S^{(\alpha,-\frac12)}_{\nu}(f-Q_n;x)\right\|^p d\mu(x)\right\}^{\frac1p}$$
$$=\frac{1}{\overline{m}_n+1}\Bigg\{C(\alpha)\int_{-1}^{1}\Bigg|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\int_{-1}^{1}\tau_u(f-Q_n)(x)$$
$$\times\sum_{i=0}^{\nu}\frac{(2i+\alpha+\frac12)\Gamma(i+\alpha+\frac12)}{2^{\alpha+\frac12}\Gamma(i+\frac12)\Gamma(\alpha+1)}P_i^{(\alpha,-\frac12)}(u)d\mu(u)\Bigg|^p d\mu(x)\Bigg\}^{\frac1p}.$$

Используя теорему Фубини [11, с. 385] при $p=1$, а при $p>1$ обобщенное неравенство Минковского [20, с. 179], получим

$$J_n\leqslant\frac{C(\alpha)}{\overline{m}_n+1}\int_{-1}^{1}\|\tau_u(f-Q_n)\|_{p,\mu}\left|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\sum_{i=0}^{\nu}\frac{(2i+\alpha+\frac12)\Gamma(i+\alpha+\frac12)}{2^{\alpha+\frac12}\Gamma(i+\frac12)\Gamma(\alpha+1)}P_i^{(\alpha,-\frac12)}(u)\right|d\mu(u).$$

И так как [3]

$$\|\tau_uf\|_{p,\mu}\leqslant\|f\|_{p,\mu},$$

то

$$J_n\leqslant\frac{C(\alpha)}{\overline{m}_n+1}E_n(f)_{p,\mu}\int_{-1}^{1}\left|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\sum_{i=0}^{\nu}\frac{(2i+\alpha+\frac12)\Gamma\big(i+\alpha+\frac12\big)}{2^{\alpha+\frac12}\Gamma\Big(i+\frac12\Big)\Gamma(\alpha+1)}P_i^{(\alpha,-\frac12)}(u)\right|d\mu(u)$$
$$=\frac{2^{\alpha+\frac12}C(\alpha)}{\overline{m}_n+1}E_n(f)_{p,\mu}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac t2\right)^{2\alpha+1}\left|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\sum_{i=0}^{\nu}\frac{(2i+\alpha+\frac12)\Gamma(i+\alpha+\frac12)}{2^{\alpha+\frac12}\Gamma(i+\frac12)\Gamma(\alpha+1)}P_i^{(\alpha,-\frac12)}(\cos t)\right|dt$$
$$=\frac{2^{\alpha+\frac12}C(\alpha)}{\overline{m}_n+1}E_n(f)_{p,\mu}\left(\int_0^{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}+\int_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}\right)=\frac{2^{\alpha+\frac12}C(\alpha)}{\overline{m}_n+1}E_n(f)_{p,\mu}(J_{n.1}+J_{n.2}). \tag{9}$$

Для оценки $J_{n.1}$ воспользуемся соотношением [22, с. 83]

$$K_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2\nu+\alpha+\frac12)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)}{2^{\alpha+\frac12}\Gamma\big(\nu+\frac12\big)\Gamma(\alpha+1)}P_\nu^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(x)=\frac{\Gamma\big(n+\alpha+\frac32\big)}{2^{\alpha+\frac12}\Gamma\big(\nu+\frac12\big)\Gamma(\alpha+1)}P_n^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x).$$

Откуда с учетом неравенства (см. [17, с. 264])

$$\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\gamma+\frac12}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{\beta+\frac12}|P_n^{(\gamma,\beta)}(\cos t)|\leqslant Mn^{-\frac12},\quad \gamma,\beta\geqslant-\frac12,\ t\in[0,\pi],\tag{10}$$

при $\gamma=\alpha+1$ и $\beta=-\frac12$, а также соотношения (см. [2, с. 951]) $\Gamma(n+\alpha)\sim n^\alpha\Gamma(n)$, $n\to\infty$, получим, что

$$K_n(\cos t)\sim\frac{n^{\alpha+1}}{2^{\alpha+\frac12}\Gamma(\alpha+1)}P_n^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(\cos t)=O\left(n^{\alpha+\frac12}\right)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-\alpha-\frac32},\quad n\to\infty.\tag{11}$$

Из (9) с учетом (11) будем иметь

$$\begin{gathered}J_{n.1}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}\left|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}K_\nu(\cos t)\right|dt\\
=O(1)\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\nu^{\alpha+\frac12}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-\frac12}dt=O(1)(n+\overline{m}_n)^{\alpha+\frac12}(\overline{m}_n+1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}t^{\alpha-\frac12}\,dt\\
=O(1)\left(\frac{n+\overline{m}_n}{\overline{m}_n+1}\right)^{\alpha+\frac12}(\overline{m}_n+1).\end{gathered}\tag{12}$$

Для оценки $J_{n.2}$ используем формулу Кристоффеля — Дарбу [16, с. 83]

$$K_n(x)=\frac{2^{\frac12-\alpha}\Gamma\left(n+\alpha+\frac32\right)\left\{(n+\alpha+1)P_n^{(\alpha,-\frac12)}(x)-(n+1)P_{n+1}^{(\alpha,-\frac12)}(x)\right\}}{\left(2n+\alpha+\frac32\right)\Gamma\left(n+\frac12\right)\Gamma(\alpha+1)(1-x)}.$$

Тогда получим

$$\begin{gathered}J_{n.2}=C_1(\alpha)\int\limits_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha-1}\left|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\frac{\Gamma\left(\nu+\alpha+\frac32\right)}{\left(2\nu+\alpha+\frac32\right)\Gamma\left(\nu+\frac12\right)}\right.\\
\times\left.\left\{(\nu+\alpha+1)P_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(\cos t)-(\nu+1)P_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac12)}(\cos t)\right\}\right|dt.\end{gathered}\tag{13}$$

Здесь и в дальнейшем $C_1(\alpha),C_2(\alpha),\dots$ будут обозначать положительные постоянные зависящие от α.

Применяя преобразование Абеля, получим

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\frac{\Gamma(\nu+\alpha+\frac32)}{(2\nu+\alpha+\frac32)\Gamma(\nu+\frac12)}\left\{(\nu+\alpha+1)P_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(x)-(\nu+1)P_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac12)}(x)\right\}\\
=\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n-1}\left\{\frac{\Gamma(\nu+\alpha+\frac32)}{(2\nu+\alpha+\frac32)\Gamma(\nu+\frac12)}-\frac{\Gamma(\nu+\alpha+\frac52)}{(2\nu+\alpha+\frac72)\Gamma(\nu+\frac32)}\right\}\\
\times\left\{\sum_{i=0}^{\nu}(iP_i^{(\alpha,-\frac12)}(x)-(i+1)P_{i+1}^{(\alpha,-\frac12)}(x))+(\alpha+1)\sum_{i=0}^{\nu}P_i^{(\alpha,-\frac12)}(x)\right\}\\
+\frac{\Gamma\left(n+\overline{m}_n+\alpha+\frac32\right)}{\left(2n+2\overline{m}_n+\alpha+\frac32\right)\Gamma\left(n+\overline{m}_n+\frac12\right)}\\
\times\left\{\sum_{\nu=0}^{n+\overline{m}_n}\left(\nu P_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(x)-(\nu+1)P_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac12)}(x)\right)+(\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{n+\overline{m}_n}P_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(x)\right\}\end{gathered}$$

$$-\frac{\Gamma(n+\alpha+\frac{3}{2})}{(2n+\alpha+\frac{3}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\nu P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)-(\nu+1)P_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right)+(\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right\}$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{n+\overline{m}_n+1}\frac{\big(2\nu+\alpha+\frac{7}{2}\big)\big(\nu+\frac{1}{2}\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)-\big(2\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac{5}{2}\big)}{\big(2\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)\big(2\nu+\alpha+\frac{7}{2}\big)\Gamma\big(\nu+\frac{3}{2}\big)}$$

$$\times\left\{(\alpha+1)\sum_{i=0}^{\nu}P_i^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(x)-(\nu+1)P_{\nu+1}^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(x)\right\}+\frac{\Gamma\big(n+\overline{m}_n+\alpha+\frac{3}{2}\big)}{(2n+2\overline{m}_n+\alpha+\frac{3}{2})\Gamma(n+\overline{m}_n+\frac{1}{2})}$$

$$\times\left\{(\alpha+1)\sum_{i=0}^{n+\overline{m}_n}\left(P_i^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)-(n+\overline{m}_n+1)P_{n+\overline{m}_n+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right)\right\}$$

$$+\frac{\Gamma\big(n+\alpha+\frac{3}{2}\big)}{\big(2n+\alpha+\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big)}\left\{nP_n^{\alpha,-\frac{1}{2}}(x)-(\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right\}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n+\overline{m}_n-1}\frac{\big\{(\alpha+1)\big(2\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)-(2\nu+1)\big\}\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)}{\big(2\nu+\alpha+\frac{7}{2}\big)\big(2\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(\nu+\frac{3}{2}\big)}$$

$$\times\left\{(\nu+1)P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)-(\alpha+1)\sum_{i=0}^{\nu}P_i^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right\}+\frac{\Gamma\big(n+\overline{m}_n+\alpha+\frac{3}{2}\big)}{\big(2n+2\overline{m}_n+\alpha+\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(n+\overline{m}_n+\frac{1}{2}\big)}$$

$$\times\left\{(\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{n+\overline{m}_n}\left(P_\nu^{\alpha,-\frac{1}{2}}(x)-(n+\overline{m}_n+1)P_{n+\overline{m}_n+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right)\right\}$$

$$+\frac{\Gamma\big(n+\alpha+\frac{3}{2}\big)}{\big(2n+\alpha+\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big)}\left\{nP_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)-(\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right\}. \tag{14}$$

Учитывая (14) в (13), получаем

$$J_{n.2}=J_{n.2}^{(1)}+J_{n.2}^{(2)}+J_{n.2}^{(3)}. \tag{15}$$

Оценим каждый из этих интегралов. Используя неравенство (10) при $\gamma=\alpha$ и $\beta=-\frac{1}{2}$, получаем

$$J_{n.2}^{(1)}=C_1(\alpha)\int\limits_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha-1}\left|\sum_{\nu=0}^{n+\overline{m}_n-1}\frac{\big\{(\alpha+1)\big(2\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)-(2\nu+1)\big\}}{\big(2\nu+\alpha+\frac{7}{2}\big)\big(2\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(\nu+\frac{3}{2}\big)}\right.$$

$$\left.\times\Gamma\left(\nu+\alpha+\frac{3}{2}\right)\left\{(\nu+1)P_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)-(\alpha+1)\sum_{i=0}^{\nu}P_i^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right\}\right|dt$$

$$\leqslant C_2(\alpha)\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n-1}\nu^{\alpha-1}\int\limits_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}t^{2\alpha-1}\left\{(\nu+1)\left|P_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right|+(\alpha+1)\sum_{i=0}^{\nu}\left|P_i^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right|\right\}dt$$

$$\leqslant C_3(\alpha)\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n-1}\nu^{\alpha-1}\int\limits_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}t^{2\alpha-1}\left\{(\nu+1)^{\frac{1}{2}}+(\alpha+1)\sum_{i=0}^{\nu}i^{-\frac{1}{2}}\right\}dt$$

$$\leqslant C_4(\alpha)\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n-1}\nu^{\alpha-\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}t^{2\alpha-1}dt\leqslant C_5(\alpha)\frac{(n+\overline{m}_n)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(\overline{m}_n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}}. \tag{16}$$

Воспользовавшись снова неравенством (10), будем иметь

$$
\begin{gathered}
J_{n.2}^{(3)} = C_1(\alpha)\frac{\Gamma\big(n+\alpha+\frac{3}{2}\big)}{\big(2n+\alpha+\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big)}\int\limits_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}\Big(\sin\frac{t}{2}\Big)^{2\alpha-1}\Big|nP_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t) \\
-(\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\Big|\,dt \leqslant C_6(\alpha)n^\alpha\int\limits_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}\Big(\sin\frac{t}{2}\Big)^{2\alpha-1} \\
\times\Big\{n\Big|P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\Big| + (\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{n}\Big|P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\Big|\Big\}dt \\
\leqslant C_7(\alpha)n^{n+\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}t^{\alpha-\frac{3}{2}}dt \leqslant C_8(\alpha)\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(\overline{m}_n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}}.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Аналогично для $J_{n.2}^{(2)}$ получаем оценку

$$
J_{n.2}^{(2)} \leqslant C_9(\alpha)(n+\overline{m}_n)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\overline{m}_n+1)^{\frac{1}{2}-\alpha}. \tag{18}
$$

Теперь, учитывая (16)–(18) в (15), получаем

$$
J_{n.2} \leqslant C_{10}(\alpha)(n+\overline{m}_n)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\overline{m}_n+1)^{\frac{1}{2}-\alpha}. \tag{19}
$$

А учитывая (16) и (19) в (9), имеем

$$
J_n \leqslant C_{11}(\alpha)\Big(\frac{n+\overline{m}_n}{\overline{m}_n+1}\Big)^{\alpha+\frac{1}{2}}E_n(f)_{p,\mu}. \tag{20}
$$

Утверждение леммы следует из (8) и (20).

Лемма 3. *Для любой оптимальной для функции $f(x)$ последовательности $\{\overline{m}_n\}$ справедливо соотношение*

$$
\lim_{n\to\infty}\|f - V_{\overline{m}_n}(f)\|_{p,\mu} = 0, \quad 1 \leqslant p < \infty.
$$

$\lhd$ Это сразу следует из леммы 2. $\rhd$

Теперь, положим

$$
\begin{gathered}
d_{\overline{m}_n}(f;x) = \frac{1}{\overline{m}_n+1}\sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n}\Big\{S_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f;x) - S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f;x)\Big\} \\
= \sum_{\nu=1}^{\overline{m}_n}\frac{\overline{m}_n+1-\nu}{\overline{m}_n+1}a_{\nu+n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)P_{\nu+n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x), \quad n = 1,2,\ldots
\end{gathered}
$$

Теорема 1. *Если $\{\overline{m}_n\}$– оптимальная для f последовательность, то при $1 \leqslant p < \infty$ справедливо соотношение*

$$
\|f - S_n^{(\alpha,\frac{1}{2})}(f)\|_{p,\mu} = o(1) \to \|d_{\overline{m}_n}(f)\|_{p,\mu} = o(1), \quad n\to\infty.
$$

◁ Это следует из неравенств

$$\|d_{\overline{m}_n}(f)\|_{p,\mu} = \left\|V_{\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f) - S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu} \leqslant \left\|f - V_{\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu} + \left\|f - S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu},$$

$$\left\|f - S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu} \leqslant \left\|f - V_{\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu} + \left\|d_{\overline{m}_n}(f)\right\|_{p,\mu}$$

и леммы 3. ▷

Теорема 2. *Для того, чтобы ряд (4) сходился в среднем, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{\overline{m}_n\}$ натуральных чисел, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = 0, \tag{21}$$

выполнялось соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \left\|S_{n+m_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f) - S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu} = 0, \quad 1 \leqslant p < \infty. \tag{22}$$

◁ *Необходимость* следует из неравенства

$$\left\|S_{n+\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f) - S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu} \leqslant \left\|f - S_{n+\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu} + \left\|f - S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu}.$$

Достаточность. Пусть имеют место (21) и (22). Тогда найдется оптимальная для f последовательность $\{\overline{m}_n\}$, удовлетворяющая соотношению (7), и для нее

$$\left\|d_{\overline{m}_n}(f)\right\|_{p,\mu} = \frac{1}{\overline{m}_n + 1} \left\|\sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n} \left\{S_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f) - S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\}\right\|_{p,\mu}$$

$$\leqslant \frac{1}{\overline{m}_n + 1} \sum_{\nu=1}^{\overline{m}_n} \left\|S_{\nu+\nu}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f) - S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu} = o(1).$$

Теорема 2 доказана. ▷

Следствие 1. *Если для каждой последовательности $\{\overline{m}_n\}$, удовлетворяющей условию (21), выполняются соотношения:*

1. *при* $\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) p > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n} \left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right| \nu^{\alpha-\frac{1}{2}} = 0, \tag{23}$$

2. *при* $\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) p = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n} \left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right| \left(\frac{\ln \nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} = 0, \tag{24}$$

3. *при* $(\alpha + \frac{1}{2})\, p < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n} \left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right| \nu^{-\frac{1}{2}} = 0, \tag{25}$$

то ряд (4) сходится в среднем.

◁ Применяя неравенство Минковского, а также неравенство (см. [17, лемма 4.3])

$$\left\|P_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cdot)\right\|_{p,\mu}=O(1)\begin{cases}n^{\alpha-\frac{1}{p}}, & \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p>1,\\ \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, & \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p=1,\\ n^{-\frac{1}{2}}, & \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p<1,\end{cases}$$

получаем

$$\left\|S_{n+\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu}$$

$$=\left(C(\alpha)\int\limits_{-1}^{1}\Big|\sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n}a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\Big|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|\left\|P_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cdot)\right\|_{p,\mu}$$

$$=O(1)\sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|\begin{cases}n^{\alpha-\frac{1}{p}}, & \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p>1,\\ \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, & \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p=1,\\ n^{-\frac{1}{2}}, & \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p<1.\end{cases}\tag{26}$$

Откуда и следует наше утверждение, ибо выполнение (23)–(25) влечет за собой выполнение условия (22) теоремы 2. ▷

Ниже, C — некоторые, вообще говоря, различные положительные постоянные.

Следствие 2. *Если для каждой последовательности натуральных чисел $\{\overline{m}_n\}$, удовлетворяющей условию (21), выполняются соотношения*

1. *при* $\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p>1$

$$|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)|\leqslant C\cdot\nu^{\frac{1}{p}-1-\alpha},\tag{27}$$

2. *при* $\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p=1$

$$|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)|\leqslant C\cdot(\nu\ln\nu)^{-\frac{1}{2}},\tag{28}$$

3. *при* $\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p<1$

$$|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)|\leqslant C\cdot\nu^{\frac{1}{2}},\tag{29}$$

то ряд (4) *сходится в среднем.*

◁ Действительно, при выполнении условий (27)–(29) из (26) имеем

$$\left\|S_{n+\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu}=O(1)\ln\frac{n+\overline{m}_n}{n+1}=o(1),\quad n\to\infty.\ \rhd$$

В дальнейшем, $\alpha_n\asymp\beta_n\to C_1\beta_n\leqslant\alpha_n\leqslant C_2\beta_n$ при $n\to\infty$, где C_1 и C_2 — некоторые положительные постоянные.

Лемма 4. *При* $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$ *справедливо соотношение*

$$\int\limits_0^\pi\left|P_n^{(\alpha+1,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt\asymp n^{-\frac{1}{2}},\quad n\to\infty.$$

◁ Разобьем интеграл по схеме

$$J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}+\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}}+\int\limits_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi}=J_1+J_2+J_3.\tag{30}$$

Учитывая неравенство (10), получим

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left|P_n^{(\alpha+1,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right| \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1} dt \\
&= O(n^{-\frac{1}{2}}) \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} dt = O(n^{-\frac{1}{2}}) \int_0^{\frac{\pi}{n}} t^{\alpha-\frac{1}{2}}\, dt = O(n^{-\alpha-1}).
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
J_3 &\int_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi} \left|P_n^{(\alpha+1,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right| \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1} dt \\
&= O(n^{-\frac{1}{2}}) \int_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi} t^{\alpha-\frac{1}{2}} dt = O\big(n^{-\frac{1}{2}}\big)\left(\pi^{\alpha+\frac{1}{2}} - \left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\right) = O(n^{-\alpha-1}).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Из асимптотической формулы [16, с. 205]

$$
\begin{aligned}
P_n^{(\alpha+1,-\frac{1}{2})}(\cos t) &= (\pi n)^{-\frac{1}{2}} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-\frac{3}{2}} \\
&\times \left\{\cos\left[\left(n+\frac{2\alpha+3}{4}\right)t - \left(\alpha+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + O(1)(n\sin t)^{-1}\right\}, \quad \frac{c}{n} \leqslant t \leqslant \pi - \frac{c}{n},
\end{aligned}
$$

имеем

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \left|P_n^{(\alpha+1,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right| \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1} dt \\
&\leqslant (\pi n)^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \left\{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} + O(1)\frac{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{n\cdot 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right\} dt \\
&= O(n^{-\frac{1}{2}})\left(\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} t^{\alpha-\frac{1}{2}}\, dt + \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \frac{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-\frac{3}{2}}(\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2})}{\cos\frac{t}{2}}\, dt\right) \\
&= O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \sin\frac{t}{2}\Big)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{-1} dt + \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+\frac{3}{2}} \cos\frac{t}{2}\, dt\right) \\
&= O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \frac{(\sin\frac{t}{2})^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\sin\frac{\pi}{2n}} dt + \frac{1}{n}\frac{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\alpha-\frac{1}{2}}\Bigg|_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}}\right) \\
&= O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1+\frac{O(1)}{n\sin\frac{\pi}{2n}} + \frac{O(1)}{n}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\right) \\
&= O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1+O(1)+O\left(n^{-\alpha-\frac{1}{2}}\right)\right) = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)(1+O(1)).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Учитывая (31), (32) и (33) в (30), получаем

$$\int\limits_0^\pi \left|P_n^{\left(\alpha+1,-\frac{1}{2}\right)}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)(1+O(1)), \quad n\to\infty,$$

что равносильно утверждению леммы. $\rhd$

Следствие 3. *При* $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$ *справедливо соотношение*

$$\int\limits_\pi^0 |K_n(\cos t)|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt \asymp n^{\alpha+\frac{1}{2}}, \quad n\to\infty.$$

$\lhd$ Вытекает из (11) и леммы 4. $\rhd$

Отсюда следует, что константы Лебега в $L_{1,\mu}$ не ограничены и, следовательно, система $\left\{P_n^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(\alpha)(1-x)^\alpha(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right\}$ не образует базиса в $L_{1,\mu}$. В связи с этим фактом интересен следующий результат.

Теорема 3. *Если для любой последовательности* $\{m\}_n$ *натуральных чисел, удовлетворяющей условию* (21), *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{m_n-1}\frac{|\Delta a_{n+\nu}|}{\sqrt{n+\nu}} = 0, \tag{34}$$

то $\|f-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\|_{1,\mu}=o(1)$, $n\to\infty$.

$\lhd$ Согласно теореме 2 достаточно доказать, что из (34) следует (22). Действительно,

$$\begin{aligned} &\left\|S_{n+m_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{1,\mu} \\ &= C(\alpha)\int\limits_0^\pi\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt \\ &= C(\alpha)\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+m_n}}+\int\limits_{\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}+\int\limits_{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi}\right)=C(\alpha)(A+B+C). \end{aligned} \tag{35}$$

Используя неравенство (10), при $\gamma=\alpha$ и $\beta=-\frac{1}{2}$ получаем

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{n+m_n}}\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt \\ &\leqslant \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+m_n}}\left|P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt \\ &= O(1)\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\nu^{-\frac{1}{2}}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+m_n}}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= O(1)\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\nu^{-\frac12}\Big|a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)\Big|\int_0^{\frac{\pi}{n+m_n}} t^{\alpha+\frac12}\,dt = O(1)\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\nu^{-\frac12}\Big|a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)\Big|(n+m_n)^{\alpha-\frac32}\\
&\qquad = O(1)\frac{1}{m_n}\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\nu^{-\frac12}\frac{\big|a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)\big|}{\sqrt{\nu}} = o(1), \quad n\to\infty,
\end{aligned}
\tag{36}
$$

так как согласно теореме 5.2 из [3]

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\big|a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)\big|}{\sqrt{\nu}} = 0. \tag{37}
$$

Рассмотрим интеграл

$$
\begin{aligned}
C &= \int_{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi}\Big|\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)P_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(\cos t)\Big|\Big(\sin\frac{t}{2}\Big)^{2\alpha+1}dt\\
&\leqslant \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\Big|a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)\Big|\int_{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi}\Big|P_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(\cos t)\Big|\Big(\sin\frac{t}{2}\Big)^{2\alpha+1}dt\\
&\qquad = O(1)\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\nu^{-\frac12}\Big|a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)\Big|\int_{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi}t^{\alpha+\frac12}dt\\
&\qquad = O(1)\frac{1}{m_n}\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\frac{\Big|a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)\Big|}{\sqrt{\nu}} = o(1), \quad n\to\infty.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Для оценки интеграла B рассмотрим выражение

$$
\begin{aligned}
J_n(x) &= \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)P_\nu^{(\alpha,\,-\frac12)}(x)\\
&= \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)\frac{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(\nu+\frac12\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(\nu+\frac12\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)}P_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(x).
\end{aligned}
$$

Преобразование Абеля дает

$$
\begin{aligned}
J_n(x) &= \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1}\Delta\frac{\Gamma\big(\nu+\frac12\big)a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)}\sum_{i=0}^{\nu}\frac{\big(2i+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(i+\alpha+\frac12\big)}{\Gamma\big(i+\frac12\big)}P_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(x).\\
&+a_{n+m_n}^{(\alpha,-\frac12)}(f)\frac{\Gamma\big(n+m_n+\frac12\big)}{\big(2n+2m_n+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(n+m_n+\alpha+\frac12\big)}\sum_{\nu=0}^{n+m_n}\frac{\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)P_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(x)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)^{-1}\Gamma\big(\nu+\frac12\big)}\\
&-a_{n+1}^{(\alpha,-\frac12)}(f)\frac{\Gamma\big(n+\frac32\big)}{\big(2n+\alpha+\frac52\big)\Gamma\big(n+\alpha+\frac32\big)}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)}{\Gamma\big(\nu+\frac12\big)}P_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(x).
\end{aligned}
$$

Учитывая здесь (10), получаем

$$
\begin{aligned}
J_n(x) = \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} \left(\Delta \frac{\Gamma\big(\nu+\frac12\big) a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)} \right) \frac{\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac32\big)}{\Gamma\big(\nu+\frac12\big)} P_\nu^{(\alpha+1,-\frac12)}(x) \\
+ a_{n+m_n}^{(\alpha,-\frac12)} \frac{\Gamma\big(n+m_n+\alpha\frac12\big)}{\big(2n+2m_n+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(n+m_n+\alpha+\frac12\big)} P_{n+m_n}^{(\alpha+1,-\frac12)}(x) \\
- a_{n+1}^{(\alpha,-\frac12)} \frac{n+\frac12}{2n+\alpha+\frac52} P_n^{(\alpha+1,-\frac12)}(x).
\end{aligned} \tag{39}
$$

Так как

$$
\begin{aligned}
\Delta \frac{\Gamma\big(\nu+\frac12\big) a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)} = \frac{\Gamma\big(\nu+\frac12\big) a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)} \\
- \frac{\Gamma\big(\nu+\frac32\big) a_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac32\big)} = \frac{\Gamma\big(\nu+\frac32\big) a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac32\big)} \\
+ \frac{\Gamma\big(\nu+\frac12\big) a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)} - \frac{\Gamma\big(\nu+\frac32\big) a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac32\big)} \\
= \frac{\Gamma\big(\nu+\frac32\big) \Delta a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac32\big)} + \frac{\Gamma\big(\nu+\frac12\big) a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)} \\
\times \left(\frac{1}{2\nu+\alpha+\frac12} - \frac{\nu+\frac12}{\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)\big(\nu+\alpha+\frac12\big)} \right) = \frac{\Gamma\big(\nu+\frac32\big) \Delta a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac32\big)} \\
+ \frac{\Gamma\big(\nu+\frac12\big) a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)} \times \frac{2(\alpha+1)\nu+\big(\alpha+\frac12\big)(\alpha+2)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)\big(\nu+\alpha+\frac12\big)},
\end{aligned} \tag{40}
$$

то, учитывая (40) в (39), получаем

$$
\begin{aligned}
J_n(x) = \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n} a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f) P_\nu^{(\alpha,\,-\frac12)}(x) = \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} \frac{\big(\nu+\frac12\big)\Delta a_\nu^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)}{2\nu+\alpha+\frac52} P_\nu^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x) \\
+ \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} a_\nu^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f) \frac{2(\alpha+1)\nu+\big(\alpha+\frac12\big)(\alpha+2)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)} P_\nu^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x) \\
a_{n+m_n}^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f) \frac{n+m_n+\alpha+\frac12}{2n+2m_n+\alpha+\frac12} P_{n+m_n}^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x) - a_{n+1}^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f) \frac{n+\frac12}{2n+\alpha+\frac52} P_n^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x) \\
= \sum_{\nu=n}^{n+m_n-1} \frac{\big(\nu+\frac12\big)\Delta a_\nu^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)}{2\nu+\alpha+\frac52} P_\nu^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x) \\
\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} a_{\nu+1}^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f) \frac{(2\alpha+2)\nu+(\alpha+2)\big(\alpha+\frac12\big)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)} P_\nu^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x) \\
+ a_{n+m_n}^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f) \frac{n+m_n+\alpha+\frac12}{2n+2m_n+\alpha+\frac12} P_{n+m_n}^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x) - a_{n+1}^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f) \frac{n+\frac12}{2n+\alpha+\frac52} P_n^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x).
\end{aligned} \tag{41}
$$

Из (41) и (35) получаем

$$B=\int\limits_{\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}a_\nu^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)P_\nu^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt$$

$$\leqslant\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)\right|\int\limits_{\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}P_\nu^{(\alpha+1,-\frac12)}(\cos t)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt$$

$$+\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1}\frac{\left|a_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac12)}(f)\right|}{\nu+1}\int\limits_{\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}\left|P_\nu^{(\alpha+1,-\frac12)}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt$$

$$+\left|a_{n+m_n}^{(\alpha,-\frac12)}(f)\right|\int\limits_{\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}\left|P_{n+m_n}^{(\alpha+1,-\frac12)}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt$$

$$+\left|a_n^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)\right|\int\limits_{\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}\left|P_n^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt.$$

Откуда с учетом леммы 4 получим

$$B=O(1)\left(\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1}\frac{\left|\Delta a_\nu^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)\right|}{\sqrt{\nu}}+\frac{\left|a_{n+m_n}^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)\right|}{\sqrt{n+m_n}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{m_n}\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1}\frac{\left|\Delta a_{\nu+1}^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)\right|}{\sqrt{\nu+1}}+\frac{\left|a_n^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)\right|}{\sqrt{n}}\right). \tag{42}$$

Так как согласно (21)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+m_n}^{(\alpha,-\frac12)}(f)|}{\sqrt{n+m_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n(1+\frac{m_n}{n})}^{(\alpha,-\frac12)}(f)|}{\sqrt{n(1+\frac{m_n}{n})}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n^{(\alpha,-\frac12)}(f)|}{\sqrt{n}},$$

то учитывая (36), (37) и (34) в (42), будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}a_\nu^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)P_\nu^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+1}dt=0.$$

Учитывая это равенство, а также (36) и (37) в (35), получим утверждение теоремы. ▷

Следствие 4. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m_n}{n}=0$, $\left|\Delta a_n^{(\alpha,-\frac12)}(f)\right|\leqslant\frac{c}{\sqrt{n}}$, *то*

$$\left\|f-S_n^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)\right\|_{1,\mu}=o(1),\quad n\to\infty.$$

◁ Действительно,

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} \frac{\left|\Delta a_\nu^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(f)\right|}{\sqrt{n}} \leqslant c \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} \frac{1}{\nu} = O(1) \ln \frac{n+m_n}{n} = o(1), \quad n \to \infty. \triangleright$$

Следствие 5. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = 0$, $\left|\Delta a_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}\right| \leqslant \frac{c}{n^{\frac{1}{2}+\gamma}}$ *при* $\gamma > 0$, *то*

$$\left\| f - S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f) \right\|_{1,\mu} = 0, \quad n \to \infty.$$

◁ Действительно,

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} \frac{\left|\Delta a_\nu^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(f)\right|}{\sqrt{n}} \leqslant c \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} \frac{1}{\nu^{\gamma+1}} \leqslant \frac{c}{n^\gamma} = o(1), \quad n \to \infty. \triangleright$$

Литература

1. *Бадков В. М.* Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным полиномам // Успехи мат. наук.—1978.—Т. 33, № 3.—С. 51–106.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.—М.: Наука, 1971.—1108 с.
3. *Ibrahimov E. J.* Jacobi transform method in approximation theory // Procedings of A. Razmadze Math. Inst.—2015.—Vol. 169.—P. 33–82.
4. *Caton W. B., Hille E.* Laguerre polynomials and Laplace integrals // Duke Math. J.—1945.—Vol. 12.—P. 217–242.
5. *Kober H.* A note on approximation by rational functions // Proc. Edinburgh Math. Soc.—1946.—Vol. 7, № 2.—P. 123–133.
6. *Казакова Н. М.* О порядках констант Лебега сумм Фурье — Якоби в пространствах $(QL)^r$.—1984.—66 с. Деп. в ВИНИТИ, № 2113.
7. *Muckenhoupt B.* Mean convergence of Jacobi series // Proc. Amer. Math. Soc.—1969.—Vol. 23.—P. 306–310.
8. *Моторный В. П.* О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра // Докл. АН СССР.—1972.—Т. 204, № 4.—С. 788–790.
9. *Newman J., Rudin W.* Mean convergence of orthogonal series // Proc. Amer. Math. Soc.—1952.—№ 3.—P. 219–222.
10. *Нещадим С. Г.* Приближение функций суммами Фурье по многочленам Якоби в интегральной метрике.—1983.—28 с. Деп. в ВИНИТИ, № 4559.
11. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. 2-е изд.—М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1957.—552 с.
12. *Harry Pollard.* The mean convergence of orthogonal series of polynomials // Proc. Natl. Acad. Sci. USA.—1946.—Vol. 32.—P. 8–10.
13. *Harry Pollard.* The mean convergence of orthogonal series. I // Trans. Amer. Math. Soc.—1947.—Vol. 62.—P. 387–403.
14. *Paley E. A. C.* A remarkable series of orthogonal functions // Proc. London Math. Soc.—1932.—Vol. 34.—P. 241–279.
15. *Потапов М. К.* О приближении многочленами Якоби // Вестн. Моск. ун-та. Мат-ка. Механика.—1977.—№ 5.—С. 70–82.
16. *Riesz M.* Sur les series conjuges // Math. Z.—1927.—Vol. 27.—P. 218–244.
17. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены.—М.: Физматлит, 1976.—327 с.
18. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.—М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960.—624 с.
19. *Фомин Г. А.* О сходимости рядов Фурье в среднем // Мат. сб.—1979.—Vol. 110, № 2.—P. 251–265.

20. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1948.—456 с.
21. *Ходак Л. Б.* О сходимости рядов Фурье — Якоби в интегральной метрике.—Днепропетровск, 1979.—29 с. Деп. в Укр. НИИНТИ.
22. *Schauder J.* Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems // Math. Zeitschrift.—1928.—Vol. 28, issue 1.—P. 317–320.
23. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.—М.: Физматгиз, 1962.—500 с.

Статья поступила 11 декабря 2015 г.

Ибрагимов Эльман Джаваншир оглы
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
ведущий научный сотрудник
АЗЕРБАЙДЖАН, AZ1141, г. Баку, ул. Ф. Агаева, 9
E-mail: `elmanibrahimov@yahoo.com`

ON MEAN CONVERGENCE OF FOURIER–JACOBI SERIES

Ibrahimov E. J.

The conditions on coefficients for mean convergence of Fourier–Jacobi series are obtained. The asymptotic formulae for the best approximation in Lebesgue spaces are derived and an asymptotic equality for Valee–Poussin sums is obtained. Some properties of generalized shift function are also studied.

Key words: basis, optimal sequence, Fourier–Jacobi series, Vallee–Poussin sums, generalized shift function.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 3, С. 60–71

УДК **517.984.64**

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННЫМ ПРОИЗВОДНЫМ ДРУГИХ ПОРЯДКОВ И САМОЙ ФУНКЦИИ

С. А. Унучек

В работе изучается задача одновременного восстановления производных функции k_1-го и k_2-го порядков в среднеквадратичной норме по неточно заданным производным n_1-го и n_2-го порядков и самой функции. Решение приводится при некоторых условиях на погрешности, с которыми заданы производные и сама функция. Полностью задача решена для случая $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. При этом оказывается, что в отличие от ранее встречавшихся ситуаций, в общем случае погрешность восстановления зависит от всех трех погрешностей, с которыми задана исходная информация.

Ключевые слова: оптимальный метод, преобразование Фурье, экстремальная задача.

Введение

Общая постановка задачи оптимального восстановления функционала принадлежит С. А. Смоляку [1]. Она явилась обобщением задачи о наилучших квадратурных формулах С. М. Никольского [2], которая в свою очередь возникла на основе идей А. Н. Колмогорова. Задача об оптимальном восстановлении по неточно заданной информации была поставлена в работе [3]. В данной работе изучается задача одновременного восстановления производных функций k_1-го и k_2-го порядков в среднеквадратичной норме по неточно заданным производным n_1-го и n_2-го порядков и самой функции. Решение приводится при некоторых условиях на погрешности, с которыми заданы производные и сама функция. Полностью задача решена для случая $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. Нам показался этот случай интересен тем, что в задачах восстановления производных при задании погрешности в среднеквадратичной норме не встречался случай, когда более двух множителей Лагранжа отличны от нуля. Для заданной погрешности в равномерной норме ситуация, когда много множителей Лагранжа отлично от нуля, достаточно распространен (см. [4, 5]). Ранее задача оптимального восстановления k-ой производной функции по приближенной информации о самой функции и ее n-ой производной рассматривалась в работе [6].

1. Основные понятия

Рассмотрим соболевское пространство функций

$$\mathscr{W}_2^n(\mathbb{R}) = \Big\{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(n-1)}(\cdot) \text{ — локально абсолютно непрерывна,} \\ x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\Big\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

© 2016 Унучек С. А.

Пусть $n_0 = 0$, $n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$. Предположим, что для каждой функции $x(\cdot) \in \mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$ приближенно известны ее производные n_1-го и n_2-го порядков и сама функция, т. е. известны функции $y_0(\cdot)$, $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|x^{(n_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_j, \quad j = 0, 1, 2.$$

Задача состоит в одновременном оптимальном восстановлении производных k_1-го и k_2-го порядков функции $x(\cdot) \in \mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$.

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3 \to (L_2(\mathbb{R}))^2.$$

Погрешностью методов φ будем называть величину

$$e(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\ \overline{Y}\in(L_2(\mathbb{R}))^3 \\ \|x^{(n_j)}(\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_j,\ j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2} p_j \|x^{(k_j)}(\cdot) - \varphi_j(\overline{Y})(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}},$$

где $\overline{K} = (k_1, k_2)$, $\overline{\delta} = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, $\overline{Y} = (y_0(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot))$, $\varphi = (\varphi_1(\overline{Y}), \varphi_2(\overline{Y}))$. Здесь $p = (p_1, p_2)$, $p_1, p_2 \geqslant 0$ — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению производной какого-либо порядка.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \inf_{\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3\to(L_2(\mathbb{R}))^2} e(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi).$$

Методы $\widehat{\varphi}$, на которых достигается нижняя грань, будем называть оптимальными методами.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Если $\delta_1 \geqslant \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$, погрешность оптимального восстановления равна*

$$E\left(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}\right) = \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2}, \tag{1}$$

где

$$\widehat{\lambda}_0 = p_1 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_1/n_2} \left(1 - \frac{k_1}{n_2}\right) + p_2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_2/n_2} \left(1 - \frac{k_2}{n_2}\right),$$
$$\widehat{\lambda}_2 = p_1 \frac{k_1}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_1/n_2-1)} + p_2 \frac{k_2}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_2/n_2-1)}.$$

Метод $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi_1}(\overline{Y}), \widehat{\varphi_2}(\overline{Y}))$ такой, что его преобразование Фурье

$$F\widehat{\varphi_s}(\overline{Y}) = (i\xi)^{k_s} \left(1 - \alpha_s(\xi)\right) Fy_0(\xi) + (i\xi)^{k_s - n_2} \alpha_s(\xi) Fy_2(\xi), \quad s = 1, 2,$$

где

$$\alpha_s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} + \theta_s(\xi)|\xi|^{n_2} \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_2 \left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - p_1 \xi^{2k_1} - p_2 \xi^{2k_2}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}},$$

а $\theta_s(\cdot)$ — произвольные функции из $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, удовлетворяющие условию

$$p_1\xi^{2k_1}\theta_1^2(\xi)+p_2\xi^{2k_2}\theta_2^2(\xi)\leqslant 1,$$

является оптимальным.

Положим

$$W=\sqrt{p_1^2\delta_0^2+2p_1p_2\delta_1^2+p_2^2\delta_2^2},$$

$$\widehat\lambda_0=\begin{cases}\frac14\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_0}}\left(3p_1+p_2\frac{\delta_2}{\delta_0}\right), & \delta_1\geqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \frac{p_1^2\delta_1}{2W}, & \delta_1\leqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\end{cases}$$

$$\widehat\lambda_1=\begin{cases}0, & \delta_1\geqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \frac{p_2^2W^2+2p_1p_2\delta_1^2}{2\delta_1W}, & \delta_1\leqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\end{cases}$$

$$\widehat\lambda_2=\begin{cases}\frac14\sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_2}}\left(p_1\frac{\delta_0}{\delta_2}+3p_2\right), & \delta_1\geqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \frac{p_2^2\delta_1}{2W}, & \delta_1\leqslant\sqrt{\delta_0\delta_2}.\end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $k\in\mathbb{N}$, $k_1=k$, $n_1=2k$, $k_2=3k$, $n_2=4k$. Тогда*

$$E(\mathscr{W}_2^4(\mathbb{R}),\overline{K},\overline{\delta})=\begin{cases}\sqrt[4]{\delta_0\delta_2}\sqrt{p_1\delta_0+p_2\delta_2}, & \delta_1\geqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \sqrt{\delta_1W}, & \delta_1\leqslant\sqrt{\delta_0\delta_2}.\end{cases}$$

Метод $\widehat\varphi=(\widehat{\varphi_1}(\overline{Y}),\widehat{\varphi_2}(\overline{Y}))$ такой, что его преобразование Фурье

$$F\widehat{\varphi_s}(\overline{Y})=\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)Fy_j(\xi),\quad s=1,2,$$

где $\alpha_j^s(\cdot)$ — любые функции из $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, удовлетворяющие в случае $\delta_1\geqslant\sqrt{\delta_0\delta_2}$ условиям

$$\alpha_0^s(\xi)=(i\xi)^{(2s-1)k}(\cdot)\frac{\widehat\lambda_0-\theta_s(\xi)\xi^{4k}\sqrt{\widehat\lambda_0\widehat\lambda_2\left(\widehat\lambda_0+\widehat\lambda_2\xi^{8k}-p_1\xi^{2k}-p_2\xi^{6k}\right)}}{\widehat\lambda_0+\widehat\lambda_2\xi^{8k}},$$

$$\alpha_1^s(\xi)=0,$$

$$\alpha_2^s(\xi)=(i\xi)^{(2s-5)k}(\cdot)\frac{\widehat\lambda_2\xi^{8k}+\theta_s(\xi)\xi^{4k}\sqrt{\widehat\lambda_0\widehat\lambda_2\left(\widehat\lambda_0+\widehat\lambda_2\xi^{8k}-p_1\xi^{2k}-p_2\xi^{6k}\right)}}{\widehat\lambda_0+\widehat\lambda_2\xi^{8k}},$$

$s=1,2$, а $\theta_s(\cdot)$ — произвольные функции из $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, удовлетворяющие условию

$$p_1\xi^{2k}\theta_1^2(\xi)+p_2\xi^{6k}\theta_2^2(\xi)\leqslant 1,$$

в случае $\delta_1<\sqrt{\delta_0\delta_2}$ условиям

$$\begin{cases}\sum_{j=0}^2(i\xi)^{2kj}\alpha_j^s(\xi)=(i\xi)^{(2s-1)k}, & s=1,2,\\ p_1\left(\sum_{j=0}^2\frac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\widehat\lambda_j}\right)+p_2\left(\sum_{j=0}^2\frac{|\alpha_j^2(\xi)|^2}{\widehat\lambda_j}\right)\leqslant 1,\end{cases}$$

является оптимальным.

3. Доказательства

Сначала рассмотрим задачу оптимального восстановления производных k_1-го и k_2-го порядков в общем виде. Докажем, что имеет место неравенство

$$E\left(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\overline{K},\overline{\delta}\right)\geqslant \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\\ \|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_j,\ j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2} p_j\|x^{(k_j)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}. \tag{2}$$

Для любой функции $x(\cdot)\in\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$ такой, что выполнены условия $\|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_j$, $j=0,1,2$, и для любого метода φ имеем

$$2\left(p_1\|x^{(k_1)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+p_2\|x^{(k_2)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)^{1/2}$$
$$=\left(p_1\|x^{(k_1)}(\cdot)-(-x)^{(k_1)}(\cdot)+\varphi(0)-\varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+p_2\|x^{(k_2)}(\cdot)-(-x)^{(k_2)}(\cdot)+\varphi(0)-\varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)^{1/2}$$
$$\leqslant\left(p_1\|x^{(k_1)}(\cdot)-\varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+p_2\|x^{(k_2)}(\cdot)-\varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)^{1/2}$$
$$+\left(p_1\|(-x)^{(k_2)}(\cdot)-\varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+p_2\|(-x)^{(k_2)}(\cdot)-\varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)^{1/2}\leqslant 2e(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\overline{K},\overline{\delta},\varphi),$$

т. е., для любого метода φ выполняется

$$e(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\overline{K},\overline{\delta},\varphi)\geqslant \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\\ \|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_j,\ j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2} p_j\|x^{(k_j)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}.$$

Отсюда следует неравенство (2).

Это означает, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\begin{gathered}\sqrt{p_1\|x^{(k_1)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+p_2\|x^{(k_2)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}\to\max,\\ \|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_j,\quad j=0,1,2.\end{gathered}\tag{3}$$

Перейдем к квадрату задачи (3) и запишем ее в образах Фурье. По теореме Планшереля имеем

$$\|x^{(m)}(\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\frac{1}{2\pi}\|Fx^{(m)})(\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\frac{1}{2\pi}\|(i\xi)^m(Fx)(\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2m}|(Fx)(\xi)|^2\,d\xi.$$

Тем самым, приходим к следующей задаче:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}(p_1\xi^{2k_1}+p_2\xi^{2k_2})|(Fx)(\xi)|^2\,d\xi\to\max,\\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2n_j}|(Fx)(\xi)|^2\,d\xi\leqslant\delta_j^2,\quad j=0,1,2.\end{gathered}\tag{4}$$

Теперь докажем теорему 1. Пусть $\delta_1 \geqslant \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}}\delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$. Покажем, что погрешность оптимального восстановления не меньше величины $\widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2$. Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которой

$$(Fx_m)(\xi) = \begin{cases} D(m), & \xi \in [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0], \\ 0, & \xi \notin [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0], \end{cases}$$

где $\xi_0 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{n_2}}$, $D(m) = \delta_0\sqrt{2\pi m}$. Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0} D^2(m)\,d\xi \leqslant \frac{1}{2\pi m}D^2(m) = \delta_0^2,$$

и, учитывая условие $\delta_1 \geqslant \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}}\delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$, выполняются соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n_1}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0} \xi^{2n_1}D^2(m)\,d\xi \leqslant \frac{D^2(m)}{2\pi m}\xi_0^{2n_1} \leqslant \delta_1^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n_2}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi \leqslant \frac{D^2(m)}{2\pi m}\xi_0^{2n_2} = \delta_2^2,$$

то последовательность функций $x_m(\cdot)$ допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины:

$$\frac{1}{2\pi}p_1\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2k_1}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi}p_2\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2k_2}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= \frac{D^2(m)}{2\pi}\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0}\left(p_1\xi^{2k_1} + p_2\xi^{2k_2}\right)d\xi \geqslant \delta_0^2\left(p_1\left(\xi_0 - \frac{1}{m}\right)^{2k_1} + p_2\left(\xi_0 - \frac{1}{m}\right)^{2k_2}\right).$$

При $m \to \infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к величине

$$Q = \delta_0^2\left(p_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2\frac{k_1}{n_2}} + p_2\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2\frac{k_2}{n_2}}\right) = \widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2$$

при

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_0 &= p_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2\frac{k_1}{n_2}}\left(1 - \frac{k_1}{n_2}\right) + p_2\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2\frac{k_2}{n_2}}\left(1 - \frac{k_2}{n_2}\right), \\ \widehat{\lambda}_2 &= p_1\frac{k_1}{n_2}\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2\frac{k_1-n_2}{n_2}} + p_2\frac{k_2}{n_2}\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2\frac{k_2-n_2}{n_2}}, \end{aligned} \tag{5}$$

т. е. в случае $\delta_1 \geqslant \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}}\delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$ погрешность оптимального восстановления

$$E(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) \geqslant \sqrt{\widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2}.$$

Займемся построением оптимальных методов. Оптимальные методы в общем случае будем искать среди методов $\widehat{\varphi}(\overline{Y})=(\widehat{\varphi}_1(\overline{Y}),\widehat{\varphi}_2(\overline{Y}))$ вида $\widehat{\varphi}_s(\overline{Y}(\cdot))=\Lambda_0^s y_0(\cdot)+\Lambda_1^s y_1(\cdot)+\Lambda_2^s y_2(\cdot)$, где $\Lambda_j^s: L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$, $j=0,1,2$, $s=1,2$ — линейные непрерывные операторы, действие которых в образах Фурье имеет вид:

$$F(\Lambda_j^s y_j)(\cdot)=\alpha_j^s(\cdot)(Fy_j)(\cdot),\quad j=0,1,2,\ s=1,2,$$

где $\alpha_j^s(\cdot)\in\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R})$.

Для оценки оптимальной погрешности для фиксированных $y_j(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$, $j=0,1,2$, $s=1,2$, рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\|x^{(k_s)}(\cdot)-\sum_{j=0}^{2}\Lambda_j^s y_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)\to\max,$$
$$\|x^{(n_j)}(\cdot)-y_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_j^2,\quad j=0,1,2,\ s=1,2.$$

Перепишем эту задачу в образах Фурье

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{k_s}Fx(\xi)-\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)Fy_j(\xi)\right|^2d\xi\right)\to\max,\\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{n_j}Fx(\xi)-Fy_j(\xi)\right|^2d\xi\leqslant\delta_j^2,\quad j=0,1,2.\end{gathered}\tag{6}$$

Положим

$$z_j(\xi)=(i\xi)^{n_j}Fx(\xi)-Fy_j(\xi),\quad j=0,1,2.$$

Задача (6) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{k_s}Fx(\xi)-\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)(i\xi)^{n_j}Fx(\xi)+\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2d\xi\right)\to\max,\\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|z_j(\xi)\right|^2d\xi\leqslant\delta_j^2,\quad j=0,1,2.\end{gathered}\tag{7}$$

В случае $\delta_1\geqslant\delta_2^{\frac{n_1}{n_2}}\delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$ положим

$$\alpha_0^s(\xi)=(i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right),\quad \alpha_1^s(\xi)=0,\quad \alpha_2^s(\xi)=(i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi),\quad s=1,2.$$

Задача (7) перепишется в виде

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right)z_0(\xi)+(i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)z_2(\xi)\right|^2d\xi\right)\to\max,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|z_j(\xi)\right|^2d\xi\leqslant\delta_j^2,\quad j=0,1,2.$$

Оценим подынтегральные функции с помощью неравенства Коши — Буняковского:

$$\left|(i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right)z_0(\xi)+(i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)z_2(\xi)\right|^2$$

$$=\xi^{2k_s}\left|\frac{1-\alpha_s(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_0}}\sqrt{\widehat{\lambda}_0}(\cdot)z_0(\xi)+\frac{(i\xi)^{-n_2}\alpha_s(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}}\sqrt{\widehat{\lambda}_2}(\cdot)z_2(\xi)\right|^2$$

$$\leqslant \xi^{2k_s}\left(\frac{|1-\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)\left(\widehat{\lambda}_0\,|z_0(\xi)|^2+\widehat{\lambda}_2\,|z_2(\xi)|^2\right),\quad s=1,2.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right)z_0(\xi)+(i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)z_2(\xi)\right|^2d\xi\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2k_s}\left(\frac{|1-\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)\left(\widehat{\lambda}_0\,|z_0(\xi)|^2+\widehat{\lambda}_2\,|z_2(\xi)|^2\right)d\xi\right).$$

Если выполняется условие

$$\sum_{s=1}^{2}\xi^{2k_s}p_s\left(\frac{|1-\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)\leqslant 1, \tag{8}$$

то справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right)z_0(\xi)+(i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)z_2(\xi)\right|^2d\xi\leqslant\widehat{\lambda}_0\delta_0^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2,$$

т. е. оценка сверху совпадает с оценкой снизу, что означает оптимальность метода. Покажем, что множество оптимальных методов не пусто. Из условия (8) найдем ограничения на $\alpha_s(\xi)$ и построим явно какой-либо из методов.

$$\sum_{s=1}^{2}\xi^{2k_s}p_s\left(\frac{|1-\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)$$

$$=\frac{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2}\cdot\sum_{s=1}^{2}\xi^{2(k_s-n_2)}p_s\left|\alpha_s(\xi)-\frac{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right|^2+\frac{\sum\limits_{s=1}^{2}p_s\xi^{2k_s}}{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\leqslant 1,$$

$$\sum_{s=1}^{2}\xi^{2(k_s-n_2)}p_s\left|\alpha_s(\xi)-\frac{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right|^2\leqslant\frac{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2}{\left(\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}\right)^2}\cdot\left(\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}-\sum_{s=1}^{2}p_s\xi^{2k_s}\right).$$

Рассмотрим функцию

$$g(\xi)=-p_1\xi^{2k_1}-p_2\xi^{2k_2}+\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2},\quad \xi\geqslant 0,$$

и параметрически заданную кривую (см. рис. 1):

$$\begin{cases}x=\xi^{2n_2},\\ y=p_1\xi^{2k_1}+p_2\xi^{2k_2}.\end{cases}$$

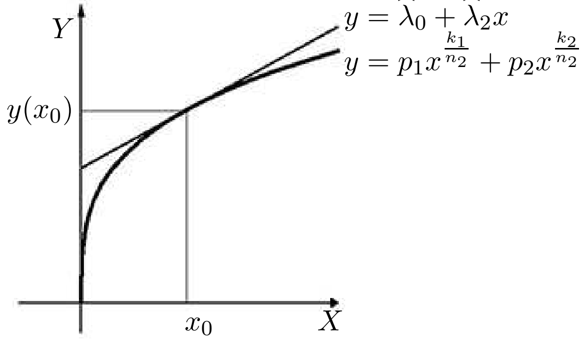

Рис. 1

Нетрудно видеть, что функция $y(x) = p_1 x^{k_1/n_2} + p_2 x^{k_2/n_2}$ возрастает и вогнута при $x \in [0, +\infty)$. В силу вогнутости функции выполняется неравенство $y \leqslant \widetilde{y}$, где $\widetilde{y} = kx + b$ — касательная к графику вогнутой функции $y(x)$ в некоторой точке $x_0 \geqslant 0$. Построим касательную в точке $x_0 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2$. Значения коэффициентов касательной равны $k = y'(x_0) = \widehat{\lambda}_2$, $b = \widetilde{y}(0) = \widehat{\lambda}_0$. График функции $y(x) = p_1 x^{k_1/n_2} + p_2 x^{k_2/n_2}$ расположен ниже прямой $y \leqslant \widetilde{y} = \widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 x$. Это означает, что $g(\xi) \geqslant 0$, т. е.

$$\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - \sum_{s=1}^{2} p_s \xi^{2k_s} \geqslant 0.$$

Положим

$$\alpha_s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} + \theta_s(\xi)|\xi|^{n_2} \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_2 \left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - p_1 \xi^{2k_1} - p_2 \xi^{2k_2}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}}.$$

Тогда условие (8) выполняется при всех $\theta_s(\xi) \in \mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, $s = 1, 2$, удовлетворяющих условию

$$p_1 \xi^{2k_1} \theta_1^2(\xi) + p_2 \xi^{2k_2} \theta_2^2(\xi) \leqslant 1,$$

в частности, при $\theta_1(\xi) = \theta_2(\xi) = 0$. $\rhd$

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. В случае $\delta_1 \geqslant \sqrt{\delta_0 \delta_2}$ утверждение теоремы 2 вытекает из теоремы 1.

Пусть

$$\delta_1 < \sqrt{\delta_0 \delta_2}. \tag{9}$$

Покажем, что в этом случае погрешность оптимального восстановления не меньше величины $\sqrt{\delta_1 W}$. Пусть

$$\Delta_0 = \frac{\delta_0^2}{\delta_1^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2}, \quad P = \frac{p_1^2}{p_2^2},$$

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \left(\frac{\Delta_2 + P\Delta_0 - \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}}{2}\right)^{1/k} \\ &= \left(\frac{p_1^2 \delta_0^2 + p_2^2 \delta_2^2 - \sqrt{(p_1^2 \delta_0^2 + p_2^2 \delta_2^2)^2 - 4 p_1^2 p_2^2 \delta_1^4}}{2 p_2^2 \delta_1^2}\right)^{\frac{1}{4k}}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\xi_1 = \left(\frac{\Delta_2 + P\Delta_0 + \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}}{2}\right)^{1/k}$$
$$= \left(\frac{p_1^2\delta_0^2 + p_2^2\delta_2^2 + \sqrt{(p_1^2\delta_0^2 + p_2^2\delta_2^2)^2 - 4p_1^2p_2^2\delta_1^4}}{2p_2^2\delta_1^2}\right)^{\frac{1}{4k}}, \qquad (11)$$

$$D_1(m) = \sqrt{2\pi m \frac{\delta_0^2\xi_1^{4k} - \delta_1^2}{\xi_1^{4k} - \xi_0^{4k}}}, \quad D_2(m) = \sqrt{2\pi m \frac{\delta_1^2 - \delta_0^2\xi_0^{4k}}{\xi_1^{4k} - \xi_0^{4k}}}.$$

Подкоренное выражение в равенствах (10) и (11) положительно, так как из (9) следует, что $\Delta_0\Delta_2 > 1$, и, следовательно,

$$\Delta_2 + P\Delta_0 \geqslant 2\sqrt{\Delta_2 P\Delta_0} \geqslant 2\sqrt{P}.$$

Тем самым доказано, что $\xi_0 < \xi_1$.

Покажем, что

$$\frac{\delta_0^2\xi_1^{4k} - \delta_1^2}{\xi_1^{4k} - \xi_0^{4k}} > 0.$$

Для этого достаточно доказать, что $\delta_0^2\xi_1^{4k} - \delta_1^2 > 0$ или $\Delta_0\xi_1^{4k} > 1$. Это неравенство можно записать в виде

$$\frac{2P\Delta_0}{\Delta_2 + P\Delta_0 - \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}} > 1.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно показать, что

$$\sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P} > \Delta_2 - P\Delta_0.$$

Если правая часть этого неравенства отрицательна, то оно очевидно выполнено, а если правая часть неотрицательна, то неравенство выполнено в силу очевидного соотношения

$$(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P > (\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P\Delta_0\Delta_2 = (\Delta_2 - P\Delta_0)^2.$$

Осталось показать, что

$$\frac{\delta_1^2 - \delta_0^2\xi_0^{4k}}{\xi_1^{4k} - \xi_0^{4k}} = \delta_0^2 - \frac{\delta_0^2\xi_1^{4k} - \delta_1^2}{\xi_1^{4k} - \xi_0^{4k}} > 0.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно убедиться в справедливости неравенства $\Delta_0\xi_0^4 < 1$, которое можно записать в виде

$$\frac{2P\Delta_0}{\Delta_2 + P\Delta_0 + \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}} < 1.$$

Доказательство этого неравенства сводится к доказательству неравенства

$$\sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P} > P\Delta_0 - \Delta_2,$$

которое фактически уже было доказано.

Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которой

$$(Fx_m)(\xi) = \begin{cases} D_1(m), & \xi \in [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0], \\ D_2(m), & \xi \in [\xi_1 - \frac{1}{m}; \xi_1], \\ 0, & \xi \notin [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0] \cup [\xi_1 - \frac{1}{m}; \xi_1]. \end{cases}$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \bigl|(Fx_m)(\xi)\bigr|^2\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0} D_1^2(m)\,d\xi + \int\limits_{\xi_1-\frac{1}{m}}^{\xi_1} D_2^2(m)\,d\xi\right) \leqslant \frac{D_1^2(m)+D_2^2(m)}{2\pi m} = \delta_0^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{4k}\bigl|(Fx_m)(\xi)\bigr|^2\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0} \xi^{4k}D_1^2(m)\,d\xi + \int\limits_{\xi_1-\frac{1}{m}}^{\xi_1} \xi^{4k}D_2^2(m)\right)$$

$$\leqslant \frac{D_1^2(m)\xi_0^{4k}+D_2^2(m)\xi_1^{4k}}{2\pi m} = \frac{2\pi m\left(\delta_0^2\xi_0^{4k}\xi_1^{4k}-\delta_1^2\xi_0^{4k}+\delta_1^2\xi_1^{4k}-\delta_0^2\xi_0^{4k}\xi_1^{4k}\right)}{2\pi m\left(\xi_1^{4k}-\xi_0^{4k}\right)} = \delta_1^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{8k}\bigl|(Fx_m)(\xi)\bigr|^2\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0} \xi^{8k}D_1^2(m)\,d\xi + \int\limits_{\xi_1-\frac{1}{m}}^{\xi_1} \xi^{8k}D_2^2(m)\right)$$

$$\leqslant \frac{D_1^2(m)\xi_0^{8k}+D_2^2(m)\xi_1^{8k}}{2\pi m} = \frac{2\pi m\left(\delta_0^2\xi_0^{8k}\xi_1^{4k}-\delta_1^2\xi_0^{8k}+\delta_1^2\xi_1^{8k}-\delta_0^2\xi_0^{4k}\xi_1^{8k}\right)}{2\pi m\left(\xi_1^{4k}-\xi_0^{4k}\right)}$$

$$= \delta_1^2\left(\xi_1^{4k}+\xi_0^{4k}\right) - \delta_0^2\frac{p_1^2}{p_2^2} = \delta_2^2,$$

то последовательность функций $x_m(\cdot)$ допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины

$$\frac{1}{2\pi}\left(p_1\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2k}\bigl|(Fx_m)(\xi)\bigr|^2\,d\xi + p_2\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{6k}\bigl|(Fx_m)(\xi)\bigr|^2\,d\xi\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(D_1^2(m)\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0}\left(p_1\xi^{2k}+p_2\xi^{6k}\right)d\xi + D_2^2(m)\int\limits_{\xi_1-\frac{1}{m}}^{\xi_1}\left(p_1\xi^{2k}+p_2\xi^{6k}\right)d\xi\right)$$

$$\geqslant \frac{D_1^2(m)\left(p_1\left(\xi_0-\frac{1}{m}\right)^{2k}+p_2\left(\xi_0-\frac{1}{m}\right)^{6k}\right)+D_2^2(m)\left(p_1\left(\xi_1-\frac{1}{m}\right)^{2k}+p_2\left(\xi_1-\frac{1}{m}\right)^{6k}\right)}{2\pi m}.$$

При $m\to\infty$ данная дробь стремится к величине

$$Q = \frac{W^2}{p_2\left(\xi_0^{2k}+\xi_1^{2k}\right)} = \delta_1 W = \widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_1\delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2$$

при указанных выше значениях ξ_0, ξ_1 и

$$\widehat{\lambda}_0 = \frac{p_1^2\delta_1}{2W}, \quad \widehat{\lambda}_1 = \frac{p_2^2W^2+2p_1p_2\delta_1^2}{2\delta_1 W}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{p_2^2\delta_1}{2W}.$$

Таким образом, в случае $\delta_1 < \sqrt{\delta_0\delta_2}$ погрешность оптимального восстановления

$$E\left(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\overline{K},\overline{\delta}\right) \geqslant \sqrt{\widehat{\lambda}_0\delta_0^2+\widehat{\lambda}_1\delta_1^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2}.$$

Перейдем к построению оптимальных методов. При $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ задача (7) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{(2s-1)k}Fx(\xi)-\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)(i\xi)^{2kj}Fx(\xi)+\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right)\to\max,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|z_j(\xi)\right|^2 d\xi\leqslant\delta_j^2,\quad j=0,1,2. \tag{12}$$

В случае $\delta_1 < \sqrt{\delta_0\delta_2}$, возьмем такие $\alpha_j^s(\xi)$, $s = 1, 2$, чтобы они удовлетворяли условию $\sum_{j=0}^{2}(i\xi)^{2kj}\alpha_j^s(\xi) = (i\xi)^{(2s-1)k}$. Задача (7) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right)\to\max,\quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|z_j(\xi)\right|^2 d\xi\leqslant\delta_j^2,\quad j=0,1,2.$$

Применим неравенство Коши — Буняковского для оценки подынтегральных функций:

$$\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2=\left|\sum_{j=0}^{2}\frac{\alpha_j^s(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_j}}\sqrt{\widehat{\lambda}_j}(\cdot)z_j(\xi)\right|^2\leqslant\left(\sum_{j=0}^{2}\frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\left|z_j(\xi)\right|^2\right),\quad s=1,2.$$

Значит,

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right)\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\sum_{j=0}^{2}\frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\left|z_j(\xi)\right|^2\right)d\xi\right).$$

При выполнении условия

$$\sum_{s=1}^{2}p_s\sum_{j=0}^{2}\frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j}\leqslant 1, \tag{13}$$

также выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right)\leqslant\sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\delta_j^2,$$

т. е. указанные методы оптимальны. Докажем, что множество оптимальных методов также не пусто. Пусть

$$\alpha_j^s(\xi)=\frac{\widehat{\lambda}_j\,(i\xi)^{(2s-1)k}\,(-i\xi)^{2kj}}{\sum\limits_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\xi^{4kj}}.$$

Тогда условие $\sum_{j=0}^{2}(i\xi)^{2kj}\alpha_j^s(\xi) = (i\xi)^{(2s-1)k}$, $s = 1, 2$, выполняется. Покажем, что условие (13) также выполняется.

$$\sum_{s=1}^{2}p_s\sum_{j=0}^{2}\frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j}=\frac{p_1\xi^{2k}+p_2\xi^{6k}}{\sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\xi^{4kj}}.$$

Рассмотрим функцию

$$g_1(\xi) = -p_1\xi^{2k} - p_2\xi^{6k} + \widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_1\xi^{4k} + \widehat{\lambda}_2\xi^{8k}$$
$$= \frac{p_1^2\delta_1}{2W} - p_1\xi^{2k} + \frac{p_2^2W^2 + 2p_1p_2\delta_1^2}{2\delta_1 W}\xi^{4k} - p_2\xi^{6k} + \frac{p_2^2\delta_1}{2W}\xi^{8k}$$
$$= \frac{p_2^2\delta_1}{2W}\left(\xi_0^{4k}\xi_1^{4k} - 2\xi_0^{2k}\xi_1^{2k}\xi^{2k} + \left(\xi_0^{4k} + 4\xi_0^{2k}\xi_1^{2k} + \xi_1^{4k}\right)\xi^{4k} - 2\left(\xi_0^{2k} + \xi_1^{2k}\right)\xi^{6k} + \xi^{8k}\right)$$
$$= \frac{p_2^2\delta_1}{2W}\left(\xi^{2k} - \xi_0^{2k}\right)^2\left(\xi^{2k} - \xi_1^{2k}\right)^2 \geqslant 0,$$

это означает что

$$\frac{p_1\xi^{2k} + p_2\xi^{6k}}{\sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\xi^{4kj}} \leqslant 1,$$

условие (13) выполнено, множество оптимальных методов не пусто.

Литература

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 1965.
2. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.—М.: Наука, 1988.—254 с.
3. *Марчук А. Г., Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Мат. заметки.—1975.—Т. 17, № 3.—С. 359–368.
4. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой // Мат. сб.—2002.—Т. 193.—С. 79–100.
5. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации // Функцион. анализ и его прил.—2003.—Т. 37.—С. 51–64.
6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди — Литтлвуда — Полиа и восстановление производных по неточной информации // Докл. РАН.—2011.—Т. 438, № 3.—С. 300–302.

Статья поступила 21 марта 2016 г.

Унучек Светлана Александровна
Российская академия народного хозяйства
и государственной службы при Президенте РФ,
старший преподаватель
РОССИЯ, 119571, Москва, проспект Вернадского, 82, стр.1
E-mail: svun@mail.ru

OPTIMAL RECOVERY OF THE DERIVATIVE OF THE FUNCTION FROM ITS INACCURATELY GIVEN OTHER ORDERS OF DERIVATIVES AND THE FUNCTION ITSELF

Unuchek S. A.

The paper deals with the problem of simultaneous recovery of the k_1-th and k_2-th order derivatives of a function in the mean square norm from inaccurately given derivatives of n_1-th and n_2-th order and the function itself. The solution is given under some conditions on the errors of given derivatives and the function itself. The problem is solved completely for the case $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. It turns out that, in contrast to previously encountered situations, in the general case the error of recovery depends on errors of all three errors of input data.

Key words: optimal method, Fourier transform, extremal problem.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 3, С. 72–83

УДК **519.6**

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧАХ С НЕГЛАДКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

Р. А. Хачатрян

В статье методом шатров получены необходимые условия экстремума в задачах математического программирования с негладкими ограничениями типа равенств. В некоторых таких задачах, где ограничения задаются, вообще говоря, не локально липшицевыми функциями, доказано правило множителей Лагранжа. Необходимые условия выражаются в терминах субдифференциала Мишеля — Пено и нижнего асимптотического субдифференциала Половинкина.

Ключевые слова: субдифференциал, шатер, касательный конус.

1. Мотивация, определения и обозначения

Исследования по необходимым условиям экстремума в последние годы были связаны в основном с более детальным изучением задач, в которых участвуют негладкие функции. При этом на первый план выдвигаются два аспекта: использование техники выпуклого анализа для невыпуклых задач и учет негладких ограничений типа равенства.

В статье [4] Ф. Кларком, с использованием вариационного принципа Экланда [13], доказано правило множителей Лагранжа в задачах с ограничениями типа равенств, задаваемых локально липшицевыми функциями. Правило множителей Лагранжа в терминах субдифференциала Кларка, при помощи теоремы о накрывании, доказано и в работе [3].

Несмотря на хорошие свойства субдифференциала Кларка, его использование в необходимых условиях экстремума не всегда приводит к удовлетворительному результату. Простейшие примеры показывают, что полученное в терминах обобщенных градиентов Кларка необходимое условие минимума довольно грубо и не позволяет отбросить заведомо неоптимальные точки. Это связано с тем, что для невыпуклой функции локальное ее поведение не всегда хорошо описывается обобщенной производной Кларка.

В работе [10] П. Мишелем и Ж. П. Пено введена новая выпуклая аппроксимация локально липшицевой функции. Введенный ими субдифференциал сохраняет многие свойства субдифференциала Кларака и входит в него. В [10] получено необходимое условие экстремума в задачах с негладкими ограничениями типа неравенств. В статье [11] в задачах с негладкими ограничениями типа равенств получено правило множителей Лагранжа в терминах субдифференциала Мишеля — Пено.

В настоящей статье показано, что применение метода шатров к негладким задачам приводит к получению принципиально новых результатов. Статья идейно связана с работами В. Г. Болтянского [2], Ф. Кларка [4], П. Мишеля и Ж. П. Пено [10], Б. Н. Пшеничного [7, 8] и Е. С. Половинкина [5], А. Д. Иоффе [11].

© 2016 Хачатрян Р. А.

Для вышеуказанной задачи получено необходимое условие экстремума, в котором субдифференциал целевой функции — нижний асимптотический субдифференциал Половинкина [5], а остальные — субдифференциалы Мишеля — Пено (теорема 3.3).

Б. Н. Пшеничным в [6] введено понятие верхней выпуклой аппроксимации (в.в.а) для негладких функций. Пусть $f(x)$ — произвольная функция. Положим

$$F(x_0,\overline{x}) = \limsup_{\substack{\overline{y}\to\overline{x},\\ \lambda\downarrow 0}} \frac{f(x_0+\lambda\overline{y}) - f(x_0)}{\lambda}.$$

Положительно однородная выпуклая, замкнутая по $\overline{x}$ функция $h(x_0,\overline{x})$ называется *верхней выпуклой аппроксимацией* функции f в точке x_0, если

$$h(x_0,\overline{x}) \geqslant F(x_0,\overline{x}) \quad (\forall\, \overline{x}\in\mathbb{R}^n).$$

Множество

$$\partial f(x_0) = \bigl\{x^*\in\mathbb{R}^n :\, h(x_0,\overline{x}) \geqslant \langle x^*,\overline{x}\rangle \ \forall\, \overline{x}\in\mathbb{R}^n\bigr\}$$

называется *субдифференциалом функции* f в точке x_0. Здесь $\langle x^*,\overline{x}\rangle$ — скалярное произведение векторов x^* и $\overline{x}$, принадлежащих $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1 [6]. Выпуклый конус $K_M(x_0)$ называется *конусом касательных направленный множества* M в точке x_0, если из включения $\overline{x}\in K_M(x_0)$ следует, что существует такая функция $\varphi(\lambda)$, что

$$x_0+\lambda\overline{x}+\varphi(\lambda)\in M$$

при достаточно малых $\lambda\geqslant 0$ и $\lambda^{-1}\varphi(\lambda)\to 0$ при $\lambda\downarrow 0$.

Следующая теорема является необходимым условием экстремума в общей задаче математического программирования в терминах в.в.а.

Теорема 1.1 [6]**.** *Пусть x_0 — точка минимума функции f на множестве M. Допустим, что $h(x_0,\overline{x})$ — в.в.а. для f в x_0. Тогда*

$$\partial f(x_0)\cap K^*_M(x_0)\neq\varnothing.$$

Здесь $K^*_M(x_0)$ — сопряженный конус к конусу $K_M(x_0)$, т. е.

$$K^*_M(x_0) = \bigl\{x^*\in\mathbb{R}^n :\ \langle x^*,\overline{x}\rangle\geqslant 0\ \forall\,\overline{x}\in K_M(x_0)\bigr\}.$$

Заметим, что в.в.а. определяется неоднозначно и для получения содержательных условий экстремума необходимо знать целые семейства в.в.а. Например, если f — вогнутая непрерывная функция, то для любого $x^*\in\partial(-f)(x_0)$ функция $h(x_0,\overline{x}) = \langle -x^*,\overline{x}\rangle$ есть в.в.а., а множество $\{-x^*\}$ — соответствующий субдифференциал вогнутой функции f.

Используя этот факт, в настоящей статье получено правило множителей Лагранжа в некоторых специальных классах экстремальных задач, где участвуют не локально липшицевые функции (теорема 3.1).

Определение 1.2 [10]. *Обобщенная производная Мишеля — Пено* функции f по направлению $\overline{x}$, обозначаемая $f'_{MP}(x_0,\overline{x})$, определяется следующим образом

$$f'_{MP}(x_0,\overline{x}) = \sup_{w\in R^n}\left\{\limsup_{\lambda\downarrow 0}\frac{f(x_0+\lambda(\overline{x}+w)) - f(x_0+\lambda w)}{\lambda}\right\}.$$

Определение 1.3 [10]. *Субдифференциалом Мишеля — Пено* для локально липшицевой функции f в точке x_0 называется множество

$$\partial_{MP} f(x_0) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : f'_{MP}(x_0, \overline{x}) \geqslant \langle x^*, \overline{x} \rangle \ \ \forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Известно (см., например, [5, теорема 28.1, с. 341]), что если f — выпуклая функция в окрестности точки x_0, то $\partial f(x_0) = \partial_{MP} f(x_0)$, где $\partial f(x_0)$ — обычный субдифференциал функции f в x_0.

Нетрудно заметить, что если функция f локально липшицева, то обобщенная производная $f'_{MP}(x_0, \overline{x})$ является верхней выпуклой аппроксимацией функции f в точке x_0.

Приведем определение нижнего асимптотического субдифференциала.

Определение 1.4 [5]. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — локально липшицевая функция и $M \equiv \text{epi}(f)$. Пусть $K = T_M(x_0) \dot{-} T_M(x_0)$, а $f'_{AL}(x_0, \overline{x})$ — положительно однородная выпуклая функция, надграфиком которой является конус K. *AL-субдифференциалом* функции f в точке x_0 называется множество

$$\partial_{AL} f(x_0) \equiv \{x^* \in \mathbb{R}^n : f'_{AL}(x_0, \overline{x}) \geqslant \langle x^*, \overline{x} \rangle \ \ \forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Здесь $A \dot{-} B \equiv \{x \in \mathbb{R}^n / x + B \subseteq A\}$ — геометрическая разность множества A и B, а $T_M(x_0)$ — нижний конус касательных направлений ко множеству M в точке x_0 (см. [5, гл. 3, п. 24, определение 24.3]).

В [5, с. 328, формула 27.10] показано следующее представление:

$$f'_{AL}(x_0, \overline{x}) = \sup_{w \in \mathbb{R}^n} \big\{ f'_L(x_0, \overline{x} + w) - f'_L(x_0, w) \big\},$$

где

$$f'_L(x_0, u) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что функция $f'_{AL}(x_0, \overline{x})$ является верхней выпуклой аппроксимацией для f в точке x_0.

Определение 1.5 [1]. Выпуклый конус $K \subseteq K_M(x)$ называется *шатром* в точке $x \in M$, если существует отображение r, определенное в некоторой окрестности U нуля, такое, что

$$x + \overline{x} + r(\overline{x}) \in M, \text{ если } \ \overline{x} \in K \cap U \text{ и } \ \frac{r(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} \to 0 \ \text{ при } \ \overline{x} \to 0.$$

Шатер K называется *непрерывным*, если r — непрерывное отображение.

В дальнейшем $\text{cl}\{M\}$ — замыкание множества $M \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\text{con}(M - x_0) = \big\{ y \in \mathbb{R}^n / y = \lambda(x - x_0), \ \lambda \geqslant 0, \ x \in M \big\},$$

$$\text{Lin}\, M = \text{cl}\big\{ \text{con}\, M - \text{con}\, M \big\}.$$

2. Непрерывные шатры

Лемма 2.1. *Пусть $g(x)$ — липшицевая функция, определенная в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует функция $r(\overline{x}) = o(\overline{x})$, определенная в некоторой окрестности нуля, такая, что*

$$g(x_0 + \overline{x}) \leqslant g(x_0) + g'_{MP}(x_0, \overline{x}) + r(\overline{x}).$$

◁ Положим
$$r(\overline{x}) = \max\big\{0, g(x_0+\overline{x}) - g(x_0) - g'_{MP}(x_0,\overline{x})\big\}.$$

Покажем, что $r(\overline{x})$ обладает нужным свойством. Допустим противное. Это означает, что существуют последовательность $\overline{x_i} \to 0$ и положительное число ϵ_0 такие, что

$$r(\overline{x_i}) \geqslant \epsilon_0 \|\overline{x_i}\|.$$

Положим
$$\overline{y_i} = \frac{\overline{x_i}}{\|\overline{x_i}\|}, \quad \lambda_i = \|\overline{x_i}\|.$$

Тогда можно считать, что $\overline{y_i} \to \overline{y_0}$. Имеем

$$\begin{aligned}
0 < \epsilon_0 &\leqslant \lim_{i\to\infty} \sup \frac{r(\overline{x_i})}{\|\overline{x_i}\|} = \lim_{i\to\infty} \sup \left[\frac{g(x_0+\lambda_i\overline{y_i}) - g(x_0)}{\lambda_i} - g'_{MP}(x_0,\overline{y_i})\right] \\
&\leqslant \lim_{i\to\infty}\left[\sup \frac{g(x_0+\lambda_i\overline{y_i}) - g(x_0+\lambda_i\overline{y_0})}{\lambda_i} + \frac{g(x_0+\lambda_i\overline{y_0}) - g(x_0)}{\lambda_i} - g'_{MP}(x_0,\overline{y_i})\right] \\
&\leqslant \lim_{i\to\infty} \sup \left[g'_{MP}(x_0,\overline{y_0}) - g'_{MP}(x_0,\overline{y_i})\right] + \lim_{i\to\infty} \sup \frac{g(x_0+\lambda_i\overline{y_i}) - g(x_0+\lambda_i\overline{y_0})}{\lambda_i}.
\end{aligned}$$

Поскольку $g'_{MP}(x_0,\cdot)$ полунепрерывна снизу в нуле, то

$$\lim_{i\to\infty} \sup \left[g'_{MP}(x_0,\overline{y_0}) - g'_{MP}(x_0,\overline{y_i})\right] \leqslant 0.$$

Пусть функция g липшицева с константой L. Тогда имеем

$$\lim_{i\to\infty} \sup \frac{g(x_0+\lambda_i\overline{y_i}) - g(x_0+\lambda_i\overline{y_0})}{\lambda_i} \leqslant L\|\overline{y_i} - \overline{y_0}\| \to 0.$$

Итак получили противоречие, поскольку правая часть неравенства стремится к нулю, а ее левая часть — фиксированное положительное число. ▷

Теорема 2.1. *Пусть g локально липшицева и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — такая точка, что $x_0 \in M \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ и существует вектор w такой, что*

$$g'_{MP}(x_0, w) < 0,$$

а функция $g'_{MP}(x,w)$ полунепрерывна сверху в точке x_0.

Тогда подпространство

$$H \equiv \big\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : g'_{MP}(x_0,\overline{x}) \leqslant 0,\ g'_{MP}(x_0,-\overline{x}) \leqslant 0\big\}$$

является непрерывным шатром к множеству M в точке x_0.

◁ По лемме 2.1 существуют такие функции $r_i(\overline{x}) = o(\overline{x})$, $i = 1,2$, что

$$g(x_0+\overline{x}) \leqslant g(x_0) + g'_{MP}(x_0,\overline{x}) + r_1(\overline{x}), \tag{2.1}$$

$$-g(x_0+\overline{x}) \leqslant -g(x_0) + g'_{MP}(x_0,-\overline{x}) + r_2(\overline{x}). \tag{2.2}$$

Так как по предположению функция $g'_{MP}(x,w)$ полунепрерывна сверху по x, то существует окрестность V точки x_0 такая, что

$$\max_{x\in V} g'_{MP}(x,w) \equiv m < 0.$$

Положим $p(\lambda) \equiv \sup\{r_1(\overline{x}) : \|\overline{x}\| \leqslant \lambda\}$. Ясно, что функция $p(\lambda)$ монотонно не убывает и $p(\lambda) = o(\lambda)$, $r_1(\overline{x}) \leqslant p(\|\overline{x}\|)$. Поэтому для $\overline{x} \in H$, $\gamma > 0$ из неравенства (2.1) получаем

$$g\big(x_0 + \overline{x} + \gamma\|\overline{x}\|w\big) \leqslant g(x_0) + g'_{MP}(x_0, \overline{x} + \gamma\|\overline{x}\|w)$$
$$+\, p\big(\|\overline{x}\| + \gamma\|\overline{x}\|\|w\|\big) \leqslant g'_{MP}(x_0, \overline{x}) + \gamma\|\overline{x}\|g'_{MP}(x_0, w)$$
$$+p\big(\|\overline{x}\|(1+\gamma\|w\|)\big) \leqslant \|\overline{x}\|\left[\gamma g'_{MP}(x_0, w) + \frac{p((1+\gamma\|w\|)\|\overline{x}\|)}{\|\overline{x}\|}\right].$$

Выберем число $\delta^+_\gamma > 0$ настолько малым, чтобы выражение, выделенное в квадратных скобках, было меньше, чем $\frac{1}{2}\gamma g'_{MP}(x_0, w)$ при $\|\overline{x}\| \leqslant \delta^+_\gamma$, $\overline{x} \neq 0$. Тогда

$$g\big(x_0 + \overline{x} + \gamma\|\overline{x}\|w\big) \leqslant \frac{1}{2}\gamma g'_{MP}(x_0, w)\|\overline{x}\| < 0.$$

Так как $(-g)'_{MP}(x_0, \overline{x}) = g'_{MP}(x_0, -\overline{x})$, то аналогично, используя неравенство 2.2, получим, что существует такое число $\delta^-_\gamma > 0$, что

$$g(x_0 + \overline{x} - \gamma\|\overline{x}\|w) > 0 \quad (\forall\, \overline{x} \in H,\ \|\overline{x}\| \leqslant \delta^-_\gamma,\ \overline{x} \neq 0).$$

Положим $\delta_\gamma = \min\{\delta^+_\gamma, \delta^-_\gamma\}$ и рассмотрим функцию

$$q(\tau) \equiv g(x_0 + \overline{x} + \tau\|\overline{x}\|w)$$

на отрезке $[-\gamma, \gamma]$. Имеем $q(\gamma) < 0$, $q(-\gamma) > 0$. Так как функция g непрерывна, то $q(\tau)$ тоже является непрерывной функцией. Поскольку функция q на отрезке $[-\gamma, \gamma]$ меняет знак, то в некоторой точке $\tau(\overline{x}) \in [-\gamma, \gamma]$ она обращается в нуль. Итак, для любого $\gamma > 0$ существует $\delta_\gamma > 0$ такое, что

$$g(x_0 + \overline{x} + \tau(\overline{x})\|\overline{x}\|w) = 0, \quad \mid \tau(\overline{x}) \mid \leqslant \gamma,\ \|\overline{x}\| \leqslant \delta_\gamma.$$

Заметим также, что

$$\limsup_{\Delta\downarrow 0} \frac{q(\tau+\Delta) - q(\tau)}{\Delta} = \limsup_{\Delta\downarrow 0}\left[\frac{g(x_0 + \overline{x} + (\tau+\Delta)\|\overline{x}\|w)}{\Delta} - \frac{g(x_0 + \overline{x} + \tau\|\overline{x}\|w)}{\Delta}\right]$$
$$\leqslant \|\overline{x}\|g'_{MP}\big(x_0 + \overline{x} + \tau\|\overline{x}\|w, w\big).$$

Поэтому в силу полунепрерывности сверху функции $g'_{MP}(x, w)$ по x в точке x_0 и условия $g'_{MP}(x_0, w) < 0$, имеем

$$\limsup_{\Delta\downarrow 0} \frac{q(\tau+\Delta) - q(\tau)}{\Delta} < 0 \ \text{ при малых } \ \overline{x}.$$

Отсюда следует, что функция q монотонно убывает и, следовательно, она имеет на отрезке $[-\gamma, \gamma]$ единственный корень. Поэтому функция $\tau(\overline{x})$ для достаточно малых $\overline{x}$ определяется однозначно. Из $|\tau(\overline{x})| \leqslant \gamma$ и $\|\overline{x}\| \leqslant \delta_\gamma$ следует, что $\tau(\overline{x}) \to 0$ при $\overline{x} \to 0$.

Покажем, что функция $\tau(\overline{x})$ непрерывна. Допустим противное. Пусть существуют две последовательности $\{\overline{x_i}\}$, $\{\overline{y_i}\}$ такие, что $\overline{x_i} \to \overline{x_0}$, $\overline{y_i} \to \overline{x_0}$, но $\tau(\overline{x_i}) \to \overline{\tau}$, $\tau(\overline{y_i}) \to \underline{\tau}$, $\overline{\tau} \neq \underline{\tau}$. Отсюда и из непрерывности функции f следует, что

$$g(x_0 + \overline{x_0} + \overline{\tau}\|\overline{x_0}\|w) = 0,$$

$$g(x_0 + \overline{x_0} + \underline{\tau}\|\overline{x_0}\|w) = 0, \quad |\overline{\tau}| \leqslant \gamma, \ |\underline{\tau}| \leqslant \gamma.$$

Отсюда $\overline{\tau} = \underline{\tau}$ в силу однозначности функции $\tau(\overline{x})$. Таким образом, показано, что в малой окрестности нуля и при $\overline{x} \in H$ функция $\tau(\overline{x})$ непрерывна и $\tau(\overline{x}) \to 0$,

$$g(x_0 + \overline{x} + \tau(\overline{x})\|\overline{x}\|w) = 0.$$

Так как $0 \in H$, то

$$\|Pr_H(\overline{x})\| \leqslant \|\overline{x}\|,$$

где $Pr_H(\overline{x})$ — проекция точки $\overline{x}$ на подпространство H. Положим

$$\Psi(\overline{x}) = \overline{x} + \tau(Pr_H(\overline{x}))\|\overline{x}\|w.$$

Очевидно, что функция Ψ непрерывна в некоторой окрестности U нуля и такова, что

$$g(x_0 + \Psi(\overline{x})) = 0 \quad (\forall\, \overline{x} \in H \cap U, \ \Psi(\overline{x}) - \overline{x} = o(\overline{x})).$$

Следствие. *Пусть функция g дифференцируема по Гато в окрестности точки x_0 и $g'_G(x_0) \neq 0$. Пусть вектор w такой, что $\langle g'_G(x_0), w\rangle < 0$ и функция $f(x) \equiv \langle g'_G(x), w\rangle$ полунепрерывна сверху в точке x_0. Тогда подпространство $H = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \langle g'_G(x_0), \overline{x}\rangle = 0\}$ является непрерывным шатром к множеству M в точке x_0.*

Замечание. Теорема 2.1 верна, если вместо обобщенной производной Пено использовать производную Кларка и тогда условие полунепрерывности сверху обобщенной производной автоматически выполняется. Заметим также, что если локально липшицевая функция $g(x)$ имеет обычную производную по направлениям, то согласно лемме 28.1 [5, гл. 3, п. 28] ее обобщенная производная Пено совпадает с обобщенной производной Кларка, и поэтому $g'_{MP}(x, \overline{x})$ полунепрерывна сверху по x.

3. О правиле множителей Лагранжа в негладких задачах оптимизации

Рассмотрим следующую задачу математического программирования:

$$f_0(x) \longrightarrow \min, \quad f_i(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, k, \ x \in M). \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Пусть точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — решение задачи (3.1). Предположим также, что функции $f_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, непрерывны в окрестности точки x_0 и дифференцируемы в этой точке. Пусть K является непрерывным шатром для множества M в точке x_0. Тогда существуют числа λ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, не равные нулю одновременно, и такие, что*

$$0 \in \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f'_i(x_0) - K^*.$$

$\triangleleft$ Обозначим

$$F(x) := \big(f_0(x) - f_0(x_0), f_1(x), \ldots, f_k(x)\big).$$

Покажем, что

$$F'(x_0)K \neq \mathbb{R}^{k+1}.$$

Пусть

$$F'(x_0)K = \mathbb{R}^{k+1}.$$

Отсюда следует, что существует такой симплекс $[z_1, z_2, \dots, z_{k+2}] \subset \mathbb{R}^{k+1}$, содержащий нуль в качестве внутренней точки, что

$$[z_1, z_2, \dots, z_{k+2}] \in F'(x_0)K.$$

Значит, существуют векторы $\overline{x_j} \in K$ $(j = 1, 2, \dots, k+2)$ такие, что

$$z_j = F'(x_0)\overline{x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k+2. \tag{3.2}$$

Так как векторы $z_j - z_1$, $j = 2, 3, \dots, k+2$, образуют базис в $\mathbb{R}^{k+1}$, то можно определить линейное отображение $L : \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$L(z_j - z_1) = \overline{x_j} - \overline{x_1}, \quad j = 2, \dots, k+2.$$

Пусть

$$z = \sum_{j=2}^{k+2} \beta_j z_j + \left(1 - \sum_{j=2}^{k+2} \beta_j\right) z_1 \in [z_1, z_2, \dots, z_{k+2}].$$

Положим

$$\varphi(z) = L(z - z_1) + \overline{x_1},$$

где $\varphi(z)$ — непрерывное отображение симплекса $[z_1, z_2, \dots, z_{k+2}]$ в множество $\operatorname{conv}\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_{k+2}}\}$. Действительно, имеем

$$\varphi(z) = L(z - z_1) + \overline{x_1} = L\left(\sum_{j=2}^{k+2} \beta_j z_j + \left(1 - \sum_{j=2}^{k+2} \beta_j\right) z_1 - z_1\right) + \overline{x_1}$$

$$= L\left(\sum_{j=2}^{k+2} \beta_j (z_j - z_1)\right) + \overline{x_1} = \sum_{j=2}^{k+2} \beta_j L(z_j - z_1) + \overline{x_1}$$

$$= \sum_{j=2}^{k+2} \beta_j (\overline{x_j} - \overline{x_1}) + \overline{x_1} = \sum_{j=2}^{k+2} \beta_j \overline{x_j} + \left(1 - \sum_{j=2}^{k+2} \beta_j\right) \overline{x_1} \in \operatorname{conv}\{\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{k+2}}\}.$$

Так как K является непрерывным шатром для M в точке x_0, то существует непрерывное отображение $\psi(\overline{x}) \equiv \overline{x} + r(\overline{x})$, $r(\overline{x}) = o(\overline{x})$, такое, что

$$x_0 + \psi(\overline{x}) \in M \quad (\forall\, \overline{x} \in K \cap B_{\epsilon_0}(0)),$$

где ϵ_0 — некоторое положительное число. Для фиксированных чисел $\delta > 0$ и $\epsilon > 0$ определим непрерывное отображение ϕ_δ на $[z_1, z_2, \dots, z_{k+2}]$ следующим образом:

$$\phi_\delta(z) \equiv z - \frac{F(x_0 + \psi(L(\delta z - \delta z_1) + \delta\overline{x_1}))}{\delta} - \vec{\epsilon}, \quad z \in [z_1, z_2, \dots, z_{k+2}],$$

$$\vec{\epsilon} = (\epsilon, \underbrace{0, \dots, 0}_{k}).$$

При малых $\delta > 0$ имеем $\delta \operatorname{conv}\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_{k+2}}\} \subseteq B_{\epsilon_0}(0) \cap K$ и, следовательно,

$$L(\delta z - \delta z_1) + \delta\overline{x_1} = \delta\varphi(z) \in K \cap B_{\epsilon_0}(0). \tag{3.3}$$

Поскольку $F(x_0) = 0$ и отображение F дифференцируемо в точке x_0, то из (3.2)–(3.3) следует, что

$$\begin{aligned}\phi_\delta(z) &= z - \frac{F(x_0)}{\delta} - F'(x_0)\varphi(z) - \frac{o(x_0, \delta\varphi(z))}{\delta} - \vec{\epsilon} \\ &= z - F'(x_0)\left(\sum_{j=2}^{k+2}\beta_j(\overline{x_j} - \overline{x_1}) + \overline{x_1}\right) - \frac{o(x_0, \delta\varphi(z))}{\delta} - \vec{\epsilon} \\ &= z - z - \frac{o(x_0, \delta\varphi(z))}{\delta} - \vec{\epsilon} = -\frac{o(x_0, \delta\varphi(z))}{\delta} - \vec{\epsilon}.\end{aligned}$$

Следовательно, для достаточно малых $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ непрерывное отображение ϕ_δ отображает симплекс $[z_1, z_2, \ldots, z_{k+2}]$ в себя. Значит, по теореме Брауера существует неподвижная точка этого отображения, т. е. существует элемент $z_\epsilon \in [z_1, z_2, \ldots, z_{k+2}]$ такой, что

$$\phi_\delta(z_\varepsilon) = z_\varepsilon.$$

Отсюда, имея ввиду определение отображения $\Phi_\delta(z)$, получаем

$$f_0(x_0 + \psi(\delta\varphi(z_\varepsilon))) = f_0(x_0) - \epsilon\delta, \quad f_i(x_0 + \psi(\delta\varphi(z_\epsilon))) = 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$x_0 + \psi(\delta\varphi(z_\epsilon)) \in M.$$

Это противоречит тому, что x_0 — решение задачи (3.1). Таким образом доказано, что

$$F'(x_0)K \neq \mathbb{R}^{k+1}.$$

Значит, существует ненулевой вектор $\vec{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ такой, что

$$\left\langle \vec{\lambda}, F'(x_0)y^* \right\rangle \geqslant 0 \quad (\forall\, y^* \in K).$$

Следовательно, $\langle F'^*(x_0)\vec{\lambda}, \overline{x}\rangle \geqslant 0$ $(\forall\, \overline{x} \in K)$, т. е. $F'^*(x_0)\vec{\lambda} \in K^*$. Откуда, получаем

$$0 \in \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_i'(x_0) - K^*. \ \triangleright$$

Следствие. *Пусть в задаче* 3.1 *множество* M *задано следующим образом:*

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) = 0\right\}.$$

Пусть g *— выпуклая непрерывная функция и* $0 \notin \partial g(x_0)$. *Предположим также, что относительно функций* f_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, *выполнены все предположения теоремы* 3.1.

Тогда, если x_0 *— решение задачи* 3.1, *то для любого* $x^* \in \partial g(x_0)$ *существуют числа* $\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *не равные нулю одновременно и такие, что*

$$0 \in \sum_{i=0}^{k} \lambda_k f_i'(x_0) + \mathrm{cl}\left\{\,\mathrm{con}\,\partial g(x_0) - \mathrm{con}\, x^*\right\}. \tag{3.4}$$

$\triangleleft$ В силу теоремы 3 из [9] для любого $x^* \in \partial g(x_0)$ выпуклый конус

$$K_M(x_0, x^*) \equiv \left\{\overline{x} : \ g'(x_0, \overline{x}) \leqslant 0, \ \langle x^*, \overline{x}\rangle \geqslant 0\right\}$$

является непрерывным шатром к множеству $M \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ в точке x_0. Следовательно, по теореме 3.1 для любого $x^* \in \partial g(x_0)$ существуют числа $\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не равные нулю одновременно, такие, что

$$0 \in \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_i'(x_0) - K_M^*(x_0, x^*). \tag{3.5}$$

Имеем

$$K_M^*(x_0, x^*) = \operatorname{cl}\bigl\{ \operatorname{con} x^* - \operatorname{con} \partial g(x_0)\bigr\}.$$

Отсюда, учитывая включение (3.5), немедленно получим правило множителей Лагранжа (3.4). $\triangleright$

Заметим, что функции f_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, вообще говоря, не являются локально липшицевыми, а g может и не быть дифференцируемой функцией. Поэтому, при помощи вариационного принципа Экланда или теоремы о неявных функциях в задаче 3.1 невозможно получить правило множителей Лагранжа.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$f(x) \to \min, \quad g(x) = 0, \quad x \in M. \tag{3.6}$$

Теорема 3.2. *Пусть f, g — выпуклые функции, а M — выпуклое множество. Пусть x_0 — решение задачи* (3.6) *и для некоторого $x_0^* \in \partial g(x_0)$ существуют такие векторы w_1, w_2, что*

$$g'(x_0, w_1) < 0, \quad \langle x_0^*, w_2\rangle > 0, \quad w_1, w_2 \in M - x_0.$$

Тогда либо

$$0 \in \partial f(x_0) + \operatorname{con} \partial g(x_0) - K_M^*(x_0), \tag{3.7}$$

либо

$$0 \in \partial f(x_0) - \operatorname{con} x_0^* - K_M^*(x_0). \tag{3.8}$$

$\triangleleft$ Пусть включение (3.7) не выполняется. Тогда согласно сильной отделимости выпуклых множеств существуют вектор u_1 и число $\delta_1 > 0$ такие, что

$$\bigl\langle u_1, y_1^* - (y_3^* - y_2^*)\bigr\rangle \leqslant -\delta_1 \quad (\forall\, y_1^* \in \partial f(x_0),\ y_2^* \in \operatorname{con} \partial g(x_0),\ y_3^* \in K_M^*(x_0)). \tag{3.9}$$

Отсюда следует, что

$$\bigl\langle u_1, y_3^* - y_2^*\bigr\rangle \geqslant 0 \quad (\forall\, y_2^* \in \operatorname{con} \partial g(x_0),\ y_3^* \in K_M^*(x_0)). \tag{3.10}$$

Действительно, если для некоторых $y_2^* \in \operatorname{con} \partial g(x_0)$, $y_3^* \in K_M^*(x_0)$

$$\langle u_1, y_3^* - y_2^*\rangle < 0,$$

то при $\lambda \to +\infty$ имеем

$$\bigl\langle u_1, \lambda(y_3^* - y_2^*)\bigr\rangle \to -\infty,$$

а это противоречит соотношению (3.9). Значит, из (3.10) следует, что

$$\begin{aligned} u_1 &\in (-\operatorname{con} \partial g(x_0) + K_M^*(x_0))^* = (-\operatorname{con} \partial g(x_0))^* \cap K_M^{**}(x_0) \\ &= \bigl\{\overline{x} :\ g'(x_0, \overline{x}) \leqslant 0\bigr\} \cap \operatorname{cl}\{\operatorname{con}(M - x_0)\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Из (3.9) следует, что
$$f'(x_0,u_1)=\max_{x^*\in\partial f(x_0)}\langle x^*,u_1\rangle<-\delta_1. \tag{3.12}$$

Конусы
$$K_{\Omega^+}(x_0):=\big\{\overline{x}\in\mathbb{R}^n:\,g'(x_0,\overline{x})\leqslant 0\big\},\quad K_M(x_0)=\mathrm{cl}\{(\mathrm{con}\,M-x_0)\},$$
в силу теоремы 34.2 [1, гл. 4, п. 9, с. 278] являются непрерывными шатрами для множеств $\Omega^+=\{x\in\mathbb{R}^n:\,g(x)\leqslant 0\}$ и M соответственно. Поскольку по предположению теоремы
$$\mathrm{int}\,K_{\Omega^+}(x_0)\cap K_M(x_0)\neq\varnothing,$$
то согласно теореме 1.2 [6, гл. 4, п. 1, с. 290] о пересечении непрерывных шатров, выпуклый конус
$$K_1\equiv K_{\Omega^+}(x_0)\cap K_M(x_0)$$
является конусом касательных направлений для $\Omega^+\cap M$ в точке x_0. Отсюда и из (3.11) следует, что существует отображение $\varphi_1(\lambda)=o(\lambda)$ такое, что
$$\Psi_1(\lambda)\equiv x_0+\lambda u_1+\varphi_1(\lambda)\in M,\quad g(\Psi_1(\lambda))\leqslant 0 \tag{3.13}$$
для достаточно малых $\lambda\geqslant 0$.

Аналогично, если включение (3.8) не имеет место, то существуют вектор u_2 и число $\delta_2>0$ такие, что
$$f'(x_0,u_2)<-\delta_2,\quad u_2\in K_M(x_0)\cap K_{\Omega^-}(x_0), \tag{3.14}$$
$$\Omega^-\equiv\big\{x\in\mathbb{R}^n:\,g(x)\geqslant 0\big\},\quad K_{\Omega^-}(x_0)=\big\{\overline{x}\in\mathbb{R}^n:\,\langle x_0^*,\overline{x}\rangle\geqslant 0\big\}.$$
Поскольку g выпукла, то
$$g(x_0+\overline{x})-g(x_0)\geqslant\langle x_0^*,\overline{x}\rangle\geqslant 0\quad(\forall\,\overline{x}\in K_{\Omega^-}(x_0)).$$
Отсюда следует, что выпуклый конус $K_{\Omega^-}(x_0)$ является непрерывным шатром к множеству Ω^-. Поскольку по предположению $\mathrm{int}\,K_{\Omega^-}(x_0)\cap K_M(x_0)\neq\varnothing$, то конус
$$K_2\equiv K_{\Omega^-}(x_0)\cap K_M(x_0)$$
также будет конусом касательных направлений для $\Omega^-\cap M$ в точке x_0. Отсюда и из (3.14) следует, что существует отображение $\varphi_2(\lambda)=o(\lambda)$ такое, что
$$\Psi_2(\lambda)\equiv x_0+\lambda u_2+\varphi_2(\lambda)\in M,\quad g(\Psi_2(\lambda))\geqslant 0. \tag{3.15}$$
Поскольку множество M выпукло, то из соотношений (3.13) и (3.15) следует, что найдется точка $\xi\in[\Psi_1(\lambda),\Psi_2(\lambda)]$ такая, что
$$g(\xi)=0,\quad \xi\in M.$$
Имеем также, что для некоторого $\alpha\in[0,1]$
$$\xi=x_0+\alpha\lambda u_1+(1-\alpha)\lambda u_2+o(\lambda).$$
Отсюда и из соотношений (3.12) и (3.14) для достаточно малых $\lambda>0$ получаем
$$f(\xi)-f(x_0)\leqslant f'(x_0,x_0+\alpha\lambda u_1+(1-\alpha)\lambda u_2+o(\lambda))+o(\lambda)<0,$$

что противоречит предположению о том, что точка x_0 — решение задачи (3.6).

Теорема 3.3. *Пусть x_0 — точка минимума локально липшицевой функции $f_0(x)$ при ограничениях*

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k,\ x \in R^n,$$

где f_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, — также локально липшицевые функции. Пусть существуют такие векторы w_i, что $f'_{iMP}(x_0, w_i) < 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и функции $f'_{iMP}(x, w_i)$ полунепрерывны сверху по x в точке x_0. Тогда существуют число $\lambda_0 \geqslant 0$ и векторы $x_1^*, \ldots, x_k^*$, не все одновременно равные нулю, такие, что

$$0 \in \lambda_0 \partial_{AL} f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{k} x_i^*, \quad x_i^* \in \operatorname{Lin} \partial_{MP} f_i(x_0),\ i = 1, \ldots, k. \tag{3.16}$$

$\lhd$ Положим $H_i \equiv \left\{ \overline{x} \in R^n / f'_{iMP}(x_0, \overline{x}) \leqslant 0,\ f'_{iMP}(x_0, -\overline{x}) \leqslant 0 \right\}$. По теореме 2.1 подпространство H_i является непрерывным шатром для множества $M_i = \{x \in R^n / f_i(x) = 0\}$ в точке x_0. Если конусы H_i отделимы, то существуют векторы $x_i^* \in H_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, k$, не равные нулю одновременно такие, что

$$x_1^* + x_2^* + \cdots + x_k^* = 0.$$

В этом случае условие (3.16) выполняется, поскольку имеем

$$H_i^* = cl\{\operatorname{con} \partial_{MP} f_i(x_0) - \operatorname{con} \partial_{MP} f_i(x_0)\} = \operatorname{Lin} \partial_{MP} f_i(x_0),$$

и можно выбрать $\lambda_0 = 0$. Если конусы H_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, неотделимы, то в силу теоремы В [12] (теорема о пересечении локально непрерывных шатров, общий случай) конус

$$H \equiv \bigcap_{i=1}^{k} H_i$$

является конусом касательных направлений для множества $M = \bigcap_{i=1}^{k} M_i$ в точке x_0. В этом случае

$$H^* = H_1^* + H_2^* + \cdots + H_k^* = \operatorname{Lin} \partial_{MP} f_1(x_0) + \operatorname{Lin} \partial_{MP} f_2(x_0) + \cdots + \operatorname{Lin} \partial_{MP} f_k(x_0).$$

Теперь, по теореме 1.1 имеем

$$\partial_{AL} f_0(x_0) \cap H^* \neq \varnothing.$$

Отсюда

$$0 \in \partial_{AL} f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Lin} \partial_{MP} f_i(x_0).$$

Тогда условие (3.16) выполняется при $\lambda_0 = 1$.

Литература

1. *Болтянский В. Г.* Оптимальное управление дискретными системами.—М.: Наука, 1973.—446 с.
2. *Болтянский В. Г.* Метод шатров в теории экстремальных задач // Успехи мат. наук.—1975.—Т. 30, № 3.—С. 3–55.
3. *Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П.* Теорема Люстерника в теории экстремума // Успехи мат. наук.—1980.—Т. 35, № 5.—С. 11–46.

4. *Clarke F. H.* A new approach to Lagrange multipliers // Math. Oper. Res. 1.—1976.—№ 1.—P. 165–174.
5. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения.—М.: Физматлит, 2014.—608 с.
6. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи.—М.: Наука, 1980.—320 с.
7. *Пшеничный Б. Н., Хачатрян Р. А.* Ограничения типа равенств в негладких задачах оптимизации // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 267, № 3.—С. 553–556.
8. *Пшеничный Б. Н., Хачатрян Р. А.* Необходимые условия экстремума для негладких задач // Кибернетика.—Киев, 1983.—№ 3.—С. 111–116.
9. *Хачатрян Р. А.* О пересечении шатров в гильбертовом пространстве и необходимых условиях экстремума для негладких функций // Изв. АН АРМ ССР. Математика.—1988.—Т. 23, №3.—С. 149–162.
10. *Michel P., Penot J.-P.* Calcul sous-differentiel pour les functions lipschitziennes et non lipschitziennes // C. R. Acad. Sc. Paris. Ser. I.—1984.—Vol. 291.—P. 269–272.
11. *Ioffe A. D.* A Lagrange multiplier rule with small convex-valued subdifferential for non-smoth problems of mathematical programming involving equality and nonfunctional constraints // Math. Programming.—1993.—№ 58.—P. 137–145.
12. *Ivanashi R.* On the Intersection of Continuous Local Tents // Proc. Japan Acad. Ser. A.—1993.—Vol. 69.—P. 308–311.
13. *Ekeland I.* On the variational principle // J. Math. Anal. Appl.—1974.—Vol. 47, № 2.—P. 324–353.

Статья поступила 25 января 2015 г.

Хачатрян Рафик Агасиевич
Ереванский государственный университет,
доцент кафедры численного анализа и мат. моделирования
АРМЕНИЯ, Ереван-0025, ул. Алека Манукяна, 1
E-mail: `khachatryan.rafik@gmail.com`

NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN NON-SMOOTH PROBLEMS WITH EQUALITY CONSTRAINTS

Khachatryan R. A.

Necessary conditions for extremum in non-smooth problems are obtained in this article. The problem under consideration includes both equality and inequality type constrains given by non-smooth functions. The necessary conditions are given in terms of asymptotic subdifferentials. Generalized Lagranges's multiplier rule for non-smooth problems with not local lipschitz constraints is obtained. It is proved also that Peno's and Clark's generalized derivatives are upper convex approximations for local Lipshitz functions.

Key words: subdifferential, tent, tangent cone.

Вниманию авторов

Владикавказский математический журнал (ВМЖ) — научное периодическое издание, выходящее четыре раза в год. Журнал издается Южным математическим институтом — филиалом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Поступившие в редакцию ВМЖ статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи в порядке цитирования или по алфавиту. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов (≈ 12 стр. формата А4). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взымается.

Авторские права на журнал в целом принадлежат Южному математическому институту — филиалу ВНЦ РАН и Редколлегии журнала, которые обладают исключительным правом получать и распределять любые платежи, связанные с переуступкой авторских прав на журнал.

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 53-84-62;
E-mail: rio@smath.ru
Зав. редакцией: Кибизова В. В.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 18

Выпуск 3

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-50223 от 15 июня 2012 г.

Подписано в печать 23.09.2016. Дата выхода в свет 20.10.2016.
Формат бумаги $60\times84^1/_8$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 9,77. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель и издатель:
Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.