ISSN-1683-3414
ISSN-1814-0807 (Online)

ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

http://www.vmj.ru

Том 20, выпуск 2 2018

ISSN-1683-3414
ISSN-1814-0807 (Online)

SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

http://www.vmj.ru

Volume 20, Issue 2

2018

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru
Зав. редакцией: В. В. КИБИЗОВА

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vmj.ru**

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций:
свид. ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.;
свид. ЭЛ № ФС77-70171 от 21 июня 2017 г.

Editorial Office: 22 Markusa St., Vladikavkaz 362027,
the Republic of North Ossetia-Alania, Russia
Phone: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru
Managing editor: V. V. KIBIZOVA

The journal was founded in 1999. It is published four times a year.
ELECTRONIC VERSION: **www.vmj.ru**

Registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom,
Information Technologies and Mass Communications:
ПИ № ФС77-70008 dated May 31, 2017; ЭЛ № ФС77-70171 dated June 21, 2017.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 20, выпуск 2 апрель–июнь, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Владикавказ
2018

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTER
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 20, issue 2 April–June, 2018

CONTENT

Vladikavkaz
2018

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 3–15

УДК 517.5+517.9
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14713

О СЮРЪЕКТИВНОСТИ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ В ОБЛАСТИ ФУНКЦИЙ ЗАДАННОГО РОСТА

А. В. Абанин, Т. М. Андреева

Посвящается 65-летию
Анатолия Георгиевича Кусраева

Аннотация. В работе рассматриваются (DFS)-пространства голоморфных функций в ограниченной выпуклой области G комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеющих заданный рост, определяемый некоторой последовательностью весов, удовлетворяющих ряду общих естественных условий. При этих условиях изучается задача о непрерывности и сюръективности операторов свертки, действующих из $H(G+K)$ в (на) $H(G)$, где K — фиксированный компакт в $\mathbb{C}$. Решение данной задачи получено в терминах преобразования Лапласа линейного функционала, определяющего оператор (его называют символом оператора свертки). Для пространств общего вида установлен функциональный критерий сюръективности оператора свертки из $H(G+K)$ на $H(G)$. Для пространств функций экспоненциально-степенного роста максимального и нормального типов получены достаточные условия на поведение символа, при которых соответствующий ему оператор сюръективен. Эти условия формулируются в терминах оценок снизу для модуля символа. Кроме того, показано, что эти же условия являются необходимыми для сюръективности всех операторов свертки из $H(G+K)$ на $H(G)$, когда G пробегает совокупность всех ограниченных выпуклых областей в $\mathbb{C}$. Таким образом, получен критерий сюръективности операторов свертки в пространствах функций экспоненциально-степенного роста на классе всех ограниченных выпуклых областей в $\mathbb{C}$. Ранее подобные результаты были известны лишь для конкретного пространства голоморфных в выпуклых ограниченных областях функций полиномиального роста.

Ключевые слова: весовое пространство, голоморфная функция, оператор свертки, сюръективность, пространство экспоненциально-степенного роста.

Пусть G — выпуклая ограниченная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех функций, голоморфных в G, а $\mathscr{V}=(v_n)_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая по n последовательность непрерывных в G функций. Последовательность $\mathscr{V}$ задает пространство $\mathscr{V}H(G):=\bigcup_{n=1}^{\infty}H_{v_n}(G)$ с естественной топологией внутреннего индуктивного предела банаховых пространств

$$H_{v_n}(G):=\left\{f\in H(G):\ \|f\|_{v_n}:=\sup_{z\in G}\frac{|f(z)|}{e^{v_n(z)}}<\infty\right\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Основная цель настоящей работы — изучение задачи о сюръективности оператора свертки $\mu* : \mathscr{V}H(G+K)\to\mathscr{V}H(G)$, где K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, а μ — аналитический функционал с носителем в K. В «безвесовой» ситуации, когда рассматриваются пространства $H(G+K)$ и $H(G)$ всех голоморфных на $G+K$ и G функций, данная задача исследована достаточно полно, причем не только для областей G, но и для компактов и для подмножеств и, как следствие, пространств гораздо более общей структуры (подробный обзор имеется в книге [1], см. также [2]). Что касается весовых пространств, то здесь главным образом изучались пространства Фреше (см. статью [3] и библиографию в ней). При этом применялась традиционная техника, заключающаяся в переходе к двойственной проблеме деления на символ оператора в сопряженном пространстве целых функций определенного роста. Принципиально эта схема не меняется и для пространств индуктивного типа. Однако на пути ее реализации имеется существенная трудность, которая заключается в необходимости построения целых функций, удовлетворяющих бесконечному числу оценок сверху и одновременно близким оценкам снизу на заданной последовательности точек, уходящих в бесконечность. По-видимому, впервые такие построения были осуществлены в [4–6] при исследовании операторов свертки в пространстве $A^{-\infty}(G)$ аналитических в G функций полиномиального роста вблизи ее границы ∂G. Отметим, что $A^{-\infty}(G)$ совпадает с $\mathscr{V}H(G)$ при $\mathscr{V} = \left(n\ln\frac{1}{d(\lambda)}\right)_{n=1}^{\infty}$, где $d(\lambda)$ — расстояние от $\lambda \in G$ до ∂G. Важную роль при этом играют аналоги теоремы Хёрмандера о разрешимости неоднородного уравнения Коши — Римана в классах функций, удовлетворяющих системе оценок. Впервые такие аналоги были установлены О. В. Епифановым [7] (см. также [8]). Нам неизвестны другие пространства вида $\mathscr{V}H(G)$, кроме $A^{-\infty}(G)$, для которых имелись бы результаты, подобные установленным в [4–6]. Опираясь на полученное [9] описание сопряженного с $\mathscr{V}H(G)$ пространства и методы из [5], в настоящей работе для пространств $\mathscr{V}H(G)$ общего вида получены необходимые и (отдельно) достаточные условия, а для пространств экспоненциально-степенного роста — критерии сюръективности операторов свертки. Подробные обоснования результатов будут приводиться лишь в тех случаях, когда имеются существенные отличия от [5].

1. Сюръективность оператора свертки для весовых последовательностей общего вида

Всюду в данной работе будем рассматривать весовую последовательность $\mathscr{V} = (v_n)_{n=1}^{\infty}$, у которой $v_n(\lambda) := \varphi_n\left(\ln\frac{1}{d(\lambda)}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, и последовательность $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных выпуклых монотонно возрастающих функций на $(t_0, +\infty)$ $(t_0 \geqslant 0)$ удовлетворяет условиям:

(c1) $(\forall\, j \in \mathbb{N})\ \varphi_{j+1}(t) \geqslant \varphi_j(t) + t,\ t \geqslant t_0$;

(c2) $(\forall\, j \in \mathbb{N})(\forall\, \alpha)(\exists\, s = s(j,\alpha))\ \ \varphi_j(t+\alpha) \leqslant \varphi_{j+1}(t) + s,\ t \geqslant t_0$;

(c3) $(\forall\, j \in \mathbb{N})(\exists\, p_j > 0)\ \ \varphi_j(t) \leqslant e^{p_j t} + \delta_j$, где δ_j — постоянные величины.

Отметим, что эти условия аналогичны использованным в [10] для двойственного проективного случая, когда вместо убывающей по j последовательности $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ берется возрастающая. С целью технических упрощений в доказательствах будем считать без ограничения общности, что $t_0 = 0$ и что область G содержит начало координат.

В [9, теорема 1] было установлено, что преобразование Лапласа устанавливает топологический изоморфизм из $(\mathscr{V}H(G))'$ на пространство Фреше

$$\mathscr{V}H_G := \left\{ f \in H(\mathbb{C}):\ |f|_n := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|\cdot e^{v_n^*(|z|)}}{e^{H_G(z)}} < \infty\ \ (\forall\, n \in \mathbb{N}) \right\},$$

где $H_G(z) = \sup_{\lambda\in G}\operatorname{Re}\lambda z$ — опорная функция области G и

$$v_n^*(|z|) := \inf\nolimits_{0<t\leqslant 1}\left[|z|t + \varphi_n\left(\ln\frac{1}{t}\right)\right].$$

Отметим, что в силу условий, наложенных на последовательность Φ, $\mathscr{V}H(G)$ является (DFS)-, а $\mathscr{V}H_G$ — (FS)-пространством.

Пусть μ — аналитический функционал в $\mathbb{C}$ с носителем в K, где K — некоторое выпуклое компактное подмножество комплексной плоскости. Тогда оператор свертки

$$\mu * : f \longmapsto \mu_w(f(z+w))$$

непрерывно отображает $H(G+K)$ в $H(G)$, а преобразование Лапласа $\hat{\mu}(\zeta) := \mu_z(e^{z\zeta})$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $z \in G$, функционала μ представляет собой целую функцию экспоненциального типа такую, что $|\hat{\mu}(\zeta)| = O\left(e^{H_K(\zeta)+\varepsilon|\zeta|}\right)$ в $\mathbb{C}$ для любого $\varepsilon > 0$. Следующее предложение содержит необходимые и достаточные условия на функционал μ (точнее, на его преобразование Лапласа), при которых порождаемый им оператор свертки действует из пространства $\mathscr{V}H(G+K)$ в пространство $\mathscr{V}H(G)$. Будем использовать следующее обозначение:

$$\mathscr{V}H_K^\infty := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ (\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\exists\, m \in \mathbb{N}) \ \sup_{\zeta \in \mathbb{C}} \frac{|f(\zeta)|}{e^{H_K(\zeta)+v_m^*(|\zeta|)-v_n^*(|\zeta|)}} < \infty \right\}.$$

Предложение 1. *Вложение $\mu * \mathscr{V}H(G+K) \subseteq \mathscr{V}H(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\hat{\mu} \in \mathscr{V}H_K^\infty$. Более того, для любого нетривиального функционала μ с $\hat{\mu} \in \mathscr{V}H_K^\infty$ справедливы следующие утверждения:*

(i) *оператор свертки $\mu* : \mathscr{V}H(G+K) \to \mathscr{V}H(G)$ непрерывен и обладает плотным образом;*

(ii) *оператор умножения $\Lambda_{\hat{\mu}} : f \in \mathscr{V}H_G \longmapsto \hat{\mu} f \in \mathscr{V}H_{G+K}$ сопряжен оператору свертки.*

$\lhd$ Доказательство проводится по стандартной схеме (см. [5, предложение 2.1]), возможность реализации которой основана на следующей двусторонней оценке норм экспонент (см. [9, лемма 1]):

$$e^{-s_n} \cdot e^{H_G(z)-v_{n+1}^*(|z|)} \leqslant \|e^{\lambda z}\|_n \leqslant e^{s_n} \cdot e^{H_G(z)-v_n^*(|z|)}, \quad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где постоянная s_n зависит только от номера n. $\rhd$

Из предложения 1 за счет соображений двойственности получаем

Теорема 1. *Пусть μ — нетривиальный аналитический функционал и $\hat{\mu} \in \mathscr{V}H_K^\infty$. Оператор свертки $\mu* : \mathscr{V}H(G+K) \to \mathscr{V}H(G)$ сюръективен тогда и только тогда, когда образ оператора умножения $\Lambda_{\hat{\mu}}(\mathscr{V}H_G)$ замкнут в $\mathscr{V}H_{G+K}$.*

Прежде чем продолжить, напомним, что целая функция g называется *мультипликатором* из $\mathscr{V}H_G$ в $\mathscr{V}H_{G+K}$, если $g \cdot f \in \mathscr{V}H_{G+K}$ для любого $f \in \mathscr{V}H_G$. Символом $\mathscr{M}\mathscr{V}_{G,G+K}$ обозначим совокупность всех мультипликаторов из $\mathscr{V}H_G$ в $\mathscr{V}H_{G+K}$. Из предложения 1 следует, что $\mathscr{V}H_K \subseteq \mathscr{M}\mathscr{V}_{G,G+K}$. Наша ближайшая цель — установить, что на самом деле имеет место равенство $\mathscr{V}H_K = \mathscr{M}\mathscr{V}_{G,G+K}$. Оно имеет важное значение в исследовании операторов свертки и ряда других вопросов. Чтобы его доказать, нам потребуется дополнительная подготовка.

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*

a) *при любом $n \in \mathbb{N}$*

$$v_n^*(|z|) = o(|z|) \quad \textit{при } z \to \infty;$$

b) *существует такое $\alpha_0 > 0$, что при некоторых постоянных α_n*

$$v_{n+2}^*(|z|) - v_n^*(|z|) \geqslant \alpha_0 \ln(1+|z|) - \alpha_n \quad \textit{при всех } z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

$\lhd$ a) В силу условия (c3) при больших $|z|$ выполняется

$$v_n^*(|z|) = \inf_{0<t\leqslant 1}\left[|z|t + \varphi_n\left(\ln\frac{1}{t}\right)\right] \leqslant \inf_{0<t\leqslant 1}\left(|z|t + \frac{1}{t^{p_n}} + \delta_n\right)$$

$$= \left(p^{\frac{1}{p_n+1}} + p^{-\frac{p_n}{p_n+1}}\right)|z|^{\frac{p_n}{p_n+1}} + \delta_n,$$

откуда следует требуемое.

b) Это утверждение следует из [10, лемма 6]. $\rhd$

Введем в рассмотрение банаховы пространства целых функций

$$E_n := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ |f|_n := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|\cdot e^{v_n^*(|z|)}}{e^{H_G(z)}} < \infty, \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

и заметим, что $\mathscr{V}H_G = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

Лемма 2. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеется такое $m \in \mathbb{N}$, что пространство $\mathscr{V}H_G$ плотно в E_m по норме $|\cdot|_n$ пространства E_n.*

$\lhd$ Возьмем натуральное s_0 настолько большим, чтобы $s_0\alpha_0 \geqslant 1$, где α_0 — постоянная из утверждения b) леммы 1, и покажем, что $m = n + 2s_0 + 1$ удовлетворяет требованиям леммы.

Пусть $f \in E_m$. Образуем по ней функции $f_\gamma(z) := f(\gamma z)$, $0 < \gamma < 1$. Учитывая, что область G содержит начало координат, имеем

$$H_G(z) \geqslant H_G(\gamma z) + (1-\gamma)r|z| \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C},$$

где $r := \min\{H_G(z) : \ |z| = 1\}$. Поэтому

$$|f(\gamma z)| \leqslant |f|_m\, e^{H_G(\gamma z) - v_m^*(\gamma|z|)} \leqslant |f|_m\, e^{H_G(\gamma z)} \leqslant |f|_m\, e^{H_G(z) - (1-\gamma)r|z|}.$$

Отсюда и из утверждения a) леммы 1 получаем, что $f(\gamma z) \in \mathscr{V}H_G$ при любом $\gamma \in (0,1)$.

Для завершения доказательства остается установить, что f_γ сходится к f в E_n при $\gamma \to 1$.

Положим $R := \max\{H_G(z) : |z| = 1\}$ и заметим, что $|H_G(z) - H_G(\zeta)| \leqslant R|z|$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Поэтому $H(z+\zeta) \leqslant H_G(z) + R$ при всех $z \in \mathbb{C}$ и $|\zeta| \leqslant 1$. Далее, в силу условия (c2) имеется такое $c > 0$, что $v_{m-1}^*(|z|) \leqslant v_m^*(|z|-1) + c$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Из приведенных оценок следует, что при всех $z \in \mathbb{C}$ и $|\zeta| \leqslant 1$

$$|f(z+\zeta)| \leqslant |f|_m\, e^{H_G(z+\zeta) - v_m^*(|z+\zeta|)} \leqslant |f|_m\, e^{H_G(z) + R - v_m^*(|z|-1)} \leqslant C|f|_m\, e^{H_G(z) - v_{m-1}^*(|z|)},$$

где $C := e^{R+c}$. Применив интегральную формулу Коши, заключаем, что при всех $z \in \mathbb{C}$

$$|f'(z)| \leqslant \max_{|\zeta|\leqslant 1} |f(z+\zeta)| \leqslant C|f|_m\, e^{H_G(z) - v_{m-1}^*(|z|)}.$$

Использовав еще то, что $f(z) - f_\gamma(z) = \int_{\gamma z}^{z} f'(t)\,dt$, при всех $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$|f(z) - f_\gamma(z)| \leqslant C(1-\gamma)|f|_m|z|e^{H_G(z) - v_{m-1}^*(|z|)} = C(1-\gamma)|f|_m|z|e^{H_G(z) - v_{n+2s_0}^*(|z|)}.$$

Воспользовавшись утверждением b) леммы 1 s_0 раз, заключаем, что при некотором $D \geqslant C$ и всех $z \in \mathbb{C}$ имеют место оценки

$$|f(z) - f_\gamma(z)| \leqslant D(1-\gamma)|f|_m|z|e^{H_G(z) - v_n^*(|z|) - s_0\alpha_0\ln(1+|z|)} \leqslant D(1-\gamma)|f|_m|z|e^{H_G(z) - v_n^*(|z|)}.$$

Отсюда вытекает
$$|f - f_\gamma|_n \leqslant D(1-\gamma)|f|_m \to 0 \quad \text{при } \gamma \to 1,$$
что завершает доказательство. $\triangleright$

Замечание 1. В процессе доказательства леммы 2 было установлено, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеется такая постоянная $C_n > 0$, что
$$\sup_{|\zeta|\leqslant 1}(H_G(z+\zeta) - v_n^*(|z+\zeta|)) + s_0\alpha_0 \ln(1+|z|) \leqslant H_G(z) - v_{n+s_0\alpha_0}^*(|z|) + C_n \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Так как $s_0\alpha_0 \geqslant 1$, то отсюда следует, что
$$\sup_{|\zeta|\leqslant 1}(H_G(z+\zeta)-v_n^*(|z+\zeta|))+\ln(1+|z|) \leqslant H_G(z)-v_{n+s_0\alpha_0}^*(|z|)+C_n \quad (\forall\, z \in \mathbb{C},\ \forall\, n \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Предложение 2. *Для любой ограниченной выпуклой области G комплексной плоскости и для любого выпуклого компактного множества K выполняется*
$$\mathscr{M}\mathscr{V}_{G,G+K} = \mathscr{V}H_K^\infty. \tag{3}$$

$\triangleleft$ Напомним, что пространство Фреше $\mathscr{V}H_G$ задается последовательностью весов $u_n(z) := H_G(z) - v_n^*(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, и соответствующей ей убывающей по вложению последовательностью банаховых пространств $(E_n)_{n=1}^\infty$. Для таких последовательностей прямое использование общих результатов из [11] об описании мультипликаторов в весовых пространствах Фреше невозможно, так как мы не можем гарантировать, что определяющие $\mathscr{V}H_G$ веса u_n субгармоничны в $\mathbb{C}$. В связи с этим заметим, что из оценки (1) следует, что
$$u_{n+1}(z) - s_n \leqslant \sup_{\zeta\in G}(\operatorname{Re} z\zeta - v_n(\zeta)) \leqslant u_n(z) + s_n \quad (\forall\, z \in \mathbb{C},\ \forall\, n \in \mathbb{N}). \tag{4}$$

Положим $w_n(z) := \sup\{\operatorname{Re} z\zeta - v_n(\zeta) : \zeta \in G\}$. Как верхние огибающие семейств гармонических функций $\{\operatorname{Re} z\zeta - v_n(\zeta) : \zeta \in G\}$, функции w_n субгармоничны в $\mathbb{C}$. При этом неравенства (4) влекут
$$E_n \hookrightarrow H_{w_n}(\mathbb{C}) \hookrightarrow E_{n+1} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}). \tag{5}$$

Поэтому $\mathscr{V}H_G = \bigcap_{n=1}^\infty H_{w_n}(\mathbb{C})$ и, кроме того, из леммы 2, вложений (5) и оценок (2) и (4) следует, что выполнены такие условия:

1) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathscr{V}H_G$ плотно в $H_{w_m}(\mathbb{C})$ по норме пространства $H_{w_n}(\mathbb{C})$;

2) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $C_n > 0$ такое, что
$$\sup_{|\zeta|\leqslant 1} w_n(z+\zeta) + \ln(1+|z|) \leqslant w_{n+s_0\alpha_0-1}(z) + C_n \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Таким образом, для $\mathscr{V}H_G = \bigcap_{n=1}^\infty H_{w_n}(\mathbb{C})$ выполнены все предположения предложения 5.3 из [11], в соответствии с которым $\mathscr{M}\mathscr{V}_{G,G+K}$ совпадает с пространством тех целых функций g, для которых для любого $m \in \mathbb{N}$ существует номер $n = n(g)$ такой, что
$$|g(z)| = O\left(\exp\left(H_{G+K}(z) - v_m^*(z) - w_n(z)\right)\right) \quad \text{в } \mathbb{C}.$$

Еще раз использовав (5), заключаем, что последнее условие равносильно тому, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует такой номер $n = n(g)$, что

$$|g(z)| = O\left(\exp\left(H_K(z) - v_m^*(z) + v_n^*(z)\right)\right) \text{ в } \mathbb{C}.$$

Другими словами, выполняется требуемое равенство (3). $\triangleright$

Напомним, что нетривиальный мультипликатор g из $\mathscr{V}H_G$ в $\mathscr{V}H_{G+K}$ называется *делителем* из $\mathscr{V}H_{G+K}$ в $\mathscr{V}H_G$, если для него имеет место теорема деления, т. е. импликация

$$f \in \mathscr{V}H_{G+K} \text{ и } \frac{f}{g} \in H(\mathbb{C}) \implies \frac{f}{g} \in \mathscr{V}H_G.$$

Множество всех делителей из $\mathscr{V}H_{G+K}$ в $\mathscr{V}H_G$ будем обозначать $\mathscr{D}\mathscr{V}_{G+K,G}$. В соответствии с предложением 2 $\mathscr{D}_{G+K,G} \subseteq \mathscr{M}\mathscr{V}_{G+K,G}$.

Следующая теорема доказывается стандартным методом (см., например, [5, предложение 2.8 и теорема 2.9]) на основании теоремы 1 и предложения 2.

Теорема 2. *Пусть μ — аналитический функционал и $\hat{\mu} \in \mathscr{V}H_K^\infty$. Рассмотрим следующие утверждения:*

(i) *оператор свертки $\mu* : \mathscr{V}H(G+K) \to \mathscr{V}H(G)$ является сюръективным;*

(ii) *для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{H_G(z)-v_n^*(|z|)}} \leqslant C \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\hat{\mu}(z)||f(z)|}{e^{H_{G+K}(z)-v_m^*(|z|)}} \quad (\forall\, f \in \mathscr{V}H_G);$$

(iii) $\hat{\mu} \in \mathscr{D}\mathscr{V}_{G+K,G}$.

Тогда (iii)$\Rightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(i).

Во всех известных на сегодняшний день результатах, подобных теореме 2, для конкретных весовых шкал имеет место эквивалентность условий (ii) и (iii). Однако, для общих классов весов при этом используются достаточно жесткие ограничения (см., например, [3]), которые не выполняются для рассматриваемых нами пространств. В связи с этим в следующем разделе мы рассмотрим одну из наиболее важных весовых шкал пространств, исследуемых в настоящей работе, — шкалу пространств экспоненциально-степенного роста.

2. Критерии сюръективности в терминах регулярности роста аналитического символа

В данном разделе будут рассмотрены пространства $\mathscr{V}H(G)$ экспоненциально-степенного роста максимального и нормального типов. Поскольку доказательства результатов проводятся по одной схеме и различаются лишь техническими деталями, мы проведем подробное изложение только для первого типа.

2.1. Критерии сюръективности операторов свертки в пространствах максимального типа. Пространства $\mathscr{V}H(G)$ экспоненциально-степенного роста максимального типа задаются весовыми последовательностями $\mathscr{V} = (v_n)_{n=1}^\infty$ с $v_n(\lambda) := n(d(\lambda))^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, где $0 < \alpha < 1$. Как отмечено в [9], в этом случае двойственное пространство $\mathscr{V}H_G$ может быть описано следующим образом:

$$\mathscr{V}H_G := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ |f|_n := \sup_{\zeta\in\mathbb{C}} \frac{|f(\zeta)|}{e^{H_G(\zeta)-n|\zeta|^{\alpha_*}}} < \infty \ (\forall\, n \in \mathbb{N}) \right\},$$

где $\alpha_* := \frac{\alpha}{\alpha+1}$. Отсюда, в частности, следует, что пространство мультипликаторов из $\mathscr{V}H_G$ в $\mathscr{V}H_{G+K}$ в данном случае имеет вид

$$\mathscr{V}H_K^\infty := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ (\exists\, n \in \mathbb{N}) \ \sup_{\zeta\in\mathbb{C}} \frac{|f(\zeta)|}{e^{H_K(\zeta)+n|\zeta|^{\alpha_*}}} < \infty \right\}.$$

Сначала мы приведем достаточные условия на нетривиальный мультипликатор из $\mathscr{V}H_K^\infty$, при которых он является делителем из $\mathscr{V}H_{G+K}$ в $\mathscr{V}H_G$. Затем покажем, что на классе всех областей G эти условия также и необходимы. В качестве следствия отсюда будет получен критерий сюръективности оператора свертки на классе всех выпуклых ограниченных областей.

Пусть $\varphi(\zeta)$ — целая функция экспоненциального типа. Ее (радиальный) индикатор определяется по формуле $h_\varphi(\zeta) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log|\varphi(r\zeta)|}{r}$, $\zeta \in \mathbb{C}$. Будем говорить, что φ *удовлетворяет условию* (S^{α_*}), если существуют $s, N > 0$ такие, что для каждого $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| > N$ найдется $\zeta' \in \mathbb{C}$ с $|\zeta' - \zeta| < |\zeta|^{\alpha_*}$, для которого

$$\log|\varphi(\zeta')| \geqslant h_\varphi(\zeta) - s|\zeta|^{\alpha_*}. \tag{6}$$

Заметим, что это требование строго сильнее, чем условие вполне регулярности роста целой функции в классическом смысле Левина — Пфлюгера.

Докажем, что для целых функций экспоненциального типа с индикаторами, совпадающими с H_K, условия (S^{α_*}) достаточно для справедливости теоремы деления в классах $\mathscr{V}H(G)$. Условимся обозначать через $B(z, r)$ круг радиуса r с центром в точке z. Как и прежде, для множества $M \subset \mathbb{C}$ полагаем $R_M := \sup_{z\in M} |z|$. Для доказательства нам потребуется также следующий известный факт (см. [12, лемма 3.1]).

Лемма 3. *Пусть функции Φ, F и $G = \frac{F}{\Phi}$ голоморфны к круге $B(0, R)$. Если в $B(0, R)$ выполняются неравенства $|\Phi(w)| \leqslant A$ и $|F(w)| \leqslant B$, то*

$$|G(w)| \leqslant BA^{\frac{2|w|}{R-|w|}} |\Phi(0)|^{-\frac{R+|w|}{R-|w|}}, \quad w \in B(0, R).$$

Предложение 3. *Пусть $\mathscr{V} = \big(n(d(\lambda))^{-\alpha}\big)_{n=1}^\infty$. Предположим, что $\varphi \in \mathscr{V}H_K^\infty$, $h_\varphi = H_K$ и φ удовлетворяет условию (S^{α_*}). Тогда $\varphi \in \mathscr{D}\mathscr{V}_{G+K,G}$.*

$\lhd$ Пусть $s, N > 0$ — постоянные из условия (6) для функции φ. Для каждого $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| > N$ возьмем ζ', как в условии (6). Заметим, что в таком случае для всех точек $\zeta'' \in B(\zeta', 2|\zeta|^{\alpha_*})$ верно неравенство $|\zeta'' - \zeta| < 3|\zeta|^{\alpha_*}$.

Ясно, что без ограничения общности можно считать, что $N \geqslant 6^{\frac{1}{1-\alpha_*}}$. Тогда для всех $\zeta'' \in B\left(\zeta', 2|\zeta|^{\alpha_*}\right)$ справедлива оценка

$$\frac{1}{2}|\zeta| \leqslant |\zeta''| \leqslant 4|\zeta|. \tag{7}$$

Поскольку $\varphi \in \mathscr{V}H_K^\infty$, то имеются $k_0 \in \mathbb{N}$ и $A > 0$ такие, что

$$\ln|\varphi(w)| \leqslant A + H_K(w) + k_0|w|^{\alpha_*}, \quad w \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

Пусть функция $f \in \mathscr{V}H_{G+K}$ такова, что $\frac{f}{\varphi} \in H(\mathbb{C})$. По определению $\mathscr{V}H_{G+K}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $B > 0$ такое, что

$$\ln|f(w)| \leqslant B + H_{G+K}(w) - n|w|^{\alpha_*}, \quad w \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Поэтому, учитывая (7) и (9), имеем

$$\begin{aligned}&\sup_{\zeta''\in B(\zeta',2|\zeta|^{\alpha_*})}\ln|f(\zeta'')|\\ &\leqslant B+\sup_{|\zeta''-\zeta|\leqslant 3|\zeta|^{\alpha_*}}\bigl(H_{G+K}(\zeta'')-n|\zeta''|^{\alpha_*}\bigr)\\ &\leqslant B+H_{G+K}(\zeta)+\bigl(3R_{G+K}-n2^{-\alpha_*}\bigr)\,|\zeta|^{\alpha_*}.\end{aligned}\tag{10}$$

Аналогично в силу (8) получаем

$$\sup_{\zeta''\in B(\zeta',2|\zeta|^{\alpha_*})}\ln|\varphi(\zeta'')|\leqslant A+H_K(\zeta)+\bigl(3R_K+4^{\alpha_*}k_0\bigr)|\zeta|^{\alpha_*}.\tag{11}$$

Теперь все необходимое для применения леммы 3 готово. Применив ее к $R:=2|\zeta|^{\alpha_*}$, $\Phi(w):=\varphi(\zeta'+w)$ и $F(w):=f(\zeta'+w)$ и использовав неравенства (10), (11) и условие (S^{α_*}) на функцию φ, для $w=\zeta-\zeta'$ имеем

$$\begin{aligned}\ln\left|\frac{f(\zeta)}{\varphi(\zeta)}\right|&\leqslant B+H_{G+K}(\zeta)+\bigl(3R_{G+K}-n2^{-\alpha_*}\bigr)\,|\zeta|^{\alpha_*}\\ +\frac{2|\zeta-\zeta'|}{2|\zeta|^{\alpha_*}-|\zeta-\zeta'|}&\left(A+H_K(\zeta)+(3R_K+4^{\alpha_*}k_0)\,|\zeta|^{\alpha_*}\right)-\frac{2|\zeta|^{\alpha_*}+|\zeta-\zeta'|}{2|\zeta|^{\alpha_*}-|\zeta-\zeta'|}\left(H_K(\zeta)-s|\zeta|^{\alpha_*}\right)\\ &\leqslant B+2A+H_G(\zeta)-\bigl(n2^{-\alpha_*}-3R_{G+K}-2k_04^{\alpha_*}-6R_K-3s\bigr)\,|\zeta|^{\alpha_*}.\end{aligned}$$

В силу произвольности n отсюда следует, что $\frac{f}{\varphi}\in\mathscr{V}H_G$, и предложение доказано. $\rhd$

Из теоремы 2 и предложения 3 вытекает непосредственно

Предложение 4. *Пусть $\mathscr{V}=(n(d(\lambda))^{-\alpha})_{n=1}^{\infty}$ и μ — аналитический функционал, для которого $\hat\mu\in\mathscr{V}H_K^{\infty}$ и $h_{\hat\mu}=H_K$. Если $\hat\mu$ удовлетворяет условию (S^{α_*}), то оператор свертки $\mu*:\mathscr{V}H(G+K)\to\mathscr{V}H(G)$ является сюръективным.*

Теперь докажем, что условие (S^{α_*}) является и необходимым для того, чтобы для любой ограниченной выпуклой области G оператор свертки действовал сюръективно из $\mathscr{V}H(G+K)$ в $\mathscr{V}H(G)$. Следующая лемма содержит эквивалентную переформулировку условия (S^{α_*}) и доказывается тем же методом, что и лемма 3.7 в [5].

Лемма 4. *Пусть $\mathscr{V}=(n(d(\lambda))^{-\alpha})_{n=1}^{\infty}$. Функция $g\in\mathscr{V}H_K^{\infty}$ с индикатором H_K удовлетворяет условию (S^{α_*}) тогда и только тогда, когда существуют числа $s,j\in\mathbb{N}$, $N>0$ такие, что для любой точки a единичной окружности*

$$\sup_{|w-a|\leqslant jt^{-\frac{1}{\alpha+1}}}\ln|g(tw)|\geqslant tH_K(a)-s\,t^{\alpha_*}\quad(\forall\,t\geqslant N).\tag{12}$$

Лемма 5. *Пусть $\mathscr{V}=(n(d(\lambda))^{-\alpha})_{n=1}^{\infty}$. Пусть, далее, $g\in\mathscr{V}H_K^{\infty}$ удовлетворяет условию* (ii) *теоремы 2 для любого ограниченного выпуклого многоугольника $G\subset\mathbb{C}$. Тогда индикатор h_g этой функции совпадает с H_K и g удовлетворяет условию (S^{α_*}).*

$\lhd$ Заметим, что из условия (ii) теоремы 2 для g следует существование чисел $m\in\mathbb{N}$, $M>0$ таких, что

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{e^{H_G(z)}}\leqslant M\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|g(z)|\cdot|f(z)|}{e^{H_G(z)+H_K(z)-m|z|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}}\quad(\forall\,f\in\mathscr{V}H_G).\tag{13}$$

Будем рассуждать от противного и предположим, что индикатор h_g функции g не совпадает с H_K или совпадает с H_K, но при этом сама функция g не удовлетворяет условию (S^{α_*}). Из леммы 4 следует, что в обоих случаях функция g не удовлетворяет тогда и условию (12). Поэтому существуют точка $a \in S$ и последовательность $(t_j)_{j=1}^{\infty}$ с $t_j \geqslant 1$ ($j \in \mathbb{N}$), $t_j \to \infty$ при $j \to \infty$ такие, что

$$\sup_{|w-a|\leqslant j t_j^{-\frac{1}{\alpha+1}}} |g(t_j w)| \leqslant t_j H_K(a) - j^2 t_j^{\alpha_*} \quad (\forall\, j \in \mathbb{N}). \tag{14}$$

Без ограничения общности можно считать, что $t_j \geqslant j^{\alpha+2}$ при всех $j \in \mathbb{N}$.

Как и выше, $R_K := \max_{z\in K} |z|$. Положим $z_j := t_j a$, $r_j := j|z_j|^{\alpha_*} = j t_j^{\alpha_*}$ и заметим, что для w из круга $|w-z_j| \leqslant r_j$ верно $\frac{2}{3}|w| \leqslant t_j \leqslant 2|w|$. В этих обозначениях (14) равносильно тому, что для всех w из круга $|w-z_j| \leqslant r_j$

$$\ln|g(w)| \leqslant H_K(z_j) - j^2 t_j^{\alpha_*}.$$

Заметив, что для тех же w

$$|w| \leqslant \frac{3}{2}|t_j| \quad \text{и} \quad H_K(z_j) \leqslant H_K(w) + r_j R_K = H_K(w) + j t_j^{\alpha_*} R_K,$$

заключаем, что при всех j, начиная с некоторого j_0,

$$\ln|g(w)| \leqslant H_K(w) + j t_j^{\alpha_*} R_K - j^2 t_j^{\alpha_*} \leqslant H_K(w) - \frac{j^2}{3}|w|^{\alpha_*}, \quad |w-z_j| \leqslant r_j. \tag{15}$$

Нам потребуется также глобальная оценка g, которая следует из того, что g принадлежит $\mathscr{V}H_K^{\infty}$. В соответствии с этим, при некотором $p > 0$

$$\ln|g(w)| \leqslant H_K(w) + p|w|^{\alpha_*} + p, \quad w \in \mathbb{C}. \tag{16}$$

Пусть теперь G — произвольный ограниченный выпуклый многоугольник. Зафиксируем числовую последовательность $(q_j)_{j=1}^{\infty}$ с $\frac{1}{2} \leqslant q_j \uparrow 1$. Применив те же соображения, что и в доказательстве [5, лемма 3.8], и воспользовавшись леммой 1 из [13], построим последовательности таких целых функций f_j и точек ζ_j с $|\zeta_j - z_j| \leqslant \frac{r_j}{2}$, что при некоторой постоянной $A > 0$ и всех $j \in \mathbb{N}$ имеют место следующие оценки:

$$\ln|f_j(\zeta_j)| \geqslant q_j H_G(\zeta_j) + \frac{\varepsilon_0}{8} j|\zeta_j|^{\alpha_*}, \tag{17}$$

$$\ln|f_j(z)| \leqslant q_j H_G(z) + (2R_G j + 1)|z|^{\alpha_*} + A, \quad |z-z_j| \leqslant \frac{r_j}{2}, \tag{18}$$

$$\ln|f_j(z)| \leqslant q_j H_G(z) + |z|^{\alpha_*} + A, \quad |z-z_j| > \frac{r_j}{2}. \tag{19}$$

Из (15) и (18) следует, что если $|z-z_j| \leqslant \frac{r_j}{2}$, то

$$\ln|g(z)f_j(z)| \leqslant H_G(z) + H_K(z) - \frac{j^2}{4}|z|^{\alpha_*} + A.$$

Поэтому при всех $j > 2\sqrt{m}$

$$\sup_{|z-z_j|\leqslant \frac{r_j}{2}} \frac{|g(z)|\cdot|f_j(z)|}{e^{H_G(z)+H_K(z)-m|z|^{\alpha_*}}} \leqslant e^A.$$

Далее, в силу (16) и (19) при $|z-z_j|>\frac{r_j}{2}$ имеем

$$\ln|g(z)f_j(z)|\leqslant H_G(z)+H_K(z)+(p+1)|z|^{\alpha_*}-(1-q_j)R_G|z|+A.$$

Несложные вычисления показывают, что тогда для всех $j\in\mathbb{N}$

$$\sup_{|z-z_j|>\frac{r_j}{2}}\frac{|g(z)|\cdot|f_j(z)|}{e^{H_G(z)+H_K(z)-m|z|^{\alpha_*}}}\leqslant e^A\sup_{s\geqslant 0}e^{(m+p+1)s^{\alpha_*}-(1-q_j)R_Gs}\leqslant e^{A+\frac{C}{(1-q_j)^{\alpha}}},$$

где $C:=\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{(m+p+1)^{\alpha+1}}{R_G^\alpha}$.

Из приведенных оценок следует, что при всех $j>2\sqrt{m}$

$$A_j:=\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|g(z)|\cdot|f_j(z)|}{e^{H_G(z)+H_K(z)-m|z|^{\alpha_*}}}\leqslant e^{A+\frac{C}{(1-q_j)^{\alpha}}}. \tag{20}$$

Из (18) и (19) непосредственно вытекает, что $f_j\in\mathscr{V}H_G$, $j\in\mathbb{N}$. Кроме того, из (17) следует, что

$$B_j:=\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|f_j(z)|}{e^{H_G(z)}}\geqslant\frac{|f_j(\zeta_j)|}{e^{H_G(\zeta_j)}}\geqslant e^{\frac{\varepsilon_0}{8}j|\zeta_j|^{\alpha_*}-(1-q_j)R_G|\zeta_j|}.$$

Возьмем $q_j=1-\frac{\varepsilon_0}{16R_G}j|\zeta_j|^{-\frac{1}{\alpha+1}}$. Тогда

$$B_j\geqslant e^{\left(\frac{\varepsilon_0}{16}\right)^{\alpha+1}\frac{1}{R_G^\alpha}\frac{j^{\alpha+1}}{(1-q_j)^\alpha}}. \tag{21}$$

Заметим, что в силу нашего выбора $t_j\geqslant j^{\alpha+2}$ при всех $j\in\mathbb{N}$. Поэтому $|\zeta_j|\geqslant\frac{1}{2}j^{\alpha+2}$ и, следовательно, $q_j\to 1$ при $j\to\infty$. А тогда из (20) и (21) получаем, что $\frac{B_j}{A_j}\to\infty$ при $j\to\infty$, что противоречит (13). $\triangleright$

Из предложения 4, теоремы 2 и леммы 5 следует такой критерий сюръективности операторов свертки для пространств $\mathscr{V}H(G)$ экспоненциально-степенного роста максимального типа.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{V}=(n(d(\lambda))^{-\alpha})_{n=1}^\infty$, μ — аналитический функционал в $\mathbb{C}$ с носителем в выпуклом компактном множестве K и $\hat{\mu}\in\mathscr{V}H_K^\infty$. Следующие два условия эквивалентны:*

1) *оператор $\mu*:\mathscr{V}H(G+K)\to\mathscr{V}H(G)$ сюръективен для любой выпуклой ограниченной области G;*

2) *$h_{\hat{\mu}}=H_K$ и $\hat{\mu}$ удовлетворяет условию (S^{α_*}).*

2.2. Критерии сюръективности операторов свертки в пространствах нормального типа. Пространства $\mathscr{V}H(G)$ экспоненциально-степенного роста нормального типа задаются весовыми последовательностями $\mathscr{V}=(v_n)_{n=1}^\infty$ с $v_n(\lambda):=\left(1-\frac{1}{n}\right)(d(\lambda))^{-\alpha}$, $n\geqslant 2$. Здесь и ниже по-прежнему $0<\alpha<1$ и $\alpha_*:=\frac{\alpha}{\alpha+1}$. В данном случае пространство мультипликаторов из $\mathscr{V}H_G$ в $\mathscr{V}H_{G+K}$ имеет вид

$$\mathscr{V}H_K^\infty:=\left\{f\in H(\mathbb{C}):\ \sup_{\zeta\in\mathbb{C}}\frac{|f(\zeta)|}{e^{H_K(\zeta)+\varepsilon|\zeta|^{\alpha_*}}}<\infty\ \ (\forall\,\varepsilon>0)\right\}.$$

А условие регулярности роста символа, обеспечивающее сюръективность операторов свертки в пространствах данного типа, формулируется следующим образом.

Будем говорить, что целая $\varphi(\zeta)$ экспоненциального типа удовлетворяет условию $(S_0^{\alpha_*})$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $N > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для каждой точки $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| > N$ найдется точка $\zeta' \in \mathbb{C}$ с $|\zeta' - \zeta| < \delta|\zeta|^{\alpha_*}$, для которой

$$\ln|\varphi(\zeta')| \geqslant h_\varphi(\zeta) - \varepsilon|\zeta|^{\alpha_*}.$$

Приведем формулировки аналогов основных результатов предыдущего пункта для пространств экспоненциально-степенного роста нормального типа.

Предложение 5. *Пусть* $\mathscr{V} = \left((1-\frac{1}{n})(d(\lambda))^{-\alpha}\right)_{n=2}^{\infty}$ *и* μ *— аналитический функционал, для которого* $\hat\mu \in \mathscr{V}H_K^\infty$ *и* $h_{\hat\mu} = H_K$. *Если* $\hat\mu$ *удовлетворяет условию* $(S_0^{\alpha_*})$, *то оператор свертки* $\mu* : \mathscr{V}H(G+K) \to \mathscr{V}H(G)$ *является сюръективным.*

Теорема 4. *Пусть* $\mathscr{V} = \left((1-\frac{1}{n})(d(\lambda))^{-\alpha}\right)_{n=2}^{\infty}$, μ *— аналитический функционал в* $\mathbb{C}$ *с носителем в выпуклом компактном множестве* K *и* $\hat\mu \in \mathscr{V}H_K^\infty$. *Следующие два условия эквивалентны:*

1) *оператор* $\mu* : \mathscr{V}H(G+K) \to \mathscr{V}H(G)$ *сюръективен для любой выпуклой ограниченной области* G;

2) $h_{\hat\mu} = H_K$ *и* $\hat\mu$ *удовлетворяет условию* $(S_0^{\alpha_*})$.

Литература

1. *Коробейник Ю. Ф.* О разрешимости в комплексной области некоторых классов линейных операторных уравнений.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2009.—251 с.
2. *Melikhov S. N., Momm S.* Analytic solutions of convolution equations on convex sets with an obstacle in the boundary // Math. Scand.—2000.—Vol. 86, № 2.—P. 293–319.
3. *Momm S.* A division problem in the space of entire functions of exponential type // Ark. Mat.—1994.—Vol. 32, № 1.—P. 213–236. DOI: 10.1007/BF02559529.
4. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Surjectivity criteria for convolution operators in $A^{-\infty}$ // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I.—2010.—Vol. 348, № 5–6.—P. 253–256. DOI: 10.1016/j.crma.2010.01.015.
5. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains // Ark. Mat.—2012.—Vol. 50, № 1.—P. 1–22. DOI: 10.1007/s11512-011-0146-4.
6. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Extension of solutions of convolution equations in spaces of holomorphic functions with polynomial growth in convex domains // Bull. Sci. Math.—2012.—Vol. 136, № 1.—P. 96–110. DOI: 10.1016/j.bulsci.2011.06.002.
7. *Епифанов О. В.* О разрешимости неоднородного уравнения Коши — Римана в классах функций, ограниченных с весом и системой весов // Мат. заметки.—1992.—Т. 51, № 1.—С. 83–92.
8. *Полякова Д. А.* О разрешимости неоднородного уравнения Коши — Римана в проективных весовых пространствах // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 1.—С. 185–198.
9. *Андреева Т. М.* Описание сопряженных для весовых пространств голоморфных функций заданного роста в выпуклых ограниченных областях // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2018.—№ 1.—С. 4–9.
10. *Напалков В. В.* Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1987.—Т. 51, № 2.—С. 287–305.
11. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Continuation of holomorphic functions and some of its applications // Studia Math.—2010.—Vol. 200, № 3.—P. 279–295. DOI: 10.4064/sm200-3-5.
12. *Hörmander L.* On the range of convolution operators // Ann. Math.—1962.—Vol. 76, № 1.—P. 148–170. DOI: 10.2307/1970269.
13. *Абанин А. В.* Густые пространства и аналитические мультипликаторы // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—1994.—№ 4.—С. 3–10.

Статья поступила 13 декабря 2017 г.

Абанин Александр Васильевич
Южный федеральный университет,
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
заведующий кафедрой математического анализа;

Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
заведующий отделом математического анализа
E-mail: avabanin@sfedu.ru
http://orcid.org//0000-0003-4507-4508

Андреева Татьяна Михайловна
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
младший научный сотрудник отдела математического анализа
E-mail: metzi@yandex.ru
http://orcid.org//0000-0002-6449-0294

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 3–15

ON THE SURJECTIVITY OF THE CONVOLUTION OPERATOR IN SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS OF A PRESCRIBED GROWTH

Abanin A. V.[1,2], Andreeva T. M.[2]
[1] Southern Federal University;
[2] Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS

Abstract. We consider the weighted (DFS)-spaces of holomorphic functions in a bounded convex domain G of the complex plane $\mathbb{C}$ having a prescribed growth given by some sequence of weights satisfying several general and natural conditions. Under these conditions the problem of the continuity and surjectivity of a convolution operator from $H(G+K)$ into (onto) $H(G)$ is studied. Here K is a fixed compact subset in $\mathbb{C}$. We answer the problem in terms of the Laplace transformation of the linear functional that determines the convolution operator (it is called the symbol of the convolution operator). In spaces of a general type we obtain a functional criterion for a convolution operator to be surjective from $H(G+K)$ onto $H(G)$. In the particular case of spaces of exponential-power growth of the maximal and normal types we establish some sufficient conditions on the symbol's behaviour for the corresponding convolution operator to be surjective. These conditions are stated in terms of some lower estimates of the symbol. In addition, we show that these conditions are necessary for the convolution operator to be surjective for all bounded convex domains G in $\mathbb{C}$. In fact, we obtain a criterion for a surjective convolution operator in spaces of holomorphic functions of exponential-power growth on the class of all bounded convex domains in $\mathbb{C}$. Similar previous results were available for only the particular space of holomorphic functions having the polynomial growth in bounded convex domains.

Keywords: weighted spaces, holomorphic functions, convolution operator, surjectivity, spaces of exponential-power growth.

References

1. *Korobeinik Yu. F. O razreshimosti v kompleksnoy oblasti nekotorykh klassov lineynykh operatornykh uravneniy* [*On the Solvability of Certain Classes of Linear Operator Equations in a Complex Domain*], Rostov-na-Donu, Yuzhnyi Federalnyi Universitet, 2009, 251 p. (in Russian).
2. *Melikhov S. N., Momm S.* Analytic Solutions of Convolution Equations on Convex Sets with an Obstacle in the Boundary, *Math. Scand.*, 2000, vol. 86, no. 2, pp. 293–319.

3. *Momm S.* A Division Problem in the Space of Entire Functions of Exponential Type, *Ark. Mat.*, 1994, vol. 32, no. 1, pp. 213–236. DOI: 10.1007/BF02559529.
4. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Surjectivity Criteria for Convolution Operators in $A^{-\infty}$, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 2010, vol. 348, no. 5–6, pp. 253–256. DOI: 10.1016/j.crma.2010.01.015.
5. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Convolution Operators in $A^{-\infty}$ for Convex Domains, *Ark. Mat.*, 2012, vol. 50, no. 1, pp. 1–22. DOI: 10.1007/s11512-011-0146-4.
6. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Extension of Solutions of Convolution Equations in Spaces of Holomorphic Functions with Polynomial Growth in Convex Domains, *Bull. Sci. Math.*, 2012, vol. 136, no. 1, pp. 96–110. DOI: 10.1016/j.bulsci.2011.06.002.
7. *Epifanov O. V.* On Solvability of the Nonhomogeneous Cauchy–Riemann Equation in Classes of Functions that are Bounded with Weights or Systems of Weights, *Math. Notes*, 1992, vol. 51, no. 1, pp. 54–60. DOI: 10.1007/BF01229435.
8. *Polyakova D. A.* Solvability of Inhomogeneous Cauchy–Riemann Equation in Projective Weighted Spaces, *Siberian Math. J.*, 2017, vol. 58, no. 1, pp. 142–152. DOI: 10.1134/S0037446617010189.
9. *Andreeva T. M.* Duals for Weighted Spaces of Holomorphic Functions of Prescribed Growth in Bounded Convex Domains, *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki* [*Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Sev.-Kavk. Reg. Estestv. Nauki*], 2018, no. 1, pp. 4–9 (in Russian).
10. *Napalkov V. V.* Spaces of Analytic Functions of Prescribed Growth Near the Boundary, *Math. USSR-Izv.*, 1988, vol. 30, no. 2, pp. 263–281. DOI: 10.1070/IM1988v030n02ABEH001008.
11. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Continuation of Holomorphic Functions with Growth Conditions and Some of its Applications, *Studia Math.*, 2010, vol. 200, no. 3, pp. 279–295. DOI: 10.4064/sm200-3-5.
12. *Hörmander L.* On the Range of Convolution Operators, *Ann. of Math.*, 1962, vol. 76, no. 1, pp. 148–170. DOI: 10.2307/1970269.
13. *Abanin A. V.* Thick Spaces and Analytic Multipliers, *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki* [*Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Sev.-Kavk. Reg. Estestv. Nauki*], 1994, no. 4, pp. 3–10 (in Russian).

Received December 13, 2017

Alexander V. Abanin
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova Street, Rostov-on-Don 344090, Russia

Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS
22 Marcus Street, Vladikavkaz, 362027, Russia
E-mail: abanin@math.rsu.ru
http://orcid.org//0000-0003-4507-4508

Tatiana M. Andreeva
Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS
22 Marcus Street, Vladikavkaz 362027, Russia
E-mail: metzi@yandex.ru
http://orcid.org//0000-0002-6449-0294

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 16–22

УДК 517.98
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14714

МАКСИМАЛЬНЫЕ КОММУТАТИВНЫЕ ИНВОЛЮТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ф. Н. Арзикулов

Посвящается 65-летнему юбилею
профессора Анатолия Георгиевича Кусраева

Аннотация. Работа посвящена инволютивным алгебрам ограниченных линейных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Изучается проблема описания всех подпространств векторного пространства всех бесконечномерных $n \times n$-матриц над полем комплексных чисел, для бесконечного кардинального числа n, являющихся инволютивными алгебрами. Существует много различных классов операторных алгебр в гильбертовом пространстве, включая классы ассоциативных алгебр неограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Большинство инволютивных алгебр неограниченных операторов, например, $\sharp$-алгебры, EC$^\sharp$-алгебры и EW$^\sharp$-алгебры, инволютивные алгебры измеримых операторов, присоединенных к конечной (или полуконечной) алгебре фон Неймана, мы можем представить как алгебры бесконечномерных матриц. Если мы сможем описать все максимальные инволютивные алгебры бесконечномерных матриц, то ряд проблем операторных алгебр, включая инволютивные алгебры неограниченных операторов можно свести к проблемам максимальных инволютивных алгебр бесконечномерных матриц. В данной работе дается описание всех максимальных коммутативных инволютивных подалгебр алгебры ограниченных операторов в гильбертовом пространстве как алгебра бесконечных матриц.

Ключевые слова: инволютивная алгебра, алгебра операторов, гильбертово пространство, бесконечномерная матрица, алгебра фон Неймана.

Работа посвящена инволютивным алгебрам ограниченных линейных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве. В [1] впервые было найдено достаточное условие построения инволютивной алгебры всех бесконечномерных ограниченных $n \times n$-матриц над полем комплексных чисел. Эту алгебру можно отождествить с алгеброй $B(l_2(\Xi))$ всех ограниченных линейных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$, где $|\Xi| = n$ для некоторого бесконечного кардинального числа n. В основе данной статьи лежит идея бесконечного разложения $B(l_2(\Xi))$ по одномерным компонентам, предложенная в [1] и [2]. Благодаря этому всякий линейный оператор в гильбертовом пространстве представляется в виде бесконечной матрицы. В работах [1] и [2] получены результаты, касающиеся нормы и положительности ограниченного линейного оператора. На языке матриц эти результаты можно сформулировать следующим образом: 1) норма бесконечной матрицы равна точной верхней грани норм всех конечномерных подматриц на ее основной диоганали; 2) ограниченная бесконечномерная матрица положительна тогда и только тогда когда все конечномерные подматрицы на ее основной диоганали положительны. Продолжая рассуждения в этом направлении можно рассматривать векторное пространство всех бесконечномерных $n \times n$-матриц над полем комплексных чисел и изучать проблему описания всех подпространств этого векторного пространства, являющихся инволютивными алгебрами.

Существует много различных классов операторных алгебр в гильбертовом пространстве, включая классы ассоциативных алгебр неограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Большинство инволютивных алгебр неограниченных операторов, например $\sharp$-алгебры, $EC^\sharp$-алгебры и $EW^\sharp$-алгебры [4], инволютивные алгебры измеримых операторов, присоединенных к конечной (или полуконечной) алгебре фон Неймана [5], мы можем представить как алгебры бесконечномерных матриц. Если мы сможем описать все максимальные инволютивные алгебры бесконечномерных матриц, то ряд проблем операторных алгебр, включая инволютивные алгебры неограниченных операторов можно свести к проблемам максимальных инволютивных алгебр бесконечномерных матриц. В частности, ряд проблем коммутативных операторных алгебр, включая коммутативные инволютивные алгебры неограниченных операторов можно свести к проблемам максимальных коммутативных инволютивных алгебр бесконечномерных матриц. В данной работе обсуждается проблема описания всех максимальных коммутативных инволютивных алгебр бесконечномерных матриц.

Всюду в данной работе n — произвольное бесконечное кардинальное число, Ξ — множество индексов мощности n. Далее, пусть $\{e_{i,j}\}$ — семейство матричных единиц такое, что $e_{i,j}$ — $n \times n$-мерная матрица, $e_{i,j} = (a^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Xi}$, (i,j)-ая компонента которой равна 1, а остальные компоненты равны нулю.

Пусть $\{m_\xi\}$ — семейство $n \times n$-мерных матриц и $m_\xi = (m_\xi^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Xi}$ для каждого индекса ξ. Тогда через $\sum_\xi m_\xi$ обозначим матрицу, компоненты которой являются суммой соответствующих компонент матриц из семейства $\{m_\xi\}$, т. е.

$$\sum_\xi m_\xi = \left(\sum_\xi m_\xi^{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta\in\Xi}.$$

Здесь подразумевается, в сумме $\sum_\xi m_\xi^{\alpha\beta}$ число ненулевых членов не более, чем счетно.

Обозначим через $M_n(\mathbb{C})$ множество $n \times n$-мерных матриц $(\lambda^{i,j})_{i,j\in\Xi}$ такое, что для каждой пары индексов i, j из Ξ, $\lambda^{i,j} \in \mathbb{C}$, и существует такое неотрицательное число $K \in \mathbb{R}$, что для всех $n \in N$ и $\{e_{i_k,i_l}\}_{k,l=1}^n \subseteq \{e_{i,j}\}$ имеет место

$$\left\| \sum_{k,l=1}^n \lambda^{i_k,i_l} e_{i_k,i_l} \right\| \leqslant K,$$

где $\| \sum_{k,l=1}^n \lambda^{i_k,i_l} e_{i_k,i_l} \|$ является нормой матрицы $\sum_{k,l=1}^n \lambda^{i_k,i_l} e_{i_k,i_l}$ в конечномерной C*-алгебре, порожденной системой матриц $\{e_{i_k,i_l}\}_{k,l=1}^n$. Легко видеть, что относительно сложения матриц и умножения матрицы на число множество $M_n(\mathbb{C})$ является векторным пространством над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

В векторном пространстве

$$\mathscr{M}_n = \left\{ (\lambda^{i,j})_{i,j\in\Xi} : \ \lambda^{i,j} \in \mathbb{C} \ \ (\forall\, i,j \in \Xi) \right\}$$

всех $n \times n$-мерных матриц над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ введем ассоциативное умножение следующим образом: для произвольных элементов $x = (\lambda^{i,j})_{i,j\in\Xi}$, $y = (\mu^{i,j})_{i,j\in\Xi}$ из $\mathscr{M}_n$ определим произведение x и y как

$$xy = \left(\sum_{\xi\in\Xi} \lambda^{i,\xi}\mu^{\xi,j}\right)_{i,j\in\Xi}.$$

Очевидно, что относительно этой операции векторное пространство $\mathscr{M}_n$ не является алгеброй. В то же время, его подпространство $M_n(\mathbb{C})$ становится ассоциативной алгеброй и $M_n(\mathbb{C}) \cong B(l_2(\Xi))$, где $l_2(\Xi)$ — комплексное гильбертово пространство квадратично суммируемых семейств $\{x_i\}_{i\in\Xi}$, $B(l_2(\Xi))$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$. Поэтому $M_n(\mathbb{C})$ является алгеброй фон Неймана всех (бесконечномерных) $n \times n$-мерных матриц над $\mathbb{C}$ [2].

Напомним, что гильбертово пространство H — это бесконечномерное евклидово пространство, являющееся полным метрическим пространством относительно метрики порожденной скалярным произведением данного евклидова пространства [3, §1.5].

Пусть $\mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ — множество всех векторных подпространств векторного пространства $\mathscr{M}_n$, являющихся коммутативными инволютивными алгебрами и $\leqslant$ — порядок в $\mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$, определенный следующим образом: для произвольных коммутативных инволютивных алгебр X, Y из $\mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ пишем $X \leqslant Y$, если X является подмножеством Y, т. е. $X \subseteq Y$. Этот порядок в $\mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ удовлетворяет условиям леммы Цорна. Поэтому, для каждого элемента $A \in \mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ существует максимальный относительно этого порядка элемент $\mathscr{A} \in \mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ такой, что $A \leqslant \mathscr{A}$.

Определение. Максимальный относительно порядка $\leqslant$ элемент $\mathscr{A}$ множества $\mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ будем называть *максимальной коммутативной инволютивной алгеброй в гильбертовом пространстве* $l_2(\Xi)$.

Пусть $\{e_i\}_{i\in\Xi}$ — максимальное ортогональное семейство минимальных проекторов алгебры $B(l_2(\Xi))$ и $\{e_{i,j}\}_{i,j\in\Xi}$ — система матричных единиц построенная по семейству $\{e_i\}_{i\in\Xi}$. Далее, пусть a — произвольный элемент из $\mathscr{M}_n$. Мы будем писать

$$a = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j} e_{i,j},$$

если $e_{i,i} a e_{j,j} = \lambda^{i,j} e_{i,j}$ для каждой пары i, j различных индексов из Ξ.

Теорема 1. *Множество всех ограниченных элементов максимальной коммутативной инволютивной алгебры в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$ является алгеброй фон Неймана.*

$\lhd$ Пусть $\mathscr{A}$ — максимальная коммутативная инволютивная алгебра в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$ и $\mathscr{A}_b$ — подалгебра всех ограниченных элементов алгебры $\mathscr{A}$. Тогда существует максимальная коммутативная инволютивная подалгебра $\mathscr{A}_o$ алгебры $B(l_2(\Xi))$, содержащая алгебру $\mathscr{A}_b$. Берем произвольную сеть (a_α) элементов $\mathscr{A}$, ультраслабо сходящуюся к элементу a из $B(l_2(\Xi))$. Тогда элемент a лежит в $\mathscr{A}_o$.

Предположим, что $\mathscr{A}_o$ содержит максимальное ортогональное семейство $\{e_{i,i}\}_{i\in\Xi}$ минимальных проекторов алгебры $B(l_2(\Xi))$. Тогда спектральное разложение элемента a имеет следующий вид:

$$a = \sum_{i\in\Xi} \lambda^{i,i} e_{i,i},$$

т. е. a является ультраслабым пределом сети $\{\lambda^{i,i} e_{i,i}\}_{i\in\Xi}$. Пусть для каждого α

$$a_\alpha = \sum_{i\in\Xi} \lambda^{i,i}_\alpha e_{i,i}.$$

Так как сеть (a_α) ультраслабо сходится к элементу a в $B(l_2(\Xi))$, то для каждого i сеть $\{\lambda^{i,i}_\alpha\}_{i\in\Xi}$ сходится к $\lambda^{i,i}$. Берем произвольный элемент b из $\mathscr{A}$. Имеем $a_\alpha b = b a_\alpha$ для каждого α. Докажем, что $ab = ba$. Пусть

$$b = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j} e_{i,j},$$

где $\{e_{i,j}\}_{i,j\in\Xi}$ — система матричных единиц построенная по семейству $\{e_i\}_{i\in\Xi}$. Имеем

$$a_\alpha b = \Big(\sum_{i\in\Xi} \lambda_\alpha^{i,i} e_{i,i}\Big)\Big(\sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j} e_{i,j}\Big) = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda_\alpha^{i,i}\lambda^{i,j} e_{i,j}$$

и

$$ba_\alpha = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j}\lambda_\alpha^{j,j} e_{i,j}.$$

Следовательно, для каждой пары i, j индексов из Ξ имеем

$$\lambda_\alpha^{i,i}\lambda^{i,j} = \lambda^{i,j}\lambda_\alpha^{j,j}.$$

Так как комплексное число $\lambda_{i,i}$ является пределом сети $(\lambda_\alpha^{i,i})_\alpha$, то отсюда получаем, что для каждой пары i, j индексов из Ξ имеем

$$\lambda^{i,i}\lambda^{i,j} = \lambda^{i,j}\lambda^{j,j}.$$

Следовательно,

$$ab = \Big(\sum_{i\in\Xi} \lambda^{i,i} e_{i,i}\Big)\Big(\sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j} e_{i,j}\Big) = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,i}\lambda^{i,j} e_{i,j} = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j}\lambda^{j,j} e_{i,j} = ba.$$

Поэтому элемент a лежит в $\mathscr{A}$, а значит a лежит и в $\mathscr{A}_b$. Следовательно, $\mathscr{A}_b$ является ультраслабо замкнутой, т. е. является алгеброй фон Неймана.

Теперь рассмотрим общий случай. Спектральное разложение элемента a имеет следующий вид: существует единственное ограниченное разложение единицы $\lambda \mapsto e_\lambda^a$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ во множестве всех проекторов алгебры $\mathscr{A}_o$ такое, что

$$a = \int\limits_{-\|a\|}^{\|a\|} \lambda\, de_\lambda^a.$$

При этом для элемента $x \in B(l_2(\Xi))$ будет $a \leftrightarrow x$ в том и только в том случае, если $x \leftrightarrow e_\lambda^a$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Пусть для каждого α

$$a_\alpha = \int\limits_{-\|a_\alpha\|}^{\|a_\alpha\|} \lambda\, de_\lambda^\alpha.$$

Берем ортогональное семейство $\{e_{\beta,\beta}\}$ проекторов из $\mathscr{A}_o$ такое, что всякий проектор из семейства $\{e_\lambda^a\} \cup (\cup_\alpha \{e_\lambda^\alpha\})$ представляется как точная верхняя грань некоторого подсемейства семейства $\{e_{\beta,\beta}\}$. Далее рассуждаем также как и ранее. $\rhd$

Пусть $\{e_i\}_{i\in\Xi}$ — максимальное ортогональное семейство минимальных проекторов алгебры $B(l_2(\Xi))$. Через $\sum_{i\in\Xi}^{\oplus} e_i\mathbb{C}$ обозначим множество всех элементов a из $\mathscr{M}_n$ таких, что $e_i a e_j = 0$ для каждой пары i, j различных индексов из Ξ. Тогда множество $\sum_{i\in\Xi}^{\oplus} e_i\mathbb{C}$

является инволютивной алгеброй относительно введенной выше операции умножения и имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Алгебра $\sum_{i\in\Xi}^{\oplus} e_i\mathbb{C}$ является максимальной коммутативной инволютивной алгеброй в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$.*

$\triangleleft$ Пусть b — произвольный элемент из $\mathscr{M}_n$ такой, что $ab = ba$ для каждого элемента a из $\sum_{i\in\Xi}^{\oplus} e_i\mathbb{C}$. Тогда

$$e_i b = b e_i \quad (\forall\, i \in \Xi).$$

Отсюда $e_i b e_j = b e_i e_j = 0$ для каждой пары i, j различных индексов из Ξ. Поэтому элемент b лежит в $\sum_{i\in\Xi}^{\oplus} e_i\mathbb{C}$. Ввиду произвольности элемента b алгебра $\sum_{i\in\Xi}^{\oplus} e_i\mathbb{C}$ является максимальной коммутативной инволютивной алгеброй в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$. $\triangleright$

Пусть $\mathscr{A}_o$ — максимальная коммутативная инволютивная подалгебра алгебры $B(l_2(\Xi))$, $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}$ — множество всех проекторов из алгебры $\mathscr{A}_o$. Через $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$ обозначим множество всех элементов a из $\mathscr{M}_n$ таких, что $eaf = 0$ для каждой пары e, f ортогональных проекторов из $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}$. Тогда множество $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$ является векторным пространством и имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *$\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$ является максимальной коммутативной инволютивной алгеброй в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$.*

$\triangleleft$ Сперва докажем, что $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$ является алгеброй. Пусть a, b — произвольные элементы из $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$ и e, f — произвольная пара ортогональных проекторов из $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}$. Тогда по определению

$$eaf = fae = 0, \quad ebf = fba = 0.$$

А также $1 - e - f \in \mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}$ и по определению $ea(1 - e - f) = 0$. Отсюда

$$eabf = ea(e + f + (1 - e - f))bf = eaebf + eafbf + ea(1 - e - f)bf = ea0 + 0bf + 0bf = 0.$$

Следовательно, произведение ab лежит в $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$. Можно проверить непосредственно, что остальные аксиомы инволютивной алгебры также имеют место для $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$.

Теперь докажем, что инволютивная алгебра $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$ максимальна в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$. Пусть b — произвольный элемент из $\mathscr{M}_n$ такой, что $ab = ba$ для каждого элемента a из $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$. Тогда

$$eb = be \quad (\forall\, e \in \mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})).$$

Отсюда $ebf = bef = 0$ для каждой пары e, f различных проекторов из $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}$. Поэтому элемент b лежит в $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}$. Ввиду произвольности элемента b алгебра $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}$ является максимальной коммутативной инволютивной алгеброй в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$. $\triangleright$

Теорема 4. *Пусть $\{e_i\}_{i\in\Xi}$ — максимальное ортогональное семейство минимальных проекторов алгебры $B(l_2(\Xi))$ и $\mathscr{A}$ — максимальная коммутативная инволютивная алгебра в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$, содержащая элемент a такой, что $e_i a e_i = \lambda^i$, $e_j a e_j = \lambda^j$, $\lambda^i \neq \lambda^j$ и $e_i a e_j = 0$ для каждой пары i, j различных индексов из Ξ. Тогда $\mathscr{A} = \sum_{i\in\Xi}^{\oplus} e_i\mathbb{C}$.*

$\triangleleft$ Берем произвольный элемент b из $\mathscr{A}$. Имеем $ab = ba$. Пусть

$$b = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j} e_{i,j},$$

где $\{e_{i,j}\}_{i,j\in\Xi}$ — система матричных единиц построенная по семейству $\{e_i\}_{i\in\Xi}$. Тогда

$$a = \sum_{i\in\Xi} \lambda^{i,i} e_{i,i},$$

что означает $e_i a e_j = 0 \cdot e_{i,j}$ для каждой пары i, j различных индексов из Ξ. Имеем

$$ab = \Big(\sum_{i\in\Xi} \lambda^{i,i} e_{i,i}\Big)\Big(\sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j} e_{i,j}\Big) = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,i}\lambda^{i,j} e_{i,j}$$

и

$$ba = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j}\lambda^{j,j} e_{i,j}.$$

Следовательно, для каждой пары i, j индексов из Ξ имеем

$$\lambda^{i,i}\lambda^{i,j} = \lambda^{i,j}\lambda^{j,j}.$$

Так как $\lambda^{i,i} \neq \lambda^{j,j}$, то $\lambda^{i,j} = 0$ для каждой пары i, j различных индексов из Ξ. Следовательно, $e_i b e_j = 0$ для каждой пары i, j различных индексов из Ξ, т. е. $b \in \sum_{i\in\Xi}^{\oplus} e_i\mathbb{C}$. Что и требовалось доказать. $\triangleright$

Замечание 1. В силу теорем 1, 2 и 3 множество максимальных коммутативных инволютивных подалгебр алгебры $B(l_2(\Xi))$ инъективно вкладывается во множество $\mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$. Действительно, пусть $\mathscr{M}(B(l_2(\Xi)))$ — множество всех максимальных коммутативных инволютивных подалгебр алгебры $B(l_2(\Xi))$. Рассмотрим отображение $\phi : \mathscr{M}(B(l_2(\Xi))) \to \mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$, определенное как

$$\phi(\mathscr{A}_o) = \mathscr{A}, \quad \mathscr{A}_o \in \mathscr{M}(B(l_2(\Xi))), \quad \mathscr{A} \in \mathscr{A}(\mathscr{M}_n),$$

если $\mathscr{A}_o \subset \mathscr{A}$. В силу теорем 2, 3 для каждой алгебры $\mathscr{A}_o \in \mathscr{M}(B(l_2(\Xi)))$ существует единственная алгебра $\mathscr{A} \in \mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ содержащая $\mathscr{A}_o$. Поэтому отображение ϕ является инъективным, и вообще мы предполагаем, что ϕ является биективным отображением, т. е. для каждой алгебры $\mathscr{A} \in \mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ существует единственная алгебра $\mathscr{A}_o \in \mathscr{M}(B(l_2(\Xi)))$, содержащаяся в $\mathscr{A}$. Вопрос о том, верно это или нет, остается открытым.

Литература

1. *Arzikulov F. N.* Infinite order and norm decompositions of C^*-algebras // Int. J. of Math. Anal.—2008.—Vol. 2, № 5.—P. 255–262.
2. *Arzikulov F. N.* Infinite order decompositions of C^*-algebras // SpringerPlus.—2016.—Vol. 5, № 1.—P. 1–13. DOI: 10.1186/s40064-016-3468-7.
3. *Ахиезер И. Н., Глазман И. М.* Теория линейных операторов.—М.: Наука, 1966.—377 с.
4. *Inoue A.* On a class of unbounded operator algebras // Pacific J. Math.—1976.—Vol. 65, № 1.—P. 77–95.
5. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов.—Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007.—390 с.—(Сер. «Праці Ін-ту математики НАН України». Т. 89).

Статья поступила 9 февраля 2018 г.

Арзикулов Фарходжон Нематжонович
Андижанский государственный университет,
Узбекистан, 170100, Андижан, ул. Университетская, 129
доцент кафедры математики
E-mail: arzikulovfn@rambler.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 16–22

MAXIMAL COMMUTATIVE INVOLUTIVE ALGEBRAS ON A HILBERT SPACE

Arzikulov F. N.[1]
[1] Andizhan State University

Abstract. This paper is devoted to involutive algebras of bounded linear operators on an infinite-dimensional Hilbert space. We study the problem of description of all subspaces of the vector space of all infinite-dimensional $n \times n$-matrices over the field of complex numbers for an infinite cardinal number n that are involutive algebras. There are many different classes of operator algebras on a Hilbert space, including classes of associative algebras of unbounded operators on a Hilbert space. Most involutive algebras of unbounded operators, for example, $\sharp$-algebras, $EC^\sharp$-algebras and $EW^\sharp$-algebras, involutive algebras of measurable operators affiliated with a finite (or semifinite) von Neumann algebra, we can represent as algebras of infinite-dimensional matrices. If we can describe all maximal involutive algebras of infinite-dimensional matrices, then a number of problems of operator algebras, including involutive algebras of unbounded operators, can be reduced to problems of maximal involutive algebras of infinite-dimensional matrices. In this work we give a description of maximal commutative involutive subalgebras of the algebra of bounded linear operators in a Hilbert space as the algebras of infinite matrices.

Key words: involutive algebra, algebra of operators, Hilbert space, infinite matrix, von Neumann algebra.

References

1. *Arzikulov F. N.* Infinite Order and Norm Decompositions of C^*-Algebras. *Int. J. of Math. Anal.*, 2008, vol. 2, no. 5, pp. 255–262.
2. *Arzikulov F. N.* Infinite Order Decompositions of C^*-algebras. *SpringerPlus*, 2016, vol. 5, no. 1, pp. 1–13. DOI: 10.1186/s40064-016-3468-7.
3. *Akhiezer N. I., Glazman I. M. Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, N. Y., Dover Publ., Inc., 1993.
4. *Inoue A.* On a Class of Unbounded Operator Algebras. *Pacific Journal of Mathematics*, 1976, vol. 65, no. 1, pp. 77–95.
5. *Muratov M. A., Chilin V. I. Algebras of Measurable and Locally Measurable Operators*, Ky'iv, Instytut Matematyky NAN Ukra'ny. Matematyky ta'i'i Zastosuvannya, 2007, vol. 69, 390 p.

Received February 9, 2018

Arzikulov Farhodjon Nematjonovich
Andizhan State University,
University Street, Andizhan 710020, Uzbekistan
E-mail: arzikulovfn@rambler.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 23–28

УДК 517.98
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14715

DERIVATIONS ON BANACH $*$-IDEALS IN VON NEUMANN ALGEBRAS

A. F. Ber[1], **V. I. Chilin**[2], **F. A. Sukochev**[3]

[1] Institute of Mathematics of Republica of Uzbekistan; [2] National University of Uzbekistan;
[3] School of Mathematics and Statistics, University of New South Wales

Abstract. It is known that any derivation $\delta : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ on the von Neumann algebra $\mathscr{M}$ is an inner, i. e. $\delta(x) := \delta_a(x) = [a, x] = ax - xa$, $x \in \mathscr{M}$, for some $a \in \mathscr{M}$. If H is a separable infinite-dimensional complex Hilbert space and $\mathscr{K}(H)$ is a C^*-subalgebra of compact operators in C^*-algebra $\mathscr{B}(H)$ of all bounded linear operators acting in H, then any derivation $\delta : \mathscr{K}(H) \to \mathscr{K}(H)$ is a spatial derivation, i.e. there exists an operator $a \in \mathscr{B}(H)$ such that $\delta(x) = [x, a]$ for all $x \in K(H)$. In addition, it has recently been established by Ber A. F., Chilin V. I., Levitina G. B. and Sukochev F. A. (JMAA, 2013) that any derivation $\delta : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ on Banach symmetric ideal of compact operators $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{K}(H)$ is a spatial derivation. We show that the same result is also true for an arbitrary Banach $*$-ideal in every von Neumann algebra $\mathscr{M}$. More precisely: If $\mathscr{M}$ is an arbitrary von Neumann algebra, $\mathscr{E}$ be a Banach $*$-ideal in $\mathscr{M}$ and $\delta\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ is a derivation on $\mathscr{E}$, then there exists an element $a \in \mathscr{M}$ such that $\delta(x) = [x, a]$ for all $x \in \mathscr{E}$, i. e. δ is a spatial derivation.

Key words: von Neumann algebra, Banach $*$-ideal, derivation, spatial derivation.
Mathematical Subject Classification (2010): 46L57, 46L51, 46L52.

1. Introduction

It is well known [1, Lemma 4.1.3] that every derivation on a C^*-algebra A is norm continuous. In fact, this also easily follows from another well known fact [1, Corollary 4.1.7] that every derivation on A realized as a $*$-subalgebra in the algebra $\mathscr{B}(H)$ of all bounded linear operators on a Hilbert space H is given by a reduction of an inner derivation on a von Neumann algebra $\mathscr{M} = \overline{A}^{wo}$ (the closure of A in the weak operator topology on $\mathscr{B}(H)$). In the special setting when $A = \mathscr{K}(H)$ (the ideal of all compact operators on H) and $\mathscr{M} = \mathscr{B}(H)$, the latter result states that for every derivation δ on A there exists an operator $a \in \mathscr{B}(H)$ such that $\delta(x) = [a, x]$ for every $x \in \mathscr{K}(H)$. The ideal $\mathscr{K}(H)$ is a classical example of a Banach operator ideal in $\mathscr{B}(H)$ (see [2, 3, 4, 5]). Any such ideal $\mathscr{E} \neq \mathscr{K}(H)$ is a Banach $*$-algebra (albeit not a C^*-algebra) and a natural question immediately suggested by this discussion is as follows.

Question 1. *Let $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{E}}) \subseteq \mathscr{K}(H)$ be a Banach ideal of compact operators on H and let $\delta\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ be a derivation on $\mathscr{E}$. Is δ continuous with respect to a norm $\|\cdot\|_{\mathscr{E}}$ on $\mathscr{E}$? If this fact is true, then does there exist an operator $a \in \mathscr{B}(H)$ such that $\delta(x) = [a, x]$ for every $x \in \mathscr{E}$?*

The positive answer to Question 1 was obtained in the paper [6] (see also [7]).

Let now $\mathscr{M}$ be an arbitrary von Neumann algebra. An $*$-ideal $\mathscr{E}$ of $\mathscr{M}$ is called *a Banach $*$-ideal*, if $\mathscr{E}$ is equipped with a Banach norm $\|\cdot\|_{\mathscr{E}}$, such that

$$\|axb\|_{\mathscr{E}} \leqslant \|a\|_{\mathscr{M}} \cdot \|x\|_{\mathscr{E}} \cdot \|b\|_{\mathscr{M}}$$

for all $x \in \mathscr{E}$ and $a, b \in \mathscr{M}$.

It is natural to pose the following variant of question 1.

Question 2. *Let $\mathscr{M}$ be an arbitrary von Neumann algebra and let $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{E}})$ be a Banach $*$-ideal of $\mathscr{M}$. Let $\delta\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ be a derivation on $\mathscr{E}$. Is δ continuous with respect to a norm $\|\cdot\|_{\mathscr{E}}$ on $\mathscr{E}$? If this fact is true, then does there exist an operator $a \in \mathscr{M}$ such that $\delta(x) = [a, x]$ for every $x \in \mathscr{E}$?*

The following theorem, the main result of this paper, gives a positive answer to Question 2.

Theorem 1. *Let $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{E}})$ be a Banach $*$-ideal of the von Neumann algebra $\mathscr{M}$ and let $\delta\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ be a derivation on $\mathscr{E}$. Then there exists an element $a \in \overline{\mathscr{E}}^{wo}$ such that $\delta(x) = [a, x]$ for all $x \in \mathscr{E}$. Moreover, we can choose such an element a as follows: $\|a\|_{\mathscr{M}} \leqslant \|\delta\|_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}}$.*

2. Preliminaries

For details on the von Neumann algebra theory, the reader is referred to e. g. [1, 8, 9].

Let H be a Hilbert space over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers, let $\mathscr{B}(H)$ be the $*$-algebra of all bounded linear operators on H, let $\mathscr{M}$ be a von Neumann subalgebra in $\mathscr{B}(H)$ and let $\mathscr{P}(\mathscr{M}) = \{p \in \mathscr{M} : p^2 = p = p^*\}$ be the lattice of all projections in $\mathscr{M}$. The center of a von Neumann algebra $\mathscr{M}$ will be denoted by $\mathscr{Z}(\mathscr{M})$.

Let A be an arbitrary subalgebra in $\mathscr{M}$. A linear mapping $\delta\colon A \to \mathscr{M}$ is called *derivation* on A with values in $\mathscr{M}$ if the equality $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$ holds for all $x, y \in A$. It is not difficult to verify that for every $a \in A$ the mapping $\delta_a(x) = [a, x] = ax - xa$, $x \in A$, defines a derivation on A, in addition $\delta_a(A) \subseteq A$. Such derivations δ_a are called *inner derivations* on A.

If A is a $*$-subalgebra in $\mathscr{M}$ then a derivation $\delta\colon A \to \mathscr{M}$ is said to be a *$*$-derivation* if $\delta(x^*) = \delta(x)^*$ for all $x \in A$. For every derivation $\delta\colon A \to \mathscr{M}$ of a $*$-algebra A into $\mathscr{M}$ we define mappings

$$\delta_{\mathrm{Re}(x)} := \frac{\delta(x) + \delta(x^*)^*}{2}, \qquad \delta_{\mathrm{Im}}(x) := \frac{\delta(x) - \delta(x^*)^*}{2i}, \quad x \in A.$$

It is easy to see that δ_{Re} and δ_{Im} are $*$-derivations on A, moreover $\delta = \delta_{\mathrm{Re}} + i\delta_{\mathrm{Im}}$.

Let $\mathscr{E}$ be a two-sided ideal in $\mathscr{M}$. Then $\mathscr{E}$ is an $*$-ideal in $\mathscr{M}$ and the conditions $x \in \mathscr{M}$, $y \in \mathscr{E}$, $|x| \leqslant |y|$ imply that $x \in \mathscr{E}$.

We need the following property of two-sided ideals in von Neumann algebras.

Proposition 1 [10, Proposition 2.4.22]**.** *If $\mathscr{E}$ is wo-closed two-sided ideal in a von Neumann algebra $\mathscr{M}$ then there exists a central projection $z \in \mathscr{Z}(\mathscr{M}))$ such that $\mathscr{E} = z \cdot \mathscr{M}$.*

A non-zero two-sided ideal $\mathscr{E}$ of $\mathscr{M}$, equipped with a Banach norm $\|\cdot\|_{\mathscr{E}}$, is called *a Banach $*$-ideal*, if

$$\|axb\|_{\mathscr{E}} \leqslant \|a\|_{\mathscr{M}} \cdot \|b\|_{\mathscr{M}} \cdot \|x\|_{\mathscr{E}}$$

whenever $x \in \mathscr{E}$ and $a, b \in \mathscr{M}$.

It should be observed that any a Banach $*$-ideal $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{E}})$ is $*$-closed and that $x \in \mathscr{M}$, $y \in \mathscr{E}$ and $|x| \leqslant |y|$ imply that $x \in \mathscr{E}$ and $\|x\|_{\mathscr{E}} \leqslant \|y\|_{\mathscr{E}}$.

Let A be a C^*-subalgebra in the C^*-algebra $\mathscr{B}(H)$. By [1, Lemma 4.1.3] every derivation $\delta\colon A \to A$ is a $\|\cdot\|_{\mathscr{B}(H)}$-continuous. The following Theorem gives an extension of the derivation δ to the von Neumann algebra $\overline{A}^{wo}$, where $\overline{A}^{wo}$ is a *wo*-closure of C^*-subalgebra A in $\mathscr{B}(H)$.

Theorem 2 [10, Proposition 3.2.24], [1, Theorem 4.1.6, Corollary 4.1.7], [11, Theorem 2]**.** *Let A be a C^*-subalgebra in the C^*-algebra $\mathscr{B}(H)$ and let $\delta\colon A \to A$ be a derivation on A. Then there exists an element a in $\overline{A}^{wo} = \mathscr{N}$ such that $\delta(x) = \delta_a(x) = [a, x]$ for all $x \in A$ and $\|\delta\|_{A\to A} = \|\delta_a\|_{\mathscr{N}\to\mathscr{N}}$. Moreover we can choose such an element $a \in \mathscr{N}$ as follows: $\|a\|_{\mathscr{N}} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \|\delta_a\|_{\mathscr{N}\to\mathscr{N}}$.*

3. Main Results

Throughout this section $\mathscr{M}$ is an arbitrary von Neumann algebra. We recall that a projection $p \in \mathscr{P}(\mathscr{M})$ is called *an atom* if $0 \neq q \in \mathscr{P}(\mathscr{M})$, $q \leqslant p$ imply that $q = p$. If q is an atom then $q \cdot \mathscr{M} \cdot q = q \cdot \mathbb{C}$.

Proposition 2. *Let $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{E}})$ be a Banach $*$-ideal in the von Neumann algebra $\mathscr{M}$ and let $\delta\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ be a derivation on $\mathscr{E}$. Then δ is a continuous mapping on $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{E}})$.*

$\lhd$ Without loss of generality, we may assume that δ is a $*$-derivation. Since $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{E}})$ is a Banach space, it is sufficient to prove that the graph of δ is closed. Suppose a contrary. Then there exist a sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{E}$ and an element $0 \neq a \in \mathscr{E}$ such that $a = a^*$, $\|a_n\|_{\mathscr{E}} \to 0$ and $\|\delta(a_n) - a\|_{\mathscr{E}} \to 0$ as $n \to \infty$.

Let $a = a_+ - a_-$ be an orthogonal decomposition of a, that is $a_+, a_- \in \mathscr{E}$, $a_+, a_- \geqslant 0$, and $a_+a_- = 0$. Without loss of generality, we may assume that $a_+ \neq 0$, otherwise we consider the sequence $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Since $a \in \mathscr{E}$, there exists a projection $p \in \mathscr{M}$ such that $pap \geqslant \lambda p$ for some $\lambda > 0$. Replacing a_n with $\frac{a_n}{\lambda}$ we may assume $pap \geqslant p$. Hence, for some operator $c \in \mathscr{M}$, we have $p = c^*papc \in \mathscr{E}$.

There are two possible cases:

(i) There exists an atom $0 \neq q \in \mathscr{P}(\mathscr{M})$ such that $q \leqslant p$;

(ii) The lattice $\mathscr{P}(\mathscr{M})$ does not contain atoms $q \neq 0$ such that $q \leqslant p$.

In the case (i), we have $q \in \mathscr{E}$ and $q \leqslant qaq$. Since q is an atom, it follows $qa_nq = \lambda_n q$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, and we immediately deduce that $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ from the assumption $\|a_n\|_{\mathscr{E}} \to 0$. Since

$$\delta(qa_nq) = \delta(q)a_nq + q\delta(a_nq)) = \delta(q)a_nq + q\delta(a_n)q + qa_n\delta(q)$$

it follows that

$$\|\delta(qa_nq) - q\delta(a_n)q\|_{\mathscr{E}} \leqslant 2\|\delta(q)\|_{\mathscr{M}}\|a_n\|_{\mathscr{E}} \to 0, \quad \text{as } \ n \to \infty,$$

and

$$q \leqslant qaq = \|\cdot\|_{\mathscr{E}} - \lim_{n\to\infty} \delta(qa_nq) = \|\cdot\|_{\mathscr{E}} - \lim_{n\to\infty} \delta(\lambda_n q) = \delta(q) \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

This contradicts with the assumption that $q \neq 0$.

In the case (ii), there exists a pairwise orthogonal sequence $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{P}(\mathscr{M})$ such that $0 \neq e_n \leqslant p$ for all $n \geqslant 1$. Clearly, we have $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{E}$ and $e_nae_n \geqslant e_n$ for any natural number $n \in \mathbb{N}$. Let $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ be any sequence of positive integers such that

$$m_n > (2n+1)/\|e_n\|_{\mathscr{E}}, \quad n \geqslant 1.$$

Passing to a subsequence if necessary, we may assume without loss of generality that

$$\|a_n\|_{\mathscr{E}} < m_n^{-1}2^{-n}, \quad \|\delta(a_n) - a\|_{\mathscr{E}} < m_n^{-1}$$

and that

$$\|a_n\|_{\mathscr{E}} < 2^{-1} n m_n^{-1} \|\delta(e_n)\|_{\mathscr{M}}^{-1}$$

whenever $n \geqslant 1$ is such that $\delta(e_n) \neq 0$. Let us define an element

$$c := \sum_{n=1}^{\infty} m_n e_n a_n e_n \in \mathscr{E}$$

where the series converges in the norm $\|\cdot\|_{\mathscr{E}}$, since we have $\|m_n e_n a_n e_n\|_{\mathscr{E}} < 2^{-n}$. We intend to obtain a contradiction by showing that the norm $\|\delta(c)\|_{\mathscr{E}}$ is larger than any positive integer n.

Indeed, fixing such $n \geqslant 1$, we have $\|\delta(c)\|_{\mathscr{E}} \geqslant \|e_n \delta(c) e_n\|_{\mathscr{E}}$ and

$$\begin{aligned}
\|e_n\delta(c)e_n\|_{\mathscr{E}} &= \|\delta(e_n c)e_n - \delta(e_n)ce_n\|_{\mathscr{E}} = m_n\|\delta(e_n a_n e_n)e_n - \delta(e_n)e_n a_n e_n\|_{\mathscr{E}} \\
&= m_n\|e_n\delta(e_n a_n e_n)e_n\|_{\mathscr{E}} = m_n\|e_n\delta(a_n)e_n + e_n\delta(e_n)a_n e_n + e_n a_n\delta(e_n)e_n\|_{\mathscr{E}} \\
&\geqslant m_n\|e_n(\delta(a_n) - a)e_n + e_n a e_n\|_{\mathscr{E}} - m_n\|e_n\delta(e_n)a_n e_n\|_{\mathscr{E}} - m_n\|e_n a_n\delta(e_n)e_n\|_{\mathscr{E}} \\
&\geqslant m_n(\|e_n a e_n\|_{\mathscr{E}} - \|e_n(\delta(a_n) - a)e_n\|_{\mathscr{E}}) - 2m_n\|a_n\|_{\mathscr{E}}\|\delta(e_n)\|_{\mathscr{M}} \\
&\geqslant m_n(\|e_n a e_n\|_{\mathscr{E}} - \|\delta(a_n) - a\|_{\mathscr{E}}) - n > m_n\|e_n a e_n\|_{\mathscr{E}} - 1 - n \geqslant m_n\|e_n\|_{\mathscr{E}} - 1 - n > n.
\end{aligned}$$

This shows that δ is a continuous mapping on $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{E}})$. $\rhd$

Proposition 3. *Let $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{E}})$ be a Banach $*$-ideal in the von Neumann algebra $\mathscr{M}$ and let δ be a derivation on $\mathscr{E}$. Then δ is a continuous mapping on $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{M}})$ and $\|\delta\|_\infty := \|\delta\|_{(\mathscr{E},\|\cdot\|_{\mathscr{M}})\to(\mathscr{E},\|\cdot\|_{\mathscr{M}})} \leqslant 2\|\delta\|$, where $\|\delta\| = \|\delta\|_{(\mathscr{E},\|\cdot\|_{\mathscr{E}})\to(\mathscr{E},\|\cdot\|_{\mathscr{E}})}$.*

$\lhd$ By Proposition 2, a derivation $\delta\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ is a continuous on $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{E}})$, in particular, $\|\delta\| := \|\delta\|_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}} < \infty$.

Let $x \in \mathscr{E}$ and $\delta(x) \neq 0$. Let $0 < \varepsilon < \|\delta(x)\|_{\mathscr{M}}$ and denote by p_x the spectral projection of the operator $|\delta(x)|$ corresponding to the segment $[\|\delta(x)\|_{\mathscr{M}} - \varepsilon, \|\delta(x)\|_{\mathscr{M}}]$. Using Gelfand–Naimark theorem, one can obtain that $p_x \neq 0$.

We have that $0 < (\|\delta(x)\|_{\mathscr{M}} - \varepsilon)p_x \leqslant |\delta(x)|p_x$. Then $p_x \in \mathscr{E}$ and

$$|\delta(x)|p_x = (p_x|\delta(x)|^2 p_x)^{1/2} = (p_x\delta(x)^*\delta(x)p_x)^{1/2} = |\delta(x)p_x|.$$

Since the norm $\|\cdot\|_{\mathscr{E}}$ is monotone, we obtain that

$$\begin{aligned}
(\|\delta(x)\|_{\mathscr{M}} - \varepsilon)\|p_x\|_{\mathscr{E}} &\leqslant \|\delta(x)p_x\|_{\mathscr{E}} = \|\delta(xp_x) - x\delta(p_x)\|_{\mathscr{E}} \leqslant \|\delta(xp_x)\|_{\mathscr{E}} + \|x\delta(p_x)\|_{\mathscr{E}} \\
&\leqslant \|\delta(xp_x)\|_{\mathscr{E}} + \|x\|_{\mathscr{M}}\|\delta(p_x)\|_{\mathscr{E}} \leqslant \|\delta\|\|xp_x\|_{\mathscr{E}} + \|x\|_{\mathscr{M}}\|\delta\|\|p_x\|_{\mathscr{E}} \\
&\leqslant \|\delta\|\|x\|_{\mathscr{M}}\|p_x\|_{\mathscr{E}} + \|x\|_{\mathscr{M}}\|\delta\|\|p_x\|_{\mathscr{E}} = 2\|\delta\|\|x\|_{\mathscr{M}}\|p_x\|_{\mathscr{E}},
\end{aligned}$$

that is

$$(\|\delta(x)\|_{\mathscr{M}} - \varepsilon)\|p_x\|_{\mathscr{E}} \leqslant 2\|\delta\|\|x\|_{\mathscr{M}}\|p_x\|_{\mathscr{E}}.$$

Dividing by $\|p_x\|_{\mathscr{E}}$ and using arbitrariness of ε, we infer that

$$\|\delta(x)\|_{\mathscr{M}} \leqslant 2\|\delta\|\|x\|_{\mathscr{M}}.$$

Thus the operator δ is bounded with respect to the norm $\|\cdot\|_{\mathscr{M}}$, in addition, $\|\delta\|_\infty \leqslant 2\|\delta\|$. $\rhd$

Now we give a proof of Theorem 1.

$\lhd$ Proof of Theorem 1. Denote by $\widetilde{\mathscr{E}}$ and $\widehat{\mathscr{E}}$ the closure of the ideal $\mathscr{E}$ with respect to the uniform and weak operator topology, respectively. Then $\mathscr{E} \subset \widetilde{\mathscr{E}} \subset \widehat{\mathscr{E}}$. It is clear that $\widetilde{\mathscr{E}}$ is a C^*-subalgebra in $\mathscr{M}$ and the derivation δ extends by continuity (see Proposition 3) up to a derivation $\widetilde{\delta} : \widetilde{\mathscr{E}} \to \widetilde{\mathscr{E}}$, in addition $\|\widetilde{\delta}\|_\infty = \|\delta\|_\infty$.

Since $\widehat{\mathscr{E}}$ is a *wo*-closed two-sided in $\mathscr{M}$, it follows, by Proposition 1, that $\widehat{\mathscr{E}} = z\cdot\mathscr{M}$ for some central projection z in $\mathscr{M}$. Then $\widehat{\mathscr{E}}$ is a W^*-subalgebra with the identity z. By Theorem 2, the derivation $\widetilde{\delta}$ extends up to a derivation $\widehat{\delta} : \widehat{\mathscr{E}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{E}}$, in addition, there exists an element $a \in \widehat{\mathscr{E}}$ such that $\delta(x) = \delta_a(x) = [a, x]$ for all $x \in \mathscr{E}$ and $\|a\|_{\mathscr{M}} \leqslant \frac{1}{2}\|\delta_a\|_\infty = \frac{1}{2}\|\delta\|_\infty \leqslant \|\delta\|$. $\rhd$

Corollary 1 (cf. [6, Theorem 3.2])**.** *Let $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{E}})$ be a Banach ideal of compact operators in $\mathscr{B}(H)$ and let $\delta\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ be a derivation on $\mathscr{E}$. Then there exists an operator $a \in \mathscr{B}(H)$ such that $\delta(x) = [a, x]$ for all $x \in \mathscr{E}$. Moreover, we can choose such an element a as follows: $\|a\|_{\mathscr{M}} \leqslant \|\delta\|_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}}$.*

Corollary 2 (cf. [12, Theorem 5.2])**.** *Let $\mathscr{M}$ be a commutative von Neumann algebra and let $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{E}})$ be a Banach $*$-ideal in $\mathscr{M}$. Then any derivation δ on $\mathscr{E}$ vanishes.*

A detailed study of derivations on the ideals in commutative AW^*-algebras is given in the paper [12]. In particular, it is shown here that if the Boolean algebra $\mathscr{P}(\mathscr{M})$ of all projections in the commutative AW^*-algebra $\mathscr{M}$ is not σ-distributive then there exists a non-zero derivation on ideals in $\mathscr{M}$ with values in a commutative $*$-algebra $C_\infty(Q) \oplus i \cdot C_\infty(Q)$, where Q is a Stone compactum corresponding to the Boolean algebra $\mathscr{P}(\mathscr{M})$. An analogous result for derivations on an algebra $C_\infty(Q, \mathbb{C})$ was earlier obtained by A. G. Kusraev [13] for a general Stone compactum.

References

1. *Sakai S. C^*-Algebras and W^*-Algebras*, Berlin, Springer-Verlag, 1971.
2. *Gohberg I., Krein M. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators*, Providence (R.I.), Amer. Math. Soc., 1969, Translat. of Math. Monogr., vol. 18.
3. *Kalton N., Sukochev F.* Symmetric Norms and Spaces of Operators. *J. Reine Angew. Math.*, 2008, vol. 621, pp. 81–121.
4. *Schatten R. Norm Ideals of Completely Continuous Operators. Second printing*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, band 27, Berlin, Springer-Verlag, 1970, 98 p.
5. *Simon B. Trace Ideals and Their Applications.* Second edition, Math. Surveys and Monogr., vol. 120, Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 2005.
6. *Ber A. F., Chilin V. I., Levitina G. B. and Sukochev F. A.* Derivations with Values in Quasi-Normed Bimodules of Locally Measurable Operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, vol. 397, no. 2, pp. 628–643. DOI: 10.101610/j.jmaa.2012.07.068.
7. *Ber A. F., Chilin V. I. and Levitina G. B.* Derivations with Values in Quasi-Normed Bimodules of Locally Measurable Operators. *Sib. Adv. Math.*, 2015, vol. 25, no. 3, pp. 169–178. DOI: 10.3103/S1055134415030025.
8. *Strătilă S., Zsido L. Lectures on von Neumann Algebras*, Bucharest, Editura Academiei, 1979.
9. *Takesaki M. Theory of Operator Algebras* I, Berlin etc., Springer-Verlag, 1979.
10. *Bratelli O., Robinson D. W. Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* 1, N. Y., Springer-Verlag, 1979.
11. *Zsido L.* The Norm of a Derivation in a W^*-Algebra. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1973, vol. 38, no. 1, pp. 147–150.
12. *Chilin V. I., Levitina G. B.* Derivations on Ideals in Commutative AW^*-Algebras. *Sib. Adv. Math.*, 2014, vol. 24, no. 1, pp. 26–42. DOI.10.3103/S1055134414010040.
13. *Kusraev A. G.* Automorphisms and Derivations on a Universally Complete Complex f-Algebra. *Sib. Math. J.*, 2006, vol. 47, no. 1, pp. 77–85. DOI: 10.1007/s11202-006-0010-0.

Received March 21, 2018

Aleksey F. Ber
Institute of Mathematics of Republica of Uzbekistan,
Mirzo Ulughbek Street, 81, Tashkent 100170, Uzbekistan
E-mail: `aber1960@mail.ru, Aleksey.Ber@micros.uz`

Vladimir I. Chilin
National University of Uzbekistan,
Vuzgorodok, Tashkent 100174, Uzbekistan
E-mail: vladimirchil@gmail.com, chilin@ucd.uz

Fedor A. Sukochev
School of Mathematics and Statistics,
University of New South Wales,
Ms Marina Rambaldini, RC-3070, Sidney 2052, NSW, Australia
E-mail: f.sukochev@unsw.edu.au

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 23–28

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В БАНАХОВЫХ $*$-ИДЕАЛАХ АЛГЕБР ФОН НЕЙМАНА

Бер А. Ф., Чилин В. И., Сукочев Ф. А.

Аннотация. Известно, что любое дифференцирование $\delta : M \to M$ на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$ является внутренним, т. е. $\delta(x) := \delta_a(x) = [a, x] = ax - xa$, $x \in \mathscr{M}$, для некоторого $a \in \mathscr{M}$. Если H сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство и $\mathscr{K}(H)$ есть C^*-подалгебра компактных операторов в C^*-алгебре $\mathscr{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов, действующих в H, то каждое дифференцирование $\delta : \mathscr{K}(H) \to \mathscr{K}(H)$ есть специальное дифференцирование, т. е. существует такой оператор $a \in \mathscr{B}(H)$, что $\delta(x) = [x, a]$ для всех $x \in K(H)$. В недавней работе А. Ф. Бера, В. И. Чилина, Г. Б. Левитиной, Ф. А. Сукочева (JMAA, 2013) установлено, что каждое дифференцирование $\delta\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ на любом банаховом симметричном идеале компактных операторов $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{K}(H)$ также является пространственным. Мы показываем, что аналогичный результат верен и для произвольных банаховых $*$-идеалов в любой алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$. Более точно: Если $\mathscr{M}$ любая алгебра фон Неймана, $\mathscr{E}$ банаховый $*$-идеал в $\mathscr{M}$ и $\delta\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ есть дифференцирование на $\mathscr{E}$, то существует такой элемент $a \in \mathscr{M}$, что $\delta(x) = [x, a]$ для всех $x \in \mathscr{E}$, т. е. δ есть пространственное дифференцирование.

Ключевые слова: алгебра фон Неймана, банахов $*$-идеал, дифференцирование, пространственное дифференцирование.

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 29–37

УДК 539.3; 517.984.54
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14717

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

А. О. Ватульян, Л. В. Васильев, В. О. Юров

Настоящая работа посвящается 65-летию со дня рождения известного российского математика Анатолия Георгиевича Кусраева, который отдает немало сил для консолидации ученых-математиков на Юге России, развития науки и образования в области математики и ее приложений и поддержки молодых талантливых ученых.

Аннотация. Определение различных характеристик твердых тел по данным акустического зондирования в последние годы все чаще привлекает внимание исследователей. В настоящей работе исследуется новая обратная задача об определении двух параметров (коэффициентов постели), входящих в граничные условия для краевой задачи. Краевая задача описывает распространение волн в полом неоднородном цилиндрическом волноводе, расположенном в среде. Ранее проведено решение этой задачи, исследована структура дисперсионного множества и получен ряд формул, устанавливающих взаимосвязь спектральных параметров и коэффициентов постели. Решены вспомогательные задачи Коши, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям на внутренней границе цилиндра. Решение граничной задачи отыскивается в виде линейной комбинации вспомогательных задач, удовлетворяются граничные условия на внешней границе. Для существования нетривиального решения требуется равенство нулю определителя возникающей системы алгебраических уравнений. Реконструкция коэффициентов постели осуществляется по информации о двух точках дисперсионного множества, причем способ решения обратной задачи не использует явного представления дисперсионного множества. Решение обратной задачи не всегда удовлетворяет априорной информации о неотрицательности коэффициентов постели. С целью получения однозначной реконструкции параметров сформулирована теорема единственности. Теорема позволяет на начальном этапе отсеивать такие пары точек дисперсионного множества, для которых нет решения или оно не единственно. Вычислительные эксперименты показали распространенность ситуации, когда через две заданные точки дисперсионного множества могут быть проведены дисперсионные кривые неединственным образом. В рамках работы с малой погрешностью входной информации эффективный способ отбора пары параметров — рассмотрение третьей точки дисперсионного множества. Отмечено, что представленный способ реконструкции позволяет восстанавливать искомые параметры с достаточно высокой точностью.

Ключевые слова: цилиндрический волновод, упругое закрепление, дисперсионное множество, реконструкция.

Введение. В спектральных задачах, где граничные условия содержат параметр, проявляется зависимость точек спектра от значения этого параметра. Анализ влияния спектральных параметров представляет большой интерес, его можно использовать в том числе и для решения обратных коэффициентных задач [1, 2]. Решения обратных задач по реконструкции коэффициентов в граничных условиях были реализованы ранее в задачах для балочных структур, где требовалось определять 4 параметра в граничных условиях. Для случая постоянной жесткости балки решение и частотное уравнение можно получить, используя функции Крылова [3, 4]; на основе явного вида частотного уравнения строится и дальнейший анализ обратной задачи. В [5] показано, что невозможно однозначно определить 4 неизвестных неотрицательных параметра по 4 резонансным частотам. В случае переменной жесткости балки невозможно применить описанные выше подходы, а именно, частотное уравнение уже нельзя записать в явном виде, что не дает возможности использовать методы, разработанные для однородных структур. Подобная задача по восстановлению параметров в граничных условиях для упругого неоднородного стержня при наличии упругих связей на границе была рассмотрена ранее [6], причем анализ решения и определение искомых коэффициентов базируется на составлении вспомогательных задач Коши. Также анализ влияния граничных условий на частотные уравнения применяется для идентификации массы тела на его границе [7]. Масса учитывается только в граничных условиях и методика решения является аналогичной.

Более сложной структурой является волновод. Задача, описывающая волновой процесс, содержит два спектральных параметра. Волновые процессы в однородных плоских и цилиндрических упругих волноводах со свободными границами достаточно подробно исследованы в литературе, поскольку для них возможно получить дисперсионные соотношения в явном виде [8]. Моделирование волновых процессов в магистральных трубопроводах порождает задачу о волноводе при наличии окружающей среды, присутствие которой моделируется импедансными граничными условиями или условиями третьего рода, содержащими два параметра, и представляет интерес для исследования [9]. Для неоднородных волноводов дисперсионные соотношения изучены гораздо меньше, их исследование представляет большой интерес для приложений, например, при оценке скоростей в слоистых или функционально-градиентных трубопроводах [10, 11].

В работе [12] изучена модель упругого неоднородного полого цилиндра с упруго закрепленной внешней границей, причем граничные условия содержат два параметра. Изучено влияние этих параметров на дисперсионное множество. В настоящей работе рассмотрена обратная задача о восстановлении этих параметров по известным точкам дисперсионного множества. Построены базовые спектральные задачи, не содержащие искомых параметров. На их основе сформулированы необходимые и достаточные условия, обеспечивающие единственность восстановления параметров. Представлен метод восстановления, базирующийся на методе пристрелки. Проведена серия вычислительных экспериментов по определению искомых параметров, осуществлена оценка точности и применимости в расчетах представленного метода.

1. Постановка задачи. Рассмотрим волны в неоднородном цилиндрическом волноводе, упруго закрепленном по внешней границе, что моделирует взаимодействие магистрального трубопровода с внешней средой, а именно с глинистым грунтом [13], где a, b — внутренний и внешний радиусы волновода.

Уравнения движения и определяющие соотношения имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \sigma_r = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_{rz}}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \sigma_\phi = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_{rz}}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{u_r}{r}, \\ \sigma_z = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_{rz}}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}, \qquad \sigma_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right). \end{gathered} \tag{2}$$

Учет контакта волновода с окружающей средой осуществляется в рамках модели с двумя коэффициентами постели и приводит к следующим граничным условиям:

$$\sigma_r(a) = 0, \quad \sigma_r(b) = -\tilde{\alpha} u_r(b), \quad \sigma_{rz}(a) = 0, \quad \sigma_{rz}(b) = -\tilde{\beta} u_z(b), \tag{3}$$

где σ_r, σ_z — компоненты радиального и осевого напряжений, σ_{rz}, σ_ϕ — компоненты касательного и окружного напряжений, u_r, u_z — радиальное и осевое перемещения.

Решения задачи (1)–(3) ищем в виде бегущей волны:

$$\begin{gathered} u_r = bU_1 \exp(i(kz - \omega t)), \quad u_z = ibU_3 \exp(i(kz - \omega t)), \\ \sigma_r = \mu_0 T_1 \exp(i(kz - \omega t)), \quad \sigma_{rz} = i\mu_0 T_3 \exp(i(kz - \omega t)). \end{gathered} \tag{4}$$

Отделим экспоненциальный множитель в (4) и представим задачу в каноническом виде, а именно в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя спектральными параметрами κ и γ

$$\begin{cases} U_1'(x) = -AU_1(x)/x + A\gamma U_3(x) + T_1(x)/(g_1(x) + 2g_2(x)); \\ U_3'(x) = -\gamma U_1(x) + T_3(x)/g_2(x); \\ T_1'(x) = \left(B/x^2 - \kappa^2\right) U_1(x) - C\gamma U_3(x) - 2DT_1(x) + \gamma T_3(x); \\ T_3'(x) = \left(\gamma^2 B - \kappa^2\right) U_3(x) - C\gamma U_1(x) - A\gamma T_1(x) - T_3(x)/x, \end{cases} \tag{5}$$

где $A = g_1(x)/(g_1(x) + 2g_2(x))$, $B = 4g_2(x)(g_1(x) + g_2(x))/(g_1(x) + 2g_2(x))$, $C = 2g_1(x)g_2(x)/(x(g_1(x) + 2g_2(x)))$, $D = g_2(x)/(x(g_1(x) + 2g_2(x)))$, $\xi_0 = a/b$ — безразмерный внутренний радиус, $x = r/b$ — радиальная координата.

$$\mu_0 = \frac{1}{1 - \xi_0} \int\limits_{\xi_0}^{1} \mu(x)\, dx, \quad \kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 b^2}{\mu_0},$$

где μ_0 — среднее значение модуля сдвига, κ — безразмерная частота, $\gamma = kb$ — безразмерное волновое число, $\lambda = \mu_0 g_1$, $\mu = \mu_0 g_2$ — параметры Ламе, зависящие от радиальной координаты. Граничные условия имеют следующий вид, содержащий два параметра α, β, причем $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$:

$$\begin{gathered} T_1(\xi_0) = 0, \quad T_1(1) = -\alpha\, U_1(1), \\ T_3(\xi_0) = 0, \quad T_3(1) = -\beta\, U_3(1). \end{gathered} \tag{6}$$

2. Построение решения, анализ дисперсионного множества. Решение задачи (5)–(6) построено на основе метода пристрелки [14]. Основная идея заключается в формировании двух вспомогательных задач Коши, не содержащих параметров α, β для исходной краевой задачи (5)–(6), что позволяет отыскивать ее решение в виде линейной комбинации решений вспомогательных задач. Введем в рассмотрение две вектор-функции $X^{(m)} = (U_1^{(m)}, U_3^{(m)}, T_1^{(m)}, T_3^{(m)})$, $m = 1, 2$, удовлетворяющие системе (5) и неоднородным данным Коши

$$\begin{gathered} U_1^{(1)}(\xi_0) = 1, \quad U_3^{(1)}(\xi_0) = 0, \quad T_1^{(1)}(\xi_0) = 0, \quad T_3^{(1)}(\xi_0) = 0, \\ U_1^{(2)}(\xi_0) = 0, \quad U_3^{(2)}(\xi_0) = 1, \quad T_1^{(2)}(\xi_0) = 0, \quad T_3^{(2)}(\xi_0) = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Общее решение задачи (5)–(6) ищется в виде линейной комбинации $X = C_1 X^{(1)} + C_2 X^{(2)}$; отметим, что это решение удовлетворяет граничным условиям (6) при $x = \xi_0$.

Удовлетворение граничным условиям при $x = 1$ приводит к следующей системе и позволяет строить дисперсионное уравнение через ее определитель

$$\begin{cases} C_1 T_1^{(1)}(1) + C_2 T_1^{(2)}(1) = -\alpha(C_1 U_1^{(1)}(1) + C_2 U_1^{(2)}(1)), \\ C_1 T_3^{(1)}(1) + C_2 T_3^{(2)}(1) = -\beta(C_1 U_3^{(1)}(1) + C_2 U_3^{(2)}(1)). \end{cases} \tag{8}$$

Система (5) всегда имеет тривиальное решение. Приравнивая нулю определитель системы (8), получаем дисперсионное соотношение, которое связывает параметры α, β, γ, κ. Несложный анализ позволил установить, что дисперсионное уравнение относительно α и β имеет следующую структуру:

$$D(\alpha, \beta, \gamma, \kappa) = \alpha\beta P_1(\gamma, \kappa) + \alpha P_2(\gamma, \kappa) + \beta P_3(\gamma, \kappa) + P_4 = 0, \tag{9}$$

где P_i — функции от κ и γ вида

$$\begin{aligned} P_1(\gamma, \kappa) &= U_1^{(1)}(\gamma, \kappa) U_3^{(2)}(\gamma, \kappa) - U_1^{(2)}(\gamma, \kappa) U_3^{(1)}(\gamma, \kappa), \\ P_2(\gamma, \kappa) &= U_1^{(1)}(\gamma, \kappa) T_3^{(2)}(\gamma, \kappa) - U_1^{(2)}(\gamma, \kappa) T_3^{(1)}(\gamma, \kappa), \\ P_3(\gamma, \kappa) &= T_1^{(1)}(\gamma, \kappa) U_3^{(2)}(\gamma, \kappa) - T_1^{(2)}(\gamma, \kappa) U_3^{(1)}(\gamma, \kappa), \\ P_4(\gamma, \kappa) &= T_1^{(1)}(\gamma, \kappa) T_3^{(2)}(\gamma, \kappa) - T_1^{(2)}(\gamma, \kappa) T_3^{(1)}(\gamma, \kappa). \end{aligned} \tag{10}$$

Приводя уравнение (9) к каноническому виду, нетрудно показать, что при фиксированных γ и κ оно определяет ветви гиперболы с асимптотами, параллельными осям координат.

В [12] для точек дисперсионного множества установлено, что при увеличении α или β при фиксированном γ возрастает частотный параметр κ. Случай $\alpha = \beta = 0$ для однородных волноводов дает известное уравнение Похгаммера — Кри [8]. Предельный случай $\alpha \to \infty$, $\beta \to \infty$ соответствует дисперсионному уравнению для цилиндра в жесткой обойме.

3. Обратная задача. Задачу идентификации параметров в граничных условиях можно сформулировать следующим образом: пусть известны две точки дисперсионного множества вида (κ_1, γ_1), (κ_2, γ_2), требуется определить неизвестные параметры α и β в граничных условиях (6). Так как неизвестные параметры содержатся только в граничных условиях, то решается система (5) с условиями (7) для пары точек (κ_i, γ_i). Таким образом, для определения α и β строится система из двух уравнений вида (9) гиперболической структуры

$$\begin{cases} \alpha\beta P_{11} + \alpha P_{12} + \beta P_{13} + P_{14} = 0; \\ \alpha\beta P_{21} + \alpha P_{22} + \beta P_{23} + P_{24} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

где принято $P_{mj} = P_j(\kappa_m, \gamma_m)$, $m = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Будем считать, что $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$. Система (11) может иметь два набора решений (α_i, β_i), которые соответствуют пересечению двух гипербол. Возможны также ситуации, когда решение единственно или вообще отсутствует. С целью установления критерия существования единственного решения обратной задачи получим из системы уравнений (11) следующую систему:

$$a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0, \quad -a_0\alpha + a_{12}\beta + a_{13} = 0, \tag{12}$$

где $a_0 = P_{22}P_{11} - P_{21}P_{12}$, $a_1 = P_{24}P_{11} + P_{22}P_{13} - P_{21}P_{14} - P_{23}P_{12}$, $a_2 = P_{24}P_{13} - P_{23}P_{14}$, $a_{12} = P_{21}P_{13} - P_{11}P_{23}$, $a_{13} = P_{21}P_{14} - P_{24}P_{11}$.

Введем ряд характеристик, которые позволят сформулировать условие единственности решения системы (11)

$$
\begin{aligned}
D &= a_1^2 - 4\,a_0\,a_2, \quad S = a_0 a_2 + a_{13} a_1 + a_{13}^2, \\
M &= -\frac{a_1 + 2\,a_{13}}{a_{12}}, \quad K = \frac{a_1^2 + a_{13} a_1 - 2\,a_2 a_0}{a_{12} a_0}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Теорема. *Пусть* $D > 0$. *Система уравнений* (11) *имеет единственное решение* (α, β), *удовлетворяющее условию* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий:*

1. $a_0 a_2 > 0, \quad a_0 a_1 < 0, \quad S < 0;$
2. $a_0 a_2 < 0, \quad S > 0, \quad M > 0;$
3. $a_0 a_2 < 0, \quad S < 0, \quad K > 0.$

$\lhd$ Случай 1. Первые два неравенства в силу теоремы Виета гарантируют наличие двух положительных корней α_1, α_2 квадратного уравнения в (12). Находя из линейного уравнения в (12) β_1 и β_2, и далее $\beta_1 \beta_2 = S/a_{12}^2$, получим, что условие $S < 0$ гарантирует различные знаки у β_1, β_2, и соответственно, определяет единственное положительное решение (11).

В случае 2 корни α_1, α_2 разных знаков, а соответствующие β_1 и β_2 одного знака; в силу $\beta_1 + \beta_2 = M > 0$ оба β_1, β_2 положительны, таким образом, решение единственно.

В случае 3 корни α_1, α_2 разных знаков, и соответствующие β_1 и β_2 разных знаков ($S < 0$); в силу $\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = K > 0$ одна из пар α_1, β_1 или α_2, β_2 дает единственное решение. $\rhd$

Замечание. Отдельно отметим, что при $\gamma = 0$ задача разделяется на две независимых краевых задачи для радиальных и осевых колебаний

$$
\begin{cases}
U_1'(x) = -AU_1(x)/x + T_1(x)/(g_1(x) + 2g_2(x)); \\
T_1'(x) = \big(B/x^2 - \kappa^2\big)U_1(x) - 2DT_1(x); \\
T_1(\xi_0) = 0, T_1(1) = -\alpha U_1(1),
\end{cases} \tag{14}
$$

$$
\begin{cases}
U_3'(x) = T_3(x)/g_2(x); \\
T_3'(x) = -\kappa^2 U_3(x) - T_3(x)/x; \\
T_3(\xi_0) = 0, \ T_3(1) = -\beta U_3(1).
\end{cases} \tag{15}
$$

Используя (14) или (15), можно независимо определить параметр α или β соответственно. Для этого, однако, потребуются не только координаты точек радиального резонанса дисперсионного множества $(\kappa_1, 0)$, $(\kappa_2, 0)$, но и априорная информация о принадлежности к семейству радиальных или продольных колебаний.

4. Результаты вычислительных экспериментов. Проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению параметров в граничных условиях. В начале для заданных $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $g_1(x) = 1.5 f_0 \left(2 - x^{10}\right)$, $g_2(x) = f_0 \left(2 - x^{10}\right)$, $\xi_0 = 0.76$,

$$
f_0 = (1 - \xi_0) \Big/ \int\limits_{\xi_0}^{1} \left(2 - x^{10}\right) dx
$$

решалась прямая задача по построению дисперсионных кривых. Первые две ветви дисперсионного множества изображены на рис. 1. Затем выбраны пять точек с координатами: $Q_1(2.213, 0.5)$, $Q_2(2.498, 1)$, $Q_3(2.984, 3.479)$, $Q_4(2.984, 1)$, $Q_5(4.753, 2.5)$. Далее решалась обратная задача с входными данными Q_i, Q_j, $i \neq j$.

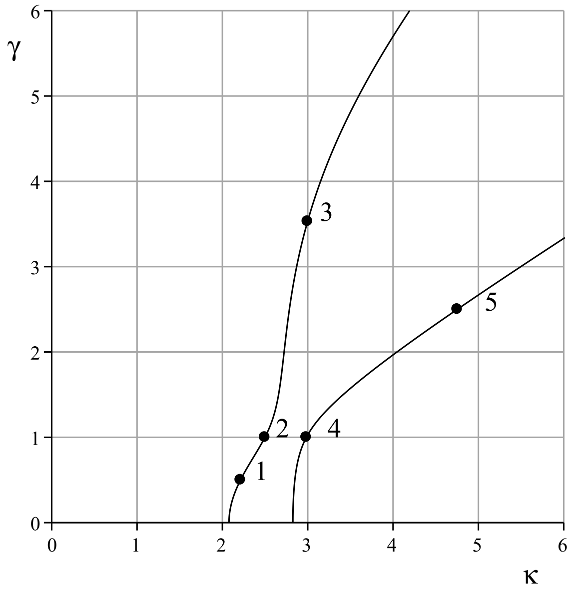

Рис. 1.

Теорема позволяет установить, что только для следующих пар точек (Q_1, Q_3), (Q_2, Q_3), (Q_3, Q_4), (Q_3, Q_5) существует единственное решение, причем выполняется первое условие теоремы. Для остальных шести пар имеет место неединственность. Для пары (Q_1, Q_2), например, найдено: ($\alpha_1 = 0.99780$, $\beta_1 = 1.0007$), ($\alpha_2 = 0.19957$, $\beta_2 = 0.54447$). Тот факт, что $\alpha_1 > \alpha_2$, $\beta_1 > \beta_2$ позволяет сделать вывод, что точки (Q_1, Q_2), принадлежащие в прямой задаче первой дисперсионной кривой, могут также принадлежать второй дисперсионной кривой. Решив прямую задачу для (α_2, β_2), убеждаемся в этом. Средняя погрешность восстановления составляет 0.05% (определялись четыре значащих цифры для координат точек дисперсионного множества).

Приведем пример, когда существование единственного решения удается установить через второе и третье условие теоремы. Решим прямую задачу при $\alpha = 0.001$, $\beta = 0.01$. Выберем следующие три точки на второй и третьей дисперсионных ветвях: $H_1(2.10317, 1)$, $H_2(13.3779, 1)$, $H_3(13.3779, 8.36408)$. Для пары точек (H_1, H_2) выполняется второе условие теоремы и ($\alpha_1 = 0.00097$, $\beta_1 = 0.01004$), ($\alpha_2 = -38.2018$, $\beta_2 = 0.31939$). Для пары (H_1, H_3) также выполняется второе условие теоремы. Для пары точек (H_2, H_3) выполняется третье условие теоремы и ($\alpha_1 = 0.00125$, $\beta_1 = 0.01004$), ($\alpha_2 = -99.3972$, $\beta_2 = -28.8104$).

Таким образом, представлен метод восстановления параметров в граничных условиях для неоднородного цилиндрического волновода, обеспечивающий достаточную точность при точности входной информации порядка 10^{-4}. При повышении точности определения координат точек дисперсионного множества точность восстановления повышалась.

Литература

1. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач.—М.: Физматлит, 2006.—384 с.
2. *Gladwell G. M. L., Movahhedy M.* Reconstruction of mass-spring system from spectral data I: Theory // Inverse problems in engineering.—1995.—Vol. 1, № 2.—P. 179–189.
3. *Ахтямов А. М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения.—М.: Физматлит, 2009.—272 с.

4. *Ахтямов А. М., Муфтахов А. В., Ахтямова А. А.* Об определении закрепления и нагруженности одного из концов стержня по собственным частотам его колебаний // Вестн. Удмуртск. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки.—2013.—Вып. 3.—С. 114–129.
5. *Аитбаева А. А., Ахтямов А. М.* Идентификация закрепленности и нагруженности одного из концов балки Эйлера — Бернулли по собственным частотам ее колебаний // Сиб. журн. индустр. математики.—2017.—Т. 20, № 1.—С. 3–10.
6. *Ватульян А. О., Васильев Л. В.* Об определении параметров упругого закрепления неоднородной балки // Экологический вестн. науч. центров ЧЭС.—2015.—Вып. 3.—С. 14–19.
7. *Morassi A., Dilena M.* On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements // Inverse Probl. Engrg.—2002.—Vol. 10, № 3.—P. 183—201.
8. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.—Киев: Наукова думка, 1981.—284 с.
9. *Шардаков И. Н., Шестаков А. П., Цветков Р. В.* Математическое моделирование волновых процессов в магистральных трубопроводах // XVII Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 18–22 февраля 2013 г.). Тез. докл.—ИМСС УрО РАН, 2013.—С. 252.
10. *Ватульян А. О., Юров В. О.* О дисперсионных соотношениях для неоднородного волновода при наличии затухания // Изв. РАН. Механика твердого тела.—2016, № 5.—С. 85–93.
11. *Абзалимов Р. Р., Ахтямов А. М.* Диагностика и виброзащита трубопроводных систем и хранилищ.—Уфимский гос. нефтяной технический ун-т, 2006.—118 с.
12. *Ватульян А. О., Юров В. О.* О свойствах дисперсионного множества для неоднородного цилиндрического волновода // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 1.—С. 50–60.
13. *Айбиндер А. Б.* Расчет магистральных и промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость. Справочное пособие.—М.: Недра, 1991.—287 с.
14. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. Изд. 2.—СПб.: БХВ-Петербург, 2011.—586 с.

Статья поступила 28 февраля 2018 г.

Ватульян Александр Ованесович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
заведующий отделом дифференциальных уравнений;

Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
заведующий кафедрой теории упругости
E-mail: vatulyan@math.rsu.ru
https://orcid.org/0000-0003-0444-4496

Васильев Леонид Викторович
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
магистрант кафедры теории упругости
E-mail: leninid@mail.ru

Юров Виктор Олегович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
младший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений;

Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
аспирант кафедры теории упругости
E-mail: vitja.jurov@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-4689-4068

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 23–37

RESTORATION OF PARAMETERS IN THE BOUNDARY CONDITIONS FOR AN INHOMOGENEOUS CYLINDRICAL WAVEGUIDE

Vatulyan A. O.[1,2], Vasil'ev L. V.[2], Yurov V. O.[1,2]
[1] Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS;
[2] Southern Federal University

Abstract. Identification of different characteristics of solid bodies according to the acoustic sounding data has been increasingly attracting the attention of researchers in recent years. In the present paper, we investigate a new inverse problem on determining two parameters (bedding values) entering into the boundary conditions for the boundary-value problem. The boundary problem describes the waves propagation in a hollow inhomogeneous cylindrical waveguide located in a medium. We have performed the solution of this problem previously, we have studied the structure of the dispersion set and obtained the several formulae. These formulae correlate with spectral parameters and bedding values. We have treated the auxiliary Cauchy problems which automatically satisfy boundary conditions on the cylinder's internal boundary. Solution of boundary problem is found in the form of a linear combination of auxiliary problems. Boundary conditions at the outer boundary are satisfied. For the existence of a nontrivial solution, it is required that the determinant of the emergent system of algebraic equations is zero. Reconstruction of bedding values have been carried out from information on two points of the dispersion set; at that, the approach to solving the inverse problem did not require the explicit representation of the dispersion set. The solution of the inverse problem does not always satisfy a priori information on the non-negativity of the bedding values. In order to obtain a unique reconstruction of the parameters, a unicity theorem is formulated. At the initial stage, the theorem allows to filter out pairs of points of the dispersion set for which there is no solution or it is not unique. Computational experiments show the prevalence of the situation when the dispersion curves can be carried out uniquely through two given points of the dispersion set. Within the framework of the work, an effective method of selecting a pair of parameters with a small error in the input data is to consider the third point of the dispersion set. It is revealed that the reconstruction method presented allows to restore the required parameters with a high enough accuracy.

Key words: cylindrical waveguide, dispersion set, reconstruction, elastic fixing.

References

1. *Yurko V. A. Vvedenie v teoriyu obratnyh spektral'nyh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems], Moscow, Fizmatlit, 2006, 384 p. (in Russian).
2. *Gladwell G. M. L., Movahhedy M.* Reconstruction of Mass-Spring System From Spectral Data I: Theory. *Inverse Problems in Engineering*, 1995, vol. 1, no. 2, pp. 179–189. DOI: 10.1080/174159795088027578.
3. *Akhtyamov A. M. Teoriya identifikacii kraevyh uslovij i eyo prilozheniya* [Theory of Identification of Boundary Conditions and its Applications], Moscow, Fizmatlit, 2009, 272 p. (in Russian).
4. *Akhtyamov A. M., Muftahov A. V., Akhtyamova A. A.* On the Determination of the Fixation and Loading of one of the Ends of a Rod According to the Natural Frequencies of its Oscillations. *Vestn. Udmurtsk. un-ta. Matem. Mekh. Komp'yut. nauki* [Herald of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computers of Science], 2013. vol. 3, pp. 114–129 (in Russian).
5. *Aitbaeva A. A., Ahtyamov A. M.* Identification of Fixedness and Loading of an End of the Euler–Bernoulli Beam by the Natural Frequencies of its Vibrations. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2017, vol. 11, no. 1, pp. 1–7. DOI: 10.1134/S199047891701001X.
6. *Vatulyan A. O., Vasilev L. V.* Determination of the Parameters of an inHomogeneous Beam Elastic Fixation. *Ekologicheskij vestnik nauchnyh centrov CHEHS* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2015, no. 3, pp. 14–20 (in Russian).

7. *Morassi A., Dilena M.* On Point Mass Identification in Rods and Beams from Minimal Frequency Measurements. *Inverse Problems in Engineering*, 2002, vol. 10, no. 3, pp. 183–201. DOI: 10.1080/10682760290010378.
8. *Grinchenko V. T., Meleshko V. V. Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugih telah* [Harmonic Oscillations and Waves in Elastic Bodies], Kiev, "Nauk. dumka", 1981, 284 p. (in Russian).
9. *Shardakov I. N., Shestakov A. P., Cvetkov R. V.* Mathematical Modeling of Wave Processes in Main Pipelines. *XVII Zimnyaya shkola po mekhanike sploshnyh sred. Perm'. 18–22 Fevralya 2013g. Tezisy dokladov* [XVII Winter School on the Mechanics of Continuous Media. Perm, February 18–22, 2013. Abstracts of Reports], IMSS Uro RAN, 2013, 252 p. (in Russian).
10. *Vatul'yan A. O., Yurov V. O.* On the Dispersion Relations for an Inhomogeneous Waveguide With Attenuation. *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, no. 5, p. 576–582. DOI: 10.3103/S0025654416050101 (10.3103/S0025654417010137).
11. *Abzalimov R. R., Akhtyamov A. M. Diagnostika i vibrozashchita truboprovodnykh sistem i khranilishch* [Diagnosis and Vibration Protection of Pipeline Systems and Storags], Ufa State Petroleum Technological University, 2006, 118 p. (in Russian).
12. *Vatul'yan A. O., Yurov V. O.* On the Properties of a Dispersion Set for an Inhomogeneous Cylindrical Waveguide, *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [Vladikavkaz Math. J.], 2018, vol. 20, no. 1, pp. 50–60 (in Russian). DOI 10.23671/VNC.2018.1.11397.
13. *Aybinder A. B. Raschet magistral'nykh i promyslovykh truboprovodov na prochnost' i ustoychivost': spravochnoe posobie* [Calculation of Main and Field Pipelines for Strength and Stability: Reference Book], Moscow, Nedra, 1991, 287 p. (in Russian).
14. *Kalitkin N. N. Chislennye metody: uchebnoe posobie* [Numerical Methods. Tutorial], SPb., BHV-SPb, 2011, 592 p. (in Russian).

Received February 28, 2018

Alexandr O. Vatulyan
Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS,
22 Markus Street, Vladikavkaz 362027, Russia
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova Street, Rostov-on-Don 344090, Russia
E-mail: `vatulyan@math.rsu.ru`
https://orcid.org/0000-0003-0444-4496

Leonid V. Vasiliev
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova Street, Rostov-on-Don 344090, Russia
E-mail: `leninid@mail.ru`

Victor O. Yurov
Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS,
22 Markus Street, Vladikavkaz 362027, Russia
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova Str., Rostov-on-Don 344090, Russia
E-mail: `vitja.jurov@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0002-4689-4068

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 38–48

УДК 517.98
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14718

О СТРУКТУРЕ БУЛЕВОЗНАЧНОГО УНИВЕРСУМА[1]

А. Е. Гутман

Анатолию Георгиевичу Кусраеву
в связи с его 65-летием

Аннотация. Уточнен логический механизм, стоящий за объявлением гипотез. В том числе, уделено внимание гипотезам и заключениям, представляющим собой бесконечные наборы формул. Приведены формальные определения булевозначной алгебраической системы и модели теории, определение системы термов булевозначной оценки истинности формул, подъема и перемешивания. Описаны логические взаимосвязи между принципами подъема, перемешивания и максимума. Показано, что перемешивание с произвольными весами может быть преобразовано к перемешиванию с постоянным весом. Введено и исследовано понятие сужения элемента булевозначной алгебраической системы. Установлено, что всякая булевозначная модель теории множеств, удовлетворяющая принципу подъема, имеет многоуровневую структуру, аналогичную кумулятивной иерархии фон Неймана.

Ключевые слова: теория множеств, булевозначная модель, универсум, кумулятивная иерархия.

1. Формализм объявления гипотез

В математических текстах часто используются «объявления гипотез» — когда на протяжении фрагмента рассуждений (определений и доказательств) предполагаются выполненными определенные условия или за какими-либо переменными закрепляется роль объектов, удовлетворяющих определенным условиям. Примером объявления гипотезы служит фраза «всюду ниже B — полная булева алгебра», с которой начинается следующий параграф данной статьи. В определенном смысле эта фраза «фиксирует» букву B и добавляет «временную» аксиому $\gamma(B)$, формализующую утверждение «B — полная булева алгебра».

В подавляющем большинстве случаев эффект, производимый объявлением гипотезы, вполне понятен на неформальном уровне, но использование бесконечных наборов формул в качестве гипотез или заключений принуждает к определенной аккуратности.

1.1. Рассматриваемая нами проблематика характерна наличием «бесконечных утверждений», представляющих собой бесконечные множества формул. Таковыми являются, например, утверждения «система X является моделью теории T» или «система X удовлетворяет принципу максимума».

[1] Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2., проект № 0314-2016-0005.

Логические связки «бесконечных утверждений» обретают смысл благодаря механизму формального вывода. Например, если хотя бы одно из утверждений Γ или Δ бесконечно, то импликация $\Gamma \Rightarrow \Delta$ сама по себе смысла не имеет, но фраза «Γ влечет Δ в теории T» поддается формализации в виде выводимости: $T, \Gamma \vdash \Delta$.

1.2. Пусть T — какая-либо теория (множество предложений) сигнатуры Σ и пусть Γ и Δ — произвольные множества формул сигнатуры Σ. (Множества Γ и Δ могут быть бесконечными и содержащиеся в них формулы могут иметь вхождения свободных переменных.) Выводимость заключения Δ из гипотезы Γ в рамках теории T записывается в виде $T, \Gamma \vdash \Delta$ и определяется посредством понятия формального вывода в исчислении предикатов: для любой формулы $\delta \in \Delta$ существует последовательность формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ такая, что $\varphi_n = \delta$ и каждая формула φ_i либо принадлежит $T \cup \Gamma$, либо получается из предшествующих формул $\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}$ с помощью классических правил вывода, за исключением правил с кванторами по свободным переменным, входящим в Γ.

1.3. Приведенный ниже факт непосредственно вытекает из теоремы о полноте.

Следующие утверждения равносильны:

(1) $T, \Gamma \vdash \Delta$;

(2) $T, \Gamma \vdash \delta$ *для всех* $\delta \in \Delta$;

(3) *для любой формулы* $\delta \in \Delta$ *существует такой конечный набор* $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$, *что* $T \vdash (\forall \bar{v})(\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n \ \Rightarrow\ \delta)$, *где* $\bar{v}$ — *перечень свободных переменных, входящих в* $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta$;

(4) *для любой модели* X *теории* T *и любого означивания* $\nu \colon V \to X$ *свободных переменных* V, *входящих в* $\Gamma \cup \Delta$, *из истинности* $X \vDash \gamma[\nu]$ *для всех* $\gamma \in \Gamma$ *вытекает истинность* $X \vDash \delta[\nu]$ *для всех* $\delta \in \Delta$.

1.4. Механизм объявления конечной гипотезы $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ поддается более простой формализации. В этом случае с помощью замены свободных переменных формулы $\gamma := \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n$ на константы можно обойтись формальными выводами, задействующими лишь предложения. Формализм, стоящий за «фиксацией» объектов $v_1, \dots, v_m$, удовлетворяющих условию $\gamma(v_1, \dots, v_m)$, раскрывается следующим фактом, легко проверяемым с помощью теоремы о полноте.

Пусть $\bar{v} := v_1, \dots, v_m$ — *перечень свободных переменных, входящих в формулу* $\gamma(\bar{v})$. *Рассмотрим сигнатуру* Σ^*, *полученную из* Σ *добавлением констант* $\bar{c} := c_1, \dots, c_m$, *и теорию* T^* *сигнатуры* Σ^*, *полученную из* T *добавлением аксиомы* $\gamma(\bar{c})$.

(1) *Для любой формулы* $\delta(\bar{v})$ *сигнатуры* Σ

$$T^* \vdash \delta(\bar{c}) \ \Leftrightarrow\ T, \gamma(\bar{v}) \vdash \delta(\bar{v}) \ \Leftrightarrow\ T \vdash (\forall \bar{v})\big(\gamma(\bar{v}) \Rightarrow \delta(\bar{v})\big).$$

(2) *Если* $T \vdash (\exists \bar{v})\, \gamma(\bar{v})$, *то* T^* *консервативно расширяет* T, *т. е. для любого предложения* φ *сигнатуры* Σ

$$T^* \vdash \varphi \ \Leftrightarrow\ T \vdash \varphi.$$

1.5. Например, в рамках гипотезы «B — полная булева алгебра» выражение

$$\mathrm{ZFC} \vdash (\mathbb{V}^{(B)} \vDash \mathrm{ZFC}),$$

символизирующее доказуемость в ZFC бесконечного утверждения «$\mathbb{V}^{(B)}$ является моделью ZFC», формально эквивалентно выводимости

$$\mathrm{ZFC},\ B \text{ — полная булева алгебра} \vdash (\mathbb{V}^{(B)} \vDash \mathrm{ZFC}),$$

которая, в свою очередь, означает что для всякого предложения φ, являющегося теоремой ZFC, выполняется любое из следующих трех равносильных условий:

(1) ZFC, B — полная булева алгебра $\vdash$ $(\mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi)$;

(2) ZFC $\vdash (\forall\, B)(B$ — полная булева алгебра $\Rightarrow\ \mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi)$;

(3) ZFC* $\vdash (\mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi)$,

где ZFC* — расширение ZFC константой B и аксиомой «B — полная булева алгебра».

2. Булевозначные алгебраические системы

Всюду ниже B — полная булева алгебра.

2.1. Пусть X, $[=]_X$, $[\in]_X$ — определяемые в ZFC термы или классы. Говорят, что $(X,[=]_X,[\in]_X)$ является *булевозначной* (точнее, *B-значной*) *алгебраической системой сигнатуры* $\Sigma := \{=,\in\}$ или, более коротко, *B-системой*, имея в виду конъюнкцию следующих формул:

$$
\begin{aligned}
&X \neq \varnothing,\ \ [=]_X\colon X^2 \to B,\ \ [\in]_X\colon X^2 \to B,\\
&[=]_X(x,x) = 1_B,\\
&[=]_X(x,y) = [=]_X(y,x),\\
&[=]_X(x,y) \wedge_B [=]_X(y,z) \leqslant_B [=]_X(x,z),\\
&[\in]_X(x,y) \wedge_B [=]_X(y,z) \leqslant_B [\in]_X(x,z),\\
&[\in]_X(x,y) \wedge_B [=]_X(x,z) \leqslant_B [\in]_X(z,y)
\end{aligned}
$$

для всех $x,y,z \in X$. Вместо $(X,[=]_X,[\in]_X)$ пишут просто X.

2.2. Предположим, что X — B-система. Для каждой формулы $\varphi(\bar{x})$ сигнатуры Σ, где $\bar{x} = x_1,\dots,x_n$ — полный список свободных переменных φ, введем n-местный функциональный символ $[\varphi(\bar{x})]_X$, условимся записывать терм $[\varphi(\bar{x})]_X(\bar{x})$ в виде $[\varphi]_X$ и расширим теорию определениями

$$[x=y]_X \ = \ [=]_X(x,y), \quad [x\in y]_X \ = \ [\in]_X(x,y),$$

$$[\varphi\vee\psi]_X \ = \ [\varphi]_X \vee_B [\psi]_X, \quad [\varphi\wedge\psi]_X \ = \ [\varphi]_X \wedge_B [\psi]_X, \quad [\neg\varphi]_X \ = \ \neg_B\,[\varphi]_X,$$

$$[(\exists\, x)\,\varphi]_X \ = \ \sup\nolimits_B\bigl\{[\varphi]_X : x \in X\bigr\}, \quad [(\forall\, x)\,\varphi]_X \ = \ \inf\nolimits_B\bigl\{[\varphi]_X : x \in X\bigr\},$$

где φ и ψ — формулы сигнатуры Σ, $\neg_B$ — операция дополнения в булевой алгебре B.

Формально говоря, приведенные выше формулы корректно определяют функциональные символы $[\varphi(\bar{x})]_X$ в рамках теории, полученной из ZFC добавлением гипотез «B — полная булева алгебра» и «X — B-система». Определения этих символов, в свою очередь, расширяют сигнатуру и аксиоматику, приводя к консервативному расширению ZFC* исходной теории. (Соответствующий формализм более подробно рассмотрен в [1].) При этом для любой формулы $\varphi(\bar{x})$ сигнатуры Σ в ZFC* выводима формула $(\forall\, \bar{x} \in X)\ [\varphi(\bar{x})]_X \in B$. В дальнейшем мы будем писать ZFC вместо ZFC*, неявно присоединяя к аксиоматике все сформулированные гипотезы и определения.

2.3. Говорят, что формула $\varphi(\bar{x})$ сигнатуры Σ *истинна в* X, и пишут $X \vDash \varphi(\bar{x})$, если $[\varphi(\bar{x})]_X = 1_B$. (При этом подразумевается включение $\bar{x} \in X$.)

Систему X называют *булевозначной* (*B-значной*) *моделью множества* Φ предложений сигнатуры Σ, и пишут $X \vDash \Phi$, если $X \vDash \varphi$ для всех $\varphi \in \Phi$. Под *булевозначной* (*B-значной*) *моделью теории* понимается модель множества всех теорем этой теории.

Отметим, что в случае бесконечного множества Φ условие $X \vDash \Phi$ является бесконечным утверждением (см. § 1), представляющим собой набор формул $\{X \vDash \varphi : \varphi \in \Phi\}$.

Как известно, в булевозначной системе истинны все тавтологии, а правила вывода сохраняют истинность. Точнее говоря, в предположении, что X является B-системой, справедливы следующие факты:

(1) $\mathrm{ZFC} \vdash (X \vDash \Phi)$, *где* Φ *— совокупность всех тавтологий сигнатуры* Σ;

(2) *если множества предложений* Γ *и* Δ *сигнатуры* Σ *таковы, что* $\mathrm{ZFC} \vdash (X \vDash \Gamma)$ *и* $\Gamma \vdash \Delta$, *то* $\mathrm{ZFC} \vdash (X \vDash \Delta)$.

Таким образом, в записи $X \vDash \mathrm{ZFC}$ под ZFC можно понимать как совокупность специальных аксиом ZFC, так и совокупность всех теорем ZFC.

2.4. *Пусть* X *—* B*-система и пусть* $\varphi(x, \bar{y})$ *— произвольная формула сигнатуры* Σ, *где* $\bar{y} = y_1, \ldots, y_n$. *Тогда в* ZFC *доказуемо, что для любых* $x_1, x_2, \bar{y} \in X$ *и* $b \in B$

$$[x_1 = x_2] \geqslant b \;\Rightarrow\; [\varphi(x_1, \bar{y})] \wedge b \,=\, [\varphi(x_2, \bar{y})] \wedge b.$$

$\lhd$ Согласно 2.3 (1) справедливо соотношение

$$\big[\varphi(x, \bar{y}) \wedge (x = x_i) \Leftrightarrow \varphi(x_i, \bar{y}) \wedge (x = x_i)\big] = 1_B.$$

Следовательно,

$$[\varphi(x_1, \bar{y})] \wedge [x_1 = x_2] \,=\, [\varphi(x_2, \bar{y})] \wedge [x_1 = x_2],$$

а значит, в случае $[x_1 = x_2] \geqslant b$ мы имеем

$$[\varphi(x_1, \bar{y})] \wedge b \,=\, [\varphi(x_1, \bar{y})] \wedge [x_1 = x_2] \wedge b \,=\, [\varphi(x_2, \bar{y})] \wedge [x_1 = x_2] \wedge b \,=\, [\varphi(x_2, \bar{y})] \wedge b. \rhd$$

2.5. В случае $\mathrm{ZFC} \vdash (X \vDash \mathrm{ZFC})$ записи $[\varphi(\bar{x})]_X$ и $X \vDash \varphi(\bar{x})$ обретают смысл не только для формул φ сигнатуры Σ, но и для формул, содержащих вхождения любых определяемых в ZFC предикатных и функциональных символов. Если φ — такая формула, то под $[\varphi(\bar{x})]_X$ понимается $[\psi(\bar{x})]_X$, где ψ — результат *элиминации* определяемых символов, т. е. такая формула ψ сигнатуры Σ, что $\mathrm{ZFC} \vdash (\varphi \Leftrightarrow \psi)$. В частности, рассматривая булевозначную модель X теории ZFC, мы имеем возможность употреблять такие термы и формулы, как $[x \cap y = \varnothing]_X$ или $X \vDash (f : x \to y)$.

Кроме того, в конструкциях вида $[\cdots]_X$ и $X \vDash (\cdots)$ допускается неформальное употребление «внешних» термов, определяемых в ZFC. Например, в контексте $f : A \to X$ запись $[f(a_1) = f(a_2)]_X = b$ служит сокращением формулы

$$(\exists\, x_1, x_2)\big(x_1 = f(a_1) \,\wedge\, x_2 = f(a_2) \,\wedge\, [x_1 = x_2]_X = b\big).$$

2.6. Система X называется *отделимой*, если

$$(\forall\, x, y \in X)\big(\, [=]_X(x, y) = 1_B \;\Rightarrow\; x = y\,\big).$$

В случае 2-системы, где $2 := \{0, 1\}$ — простейшая булева алгебра, отделимость означает стандартность интерпретации равенства: $[=]_X(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$.

3. Принципы подъема, перемешивания и максимума

Всюду ниже B — полная булева алгебра, X — отделимая B-значная алгебраическая система сигнатуры $\Sigma := \{=, \in\}$, причем в X истинна аксиома экстенсиональности:

$$X \vDash (\forall\, x, y)\big((\forall\, z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \;\Rightarrow\; x = y\big).$$

Сразу отметим, что элементы x такой системы X однозначно определяются значениями $[z \in x]_X$ $(z \in X)$: если $x, y \in X$ и $[z \in x]_X = [z \in y]_X$ для всех $z \in X$, то $x = y$.

Чтобы записи были менее громоздкими, условимся опускать индексы B и X в символах $\sup_B$, $\wedge_B$, $[\dots]_X$, asc_X, $\uparrow_X$, mix_X и т. п.

3.1. Пусть C — подмножество $B \times X$. Элемент $x \in X$ называют *подъемом соответствия* C и обозначают символом $\mathrm{asc}\, C$, если

$$[z \in x] \;=\; \sup_{(b,y) \in C} \big(b \wedge [z = y]\big) \quad \text{для всех } \; z \in X.$$

В случае соответствия, заданного парой семейств $(b_i)_{i \in I} \subset B$, $(x_i)_{i \in I} \subset X$, вместо $\mathrm{asc}\{(b_i, x_i) : i \in I\}$ используется более компактная запись $\operatorname*{asc}_{i \in I} b_i x_i$. Таким образом, выражение $x = \operatorname*{asc}_{i \in I} b_i x_i$ означает

$$[z \in x] \;=\; \sup_{i \in I} \big(b_i \wedge [z = x_i]\big) \quad \text{для всех } \; z \in X.$$

Для $b \in B$ и $Y \subset X$ подъем $\mathrm{asc}(\{b\} \times Y)$ называется *подъемом множества* Y *с весом* b и обозначается символом $bY{\uparrow}$. Элемент $x = bY{\uparrow}$ определяется соотношениями

$$[z \in x] \;=\; b \wedge \sup_{y \in Y} [z = y] \quad \text{для всех } \; z \in X.$$

В случае $b = 1_B$ подъем $bY{\uparrow}$ обозначают $Y{\uparrow}$ и называют *подъемом множества* Y.

3.2. Говорят, что X удовлетворяет *принципу подъема*, если

$$(\forall\, C \subset B \times X)(\exists\, x \in X)(x = \mathrm{asc}\, C),$$
$$(\forall\, x \in X)(\exists\, C \subset B \times X)(x = \mathrm{asc}\, C).$$

3.3. Пусть Y — подмножество или подкласс X. Символом $\mathrm{Prt}(B, Y)$ условимся обозначать класс всех функций $P \colon D \to Y$, определенных на разбиениях единицы булевой алгебры B, т. е. на таких подмножествах $D \subset B$, что

$$\sup D = 1_B, \quad (\forall\, d_1, d_2 \in D)(d_1 \neq d_2 \;\Rightarrow\; d_1 \wedge d_2 = 0_B).$$

Элемент $x \in X$ называется *перемешиванием* функции $P \in \mathrm{Prt}(B, X)$ и обозначается символом $\mathrm{mix}\, P$, если

$$[x = P(d)] \geqslant d \quad \text{для всех } \; d \in D.$$

Иногда под разбиением единицы удобно понимать семейство $(d_i)_{i \in I} \subset B$ такое, что

$$\sup_{i \in I} d_i = 1_B, \quad (\forall\, i, j \in I)(i \neq j \;\Rightarrow\; d_i \wedge d_j = 0_B).$$

Для разбиения единицы $(d_i)_{i \in I} \subset B$ и семейства $(x_i)_{i \in I} \subset X$ символом $\operatorname*{mix}_{i \in I} d_i x_i$ обозначается элемент $x \in X$, удовлетворяющий условию

$$[x = x_i] \geqslant d_i \quad \text{для всех } \; i \in I.$$

Как легко видеть, $\operatorname*{mix}_{i \in I} d_i x_i = \mathrm{mix}\{(d_i, x_i) : i \in I,\, d_i \neq 0\}$.

Совокупность перемешиваний всевозможных функций $P \in \mathrm{Prt}(B, Y)$ называется *циклической оболочкой* подмножества $Y \subset X$ и обозначается символом $\mathrm{cyc}\,Y$.

3.4. Говорят, что X удовлетворяет *принципу перемешивания*, если

$$\big(\forall\, P \in \mathrm{Prt}(B, X)\big)(\exists\, x \in X)(x = \mathrm{mix}\, P).$$

3.5. Пусть $\varphi(x, \bar{y})$ — формула сигнатуры Σ, все свободные переменные которой содержатся в списке $x, \bar{y}$, где $\bar{y} = y_1, \dots, y_n$. Система X удовлетворяет *принципу максимума для формулы* φ, если

$$(\forall\, \bar{y} \in X)(\exists\, x_0 \in X)\ [(\exists\, x)\varphi(x, \bar{y})] = [\varphi(x_0, \bar{y})].$$

Как легко видеть, если X удовлетворяет принципу максимума для φ, то

$$(\forall\, \bar{y} \in X)\big(X \vDash (\exists\, x)\varphi(x, \bar{y}) \ \Rightarrow\ (\exists\, x \in X)\, X \vDash \varphi(x, \bar{y})\big).$$

Говорят, что X удовлетворяет *принципу максимума*, если X удовлетворяет принципу максимума для любой формулы сигнатуры Σ. (Здесь мы имеем дело с очередным «бесконечным утверждением», см. § 1.)

3.6. Согласно [2, 1.10, 1.11] (см. также [3, 6.1.7, 6.1.8]) в ZFC доказуемы следующие соотношения между сформулированными выше принципами.

Пусть X — произвольная B-система сигнатуры Σ.

(1) *Если система X удовлетворяет принципу подъема и в ней истинна аксиома экстенсиональности, то X удовлетворяет принципу перемешивания.*

(2) *Если X удовлетворяет принципу подъема и принципу максимума для формулы $x \in y$, то X удовлетворяет принципу перемешивания.*

(3) *Пусть X удовлетворяет принципу перемешивания. Тогда X удовлетворяет принципу максимума.*

3.7. Лемма. *Если B-система X удовлетворяет принципу перемешивания, то для любых $(b_i)_{i \in I} \subset B$ и $(x_i)_{i \in I} \subset X$ найдутся $b \in B$ и $(y_i)_{i \in I} \subset \mathrm{cyc}\{x_i : i \in I\}$ такие, что*

$$\sup_{i \in I} \big(b_i \wedge [z = x_i]\big) \ =\ b \wedge \sup_{i \in I}\, [z = y_i] \quad \textit{для всех}\ \ z \in X.$$

$\lhd$ В случае $I = \varnothing$ утверждение леммы очевидно. Пусть $I \neq \varnothing$.

Положим $b = \sup_{i \in I} b_i$, $I^* = I \cup \{I\}$, $d_I = \neg b$ и рассмотрим произвольный элемент $x_I \in \{x_i : i \in I\}$. Согласно принципу исчерпывания (см. [3, 2.1.10 (1)]) существует такое разбиение единицы $(d_i)_{i \in I^*} \subset B$, что $d_i \leqslant b_i$ для всех $i \in I^*$. Заметим, что $\sup_{i \in I} d_i = b$. Благодаря принципу перемешивания в X имеется элемент $x = \mathrm{mix}_{i \in I^*} d_i x_i$, характеризующийся соотношениями

$$[x = x_i] \geqslant d_i \quad \text{для всех}\ \ i \in I^*. \tag{1}$$

По той же причине для каждого $i \in I$ в X имеется элемент $y_i = \mathrm{mix}\{(b_i, x_i), (\neg b_i, x)\}$, удовлетворяющий неравенствам

$$[y_i = x_i] \geqslant b_i, \quad [y_i = x] \geqslant \neg b_i. \tag{2}$$

Покажем, что семейство $(y_i)_{i \in I}$ является искомым. Очевидно, $(y_i)_{i \in I} \subset \mathrm{cyc}\{x_i : i \in I\}$. Далее, для всякого элемента $z \in X$ с учетом (2) и 2.4 мы имеем

$$\sup_{i \in I} \big(b_i \wedge [z = x_i]\big) \ =\ \sup_{i \in I} \big(b_i \wedge [z = y_i]\big) \ \leqslant\ b \wedge \sup_{i \in I}\, [z = y_i].$$

С другой стороны, благодаря (1) и 2.4 справедливы соотношения

$$b \wedge [z = x] \;=\; \sup_{i\in I} \big(d_i \wedge [z = x]\big) \;=\; \sup_{i\in I} \big(d_i \wedge [z = x_i]\big) \;\leqslant\; \sup_{i\in I} \big(b_i \wedge [z = x_i]\big),$$

откуда с учетом (2) и 2.4 следует, что для всех $i \in I$

$$\begin{aligned} b \wedge [z = y_i] \;&=\; \big(b_i \wedge [z = y_i]\big) \vee \big(b \wedge \neg b_i \wedge [z = y_i]\big) \\ &=\; \big(b_i \wedge [z = x_i]\big) \vee \big(b \wedge \neg b_i \wedge [z = x]\big) \\ &\leqslant\; \big(b_i \wedge [z = x_i]\big) \vee \sup_{j\in I} \big(b_i \wedge [z = x_i]\big) \;=\; \sup_{i\in I} \big(b_i \wedge [z = x_i]\big), \end{aligned}$$

и поэтому $b \wedge \sup_{i\in I} [z = y_i] \;=\; \sup_{i\in I} \big(b \wedge [z = y_i]\big) \;\leqslant\; \sup_{i\in I} \big(b_i \wedge [z = x_i]\big)$. $\rhd$

3.8. Следствие. *Пусть X — отделимая B-система, в которой истинна аксиома экстенсиональности.*

(1) *Если X удовлетворяет принципу перемешивания, то для любого соответствия $C \subset B \times X$ найдутся $b \in B$ и $Y \subset \operatorname{cyc} C[B]$ такие, что в X существование $\operatorname{asc} C$ равносильно существованию $bY{\uparrow}$, причем $\operatorname{asc} C = bY{\uparrow}$.*

(2) *Если X удовлетворяет принципу подъема, то для любого $x \in X$ существуют $b \in B$ и $Y \subset X$ такие, что $x = bY{\uparrow}$. При этом $b = [x \neq \varnothing]$ и $[y \in x] = b$ для всех $y \in Y$.*

4. Иерархическая структура булевозначной системы

Всюду ниже B — полная булева алгебра, X — отделимая B-значная алгебраическая система сигнатуры $\Sigma := \{=, \in\}$, причем система X удовлетворяет принципу подъема и в ней истинна аксиома экстенсиональности. Отметим, что в этом случае X удовлетворяет также принципам перемешивания и максимума (см. 3.6).

4.1. Обозначим символом $\varnothing_X$ подъем $\operatorname{asc}_X \varnothing$ пустого соответствия $\varnothing \subset B \times X$. Элемент $\varnothing_X \in X$ играет внутри B-системы X роль пустого множества, т. е. $X \vDash (\varnothing_X = \varnothing)$ или, что то же самое, $X \vDash (\forall\, y)\, \neg(y \in \varnothing_X)$.

Для $x \in X$ и $b \in B$ перемешивание $\operatorname{mix}\{(b, x), (\neg b, \varnothing_X)\}$ условимся обозначать символом $x|_b$ и называть *сужением x на b*:

$$[x|_b = x] \geqslant b, \quad [x|_b = \varnothing] \geqslant \neg b.$$

4.2. Лемма. *Для любых $a, b, b_i \in B$, $x, x_i, y, y_i \in X$, $Y \subset X$ справедливы соотношения:*

(1) $[\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)] \wedge b = [\varphi(x_1|_b, \dots, x_n|_b, y_1, \dots, y_m)] \wedge b$, *где φ — произвольная формула сигнатуры Σ;*

(2) $[y \in x|_b] = [y \in x] \wedge b$;

(3) $\big(x|_a\big)\big|_b = x|_{a\wedge b}$;

(4) $x|_b = y|_b \Leftrightarrow [x = y] \geqslant b$;

(5) $\Big(\operatorname{asc}_{i\in I} b_i x_i\Big)\Big|_b = \operatorname{asc}_{i\in I} (b_i \wedge b) x_i = \operatorname{asc}_{i\in I} (b_i \wedge b) x_i|_b$;

(6) $(aY{\uparrow})|_b = (a \wedge b)Y{\uparrow}$.

$\lhd$ Утверждение (1) следует из 2.4 благодаря неравенствам $[x_i = x_i|_b] \geqslant b$.

Равенство (2) вытекает из следующих оценок:

$$\begin{aligned} &[y \in x|_b] \geqslant [y \in x] \wedge [x = x|_b] \geqslant [y \in x] \wedge b; \\ &[y \in x|_b] \leqslant [x|_b \neq \varnothing] = \neg[x|_b = \varnothing] \leqslant \neg\neg b = b; \\ &[y \in x|_b] = [y \in x|_b] \wedge b \leqslant [y \in x|_b] \wedge [x|_b = x] \leqslant [y \in x]. \end{aligned}$$

(3) Из (2) следует, что $\big[y\in \big(x|_a\big)\big|_b\big] = [y\in x|_a]\wedge b = [y\in x]\wedge a\wedge b = [y\in x|_{a\wedge b}]$.

(4) Если $x|_b = y|_b$, то благодаря (1) мы имеем $[x=y]\wedge b = [x|_b=y|_b]\wedge b = b$, откуда $[x=y]\geqslant b$. Наоборот, из $[x=y]\geqslant b$ следует

$$[x|_b=y|_b]\geqslant [x|_b=x]\wedge[x=y]\wedge[y=y|_b]\geqslant b;$$
$$[x|_b=y|_b]\geqslant [x|_b=\varnothing]\wedge[y|_b=\varnothing]\geqslant \neg b,$$

а значит, $[x|_b=y|_b]=1_B$ и тем самым $x|_b=y|_b$ благодаря отделимости.

(5) С учетом (1) и (2) для всех $y\in X$ мы имеем

$$\Big[y\in\Big(\operatorname*{asc}_{i\in I} b_i x_i\Big)\Big|_b\Big] \;=\; \Big[y\in \operatorname*{asc}_{i\in I} b_i x_i\Big]\wedge b \;=\; \sup_{i\in I}\,[y=x_i]\wedge b_i\wedge b$$
$$=\Big[y\in \operatorname*{asc}_{i\in I}(b_i\wedge b)x_i\Big] \;=\; \sup_{i\in I}\,[y=x_i|_b]\wedge b_i\wedge b \;=\; \Big[y\in \operatorname*{asc}_{i\in I}\,(b_i\wedge b)x_i|_b\Big].$$

Равенство (6) является частным случаем (5). $\rhd$

4.3. С помощью трансфинитной рекурсии (см. [3, 1.5.9, 1.6.1]) определим класс-функцию, сопоставляющую каждому ординату $\alpha\in\mathrm{On}$ подмножество $X_\alpha\subset X$, полагая

$$X_\alpha=\big\{\operatorname{asc}C\,:\,C\subset B\times \textstyle\bigcup_{\beta<\alpha}X_\beta\big\}.$$

Как легко видеть, $X_\alpha\subset X_\beta$ при $\alpha\leqslant\beta$, $X_0=\{\varnothing_X\}$, $X_{\alpha+1}=\{\operatorname{asc}C\,:\,C\subset B\times X_\alpha\}$ для всех $\alpha\in\mathrm{On}$.

4.4. Обозначим класс $\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}}X_\alpha$ символом X_∞.

Лемма. *Элемент $x\in X$ принадлежит X_∞ тогда и только тогда, когда $x=\operatorname{asc}C$ для некоторого $C\subset B\times X_\infty$.*

$\lhd$ Необходимость обеспечивается определением класса X_∞. Поясним достаточность. Если $x=\operatorname{asc}C$, где $C\subset B\times X_\infty$, то выбирая для каждого элемента $y\in Y:=\operatorname{im}C$ ординал $\alpha(y)$, удовлетворяющий условию $y\in X_{\alpha(y)}$, заключаем, что $Y\subset\bigcup_{y\in Y}X_{\alpha(y)}\subset X_\alpha$, где $\alpha=\sup_{y\in Y}\alpha(y)$, а значит, $C\subset B\times X_\alpha$ и тем самым $x\in X_{\alpha+1}\subset X_\infty$. $\rhd$

4.5. Определим класс-функцию ω из X в B, полагая

$$\omega(x)=\sup\{b\in B: x|_b\in X_\infty\},\quad x\in X.$$

Лемма. *Для любых $b\in B$, $x\in X$ имеет место эквивалентность*

$$x|_b\in X_\infty \;\;\Leftrightarrow\;\; b\leqslant\omega(x).$$

$\lhd$ Рассмотрим произвольный элемент $x\in X$ и положим $\Omega(x)=\{b\in B:\,x|_b\in X_\infty\}$.

Покажем, что множество $\Omega(x)$ насыщено вниз: если $a\in\Omega(x)$ и $b\leqslant a$, то $b\in\Omega(x)$. Действительно, пусть $a\in\Omega(x)$, т. е. $x|_a\in X_\infty$. Согласно 4.4 справедливо представление $x|_a=\operatorname{asc}C$ для некоторого $C\subset B\times X_\infty$. Тогда в случае $b\leqslant a$ с учетом 4.2 (3),(5) и 4.4 мы имеем

$$x|_b=x|_{a\wedge b}=\big(x|_a\big)\big|_b=(\operatorname{asc}C)|_b=\operatorname{asc}C_b,$$

где $C_b=\{(c\wedge b,y):(c,y)\in C\}\subset B\times X_\infty$, а значит, $x|_b\in X_\infty$.

Остается доказать, что $\omega(x)\in\Omega(x)$, т. е. $x|_{\omega(x)}\in X_\infty$. Для всякого $b\in\Omega(x)$ из включения $x|_b\in X_\infty$ с учетом 4.4 следует, что $x|_b=\operatorname{asc}C_b$ для некоторого $C_b\subset B\times X_\infty$. Положим $C=\bigcup_{b\in\Omega(x)}C_b$. Ясно, что $C\subset B\times X_\infty$, а значит, в силу 4.4 для обоснования включения $x|_{\omega(x)} \in X_\infty$ достаточно показать, что $\operatorname{asc} C = x|_{\omega(x)}$. Действительно, для всех $z \in X$ с учетом 4.2 (2) мы имеем

$$[z \in \operatorname{asc} C] \;=\; \sup_{(a,y)\in C} (a \wedge [z = y]) \;=\; \sup_{b\in\Omega(x)} \sup_{(a,y)\in C_b} (a \wedge [z = y]) \;=\; \sup_{b\in\Omega(x)} [z \in \operatorname{asc} C_b]$$
$$=\; \sup_{b\in\Omega(x)} [z \in x|_b] \;=\; \sup_{b\in\Omega(x)} ([z \in x] \wedge b) \;=\; [z \in x] \wedge \sup_{b\in\Omega(x)} b \;=\; [z \in x] \wedge \omega(x) \;=\; [z \in x|_{\omega(x)}],$$

откуда $\operatorname{asc} C = x|_{\omega(x)}$ благодаря отделимости системы X и истинности в ней аксиомы экстенсиональности. $\rhd$

4.6. Лемма. *Для любого $x \in X$ существует $z \in X$ такой, что*

$$[z \in x] \geqslant \neg\omega(x), \quad \neg\omega(z) \geqslant \neg\omega(x).$$

$\lhd$ Рассмотрим произвольный элемент $x \in X$. Согласно 3.8 (2) найдутся $b \in B$ и $Y \subset X$ такие, что $x = bY{\uparrow}$, причем $b = [x \neq \varnothing]$ и $[y \in x] = b$ для всех $y \in Y$.

Положим $c = \inf_{y\in Y} \omega(y)$. В силу 4.5 для всех $y \in Y$ справедливо включение $y|_c \in X_\infty$. Кроме того, из 4.2 (5) следует, что $x|_c = \operatorname{asc}_{y\in Y}(b \wedge c)y|_c$, откуда $x|_c \in X_\infty$ согласно 4.4, а значит, $c \leqslant \omega(x)$. Таким образом, $\sup_{y\in Y} \neg\omega(y) \geqslant \neg\omega(x)$.

По принципу исчерпывания в булевой алгебре B существует антицепь $(d_y)_{y\in Y}$ такая, что $\sup_{y\in Y} d_y \geqslant \neg\omega(x)$ и $d_y \leqslant \neg\omega(y)$ для всех $y \in Y$. Покажем, что $z := \operatorname{mix}_{y\in Y} d_y y$ является искомым элементом X, т. е. $[z \in x] \geqslant \neg\omega(x)$ и $\neg\omega(z) \geqslant \neg\omega(x)$.

Для всех $y \in Y$ мы имеем $[z = y] \geqslant d_y$ и $[y \in x] = [x \neq \varnothing] \geqslant \neg\omega(x)$, откуда с учетом 2.4 следует, что

$$[z \in x] \wedge d_y \;=\; [y \in x] \wedge d_y \;\geqslant\; \neg\omega(x) \wedge d_y.$$

Взяв супремум по $y \in Y$, получаем $[z \in x] \geqslant \neg\omega(x)$.

Для доказательства неравенства $\neg\omega(z) \geqslant \neg\omega(x)$ положим $a = \omega(z) \wedge \neg\omega(x)$ и допустим вопреки доказываемому, что $a \neq 0_B$. Поскольку $0_B \neq a \leqslant \neg\omega(x) \leqslant \sup_{y\in Y} d_y$, найдется такой элемент $y \in Y$, что $d_y \wedge a \neq 0_B$. Согласно 4.5 неравенство $d_y \wedge a \leqslant \omega(z)$ обеспечивает включение $z|_{d_y\wedge a} \in X_\infty$. С другой стороны, из $0_B \neq d_y \wedge a \leqslant \neg\omega(y)$ следует, что неравенство $d_y \wedge a \leqslant \omega(y)$ не имеет места, а значит, $y|_{d_y\wedge a} \notin X_\infty$. Для получения противоречия остается заметить, что в силу 4.2 (4) из $[z = y] \geqslant d_y$ вытекает равенство $z|_{d_y\wedge a} = y|_{d_y\wedge a}$. $\rhd$

Отделимую B-систему называют *булевозначным* (*B-значным*) *универсумом* (см. [4]), если она удовлетворяет принципу подъема и в ней истинны аксиома экстенсиональности и аксиома регулярности (фундирования):

$$(\forall\, x)\big((\exists\, y)(y \in x) \;\Rightarrow\; (\exists\, y \in x)(\forall\, z)\neg(z \in x \wedge z \in y)\big)$$

или, что то же самое, $(\forall\, x)\big(x \neq \varnothing \;\Rightarrow\; (\exists\, y \in x)(y \cap x = \varnothing)\big)$.

Как известно (см. [3, 4]), для любой полной булевой алгебры B существует B-значный универсум. Точнее, имеются такие определяемые с параметром B классы $\mathbb{V}^{(B)}$, $[\![=]\!]$ и $[\![\in]\!]$, что

$$\mathrm{ZFC} \vdash (\forall\, B)\big(B \text{ — полная булева алгебра} \;\Rightarrow\; (\mathbb{V}^{(B)}, [\![=]\!], [\![\in]\!]) \text{ — } B\text{-значный универсум}\big).$$

Более того, классический B-значный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ оказывается моделью ZFC:

$$\mathrm{ZFC},\ B \text{ — полная булева алгебра} \;\vdash\; (\mathbb{V}^{(B)} \vDash \mathrm{ZFC}).$$

4.7. Теорема. *Если X — булевозначный универсум, то $X = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} X_\alpha$.*

$\lhd$ Рассмотрим B-значный универсум X и предположим вопреки доказываемому, что существует элемент $y_1 \in X$, не принадлежащий X_∞. Положим $b = \neg\omega(y_1)$. Из 4.5 следует, что $b \neq 0_B$. Согласно 4.6 имеется элемент $y_2 \in X$, удовлетворяющий неравенствам $[y_2 \in y_1] \geqslant b$ и $\neg\omega(y_2) \geqslant b$. «Итерируя» эти рассуждения (а строго говоря, применяя рекурсию и аксиому выбора), получаем последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов X такую, что $[y_{n+1} \in y_n] \geqslant b$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим подъем $x := \{y_n : n \in \mathbb{N}\}{\uparrow}$. Благодаря истинности в X аксиомы регулярности из $[x \neq \varnothing] = 1_B$ следует $[(\exists\, y \in x)(y \cap x = \varnothing)] = 1_B$, а значит, по принципу максимума существует элемент $y \in X$, удовлетворяющий равенствам $[y \in x] = [y \cap x = \varnothing] = 1_B$.

Поскольку $\sup_{n\in\mathbb{N}}[y = y_n] = [y \in x] = 1_B$, согласно принципу исчерпывания в булевой алгебре B найдется разбиение единицы $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такое, что $d_n \leqslant [y = y_n]$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. $y = \operatorname{mix}_{n\in\mathbb{N}} d_n y_n$. Положим $z = \operatorname{mix}_{n\in\mathbb{N}} d_n y_{n+1}$. Тогда с учетом 2.4 мы имеем

$$[z \in y] = \sup_{n\in\mathbb{N}} d_n \wedge [z \in y] = \sup_{n\in\mathbb{N}} d_n \wedge [y_{n+1} \in y_n] \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} d_n \wedge b = b$$
$$[z \in x] = \sup_{n\in\mathbb{N}} d_n \wedge [z \in x] = \sup_{n\in\mathbb{N}} d_n \wedge [y_{n+1} \in x] = \sup_{n\in\mathbb{N}} d_n = 1_B \geqslant b,$$

откуда $[y \cap x \neq \varnothing] \geqslant [z \in y \cap x] \geqslant b > 0_B$, что противоречит равенству $[y \cap x = \varnothing] = 1_B$. $\rhd$

Литература

1. *Гутман А. Е.* Пример использования Δ_1-термов в булевозначном анализе // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, вып. 1.—С. 47–63. DOI: 10.23671/VNC.2012.14.10953.
2. *Гутман А. Е., Лосенков Г. А.* Функциональное представление булевозначного универсума // Мат. тр.—1998.—Т. 1, № 1.—С. 54–77.
3. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.
4. *Solovay R. M., Tennenbaum S.* Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Annals of Math.—1971.—Vol. 94, № 2.—P. 201–245. DOI: 10.2307/1970860.

Статья поступила 6 марта 2018 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
заведующий лабораторией функционального анализа;

Новосибирский государственный университет
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1
профессор кафедры математического анализа
E-mail: gutman@math.nsc.ru
https://orcid.org/0000-0003-2030-7459

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 38–48

ON THE STRUCTURE OF THE BOOLEAN-VALUED UNIVERSE

Gutman A. E.[1,2]
[1] Sobolev Institute of Mathematics; [2] Novosibirsk State University

Abstract. The logical machinery is clarified which justifies declaration of hypotheses. In particular, attention is paid to hypotheses and conclusions constituted by infinitely many formulas. The formal definitions are presented for a Boolean-valued algebraic system and model of a theory, for the system of terms of the Boolean-valued truth value of formulas, for ascent and mixing. Logical interrelations are described between the ascent, mixing, and maximum principles. It is shown that every mixing with arbitrary weights can be transformed into a mixing with constant weight. The notion of restriction of an element of a Boolean-valued algebraic system is introduced and studied. It is proven that every Boolean-valued model of Set theory which meets the ascent principle has some multilevel structure analogous to von Neumann's cumulative hierarchy.

Key words: set theory, Boolean-valued model, universe, cumulative hierarchy.

References

1. *Gutman A. E.* An example of using Δ_1 terms in Boolean valued analysis, *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [Vladikavkaz Math. J.], 2012, vol. 14, no. 1, pp. 47–63 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2012.14.10953.
2. *Gutman A. E., Losenkov G. A.* Function Representation of the Boolean-Valued Universe, *Siberian Adv. Math.*, 1998, vol. 8, no. 1, pp. 99–120.
3. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Vvedenie v bulevoznachnyj analiz* [Introduction to Boolean Valued Analysis], Moscow, Nauka, 2005, 529 p. (in Russian).
4. *Solovay R. M., Tennenbaum S.* Iterated Cohen Extensions and Souslin's Problem, *Annals of Math.*, 1971, vol. 94, no. 2, pp. 201–245. DOI: 10.2307/1970860.

Received March 6, 2018

Gutman Elexander Efimovich
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Academician Koptyug av., Novosibirsk 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1 Pirogova st., Novosibirsk 630090, Russia
E-mail: gutman@math.nsc.ru
https://orcid.org/0000-0003-2030-7459

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 49–56

DOI 10.23671/VNC.2018.2.14720

UNBOUNDED CONVERGENCE IN THE CONVERGENCE VECTOR LATTICES: A SURVEY

A. M. Dabboorasad[1], **E. Yu. Emelyanov**[2]

[1] Islamic University of Gaza; [2] Middle East Technical University

Dedicated to Professor A. G. Kusraev
on the occasion of his 65th anniversary

Various convergences in vector lattices were historically a subject of deep investigation which stems from the begining of the 20th century in works of Riesz, Kantorovich, Nakano, Vulikh, Zanen, and many other mathematicians. The study of the unbounded order convergence had been initiated by Nakano in late 40th in connection with Birkhoff's ergodic theorem. The idea of Nakano was to define the almost everywhere convergence in terms of lattice operations without the direct use of measure theory. Many years later it was recognised that the unbounded order convergence is also rathe useful in probability theory. Since then, the idea of investigating of convergences by using their unbounded versions, have been exploited in several papers. For instance, unbounded convergences in vector lattices have attracted attention of many researchers in order to find new approaches to various problems of functional analysis, operator theory, variational calculus, theory of risk measures in mathematical finance, stochastic processes, etc. Some of those unbounded convergences, like unbounded norm convergence, unbounded multi-norm convergence, unbounded τ-convergence are topological. Others are not topological in general, for example: the unbounded order convergence, the unbounded relative uniform convergence, various unbounded convergences in lattice-normed lattices, etc. Topological convergences are, as usual, more flexible for an investigation due to the compactness arguments, etc. The non-topological convergences are more complicated in genelal, as it can be seen on an example of the a.e-convergence. In the present paper we present recent developments in convergence vector lattices with emphasis on related unbounded convergences. Special attention is paid to the case of convergence in lattice multi pseudo normed vector lattices that generalizes most of cases which were discussed in the literature in the last 5 years.

Key words: convergence vector lattice, lattice normed lattice, unbounded convergence.
Mathematical Subject Classification: 46A03, 46A40, 46B42.

1. Introduction

A *convergence* [*s-convergence*] $\mathbb{c}$ for nets [resp., for sequences] in a set X is defined by the following two conditions:

(a) $x_\alpha \equiv x \Rightarrow x_\alpha \xrightarrow{\mathbb{c}} x$ [resp., $x_n \equiv x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\mathbb{c}} x$];

(b) $x_\alpha \xrightarrow{\mathbb{c}} x \Rightarrow x_\beta \xrightarrow{\mathbb{c}} x$ for every subnet x_β of x_α [resp., $x_n \xrightarrow{\mathbb{c}} x \Rightarrow x_{n_k} \xrightarrow{\mathbb{c}} x$ for every subsequence x_{n_k} of x_n].

A *convergence set* is a pair $(X, \mathbb{c})$ where $\mathbb{c}$ is a convergence in a set X. A mapping f from a convergence set $(X_1, \mathbb{c}_1)$ into a convergence set $(X_2, \mathbb{c}_2)$ is said to be *continuous*, if $x_\alpha \xrightarrow{\mathbb{c}_1} x$ implies $f(x_\alpha) \xrightarrow{\mathbb{c}_2} f(x)$. s-Continuity of f is defined by replacing nets with sequences.

A subset A of $(X,\mathbb{c})$ is called: $\mathbb{c}$-*closed* if $A \ni x_\alpha \xrightarrow{\mathbb{c}} x \Rightarrow x \in A$; $\mathbb{c}$-*compact* if any net a_α in A possesses a subnet a_β such that $a_\beta \xrightarrow{\mathbb{c}} a$ for some $a \in A$. $\mathbb{sc}$-*Closedness* and $\mathbb{sc}$-*compactness* are defined by using sequences. If the set $\{x\}$ is $\mathbb{c}$-closed for every $x \in X$ then $\mathbb{c}$ is called T_1-*convergence*. It is immediate to see that $\mathbb{c} \in T_1$ if every constant net $x_\alpha \equiv x$ does not $\mathbb{c}$-converge to any $y \neq x$. For further information on convergences we refer to [1, 2].

In the present paper, we investigate several special convergences in *real vector lattices*. Under *convergence* in a vector lattice X we always understand a convergence $\mathbb{c}$ in the set X, which agrees with the linear and lattice operations in the following way:

$$X \ni x_\alpha \xrightarrow{\mathbb{c}} x, \quad X \ni y_\beta \xrightarrow{\mathbb{c}} y, \quad \mathbb{R} \ni r_\gamma \to r$$

imply

$$r_\gamma \cdot x_\alpha + y_\beta \xrightarrow{\mathbb{c}} r \cdot x + y \tag{1}$$

and

$$r_\gamma \cdot x_\alpha \wedge y_\beta \xrightarrow{\mathbb{c}} r \cdot x \wedge y. \tag{2}$$

In other words, the linear and lattice operations in X are continuous with respect to the $\mathbb{c}$-convergence in X and to the usual convergence in $\mathbb{R}$. In this case, we say that $X = (X,\mathbb{c})$ is a *convergence vector lattice*. $\mathbb{s}$-*Convergence vector lattices* are defined by using in (1) and (2) sequences instead of nets.

A net x_α [resp., a sequence x_n] in $(X,\mathbb{c})$ is called a $\mathbb{c}$-*Cauchy*, whenever

$$(x_\alpha - x_\beta) \xrightarrow{\mathbb{c}} 0 \quad [\text{resp.,} \ \ (x_m - x_n) \xrightarrow{\mathbb{c}} 0 \quad (m,n \to \infty)]. \tag{3}$$

A convergence vector lattice $(X,\mathbb{c})$ is said to be $\mathbb{c}$-*complete* [resp., $\mathbb{sc}$-*complete*], if every $\mathbb{c}$-Cauchy net [resp., $\mathbb{c}$-Cauchy sequence] in X is $\mathbb{c}$-convergent.

A T_1-convergence $\mathbb{c}_1$ in a vector lattice X is said to be *minimal* [$\mathbb{s}$-*minimal*], if for any other T_1-convergence $\mathbb{c}$ in X satisfying $x_\alpha \xrightarrow{\mathbb{c}_1} 0 \Rightarrow x_\alpha \xrightarrow{\mathbb{c}} 0$ for all nets x_α in X [resp., $x_n \xrightarrow{\mathbb{c}_1} 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{\mathbb{c}} 0$ for all sequences x_n in X], it follows that $\mathbb{c} = \mathbb{c}_1$.

A convergence $\mathbb{c}$ in a vector lattice X is said to be *Lebesgue* [resp., $\mathbb{s}$-*Lebesgue*], if for every net x_α [resp., for every sequence x_n] in X

$$x_\alpha \xrightarrow{o} 0 \Longrightarrow x_\alpha \xrightarrow{\mathbb{c}} 0, \tag{4}$$

[respectively,

$$x_n \xrightarrow{o} 0 \Longrightarrow x_n \xrightarrow{\mathbb{c}} 0]. \tag{5}$$

It follows from (4), (5) that every Lebesgue convergence is $\mathbb{s}$-Lebesgue.

Basic examples of convergence vector lattices are: a locally solid vector lattice $X = (X,\tau)$ with its τ-*convergence* [3]; a space of Lebesgue measurable functions on $[0,1]$ with the *almost everywhere convergence*, that is a $\mathbb{sc}$-Lebesgue convergence; a vector lattice X with the $\mathbb{o}$-*convergence* [$\mathbb{ru}$-*convergence*] [4]; a lattice normed vector lattice (X,p,E) with the $\mathbb{p}$-*convergence* [5, 6]. For more details, see [3–10].Recently, $\mathbb{o}$- and $\mathbb{uo}$-convergence were investigated in [7; 11–16] with some further applications in [17–19].

In the present paper, we introduce several further convergence lattices and investigate corresponding unbounded convergences.

The second author expresses deep gratitude to Prof. Anatoly Kusraev for his decisive impact on the author's choice of the functional analysis as his research area 29 years ago.

2. Examples of convergence vector lattices

In this section, we collect and shortly discuss several examples of convergence vector lattices. The convergences in Examples 2, 3, and 4 below are topological in the sense that there is locally solid topology τ such that the τ-convergence coincided with the corresponding $\mathbb{c}$-convergence.

EXAMPLE 1. Let X be a vector lattice. Clearly, $(X, \xrightarrow{o})$ is a T_1-convergence vector lattice. Furthermore, $(X, \xrightarrow{\mathrm{ru}})$ is a convergence vector lattice, where "$\xrightarrow{o}$" is T_1 iff X is Archimedean (cf. [3, 4, 8, 9, 10]).

In a Lebesgue and complete metrizable locally solid vector lattice, $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{ru}} x$ iff $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ [20, Proposition 3]. It was also shown in [20, Proposition 4] that, in $\mathbb{R}^\Omega$, "$\xrightarrow{\mathrm{ru}}$" is equivalent to "$\xrightarrow{o}$" for nets iff Ω is countable. Furthermore, it was proved that the $\mathbb{o}$-convergence in X is topological iff $\dim(X) < \infty$ [11, Theorem 1], and that the $\mathbb{RU}$-convergence is topological iff X has a strong order unit [20, Theorem 5]. It is worth to notice that the *so*-convergence in a Banach lattice X of countable type coincides with the norm convergence iff X is lattice isomorphic to c_0 [21, Theorem 1].

EXAMPLE 2. Let $\mathscr{M} = \{m_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ be a family of Riesz seminorms on a vector lattice X. If, for any $0 \neq x \in X$, there is $m_\xi \in \mathscr{M}$ such that $m_\xi(x) > 0$, $(X, \mathscr{M})$ is said to be a *multi-normed lattice* (cf. [10, Definition 5.1.6]), abbreviated by *MNL*, with the *Riesz multi-norm* $\mathscr{M}$. Convergence in a Riesz multi-norm ($\mathbb{M}$-*convergence*) was studied recently in [7].

MNLs are also known as Hausdorff locally convex-solid vector lattices (cf. [3, p. 59]). Note that now-days the name "multi-normed space" is also used for quite different class of spaces [22].

EXAMPLE 3. Given a vector lattice X, a function $r : X \to \mathbb{R}_+$ is called a *Riesz pseudoseminorm* (cf. [3, Definition 2.27]), whenever:
(a) $r(x + y) \leqslant r(x) + r(y)$ for all $x, y \in X$;
(b) $\lim_{n\to\infty} r(\alpha_n x) = 0$ for all $x \in X$ and for all $\mathbb{R} \ni \alpha_n \to 0$;
(c) $|y| \geqslant |x|$ implies $r(y) \geqslant r(x)$.
If $r(x) \neq 0$ for any $0 \neq x \in X$, r is called a *Riesz pseudonorm* and (X, r) is said to be a *pseudonormed lattice* (abbreviated by *PNL*).

The convergence in a PNL is rather similar to the norm convergence in a normed lattice except of possible lack of a locally convex base for the corresponding topology.

The next example presents a convergence which generalizes convergences from Examples 2 and 3.

EXAMPLE 4. We say that a collection $\mathscr{R} = \{r_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ of Riesz pseudoseminorms on X is a *Riesz multi-pseudonorm*, if for any $0 \neq x \in X$, there is $r_\xi \in \mathscr{R}$ with $r_\xi(x) > 0$. In this case, $(X, \mathscr{R})$ is said to be a *multi-pseudonormed lattice* (abbreviated by *MPNL*).

Notice that, by the Fremlin theorem (cf. [3, Theorem 2.28]), MPNLs are exactly the locally solid vector lattices.

The *Riesz multi-pseudonorm convergence* ($\mathbb{MP}$-*convergence*) in $(X, \mathscr{R})$,

$$x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{mp}} x \iff (\forall\, r_\xi \in \mathscr{R})\ \ r_\xi(x - x_\alpha) \to 0, \tag{6}$$

coincides with τ-convergence, where τ is the corresponding locally solid topology in $(X, \mathscr{R})$.

EXAMPLE 5. Given vector lattices X and E, a function $p : X \to E_+$ is called an E-valued Riesz seminorm (cf. [4, 9]), whenever:
(a) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ for all $x, y \in X$;
(b) $p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x)$ for all $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $|y| \geqslant |x|$ implies $p(y) \geqslant p(x)$.

If, additionally, $p(x) \neq 0$ for any $0 \neq x \in X$, we say that p is an *E-valued Riesz norm.*

A vector lattice (X, p, E) equipped with an E-valued Riesz norm p is called a *lattice normed lattice* (abbreviated by *LNL*).

Several types of convergences in lattice normed lattices were studied recently in [5, 6, 23]. One of the most interesting convergences here is the $\mathbb{P}$*-convergence*:

$$x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{p}} x \iff p(x - x_\alpha) \xrightarrow{o} 0. \tag{7}$$

Notice that, the $\mathbb{P}$-convergence in $(X, |\cdot|, X)$ coincides with the $\mathbb{O}$-convergence in X which is not topological if $\dim(X) = \infty$.

Example 6. A vector lattice $X = (X, \mathscr{M}, E)$ equipped with a separating family $\mathscr{M} = \{p_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ of *E-valued Riesz seminorms* is said to be a *lattice multi-normed lattice* (abbreviated by *LMNL*). The corresponding convergence:

$$x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{lm}} x \iff (\forall\, p_\xi \in \mathscr{M})\;\; p_\xi(x - x_\alpha) \xrightarrow{o} 0 \tag{8}$$

is called the $\mathbb{LM}$*-convergence.* Clearly, any LNL is an LMNL.

Example 7. Given two vector lattices X and E. A function $\rho : X \to E_+$ is called an *E-valued Riesz pseudonorm*, whenever:

(a) $\rho(x + y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$ for all $x, y \in X$;
(b) $\rho(\alpha_n x) \xrightarrow{o} 0$ for all $x \in X$ and $\mathbb{R} \ni \alpha_n \to 0$;
(c) $|y| \geqslant |x|$ implies $\rho(y) \geqslant \rho(x)$;
(d) $x \neq 0$ implies $\rho(x) \neq 0$.

If condition (d) is dropped, ρ is said to be an *E-valued Riesz pseudoseminorm.*

A vector lattice X equipped with an E-valued Riesz pseudonorm ρ is called a *lattice pseudonormed lattice* (abbreviated by *LPNL* and denoted by (X, ρ, E)). The corresponding convergence:

$$x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{p}} x \iff p(x - x_\alpha) \xrightarrow{o} 0 \tag{9}$$

is called, as in Example 5, the $\mathbb{P}$*-convergence* in (X, ρ, E). Clearly, any LNL is an LPNL.

Our last example presents a convergence which generalizes convergences from all previous examples except the $\mathbb{RU}$-convergence from Example 1.

Example 8. A family $\mathscr{R} = \{\rho_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ of E-valued Riesz pseudoseminorms is said to be *separating* whenever, for any $0 \neq x \in X$, there is $\rho_\xi \in \mathscr{R}$ such that $\rho_\xi(x) > 0$. If $\mathscr{R}$ is separating, we call it an *E-valued Riesz multi-pseudonorm.*

A vector lattice $(X, \mathscr{R}, E)$ equipped with an *E-valued Riesz multi-pseudonorm* $\mathscr{R}$ is said to be a *lattice multi-pseudonormed lattice* (abbreviated by *LMPNL*). The corresponding convergence:

$$x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{lmp}} x \iff (\forall\, \rho_\xi \in \mathscr{R})\;\; \rho_\xi(x - x_\alpha) \xrightarrow{o} 0 \tag{10}$$

is called the $\mathbb{LMP}$*-convergence.*

3. Unbounded convergences

Various unbounded convergences have been investigated recently in [5, 7, 11–16, 18, 20, 24–29, 30–32]. This section is focused on the unification of approaches for unbounded convergences in different settings. After this, we discuss several types of unbounded convergences related to examples in Section 2.

3.1. General facts. Let I be an ideal in a convergence vector lattice $(X, \mathbb{c})$. The following definition is motivated by the definition of *un-convergence with respect to an ideal I of a normed lattice* $(X, \|\cdot\|)$ [14].

Definition 1. The *unbounded $\mathbb{c}$-convergence w. r. to I* (shortly, *$\mathbb{u}_I\mathbb{c}$-convergence*) is defined by

$$x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{u_I c}} x \text{ if } |x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\mathbb{c}} x \quad \text{for all} \quad u \in I_+. \tag{11}$$

It follows directly from (1) and (2), that $(X, \mathbb{u}_I\mathbb{c})$ is a convergence vector lattice, where

$$\mathbb{u}_I\mathbb{c} \in T_1 \iff \mathbb{c} \in T_1 \text{ and } I \text{ is order dense.}$$

Furthermore, the $\mathbb{u}_I\mathbb{c}$-convergence is coarser than $\mathbb{c}$ and $\mathbb{u}_I\mathbb{u}_I\mathbb{c} = \mathbb{u}_I\mathbb{c}$. Thus, if I is order dense and $\mathbb{c}$ is T_1 and minimal, then $\mathbb{u}_I\mathbb{c} = \mathbb{c}$. If $\mathbb{c}$ is topological, then $\mathbb{u}_I\mathbb{c}$ is topological as well (cf. [20, 30]). Unbounded $\mathbb{c}$-convergence w. r. to $I = X$ is denoted by $\mathbb{uc}$.

The $\mathbb{uo}$-convergence was studied recently in [11, 13, 16, 18, 27, 28, 31]. The $\mathbb{un}$-convergence was introduced and investigated in [12] (see also [14, 15, 29, 32]). We refer to [5, 6] for the $\mathbb{up}$-convergence; to [7] for the $\mathbb{um}$-convergence; and to [20, 29, 30, 31, 33] for the $\mathbb{u}\tau$-convergence.

It may happened that a $\mathbb{c}$-convergence is not topological, yet the $\mathbb{uc}$-convergence is topological. For example, if X is an atomic order continuous Banach lattice, then the $\mathbb{uo}$-convergence in X is topological [12, Theorem 5.3], whereas the $\mathbb{o}$-convergence in X is not topological except $\dim(X) < \infty$ [11, Theorem 1].

The following proposition is a $\mathbb{uc}$-version of [13, Proposition 3.15] (cf. also [5, Proposition 3.11] and [30, Proposition 2.12]). Since its proof is similar, we omit it.

Proposition 1. *Let $\mathbb{c}$ be a Lebesgue T_1-convergence in a vector lattice X and Y a sublattice of X. Y is $\mathbb{uc}$-closed iff it is $\mathbb{c}$-closed.*

It was shown in [30, Theorem 6.4] that in a Hausdorff locally solid vector lattice (X, τ) the τ-convergence minimal iff it is Lebesgue and $\mathbb{u}\tau = \tau$. The question, whether or not any T_1-convergence in a vector lattice is minimal iff it is Lebesgue and $\mathbb{uc} = \mathbb{c}$, remains open.

Two further questions arise in the case of topological $\mathbb{uc}$-convergence (i. e. $\mathbb{uc}$ is a τ-convergence for some locally solid τ in X). Under which conditions the topology τ is locally convex? Metrizable? In the case of $\mathbb{n}$-convergence (norm convergence) in a Banach lattice X, it was proved that: (1) $\mathbb{un}$-topology is metrizable iff X has a quasi-interior point [15, Theorem 3.2]; (2) if X is order continuous, then $(X, \mathbb{un})$ is locally convex iff X is atomic [15, Theorem 5.2]. In the general case, no investigation was conducted yet.

3.2. $\mathbb{uo}$-Convergence and $\mathbb{uru}$-convergence. The $\mathbb{uo}$-convergence was studied deeply in many recent papers (cf. [11–14, 26–28, 31]), whereas the $\mathbb{uru}$-convergence was investigated in [5, 7, 11, 20]. It was proved [20, Proposition 3] that in a Lebesgue and complete metrizable locally solid vector lattice X, $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{ru}} x \iff x_\alpha \xrightarrow{o} x$ for every net x_α. In [20, Proposition 4], it was shown that, in $X = \mathbb{R}^\Omega$, "$\xrightarrow{\mathrm{ru}}$" is equivalent to "$\xrightarrow{o}$" for nets iff Ω is countable. Furthermore, it was proved in [11], that the $\mathbb{o}$-convergence is topological iff $\dim(X) < \infty$ [11, Theorem 1], and that the $\mathbb{ru}$-convergence is topological iff X has a strong order unit [11, Theorem 5].

3.3. $\mathbb{um}$-Convergence and $\mathbb{u}\tau$-convergence. Recently, $\mathbb{um}$-Convergence was studied in [7], whereas $\mathbb{u}\tau$-convergence in [7, 29, 30, 33]. Among other things, it was shown that in a metrizable $\mathbb{m}$-complete MNL $(X, \mathscr{M})$ the $\mathbb{um}$-convergence is metrizable iff X has a quasi-interior point [7, Proposition 4]. In [20, Proposition 5] it was shown that in a complete metrizable locally solid vector lattice (X, τ) with a countable topological orthogonal system, the $\mathbb{u}\tau$-convergence is metrizable.

Notice that, in the case of the $\mathbb{m}$-convergence in an MNL $(X,\mathscr{M})$ with the Riesz multi-norm $\mathscr{M}=\{m_\xi\}_{\xi\in\Xi}$, the $\mathbb{um}$-convergence in X is the $\mathbb{mp}$-convergence in the MPNL $(X,\mathscr{R})$, where $\mathscr{R}=\{m_{\xi,u}\}_{\xi\in\Xi,u\in X_+}$ is given by

$$m_{\xi,u}(x)=m_\xi(|x|\wedge u)\quad(\xi\in\Xi,\ u\in X_+).\tag{12}$$

In the case of a locally solid vector lattice (X,τ), in order to describe the $\mathbb{u}\tau$-convergence, we consider a Riesz multi-pseudonorm on X, say $\mathscr{P}=\{\rho_\xi\}_{\xi\in\Xi}$, generating topology τ (such a Riesz multi-pseudonorm exists by the Fremlin theorem). Now, the $\mathbb{u}\tau$-convergence in X is the $\mathbb{mp}$-convergence in the MPNL $(X,\mathscr{R})$, where $\mathscr{R}=\{\rho_{\xi,u}\}_{\xi\in\Xi,u\in X_+}$ is given by:

$$\rho_{\xi,u}(x)=\rho_\xi(|x|\wedge u)\quad(\xi\in\Xi,\ u\in X_+).\tag{13}$$

3.4. Unbounded $\mathbb{p}$-, $\mathbb{lm}$-, and $\mathbb{lmp}$-convergences. The $\mathbb{up}$-convergence was introduced and investigated in [5]. As in (12) above, it can be seen that the $\mathbb{up}$-convergence in X is the $\mathbb{lmp}$-convergence in the LMPNL $(X,\mathscr{P},E)$, where $\mathscr{P}=\{\pi_u\}_{u\in X_+}$ is given by

$$\pi_u(x)=p(|x|\wedge u)\quad(u\in X_+).\tag{14}$$

In the case of an LMNL $X=(X,\mathscr{M},E)$ with the E-valued Riesz multi-norm $\mathscr{M}=\{p_\xi\}_{\xi\in\Xi}$, the $\mathbb{ulm}$-convergence in X is the $\mathbb{lmp}$-convergence in the LMPNL $(X,\mathscr{P},E)$, where $\mathscr{P}=\{\pi_{\xi,u}\}_{\xi\in\Xi,u\in X_+}$ consists of E-valued Riesz pseudoseminorms $\pi_{\xi,u}$ defined by

$$\pi_{\xi,u}(x)=p_\xi(|x|\wedge u)\quad(x\in X).\tag{15}$$

Furthermore, in the most general case of the $\mathbb{lmp}$-convergence from Example 8, we have the following proposition, whose straightforward proof is omitted.

Proposition 2. *Let $X=(X,\mathscr{R},E)$ be an LMPNL with the E-valued Riesz multi-pseudonorm $\mathscr{R}=\{\rho_\xi\}_{\xi\in\Xi}$. Then the $\mathbb{ulmp}$-convergence in X is the $\mathbb{lmp}$-convergence in the LMPNL $(X,\mathscr{P},E)$, where $\mathscr{P}$ consists of E-valued Riesz pseudoseminorms $\pi_{\xi,u}$*

$$\pi_{\xi,u}(x)=\rho_\xi(|x|\wedge u)\quad(x\in X)\tag{16}$$

for all $\xi\in\Xi,u\in X_+$.

For more results on $\mathbb{up}$-convergence we refer to [5, 6, 24, 25].

References

1. *Gutman A. E., Koptev A. V.* Convergence-Preserving Maps and Fixed-Point Theorems. *Math. Notes*, 2014, vol. 95, pp. 738–742.
2. *Preuss G.* Order Convergence and Convergence Almost Everywhere Revisited. *Internat. J. Pure Appl. Math.*, 2011, vol. 66, pp. 33–51.
3. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Locally Solid Riesz Spaces*, N. Y., Acad. Press, 1978, xii+198 p.
4. *Kusraev A. G. Dominated Operators*, Dordrecht, Kluwer, 2000, xiv+446 p.
5. *Aydın A., Emelyanov E. Y., Erkurşun-Özcan N., Marabeh M. A. A. Unbounded p-Convergence in Lattice-Normed Vector Lattices*, arXiv:1609.05301v3.
6. *Aydın A., Emelyanov E. Y., Erkurşun-Özcan N., Marabeh M. A. A.* Compact-Like Operators in Lattice-Normed Spaces. *Indag. Math. (N. S.)*, 2018, vol. 29, pp. 633–656.
7. *Dabboorasad Y. A., Emelyanov E. Y., Marabeh M. A. A.* *um*-Topology in Multi-Normed Vector Lattices. *Positivity*, 2018, vol. 22, pp. 653–667.
8. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Subdifferentials: Theory and Applications*, N. Y., Kluwer Academic, 1995, x+398 p.
9. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Boolean Valued Analysis*, Dordrecht, Kluwer, 1999, xii+322 p.

10. *Kutateladze S. S. Fundamentals of Functional Analysis*, N. Y., Springer-Verlag, 1996, xiv+276 p.
11. *Dabboorasad Y. A., Emelyanov E. Y., Marabeh M. A. A. Order Convergence In Infinite-Dimensional Vector Lattices is Not Topological*, arXiv:1705.09883.
12. *Deng Y., O'Brien M., Troitsky V. G.* Unbounded Norm Convergence in Banach Lattices, *Positivity*, 2017, vol. 21, pp. 963–974.
13. *Gao N., Troitsky V. G., Xanthos F.* *Uo*-Convergence and its Applications to Cesáro Means in Banach lattices, *Isr. J. Math.*, 2017, vol. 220, pp. 649–689.
14. *Kandić M., Li H., Troitsky V. G.* Unbounded Norm Topology Beyond Normed Lattices. *Positivity*, 2018, vol. 22, no. 3, pp. 745–760. DOI: 10.1007/s11117-017-0541-6.
15. *Kandić M., Marabeh M. A. A., Troitsky V. G.* Unbounded Norm Topology in Banach Lattices. *J. Math. Anal. Appl.*, 2017, vol. 451, pp. 259–279.
16. *Li H., Chen Z.* Some Loose Ends on Unbounded Order Convergence. *Positivity*, 2018, vol. 22, pp. 83–90.
17. *Emelyanov E. Y., Marabeh M. A. A.* Two Measure-Free Versions of the Brezis–Lieb Lemma. *Vladikavkaz Math. J.*, 2016, vol. 18, no. 1, pp. 21–25. DOI 10.23671/VNC.2016.1.5930.
18. *Gao N., Leung D. H., Xanthos F.* Duality for Unbounded Order Convergence and Applications. *Positivity*, 2018, vol. 22, no. 3, pp. 711–725.—DOI: 10.1007/s11117-017-0539-0.
19. *Marabeh M. A. A.* Brezis-Lieb Lemma in Convergence Vector Lattices. *Turkish J. of Math.*, 2018, vol. 42, pp. 1436–1442. DOI: 10.3906/mat-1708-7.
20. *Dabboorasad Y. A., Emelyanov E. Y., Marabeh M. A. A.* $u\tau$-Convergence in locally solid vector lattices. *Positivity*, 2018, to appear. DOI: 10.1007/s11117-018-0559-4.
21. *Gorokhova S. G.* Intrinsic characterization of the space $c_0(A)$ in the class of Banach lattices. *Math. Notes*, 1996, vol. 60, pp. 330–333.
22. *Dales H. G., Polyakov M. E.* Multi-Normed Spaces. *Dissertationes Math.* (*Rozprawy Mat.*),2012, vol. 488, pp. 1–165.
23. *Aydın A., Gorokhova S. G., Gul H.* Nonstandard Hulls of Lattice-Normed Ordered Vector Spaces. *Turkish J. of Math.*, 2018, vol. 42, pp. 155–163.
24. *Aydın A. Unbounded $p\tau$-Convergence in Lattice-Normed Locally Solid Riesz Spaces*, arXiv:1711.00734.
25. *Aydın A. Compact Operators with Convergence in Lattice-Normed Locally Solid Riesz Spaces*, arXiv:1801.00919.
26. *Emelyanov E. Y., Erkurşun-Özcan N., Gorokhova S. G.* Komlós Properties in Banach Lattices, *Acta Mathematica Hungarica*, 2018, vol. 155, no. 2, pp. 324–331. DOI: 10.1007/s10474-018-0852-5.
27. *Gao N.* Unbounded Order Convergence in Dual Spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, vol. 419, pp. 347–354.
28. *Gao N., Xanthos F.* Unbounded Order Convergence and Application to Martingales Without Probability. *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, vol. 415, pp. 931–947.
29. *Kandić M., Taylor M. A.* Metrizability of Minimal and Unbounded Topologies, *J. Math. Anal. Appl.*, 2018, vol. 466, no. 1, pp. 144–159. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.05.068.
30. *Taylor M. A. Unbounded Topologies and uo-Convegence in Locally Solid Vector Lattices*, arXiv:1706.01575.
31. *Taylor M. A.* Completeness of Unbounded Convergences. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2018, vol. 146, pp. 3413–3423. DOI: 10.1090/proc/14007.
32. *Zabeti O.* Unbounded Absolute Weak Convergence in Banach Lattices. *Positivity*, 2018, vol. 22, pp. 501–505.
33. *Ercan Z., Vural M. Towards a Theory of unbounded Locally Solid Riesz Spaces*, arXiv:1708.05288.

Received February 28, 2018

Dabboorasad Yousef Atef Mohammed
Islamic University of Gaza,
P.O.Box 108, Rimal, Gaza City, Palestine
E-mail: yasad@iugaza.edu.ps

Emelyanov Eduard Yu.
Middle East Technical University,
Universiteler Mahallesi, Dumlupinar Bulvari No:1,
Cankaya Ankara 06800, Turkey
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk 630090, Russia
E-mail: emelanov@math.nsc.ru

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 49–56

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ СХОДИМОСТИ В КОНВЕРГЕНТНЫХ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ

Дабурасад Ю., Емельянов Э. Ю.

Исторически, разнообразные сходимости в векторных решетках являлись предметом глубоких исследований восходящих к началу XX века. Изучение неограниченной порядковой сходимости было инициировано Накано в конце 40-х годов, в связи с эргодической теоремой Биркгофа. Идея Накано заключалась в том, чтобы определить сходимость почти всюду в терминах решеточных операций без прямого использования теории меры. Много лет спустя выяснилось, что неограниченная порядковая сходимость весьма полезна в теории вероятностей. С тех пор идея исследования различных сходимостей с помощью их неограниченных версий используется в различных контекстах. Например, неограниченные сходимости в векторных решетках привлекли внимание многих исследователей для того чтобы найти новые подходы к различным проблемам функционального анализа, теории операторов, вариационного исчисления, теории рисков в финансовой математике и т. д. Некоторые неограниченные сходимости, такие как неограниченная сходимость по норме или мультинорме, неограниченная τ-сходимость, являются топологическими. Другие приведенные сходимости не являются топологическими в общем случае, например: неограниченная порядковая сходимость, неограниченная относительная равномерная сходимость, различные неограниченные сходимости в решеточно-нормированных решетках, и т. п. В настоящей работе представлены последние наиболее часто используемые сходимости в векторных решетках, с акцентом на соответствующих неограниченных сходимостях. Особое внимание уделяется случаю сходимости в решеточно мультипсевдонормированных векторных решетках, обобщающих большинство случаев, обсуждавшихся в литературе за последние 5 лет.

Ключевые слова: конвергентная векторная решетка, решеточно-нормированное пространство, неограниченная сходимость.

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 57–61

УДК 512.5
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14721

ТЕОРЕМА О ВЛОЖЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СЕТИ

Н. А. Джусоева, С. Ю. Итарова, В. А. Койбаев

Посвящается 65-летию
Анатолия Георгиевича Кусраева

Аннотация. Пусть Λ — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число, $n \geqslant 2$. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп σ_{ij} кольца Λ называется сетью (ковром) над кольцом Λ порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называется дополняемой (до полной сети), если для некоторых аддитивных подгрупп (точнее, подколец) σ_{ii} кольца Λ таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leqslant i, j \leqslant n$ является (полной) сетью. Другими словами, элементарная сеть σ является дополняемой, если ее можно дополнить (диагональю) до (полной) сети. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом Λ порядка n. Рассмотрим набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца Λ, определенных для любых $i \neq j$ формулой $\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj}$, где суммирование берется по всем k, отличным от i и j. Набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца Λ является элементарной сетью, которую мы называем *элементарной производной сетью.* Элементарную сеть ω можно дополнить до (полной) сети стандартным способом, а также другим способом, который мы предлагаем в статье. Вводится также понятие сети $\Omega = (\Omega_{ij})$, которую мы называем *сетью, ассоциированной с элементарной группой* $E(\sigma)$. Следующая теорема является основным результатом статьи: *Элементарная сеть σ индуцирует элементарную производную сеть $\omega = (\omega_{ij})$ и сеть $\Omega = (\Omega_{ij})$, ассоциированную с элементарной группой $E(\sigma)$, причем $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$. Если $\omega = (\omega_{ij})$ дополнить диагональю до полной стандартным способом, то для произвольного r и любых $i \neq j$ будет $\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$ и $\Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$. Если же $\omega = (\omega_{ij})$ дополнить диагональю до полной вторым способом, то последние включения выполняются для любых i, r, j.*

Ключевые слова: сети, элементарные сети, сетевые группы, производная сеть, элементарная сетевая группа, трансвекция.

В работе приняты следующие стандартные обозначения. Пусть e — единичная матрица порядка n, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули; $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ — элементарная трансвекция. Положим, далее,

$$t_{ij}(A) = \{t_{ij}(\alpha) : \ \alpha \in A\}.$$

Для элементарной сети (ковра) σ через $E(\sigma)$ обозначается элементарная сетевая группа:

$$E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : \ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\rangle.$$

Далее, если σ — сеть, то через $G(\sigma)$ обозначается сетевая (ковровая) группа [1].

Пусть Λ — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число $n \geqslant 2$. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп σ_{ij} кольца Λ называется *сетью* (*ковром*) [2, 3] над кольцом Λ порядка n, если

$$\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$$

при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарным ковром*) [1, 2], [3, вопрос 15.46].

Определение 1. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называется *дополняемой* (*до полной сети*), если для некоторых аддитивных подгрупп (точнее, подколец) σ_{ii} кольца Λ таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ является (полной) сетью. Другими словами, элементарная сеть σ является *дополняемой*, если ее можно дополнить (диагональю) до (полной) сети.

Хорошо известно, что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда (см. [1])

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij} \tag{1}$$

для любых $i \neq j$. Диагональные подгруппы σ_{ii} определяются формулой

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \neq i} \sigma_{ki}\sigma_{ik}, \tag{2}$$

где суммирование берется по всем k отличным от i.

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом Λ порядка n. Рассмотрим набор $\sigma^1 = \omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца Λ, определенных для любых $i \neq j$ следующим образом:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj},$$

где, очевидно (так как σ — элементарная сеть), суммирование берется по всем k, отличным от i и j. Ясно, что $\omega_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$, следовательно, для любой тройки попарно различных чисел i, r, j, мы имеем $\omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$. Таким образом, набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца Λ является элементарной сетью, которую мы называем *элементарной производной сетью.*

Если, например, $n = 3$, то элементарная производная сеть $\sigma^1 = \omega = (\omega_{ij})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} * & \sigma_{13}\sigma_{32} & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{23}\sigma_{31} & * & \sigma_{21}\sigma_{13} \\ \sigma_{32}\sigma_{21} & \sigma_{31}\sigma_{12} & * \end{pmatrix}.$$

Элементарная сеть $\omega = \sigma^1$ является дополняемой [4, предложение 1], т. е. для нее справедлива формула (1), а потому она дополняется до (полной) сети. Элементарную сеть ω можно дополнить до (полной) сети стандартным способом, пользуясь формулой (2). Однако, мы предлагаем еще один (необходимый нам для дальнейшей работы) способ дополнения элементарной сети ω до полной.

$$\omega_{ii} = \sum_{k \neq s} \sigma_{ik}\sigma_{ks}\sigma_{si}, \tag{3}$$

где суммирование ведется по всем $1 \leqslant k \neq s \leqslant n$ (ясно, что $k \neq i$, $s \neq i$).

Определение 2. Элементарная производная сеть ω, дополненная диагональю либо стандартным способом (формула (2)), либо формулой (3), является сетью, которая называется *производной сетью* (*для* σ).

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом Λ порядка n. Для произвольных $i \neq j$ положим

$$\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij},$$

где $\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty}(\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m$. Таблица $\Omega = (\Omega_{ij})$ является элементарной сетью, причем дополняемой, т. е. справедливы включения $\Omega_{ij}\Omega_{ji}\Omega_{ij} \subseteq \Omega_{ij}$ для любых $i \neq j$ [4, предложение 5]. Пользуясь формулой (2), дополним элементарную сеть Ω до (полной) сети стандартным способом, положив $\Omega_{ii} = \sum_{k\neq i}\Omega_{ik}\Omega_{ki}$, где суммирование берется по k, $k \neq i$. Нетрудно видеть, что

$$\Omega_{ii} = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \gamma_{ik}.$$

Так, например, $\Omega_{11} = \gamma_{12} + \gamma_{13} + \cdots + \gamma_{1n}$. Заметим, что $\omega_{ii} \subseteq \Omega_{ii}$ для всякого i. Сеть Ω является наименьшей (дополняемой) сетью, содержащей элементарную сеть σ [4, предложение 6].

Определение 3. Сеть Ω называется *сетью, ассоциированной с элементарной группой* $E(\sigma)$.

Теорема. *Элементарная сеть σ индуцирует элементарную производную сеть $\omega = (\omega_{ij})$ и сеть $\Omega = (\Omega_{ij})$, ассоциированную с элементарной группой $E(\sigma)$, причем*

$$\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega.$$

Если $\omega = (\omega_{ij})$ дополнить диагональю до полной стандартным способом (формула (2)), то для произвольного r и любых $i \neq j$

$$\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \quad \Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}. \tag{4}$$

Если же $\omega = (\omega_{ij})$ дополнить диагональю до полной вторым способом (формула (3)), то включения (4) выполняются для любых i, r, j.

Для сетей ω и Ω рассмотрим матричные кольца

$$M(\omega) = \big\{a = (a_{ij}) : a_{ij} \in \omega_{ij}\big\} \subseteq M(\Omega) = \big\{b = (b_{ij}) : b_{ij} \in \Omega_{ij}\big\}.$$

Следствие. *В случае дополнения элементарной сети ω формулой (3) матричное кольцо $M(\omega)$ является двусторонним идеалом матричного кольца $M(\Omega)$.*

Литература

1. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
2. *Левчук В. М.* Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 504–517.
3. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд-е 17-е.—Новосибирск, 2010.
4. *Койбаев В. А.* Замкнутые сети в линейных группах // Вестн. СПбГУ. Сер. 1.—2013.—№ 1.—С. 25–33.

Статья поступила 24 января 2018 г.

Джусоева Нонна Анатольевна
Северо-Осетинский гос. ун-т им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
доцент кафедры алгебры и геометрии
E-mail: djusoevanonna@rambler.ru

Итарова Светлана Юрьевна
Северо-Осетинский гос. ун-т им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
аспирант кафедры алгебры и геометрии
E-mail: sitarova1991@gmail.com

Койбаев Владимир Амурханович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
ведущий научный сотрудник отдела функц. анализа;
Северо-Осетинский гос. ун-т им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
заведующий кафедрой алгебры и геометрии
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru
http://orcid.org//0000-0002-5142-2612

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 57–61

AN EMBEDDING THEOREM FOR AN ELEMENTARY NET

Dzhusoeva N. A.[1], Itapova S. Y.[1], Koibaev V. A.[1,2]
[1] North-Ossetian State University;
[2] Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS

Abstract. Let Λ be a commutative unital ring and $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. A set $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, of additive subgroups σ_{ij} of Λ is said to be a *net* or a *carpet* of order n over the ring Λ if $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ for all i, r, j. A net without diagonal is called an *elementary net*. An elementary net $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, is said to be *complemented* (to a full net), if for some additive subgroups (subrings) σ_{ii} of Λ the matrix (with the diagonal) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ is a full net. Assume that $\sigma = (\sigma_{ij})$ is an elementary net over the ring Λ of the order n. Consider a set $\omega = (\omega_{ij})$ of additive subgroups ω_{ij} of the ring Λ, where $i \neq j$ defined by the rule $\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj}$, $k \neq i$; $k \neq j$. The set $\omega = (\omega_{ij})$ of elementary subgroups ω_{ij} of the ring Λ is an elementary net called an *elementary derived net*. An elementary net ω can be completed to a full net by the standard way. In this article we propose a second way to complete an elementary net to a full net. The notion of a net $\Omega = (\Omega_{ij})$ associated with an elementary group $E(\sigma)$ is also introduced. The following theorem is the main result of the paper: *An elementary net σ generates an elementary derived net $\omega = (\omega_{ij})$ and a net $\Omega = (\Omega_{ij})$ associated with the elementary group $E(\sigma)$ such that $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$. If $\omega = (\omega_{ij})$ is completed with a diagonal to the full net in the standard way, then for all r and $i \neq j$ we have $\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$ and $\Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$. If $\omega = (\omega_{ij})$ ic completed with a diagonal to the full net in the second way then the inclusions are valid for all i, r, j.*

Key words: nets, elementary nets, net groups, derivative nets, elementary net groups, transvections.

References

1. *Borevich Z. I.* Subgroups of Linear Groups Rich in Transvections, *Journal of Soviet Mathematics*, 1987, vol. 37, no. 2, pp. 928–934. DOI: 10.1007/BF01089083.

2. *Levchuk V. M.* A Note to L. Dickson's Theorem, *Algebra i logika* [Algebra and Logic], 1983, vol. 22, no. 4, pp. 421–434 (in Russian).
3. *The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory*, issue 17, Novosibirsk, Russ. Acad. of Sciences, Siberian Div., Inst. of Mathematics, 2010 (in Russian). DOI: 10.3103/s1063454113010056.
4. *Koibaev V. A.* Closed Nets in Linear Groups, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*, 2013, vol. 46, no. 1, pp. 14–21. DOI: 10.3103/S1063454113010056.

Received January 24, 2018

Nonna A. Dzhusoeva
North-Ossetian State University,
46 Vatutin Street, Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: `djusoevanonna@rambler.ru`

Svetlana Y. Itarova
North-Ossetian State University,
46 Vatutin Street, Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: `sitarova1991@gmail.com`

Vladimir A. Koibaev
Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS,
22 Markus Street, Vladikavkaz 362027, Russia;
North-Ossetian State University,
46 Vatutin Street, Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: `koibaev-K1@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0002-5142-2612

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 62–68

УДК 512.6
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14722

О ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУППАХ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ НАД ПОЛЕМ НУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

У. М. Пачев, М. М. Исакова

К 65-летию Анатолия Георгиевича Кусраева

Аннотация. В работе с помощью понятия спектра матрицы дается явный вид элементов любой циклической подгруппы полной линейной группы $GL_3(F)$ третьей степени над полем F нулевой характеристики. В отличие от итерационных методов возведения матриц в степень каждый элемент циклической подгруппы $\langle M\rangle$ группы $GL_3(F)$ выражен в виде линейной комбинации матриц M^0, M, M^2, коэффициенты которых вычисляются через определители третьего порядка, составленные из некоторых степеней собственных значений матрицы M. По существу мы предлагаем новый подход, основанный на одном свойстве характеристических корней многочлена от матрицы. Отметим также, что излагаемый метод предполагает заранее известными собственные значения матрицы. Это требование, например, всегда выполняется для матриц треугольного вида, при этом вопрос об отыскании собственных значений матриц, которому посвящена довольно обширная литература, в нашу задачу не входит. Наконец, опираясь на результат о явном виде элементов любой циклической подгруппы группы $GL_3(F)$, выводится также формула для числа циклических подгрупп простого порядка p полной линейной группы $GL_3(K^{(p)})$ над p-круговым полем $K^{(p)}$ нулевой характеристики, что представляет самостоятельный интерес в теории бесконечных групп.

Ключевые слова: полная линейная группа, спектр матрицы, диагонализируемая матрица, n-круговое поле, алгебраическое замыкание поля.

В работе дается явный вид любого элемента каждой циклической подгруппы полной линейной группы $GL_3(F)$ третьей степени над произвольным полем F нулевой характеристики. При этом, опираясь на такой результат, в группе $GL_3(F)$ над полем F одного специального вида выделяются некоторые конечные циклические подгруппы. Первые исследования циклических подгрупп полной линейной группы $GL_n(F)$ над полем F при $n = 2$ и $n = 3$ по спектру ее матриц были начаты в [1, 2].

Как и в работе [3] мы даем усиление результатов из [2], относящихся только к случаю алгебраически замкнутого поля. При этом мы используем несколько иной подход, основанный на свойствах характеристических корней многочлена от матрицы (см. [4, с. 60], [5, с. 65]).

Следующий результат, основанный на свойствах спектра многочленной матрицы, позволяет вычислять любой элемент циклической подгруппы полной линейной группы $GL_3(F)$ в случае $\operatorname{char} F = 0$ (предварительное сообщение дано в [6]). Отметим, что вычисление высоких степеней матрицы используется при определении наибольшего по модулю собственного значения матрицы (см. [7, с. 354–355]).

Теорема 1. *Если α, β, γ — характеристические корни матрицы $M \in GL_3(F)$, то циклическая подгруппа $\langle M \rangle$, порожденная матрицей M над полем F нулевой характеристики, определяется равенствами:*

1)
$$M^n = \frac{\Delta_1}{w} M^2 + \frac{\Delta_2}{w} M + \frac{\Delta_3}{w} M^0,$$
при различных α, β, γ;
$$w = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix},$$
Δ_i — определитель, полученный заменой i-го столбца определителя w столбцом
$${}^t(\alpha^n, \beta^n, \gamma^n);$$

2)
$$M^n = -\frac{\Delta_1}{(\alpha-\beta)^2} M^2 - \frac{\Delta_2}{(\alpha-\beta)^2} M - \frac{\Delta_3}{(\alpha-\beta)^2} M^0,$$
где α — двукратный корень; β — простой корень; Δ_i — определитель, полученный заменой i-го столбца определителя
$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ \beta^2 & \beta & 1 \end{vmatrix}$$
столбцом ${}^t(\alpha^n, n\alpha^{n-1}, \beta^n)$;

3)
$$M^n = \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}M^2 + \left(2n - n^2\right)\alpha^{n-1}M + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\alpha^n M^0,$$
где α — трехкратный характеристический корень матрицы M.

$\lhd$ 1): Пусть $M \in GL_3(F)$ и α, β, γ — различные характеристические корни матрицы M, вообще говоря, принадлежащие кубическому расширению поля F. По теореме Гамильтона — Кэли (см., например, [5, с. 120]) и по формулам Виета при $n = 3$, справедливым и для многочленов над любым полем F имеем
$$M^3 = (\alpha+\beta+\gamma) M^2 - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) M + \alpha\beta\gamma M^0. \tag{1}$$

Из равенства (1) следует, что M^4 тоже можно выразить через M^2, M и M^0, умножая для этого обе части (1) на M и заменяя появляющуюся в левой части матрицу M^3 правой частью (1), и вообще, повторяя последовательно этот процесс нужное число раз, мы получим равенство
$$M^n = p_n M^2 + q_n M + r_n M^0, \tag{2}$$
при некоторых $p_n, q_n, r_n \in F$, $n \geqslant 3$, $M^0 = E$ — единичная матрица третьего порядка.

Пусть λ — собственное значение матрицы M. Тогда, как известно (см., например, [5, с. 61]), если $f(M)$ — многочлен от матрицы M, то собственное значение матрицы $f(M)$ равно $f(\lambda)$. Поэтому ввиду (2) элементы $p_n\lambda^2 + q_n\lambda + r_n$ и λ^n являются собственными значениями матрицы M^n.

Тогда, учитывая, что α^n, β^n, γ^n — собственные значения матрицы M^n получаем систему уравнений
$$\begin{cases} p_n\alpha^2 + q_n\alpha + r_n = \alpha^n, \\ p_n\beta^2 + q_n\beta + r_n = \beta^n, \\ p_n\gamma^2 + q_n\gamma + r_n = \gamma^n. \end{cases} \tag{3}$$

Определитель этой системы

$$w = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma) \neq 0$$

— есть определитель Вандермонда третьего порядка. Решая систему (3) по правилу Крамера, находим коэффициенты p_n, q_n, r_n:

$$p_n = \frac{\Delta_1}{w}, \quad q_n = \frac{\Delta_2}{w}, \quad r_n = \frac{\Delta_3}{w},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha^n & \alpha & 1 \\ \beta^n & \beta & 1 \\ \gamma^n & \gamma & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha^n & 1 \\ \beta^2 & \beta^n & 1 \\ \gamma^2 & \gamma^n & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & \alpha^n \\ \beta^2 & \beta & \beta^n \\ \gamma^2 & \gamma & \gamma^n \end{vmatrix},$$

тем самым п. 1 доказан.

2): Случай двукратного корня. Пусть α, β, γ — характеристические корни матрицы M, причем α — двукратный, β — простой корень и, значит, $\gamma = \alpha$.

Пусть M удовлетворяет уравнению (2). Тогда рассматриваем многочлен

$$f(x) = x^n - p_n x^2 - q_n x - r_n. \tag{4}$$

Так как α — двукратный корень этого многочлена, то он является также корнем производной многочлена $f(x)$, т. е.

$$n\alpha^{n-1} - 2p_n\alpha - q_n = 0.$$

Тогда получаем систему

$$\begin{cases} p_n\alpha^2 + q_n\alpha + r_n = \alpha^n, \\ 2p_n\alpha + q_n = n\alpha^{n-1}, \\ p_n\beta^2 + q_n\beta + r_n = \beta^n. \end{cases}$$

Так как по условию $\alpha \neq \beta$, то определитель этой системы $-(\alpha-\beta)^2 \neq 0$, и решая относительно p_n, q_n, r_n по правилу Крамера, получаем

$$p_n = -\frac{\Delta_1}{(\alpha-\beta)^2}, \quad q_n = -\frac{\Delta_2}{(\alpha-\beta)^2}, \quad r_n = -\frac{\Delta_3}{(\alpha-\beta)^2},$$

где Δ_i — определитель, полученный заменой i-го столбца определителя

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ \beta^2 & \beta & 1 \end{vmatrix}$$

столбцом ${}^t(\alpha^n, n\alpha^{n-1}, \beta^n)$ и тем самым формула для M^n в рассматриваемом случае доказана.

3): Случай трехкратного характеристического корня: $\alpha = \beta = \gamma$. Тогда корень α является корнем многочлена (4) и его первой и второй производной. Поэтому для коэффициентов равенства (2) получаем

$$p_n = \frac{n(n-1)}{2}\,\alpha^{n-2}, \quad q_n = \left(2n - n^2\right)\alpha^{n-1}, \quad r_n = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\,\alpha^n. \ \triangleright$$

Доказанная теорема 1 позволяет исследовать вопрос о конечных циклических подгруппах полной линейной группы $GL_3\left(K^{(n)}\right)$ над n-круговым полем $K^{(n)}$ являющемся полем разложения двучлена x^n-1 над полем K нулевой характеристики (свойства таких полей изложены в [8, с. 84]). Обозначим через $E^{(n)}$ множество корней многочлена x^n-1. Введем также обозначение $N_3\left(K^{(n)}\right)$ для числа циклических подгрупп порядка n в группе $GL_3\left(K^{(n)}\right)$. Тогда имеет место следующая

Теорема 2. *Для любого простого числа p количество циклических подгрупп порядка p, порождаемых диагонализируемыми матрицами в полной линейной группе $GL_3\left(K^{(p)}\right)$ над p — круговым полем $K^{(p)}$ нулевой характеристики задается формулой*

$$N_3\left(K^{(p)}\right) = p^2+p+1.$$

$\lhd$ Сначала будем рассматривать случай матриц с простым спектром, т. е. пусть матрица $M \in GL_3\left(K^{(p)}\right)$ имеет различные характеристические корни α, β, γ, принадлежащие, вообще говоря, алгебраическому замыканию поля $K^{(p)}$. Построим циклическую подгруппу $\langle M\rangle < GL_3\left(K^{(p)}\right)$ простого порядка p, порожденную матрицей M. Для этого в теореме 1 положим $n=p$ и потребуем, чтобы $|\langle M\rangle| = p$, $M^p=E$, $M^k \neq E$ при $1 \leqslant k \leqslant p$, где E — единичная матрица третьего порядка.

В силу теоремы 1 это требование равносильно тому, что

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = w. \tag{5}$$

При этом заметим, что для получения равенства $M^p=E$ другое требование $\frac{\Delta_1}{w}M^2+\frac{\Delta_2}{w}M=0$, где 0 — нулевая матрица, не будет иметь места.

Тогда в силу теоремы 1 имеем систему уравнений

$$\begin{vmatrix} \alpha^n & \alpha & 1 \\ \beta^n & \beta & 1 \\ \gamma^n & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha^n & 1 \\ \beta^2 & \beta^n & 1 \\ \gamma^2 & \gamma^n & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & \alpha^n \\ \beta^2 & \beta & \beta^n \\ \gamma^2 & \gamma & \gamma^n \end{vmatrix} = w. \tag{6}$$

Решив эту систему относительно α^n, β^n, γ^n, получим $\alpha^n=\beta^n=\gamma^n$. Подставляя их в третье равенство системы (6), будем иметь $\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & \alpha^n \\ \beta^2 & \beta & \alpha^n \\ \gamma^2 & \gamma & \alpha^n \end{vmatrix} = w$, откуда $\alpha^n=1$, но тогда и $\beta^n=1$, $\gamma^n=1$, и значит, $\alpha,\beta,\gamma \in K^{(p)}$, точнее α, β, $\gamma \in E^{(p)}$. Но так как матрица M по условию имеет простой спектр, то над алгебраическом замыкании поля $K^{(p)}$ она приводится к диагональному виду. Поэтому не нарушая общности рассуждений можно считать $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, где $\alpha,\beta,\gamma \in E^{(p)}$.

Рассмотрим теперь случай матрицы M, имеющей двукратный характеристический корень α и простой корень β, пока считая их принадлежащими алгебраическому замыканию поля $K^{(p)}$. Поскольку любую матрицу над алгебраически замкнутым полем можно привести к треугольному виду, то сразу можем считать, что $M = \begin{pmatrix} \alpha & x & y \\ 0 & \alpha & z \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, где x, y, z — некоторые элементы из алгебраического замыкания поля $K^{(p)}$. Тогда имеем

$$M^p = \begin{pmatrix} \alpha^p & p\alpha^{p-1}x & \frac{\alpha^p-\beta^p}{\alpha-\beta}y \\ 0 & \alpha^p & \frac{\alpha^p-\beta^p}{\alpha-\beta}z \\ 0 & 0 & \beta^p \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Требуя теперь, чтобы $M^p = E$, будем иметь, что $p\alpha^{p-1}x = 0$, откуда $x = 0$, поскольку поле $K^{(p)}$ имеет нулевую характеристику.

Учитывая еще при этом, что $\alpha^p = \beta^p = 1$, получаем $M^p = E$, где $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & y \\ 0 & \alpha & z \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Если $y = 0$, $z = 0$ то $M^p = E$ и $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ и значит, циклические подгруппы порядка p, порождаемые такими матрицами будут включены в конечную совокупность из $N_3\left(K^{(p)}\right)$ циклических подгрупп группы $GL_3\left(K^{(p)}\right)$.

В случае трехкратного характеристического корня α (7) будет иметь вид

$$M^p = \begin{pmatrix} \alpha^p & 0 & p\alpha^{p-1}y \\ 0 & \alpha^p & p\alpha^{p-1}z \\ 0 & 0 & \alpha^p \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица M будет порождающим элементом циклической подгруппы порядка p, только тогда, когда $\alpha^p = 1$ и $y = 0$, $z = 0$, т. е. $\alpha \in E^{(p)}$.

Таким образом, нами установлено, что порождающая матрица $M \neq E$ циклической подгруппы порядка p группы $GL_3\left(K^{(p)}\right)$ должна иметь диагональный вид, причем ее диагональные элементы принадлежат $E^{(p)}$.

Перейдем теперь к подсчету числа циклических подгрупп порядка p в $GL_3\left(K^{(p)}\right)$. Количество всевозможных матриц M указанных видов равно числу размещений с повторениями $\overline{A}_p^3 = p^3$. Выберем произвольную матрицу M_1, порождающую циклическую подгруппу $\langle M_1\rangle$ порядка p в группе $GL_3\left(K^{(p)}\right)$. Строим вторую циклическую подгруппу $\langle M_2\rangle$ порядка p в $GL_3\left(K^{(p)}\right)$ так, чтобы $\langle M_1\rangle \cap \langle M_2\rangle = \{E\}$. Продолжая этот процесс, на последнем шаге строим циклическую подгруппу $\langle M_s\rangle$, где $s = N_3\left(K^{(p)}\right)$, при этом каждой циклической подгруппе $\langle M_i\rangle$ взаимно однозначно сопоставляется упорядоченный набор трех элементов из $E^{(p)}$, вообще говоря, с повторениями таких элементов. Так как в этих циклических подгруппах имеется только один общий элемент E, повторяющийся p раз, то из общего количества матриц, входящих во все циклические подгруппы нужно исключить $N_3\left(K^{(p)}\right) - 1$ единичных матриц E и в результате получим p^3 матриц. Поэтому имеем $pN_3\left(K^{(p)}\right) - \left(N_3\left(K^{(p)}\right) - 1\right) = p^3$, откуда $N_3\left(K^{(n)}\right) = p^2 + p + 1$. $\rhd$

Литература

1. *Пачев У. М., Шокуев В. Н.* Циклические подгруппы группы $GL_2(F)$ // Изв. КБНЦ РАН.—2001.—Т. 7, № 2.—С. 72–74.
2. *Шокуев В. Н.* Циклические подгруппы группы $GL_3(F)$ // Изв. КБНЦ РАН.—2001.—Т. 7, № 2.—С. 75–77.
3. *Жемухова М. З., Пачев У. М.* Циклические подгруппы полной линейной группы второй степени над полем нулевой характеристикой // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, № 3.—С. 17–21.
4. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления.—М.: Наука, 1984.—320 с.
5. *Ланкастер П.* Теория матриц.—М.: Наука, 1973.—280 с.
6. *Пачев У. М.* Циклические подгруппы группы $GL_3(F)$ над полем нулевой характеристики // Материалы Междунар. научной конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» (Нальчик–Терскол, 17–21 мая 2017 г.).—Нальчик: Изд-во ИПМА КБНЦ РАН, 2017.—С. 167–168.
7. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры.—М.: Физматгиз, 1963.—736 с.
8. *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля. Т. 1.—М.: Мир, 1988.—430 с.
9. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.—М.: Наука, 1977.—497 с.

Статья поступила 2 февраля 2018 г.

Пачев Урусби Мухамедович
Кабардино-Балкарский государственный университет
РОССИЯ, 360000, Нальчик, ул. Чернышевского, д. 173
профессор кафедры алгебры и дифференц. уравнений
E-mail: urusbi@rambler.ru

Исакова Мариана Малиловна
Кабардино-Балкарский государственный университет,
РОССИЯ, 360000, Нальчик, ул. Чернышевского, д. 173
доцент кафедры алгебры и дифференц. уравнений
E-mail: isakova2206@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 62–68

ON CYCLIC SUBGROUPS OF A FULL LINEAR GROUP OF THIRD DEGREE OVER A FIELD OF ZERO CHARACTERISTIC

Pachev U. M.[1], Isakova M. M.[1]

[1] Kabardino Balkarian State University

Abstract. In this paper, using the concept of the spectrum of a matrix, we give an explicit form for the elements of any cyclic subgroup in the full linear group $GL_3(F)$ of the third degree over the field F of characteristic zero. In contrast to iterative methods, each element of the cyclic subgroup $\langle M\rangle$ of the group $GL_3(F)$ is a linear combination of M^0, M, M^2, with coefficients easily computed using determinants of the third order, composed by certain powers of the eigenvalues of the matrix M. In fact, we offer a new approach based on a property of the characteristic roots of the polynomial of the matrix. Note also that we present a method that involves the previously known eigenvalues of the matrix. Finally, basing on the results about the explicit form of the elements of any cyclic subgroup of the group $GL_3(F)$ we derive a formula for the cyclic subgroups of prime order p of linear group $GL_3(K^{(p)})$ over a circular field $K^{(p)}$ of characteristic zero that is of interest in their own right in the theory of infinite groups.

Key words: complete linear group, cyclic subgroups, spectrum of a matrix, diagonalizable matrix, n-circular field, algebraic closure of a field.

References

1. *Pachev U. M., Shokuev V. N.* Cyclic Subgroups of the Group $GL_2(F)$. *Izv. KBNTs RAN* [Izvestia KBSC of RAS], 2001, vol. 7, no. 2, pp. 72–74 (in Russian).
2. *Shokuev V. N.* Cyclic Subgroups of the Group $GL_3(F)$. *Izv. KBNTs RAN* [Izvestia KBSC of RAS], 2001, vol. 7, no. 2, pp. 75–77 (in Russian).
3. *Zhemuhova M. Z., Pachev U. M.* Cyclic Subgroups of Second Degree Full Linear Group Over a Field of the Zero Characteristic. *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [Vladikavkaz Math. J.], 2011, vol. 13, no. 3, pp. 17–21 (in Russian).
4. *Voevodin V. V., Kuznecov Ju. A. Matricy i vychislenija* [Matrices and Calculations], Moscow, Nauka, 1984 (in Russian).
5. *Lancaster P. Teorija matric* [Theory of Matrices], Moscow, Nauka, 1973 (in Russian).
6. *Pachev U. M.* Cyclic Subgroups of the Group $GL_3(F)$ over a Field of Characteristic Zero. *Materialy Mezhdunar. nauchnoj konf. «Aktual'nye problemy prikladnoj matematiki i fiziki»* [Proceedings of the International Scientific Conference «Actual Problems of Applied Mathematics and Physics»], Nalchik, Izd-vo IPMA KBNC RAN, 2017, pp. 167–168 (in Russian).
7. *Faddeev D. K., Faddeeva V. N. Vychislitel'nye metody linejnoj algebry* [Computational Methods of Linear Algebra], Moscow, Fizmatgiz, 1963 (in Russian).
8. *Lidl R., Niederreiter H. Konechnye polja* [Finite Fields], vol. 1, Moscow, Mir, 1988 (in Russian).
9. *Kostrikin I. Vvedenie v algebru* [Introduction to Algebra], Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).

Received February 2, 2018

Urusbi M. Pachev
Kabardino Balkarian State University,
173 Chrnyshevskogo Str., Nalchik 360004, Russia
E-mail: urusbi@rambler.ru

Mariana M. Isakova
Kabardino Balkarian State University,
173 Chrnyshevskogo Str., Nalchik 360004, Russia
E-mail: isakova2206@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 69–79

УДК 517.98
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14723

INVITATION TO BOOLEAN VALUED ANALYSIS

A. G. Kusraev[1], **S. S. Kutateladze**[2]
[1] Vladikavkaz Science Center of the RAS;
[2] Sobolev Institute of Mathematics

Abstract. This is a short invitation to the field of Boolean valued analysis. Model theory evaluates and counts truth and proof. The chase of truth not only leads us close to the truth we pursue but also enables us to nearly catch up with many other instances of truth which we were not aware nor even foresaw at the start of the rally pursuit. That is what we have learned from Boolean valued models of set theory. These models stem from the famous works by Paul Cohen on the continuum hypothesis. They belong to logic and yield a profusion of the surprising and unforeseen visualizations of the ingredients of mathematics. Many promising opportunities are open to modeling the powerful habits of reasoning and verification. Boolean valued analysis is a blending of analysis and Boolean valued models. Adaptation of the ideas of Boolean valued models to functional analysis projects among the most important directions of developing the synthetic methods of mathematics. This approach yields the new models of numbers, spaces, and types of equations. The content expands of all available theorems and algorithms. The whole methodology of mathematical research is enriched and renewed, opening up absolutely fantastic opportunities. We can now transform matrices into numbers, embed function spaces into a straight line, yet having still uncharted vast territories of new knowledge. The article advertised two books that crown our thought about and research into the field.

Key words: Boolean valued universe, Boolean truth value, transfer principle, maximum principle, mixing, descending, ascending, Boolean valued reals, Gordon's theorem.

1. Introduction

Humans definitely feel truth but cannot define truth properly. That is what Alfred Tarski explained to us in the 1930s. Mathematics pursues truth by way of proof, as wittily phrased by Saunders Mac Lane. *Boolean valued analysis* is one of the vehicles of the pursuit, resulting from the fusion of analysis and model theory.

Analysis is the technique of differentiation and integration. Differentiation discovers trends, and integration forecasts the future from trends. Analysis opens ways to understanding of the universe.

Model theory evaluates and counts truth and proof. The chase of truth not only leads us close to the truth we pursue but also enables us to nearly catch up with many other instances of truth which we were not aware nor even foresaw at the start of the rally pursuit. That is what we have learned from Boolean valued models of set theory. These models stem from the famous works by Paul Cohen on the continuum hypothesis. They belong to logic and yield a profusion of the surprising and unforeseen visualizations of the ingredients of mathematics.

Many promising opportunities are open to modeling the powerful habits of reasoning and verification.

Logic organizes and orders our ways of thinking, manumitting us from conservatism in choosing the objects and methods of research. Logic of today is a fine instrument of pursuing truth and an indispensable institution of mathematical freedom. Logic liberates mathematics, providing nonstandard ways of reasoning.

Some model of set theory is *nonstandard* if the membership between the objects of the model differs from that of the originals. In fact, the nonstandard tools of today use a couple of set-theoretic models simultaneously. Boolean valued models reside within the most popular logical tools.

Boolean valued analysis is a blending of analysis and Boolean valued models which originated and distinguishes itself by ascending and descending, mixing, cycling hulls, etc.

2. Invention of Boolean Valued Analysis

Boolean valued analysis signifies the technique of studying properties of an arbitrary mathematical object by means of comparison between its representations in two different set-theoretic models whose construction utilizes principally distinct Boolean algebras. As these models, we usually take the classical Cantorian paradise in the shape of the von Neumann universe and a specially-trimmed Boolean valued universe in which the conventional set-theoretic concepts and propositions acquire bizarre interpretations. Usage of two models for studying a single object is a family feature of the so-called *nonstandard methods of analysis*. For this reason, Boolean valued analysis means an instance of nonstandard analysis in common parlance. The term *Boolean valued analysis* was coined by G. Takeuti.

Proliferation of Boolean valued analysis stems from the celebrated achievement of P. J. Cohen who proved in the beginning of the 1960s that the negation of the continuum hypothesis, CH, is consistent with the axioms of Zermelo–Fraenkel set theory, ZFC. This result by Cohen, together with consistency of CH with ZFC established earlier by K. Gödel, proves that CH is independent of the conventional axioms of ZFC.

The genuine value of the great step forward by Cohen could be understood better in connection with the serious difficulty explicated by J. Shepherdson and absent from the case settled by Gödel. The crux of the Shepherdson observation lies in impossibility of proving the consistency of (ZFC) + ($\neg$ CH) by means of standard models of set theory. Strictly speaking, we can never find a subclass of an arbitrary chosen representation of the von Neumann universe which models (ZFC) + ($\neg$ CH) provided that we use the available interpretation of membership. Cohen succeeded in inventing a new powerful method for constructing noninternal, *nonstandard*, models of ZFC. He coined the term *forcing*.. The technique by Cohen invokes the axiom of existence of a standard transitive model of ZFC in company with the forcible and forceful transformation of the latter into an immanently nonstandard model by the method of forcing. His tricks fall in an outright contradiction with the routine mathematical intuition stemming “from our belief into a natural nearly physical model of the mathematical world” as Cohen phrased this himself.

Miraculously, the difficulties in comprehension of Cohen’s results gained a perfect formulation long before they sprang into life. This was done in the famous talk “Real Function Theory: State of the Art” by N. N. Luzin at the All-Russia Congress of Mathematicians in 1927. Then Luzin said: “The first idea that might leap to mind is that the determination of the cardinality of the continuum is a matter of a free axiom like the parallel postulate of geometry. However, when we vary the parallel postulate, keeping intact the rest of the axioms of Euclidean geometry, we in fact change the precise meaning of the words we write or utter, that is, 'point,' 'straight line,' etc. What words are to change their meaning if we attempt at making the cardinality of the continuum movable along the scale of alephs, while constantly proving consistency of this movement? The cardinality of the continuum, if only we imagine the latter as a set of points, is some unique entity that must reside in the scale of alephs in the place which the cardinality of the continuum belongs to; no matter whether the determination of this place is difficult or even 'impossible for us, the human beings' as J. Hadamard might comment."

P. S. Novikov expressed a very typical attitude to the problem: "...it might be (and it is actually so in my opinion) that the result by Cohen conveys a purely negative message and reveals the termination of the development of 'naive' set theory in the spirit of Cantor."

Intention to obviate obstacles to mastering the technique and results by Cohen led D. Scott and R. Solovay to constructing the so-called Boolean valued models of ZFC which are not only visually attractive from the standpoint of classical mathematicians but also are fully capable of establishing consistency and independence theorems. P. Vopěnka constructed analogous models in the same period of the early 1960s.

The above implies that the Boolean valued models, achieving the same ends as Cohen's forcing, must be nonstandard in some sense and possess some new features that distinguish them from the standard models.

Qualitatively speaking, the *notion of Boolean valued model involves a new conception of modeling* which might be referred to as *modeling by correspondence* or *long-distance modeling*. We explain the particularities of this conception as compared with the routine approach. Encountering two classical models of a single theory, we usually seek for a bijection between the universes of the models. If this bijection exist then we translate predicates and operations from one model to the other and speak about isomorphism between the models. Consequently, this conception of isomorphism implies a direct contact of the models which consists in witnessing to bijection of the universes of discourse.

Imagine that we are physically unable to compare the models pointwise simultaneously. Happily, we take an opportunity to exchange information with the owner of the other model using some means of communication, e.g., by having long-distance calls. While communicating, we easily learn that our interlocutor uses his model to operate on some objects that are the namesakes of ours, i.e., sets, membership, etc. Since we are interested in ZFC, we ask the interlocutor whether or not the axioms of ZFC are valid in his model. Manipulating the model, he returns a positive answer. After checking that he uses the same inference rules as we do, we cannot help but acknowledge his model to be a model of the theory we are all investigating. It is worth noting that this conclusion still leaves unknown for us the objects that make up his universe and the procedures he uses to distinguish between true and false propositions about these objects.

All in all, the *new conception of modeling implies not only refusal from identification of the universes of discourse but also admission of various procedures for verification of propositions.*

This article advertised the books [1] and [2] that crown our thought about and research into the field.

3. Elements of Set Theory

The credo of naive set theory cherishes a dream about the "Cantorian paradise" which is the universe that contains "any many which can be thought of as one, that is, every totality of definite elements which can be united to a whole through a law" or "every collection into a whole M of definite and separate objects m of our perception or our thought.'

The contemporary set theory studies realistic approximations to the ethereal ideal which are appropriate formal systems enabling us to operate on a wide spectrum of particular sets not leaving the comfortable room of soothing logical rigor. The essence of such a formalism lies in constructing a universe that "approximates from below" the world of naive sets so as to achieve the aim of current research. The corresponding axiomatic set theories open up ample opportunities to comprehend and corroborate in full detail the qualitative phenomenological principles that lie behind the standard and nonstandard mathematical models of today. ZFC, Zermelo–Fraenkel set theory, is most popular and elaborate. So, it is no wonder that our exposition proceeds mostly in the realm of ZFC.

We invite the reader to recall the formal technique for constructing universes of sets by some transfinite processes that lead to the so-called cumulative hierarchies. This technique is vital for Boolean valued analysis. Of profound importance is the detailed description of how the von Neumann universe grows from the empty set. So, we thoroughly analyze the status of classes of sets within the formal system stemming from J. von Neumann, K. Gödel, and P. Bernays and serving as a conservative extension of Zermelo–Fraenkel set theory.

4. Elements of the Theory of Boolean Algebras

Obnious is the key role of Boolean algebras in the area of analysisi we discuss. In fact, the influence of Boolean algebras spreads far beyond the theme under presentation. Boolean algebras penetrate into not only every section of mathematics but also practically all chambers of the mental treasure trove of mankind. There are ample grounds to assert that the concept of Boolean algebra reflects something general that is omnipresent in all spheres of human life.

There is a wonderful immanent connection between the "events" of physics and the "sentences" of logic which was revealed by G. Boole (1815–1864) whose name is made immortal by the term "Boolean algebra." Boole algebraized the tribes of events and sentences in a form so terse and lapidary that it has enjoyed everyone from novice to master for more than 150 years.

It is impossible to appraise Boole's contribution to culture better than this was done by his famous compatriot, contemporary, and elder friend A. De Morgan: "Boole's system of logic is but one of many proofs of genius and patience combined.... That the symbolic processes of algebra, invented as tools of numerical calculation, should be competent to express every act of thought, and to furnish the grammar and dictionary of an all-containing system of logic, would not have been believed until it was proved."

The relevant preliminaries to Boolean algebra include the celebrated Stone Theorem. For the sake of diversity, we demonstrate it by using the Gelfand transform.

5. Elements of Category Theory

Set theory rules in the present-day mathematics. The buffoon's role of "abstract nonsense" is assigned in mathematics to category theory. History and literature demonstrate to us that the relations between the ruler and the jester may be totally intricate and unpredictable. Something very similar transpires in the interrelations of set theory and category theory and the dependency of one of them on the other.

Alongside set theory, the theory of categories serves as a universal language of the modern mathematics. Moreover, it is category theory that one of the most ambitious projects of the twentieth century mathematics was realized within, the project of socializing set theory. This evoked topos theory which provides a profusion of categories of which classical set theory is an ordinary member. It is worth noting that Boolean valued models were extra stimuli in search of a category-theoretic foundation of mathematics.

We sketchi the prerequisites of category theory up to the key concepts of topos and Boolean topos.

6. Boolean Valued Universes

It is the use of various rather unconventional models of set theory that unifies the available nonstandard methods of analysis. In particular, the technique of Boolean valued analysis bases on the properties of a certain cumulative hierarchy $\mathbb{V}^{(B)}$ whose every successive level comprises all functions with domain in the preceding levels and range in a complete Boolean algebra B fixed in advance.

Among our main topics is the construction and study of this hierarchy; i.e., the Boolean valued universe $\mathbb{V}^{(B)}$.

The idea behind the construction of $\mathbb{V}^{(B)}$ is very simple. We first observe that the characteristic function of a set is a good substitute for the set itself. Travelling across the levels of the von Neumann universe and carrying out successive substitutions, we arrive to another representation of the von Neumann universe which consists only of two valued functions. Replacing the two element Boolean algebra $\mathbb{2}$ with an arbitrary Boolean algebra B and repeating the above construction, we arrive at the desired $\mathbb{V}^{(B)}$.

The subtlest aspects, deserving special attention, relate to elaboration of the sense in which we may treat $\mathbb{V}^{(B)}$ as a model of set theory. We expose in full detail the basic technique that lay grounds for Boolean valued analysis; i.e., the transfer, mixing, and maximum principles.

Considerations of logical rigor and expositional independence have requested an ample room for constructing a separated universe and interpreting NGB in $\mathbb{V}^{(B)}$. The reader, interested only in solid applications to analysis, may just cast a casual glance at these rather sophisticated fragments of exposition while getting first acquaintance with the Boolean valued analysis.

7. The Apparatus of Boolean Valued Analysis

The transfer and maximum principles enable us to carry out various constructions of the conventional mathematical practice inside every Boolean valued universe. Therein we encounter the fields of real and complex numbers, Banach spaces, different operators, etc. The objects, representing them, may be perceived to some extent as nonstandard representations of the original mathematical entities.

Therefore, viewing the model $\mathbb{V}^{(B)}$ as a nonstandard presentation of the mathematical universe of discourse and recalling that $\mathbb{V}^{(B)}$ is constructed within the von Neumann universe, we may peek in the Boolean valued world, discovering nonstandard objects in a standard disguise.

Skipping from one B to another, a keen researcher sees many hypostaces of a sole mathematical idea embodied in a set-theoretic formula. Comparing observations is a method for studying a concealed meaning of the formula. The method often shows that essentially different analytical objects are in fact just various appearances of the same concept. This reveals the endoteric reasons of many facts and enables us to clarify the internal reasons for many vague analogies and dim parallelism and also to open new opportunities to study old objects.

This reminds us of the celebrated cave of Plato. If a casual escapee decided to inform his fellow detainees on what he saw at large, he might build a few bonfires in the night. Then each entity will cast several shadows on the wall of the cave (rather than a single shadow suggested by Plato). Now the detainees acquired a possibility of finding the essence of unknown things from analyzing the collection of shadows bearing more information than a sole shadow of an entity.

Comparative analysis with the help of Boolean valued models proceeds usually in two stages which we may agree to call syntactic and semantic.

At the *syntactic stage*, the mathematical fragment under study (a definition, a construction, a property, etc.) is transformed into a formal text of the symbolic language of set theory, or, to be more precise, into a text in a suitable jargon. In this stage we often have to analyze the complexity of the text; in particular, it matters whether the whole text or some of its parts is a bounded formula.

The *semantic stage* consists in interpretation of a formal text inside a Boolean valued universe. In this stage we use the terms of the conventional set theory, i.e. the von Neumann universe $\mathbb{V}$, to interpret (decode or translate) some meaningful texts that contain truth about the objects of the Boolean valued universe $\mathbb{V}^{(B)}$. This is done by using especial operations on the elements and subsets of the von Neumann universe.

We eleborate the basic operations of Boolean valued analysis, i.e., the canonical embedding, descent, ascent, and immersion. The most important properties of these operations are conveniently expressed using the notions of category and functor.

8. Functional Representation of Boolean Valued Universes

Various function spaces reside in functional analysis, and so the intention is natural of replacing an abstract Boolean valued system by some function analog, a model whose elements are functions and in which the basic logical operations are calculated "pointwise." An example of such a model is given by the class $\mathbb{V}^Q$ of all functions defined on a fixed nonempty set Q and acting into the class $\mathbb{V}$ of all sets. Truth values in the model $\mathbb{V}^Q$ are various subsets of Q and, in addition, the truth value $[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]$ of $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ at functions $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^Q$ is calculated as follows:

$$[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] = \big\{q \in Q : \ \varphi\big(u_1(q), \dots, u_n(q)\big)\big\}.$$

We present a solution by A. G. Gutman and G. A. Losenkov to the above problem. To this end, we introduce and study their concept of continuous polyverse which is a continuous bundle of models of set theory. It is shown that the class of continuous sections of a continuous polyverse is a Boolean valued system satisfying all basic principles of Boolean valued analysis and, conversely, every Boolean valued algebraic system can be represented as the class of sections of a suitable continuous polyverse.

9. Analysis of Algebraic Systems

Every Boolean valued universe has the collection of mathematical objects in full supply: available in plenty are all sets with extra structure: groups, rings, algebras, normed spaces, etc. Applying the descent functor to the established algebraic systems in a Boolean valued model, we distinguish bizarre entities or recognize old acquaintances, which leads to revealing the new facts of their life and structure.

This technique of research, known as *direct Boolean valued interpretation*, allows us to produce new theorems or, to be more exact, to extend the semantical content of the available theorems by means of slavish translation. The information we so acquire might fail to be vital, valuable, or intriguing, in which case the direct Boolean valued interpretation turns out to be a leisurely game.

It thus stands to reason to raise the following questions: What structures significant for mathematical practice are obtainable by the Boolean valued interpretation of the most common algebraic systems? What transfer principles hold true in this process? Clearly, the answers should imply specific objects whose particular features enable us to deal with their Boolean valued representation which, if understood duly, is impossible to implement for arbitrary algebraic systems.

We show that an abstract B-set U embeds in the Boolean valued universe $\mathbb{V}^{(B)}$ so that the Boolean distance between the members of U becomes the Boolean truth-value of the negation of their equality. The corresponding element of $\mathbb{V}^{(B)}$ is, by definition, the *Boolean valued representation* of U. In case the B-set U has some a priori structure we may try to furnish the Boolean valued representation of U with an analogous structure, intending to apply the technique of ascending and descending to studying the original structure of U. Consequently, the above questions may be treated as instances of the unique problem of searching a well-qualified Boolean valued representation of a B-set furnished with some additional structure.

We then analyze the problem for the main objects of general algebra. Located at the center of exposition, the notion of an algebraic B-system refers to a nonempty B-set endowed with a few contractive operations and B-predicates, the latter meaning B-valued contractive mappings.

The Boolean valued representation of an algebraic B-system appears to be a conventional two-valued algebraic system of the same type. This means that an appropriate completion of each algebraic B-system coincides with the descent of some two-valued algebraic system inside $\mathbb{V}^{(B)}$. On the other hand, each two-valued algebraic system may be transformed into an algebraic B-system on distinguishing a complete Boolean algebra of congruences of the original system. In this event, the task is in order of finding the formulas holding true in direct or reverse transition from a B-system to a two-valued system. In other words, we have to seek here some versions of the transfer principle or the identity preservation principle of long standing in some branches of mathematics.

10. Analysis of Groups, Rings, and Fields

Continuating the previous research, we illustrate the general facts of Boolean valued analysis with particular algebraic systems in which complete Boolean algebras of congruences are connected with the relations of order and disjointness. We restrict exposition mainly to the descents of the systems under study and demonstrate the opportunities that are opened up by Boolean valued analysis. One of the main results (due to E. I. Gordon) reads as follows: *Each rationally complete semiprime commutative ring is an interpretation of a field in an appropriate Boolean valued model.*

11. Analysis of Cardinals

This theme occupies an especial place in the whole book. By now we only considered the Boolean valued universe $\mathbb{V}^{(B)}$ over an arbitrary complete Boolean algebra B. Moreover, we discussed only those properties and constructions that are practically independent of the choice of B. In actuality, many delicate mathematical properties of the members of $\mathbb{V}^{(B)}$ depends essentially on the structure of B. We show here how the choice of a Boolean algebra affects the specific properties of cardinals (and not only cardinals) in the corresponding Boolean valued universe.

It is shown that the canonical embedding of the von Neumann universe $\mathbb{V}$ to $\mathbb{V}^{(B)}$ sends ordinals to Boolean valued ordinals, preserving the order on ordinals. The same happens to cardinals provided that B enjoys the countable chain condition. However, the choice of B is available such that the canonical embedding "glue together" infinite cardinals; i.e., the standard names of two distinct infinite cardinals may have the same cardinality in an appropriate Boolean valued model. This effect is called *cardinal collapsing*. There are various mathematical constructions distorted under the canonical embedding. We discuss a few of them but focus exposition on the classical Gödel–Cohen solution of the continuum problem.

12. Analysis of Vector Lattices

The Boolean valued inverse $\mathbb{V}^{(B)}$ associated with a fixed complete Boolean algebra B is one of the arenas of mathematical events. Indeed, by virtue of the transfer and maximum principles, $\mathbb{V}^{(B)}$ contains numbers and groups as well as the Lebesgue and Riemann integrals, with the Radon–Nikodým and Hahn–Banach theorems available by virtue of the transfer and maximum principles.

The elementary technique of ascending and descending which we become acquainted with when considering algebraic systems shows each of mathematical objects in $\mathbb{V}^{(B)}$ to be a representation of an analogous classical object with an additional structure determined by B. In particular, this is also true in regard to functional-analytical objects. We expose the facts that are associated with Boolean valued representation of the latter objects.

Our main topic is Banach spaces in Boolean valued universes. It turns out that these spaces are inseparable from the concepts of the theory of ordered vector spaces and, above all, with the Dedekind complete vector lattices which were introduced by L. V. Kantorovich at the beginning of the 1930s under the name of K-spaces. They are often referred to as *Kantorovich spaces* nowadays.

The fundamental result of Boolean valued analysis in regard to this aspect is Gordon's Theorem which reads as follows: *Each universally complete Kantorovich space is an interpretation of the reals in an appropriate Boolean valued model.* Conversely, each Archimedean vector lattice embeds in a Boolean valued model, becoming a vector sublattice of the reals viewed as such over some dense subfield of the reals.

Moreover, each theorem about the reals within Zermelo–Fraenkel set theory has an analog in the original Kantorovich space. Translation of theorems is carried out by appropriate general operations of Boolean valued analysis. We then illustrate the technique of *Boolean valued transfer* by deriving the basic properties of Kantorovich spaces: representation as continuous or spectral functions, the Freudenthal spectral theorem, spectral integration, the functional calculus, etc.

13. Analysis of Lattice Normed Spaces

Also, we consider the structure and properties of a vector space with some norm taking values in a vector lattice. Such a vector space is called a *lattice normed space*.

The most important peculiarities of these spaces are connected with decomposability. Use of decomposability allows us in particular to distinguish a complete Boolean algebra of linear projections in a lattice normed space which is isomorphic to the Boolean algebra of band projections of the norm lattice. Most typical in analysis are the lattice normed spaces of continuous or measurable functions.

In much the same way as many structural properties of a Kantorovich space are some properties of the reals in an appropriate Boolean valued model, the basic properties of a lattice normed space presents the Boolean valued interpretations of the relevant properties of normed spaces. The most principal connections are reflected by the three facts:

(1) The internal Banach spaces and external universally complete Banach–Kantorovich spaces are bijective under the bounded descent from a Boolean valued model.

(2) Each lattice normed space is realizable as a dense subspace of a Banach space viewed a vector space over some field, e.g. the rationals, in an appropriate Boolean valued model.

(3) Each Banach space X is a result of the bounded descent of some Banach space in a Boolean valued model if and only if X includes a complete Boolean algebra of norm one projections which possesses the cyclicity property. In other words, X is a Dedekind complete lattice normed space with a mixed norm.

These facts lie behind the approach to involutive algebras.

14. Analysis of Banach Algebras

The theory of Banach algebras is one of the most attractive traditional sections of functional analysis. We presents the basic results of Boolean valued analysis of involutive Banach algebras and Jordan Banach algebras.

The possibility of applying Boolean valued analysis to operator algebras rests on the following observation: If the center of an algebra is properly qualified and perfectly located then it becomes a one dimensional subalgebra after immersion in a suitable Boolean valued universe. This might lead to a simpler algebra. On the other hand, the transfer principle implies that the scope of the formal theory of the initial algebra is the same as that of its Boolean valued representation.

Exposition focuses on the analysis of AW^*-algebras and JB-algebras, i.e. Baer C^*-algebras and Jordan–Banach algebras. These algebras are realized in a Boolean valued model as AW^*-factors and JB-factors. The problem of representation of these objects as operator algebras leas to studying Kaplansky–Hilbert modules.

The dimension of a Hilbert space inside a Boolean valued model is a Boolean valued cardinal which is naturally called the Boolean dimension of the Kaplansky–Hilbert module that is the descent of the original Hilbert space. The cardinal shift reveals itself: some isomorphic Kaplansky–Hilbert modules may fail to have all bases of the same cardinality. This implies that a type I AW^*-algebra may generally split in a direct sum of homogeneous subalgebras in many ways. This was conjectured by I. Kaplansky as far back as in 1953.

Leaning on the results about the Boolean valued immersion of Kaplansky–Hilbert modules, we derive some functional representations of these objects. To put it more precisely, we prove that each AW^*-module is unitarily equivalent to the direct sum of some homogeneous AW^*-modules consisting of continuous vector functions ranging in a Hilbert space. An analogous representation holds for an arbitrary type I AW^*-algebra on replacing continuous vector functions with operator valued functions continuous in the strong operator topology.

We call an AW^*-algebra *embeddable* if it is $*$-isomorphic with the double commutant of some type I AW^*-algebra. Each embeddable AW^*-algebra admits a Boolean valued representation, becoming a von Neumann algebra or factor. We give several characterizations for embeddable AW^*-algebras. In particular, we prove that an AW^*-algebra A is embeddable if and only if the center valued normal states of A separate A. We also consider similar problems for the JB-algebras, a kind of real nonassociative analogs of C^*-algebras.

15. Operator Theory via Boolean Valued Analysis

We also show how Boolean valued analysis transforms the theory of operators in vector lattices, see [2]. We focus on the most recent results not reflected in the monographic literature yet. We start with the Boolean valued interpretations of order bounded operators with the emphasis on lattice homomorphisms and disjointness preserving operators. We provide a complete solution of the Wickstead problem as well as other new results on band preserving operators. Much attention is paid to various applications of order continuous operators to injective Banach lattices, Maharam operators, and related topics.

16. Conclusion

Adaptation of the ideas of Boolean valued models to functional analysis projects among the most important directions of developing the synthetic methods of mathematics. This approach yields the new models of numbers, spaces, and types of equations. The content expands of all available theorems and algorithms. The whole methodology of mathematical research is enriched and renewed, opening up absolutely fantastic opportunities. We can now transform matrices into numbers, embed function spaces into a straight line, yet having still uncharted vast territories of new knowledge.

Quite a long time had passed until the classical functional analysis occupied its present position of the language of continuous mathematics. Now the time has come of the new powerful technologies of model theory in mathematical analysis. Not all theoretical and applied mathematicians have already gained the importance of modern tools and learned how to use them. However, there is no backward traffic in science, and the new methods are doomed to reside in the realm of mathematics for ever and they will shortly become as elementary and omnipresent in analysis as Banach spaces and linear operators.

References

1. *Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Introduction to Boolean Valued Analysis*, Moscow, Nauka, 2005, 526 p.
2. *Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Boolean Valued Analysis: Selected Topics. Trends in Science: The South of Russia. Math. Monogr., issue* 6, Vladikavkaz, SMI VSC RAS, 2014, iv+400 p.

Received February 5, 2018

Anatoly G. Kusraev
Vladikavkaz Science Center of the RAS,
22 Markus Street, Vladikavkaz 362027, Russia;
North Ossetian State University,
44–46 Vatutin Street, Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: kusraev@smath.ru
https://orcid.org/0000-0002-1318-9602

Semen S. Kutateladze
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk 630090, Russia
E-mail: sskut@math.nsc.ru
http://orcid.org/0000-0002-5306-2788

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 69–79

ПРИГЛАШЕНИЕ В БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ АНАЛИЗ

Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.

Аннотация. Это короткое приглашение в область булевозначного анализа. Теория моделей оценивает и исчисляет истинность и доказательства. Поиск истины не только приближает нас к преследуемой цели, но также позволяет постичь многие другие ипостаси истины, к которым мы не стремились и которые мы даже не предвидели в начале предпринятого поиска. Это то, что нам открылось при изучении булевозначных моделей теории множеств. Такие модели проистекают из знаменитых работ П. Дж. Коэна по гипотезе континуума. Они относятся к математической логике и дают обилие непривычных и непредвиденных инкарнаций математических идей. Тем самым открываются новые мощные возможности для моделирования привычных способов умозаключения и верификации. Булевозначный анализ — это синтез анализа и булевозначных моделей. Адаптация идей булевозначного моделирования к функциональному анализу относится к наиболее важным направлениям развития синтетических методов математики. Этот подход дает новые модели чисел, пространств и типов уравнений. Расширяет содержимое всех имеющихся теорем и алгоритмов. Вся методология математического исследования обогащается и обновляется, открывая фантастические возможности. Теперь мы можем трансформировать матрицы в числа, вложить функциональные пространства в вещественную прямую, но при этом остаются неизведанными обширные территории нового знания. Статья представляет собой дайджест двух книг, содержащие итоги наших размышлений и исследований в этой области.

Ключевые слова: булевозначный универсум, булева оценка истинности, принцип переноса, принцип максимума, перемешивание, спуск, подъем, булевозначные числа, теорема Гордона.

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 80–85

УДК 512.54
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14724

О БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУППАХ ФРОБЕНИУСА[1]

Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, А. Х. Журтов

К 65-летию Анатолия Георгиевича Кусраева

Аннотация. В работе исследуется строение периодической группы, удовлетворяющей следующим условиям: (F_1) Группа G является полупрямым произведением подгруппы F на подгруппу H; (F_2) H действует свободно на F относительно сопряжения в G, т. е. $f^h = f$ для элементов $f \in F$, $h \in H$ только в случаях $f = 1$ или $h = 1$. Иными словами, H действует на F как группа регулярных автоморфизмов. (F_3) Порядок любого элемента $g \in G$ вида $g = fh$, где $f \in F$, $1 \neq h \in H$, равен порядку h; иными словами, любой нетривиальный элемент из H индуцирует при сопряжении в G расщепляющий автоморфизм подгруппы F. (F_4) Подгруппа H порождается элементами порядка 3. В частности, показывается, что ранг любого главного фактора группы G внутри F не превосходит четырех. Если G — конечная группа Фробениуса, то условие (F_3) — следствие условий (F_1) и (F_2). Для бесконечных групп с условиями (F_1) и (F_2) условие (F_3) может не выполняться, и группой Фробениуса мы будем называть группу, для которой выполнены все три условия (F_1)–(F_3). Основной результат статьи дает описание периодических групп Фробениуса, обладающих свойством (F_4).

Ключевые слова: периодическая группа, группа Фробениуса, свободное действие, расщепляющий автоморфизм.

1. Введение

В работе исследуется строение периодических групп, удовлетворяющих следующим условиям:

(F_1) Группа G является полупрямым произведением подгруппы F на подгруппу H, где

(F_2) H действует свободно на F относительно сопряжения в G, т. е. $f^h = f$ для элементов $f \in F$, $h \in H$ только в случаях $f = 1$ или $h = 1$. Иными словами, H действует на F как группа регулярных автоморфизмов.

(F_3) Порядок любого элемента $g \in G$ вида $g = fh$, где $f \in F$, $1 \neq h \in H$, равен порядку h; иными словами, любой нетривиальный элемент из H индуцирует при сопряжении в G расщепляющий автоморфизм подгруппы F.

(F_4) Подгруппа H порождается элементами порядка 3.

Если G — конечная группа, то условие (F_3) — следствие условий (F_1) и (F_2) и группа G является группой Фробениуса. Для бесконечных групп с условиями (F_1) и (F_2) условие (F_3) может не выполняться, и группой Фробениуса мы будем называть группу, для которой выполнены все три условия (F_1)–(F_3).

---

[1] Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1., проект № 0314-2016-001.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — периодическая группа, удовлетворяющая условиям (F_1)–(F_4). Тогда*

1. *Подгруппа H конечна, и либо $H \simeq SL_2(p)$, где $p = 3$ или $p = 5$, либо H циклическая порядка 3.*

2. *Если $H = \langle h \rangle$ — циклическая группа порядка 3, то F нильпотентна ступени 2 (т. е. $[[f_1, f_2], f_3] = 1$ для всех $f_1, f_2, f_3 \in F$) и любой главный фактор C группы G внутри F является элементарной абелевой группой порядка p или p^2 для некоторого простого $p \neq 3$.*

3. *Если $H \simeq SL_2(3)$, то F абелева и каждый главный фактор C группы G внутри F является элементарной абелевой группой порядка p^2 для некоторого простого числа $p > 3$.*

4. *Если $H \simeq SL_2(5)$, то F абелева и любой главный фактор группы G внутри F является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа $p > 5$.*

При этом, если p^2-1 делится на 5, то размерность C как $HGF(p)$-модуля равна двум, в противном случае размерность C равна 4.

Определение 1. Пусть F, F_1, F_2 — нормальные подгруппы группы G и F_2 — собственная подгруппа в F_1. Факторгруппа $V = F_1/F_2$ называется *главным фактором* группы G, если любая нормальная подгруппа F_3 группы G, содержащаяся в F_1 и содержащая F_2, совпадает с F_1 или F_2. Если при этом $F_1 \leqslant F$, то V называется *главным фактором группы G внутри F*.

Определение 2. Пусть группа H действует на группе F. Это действие называется *свободным*, если образ f^h элемента $f \in F$ под действием $h \in H$ совпадает с f, только если $f = 1$ или $h = 1$. Другими словами, H действует на F как группа регулярных автоморфизмов.

Определение 3. Автоморфизм a конечного порядка $n \neq 1$ группы F называется *расщепляющим автоморфизмом*, если $f \cdot f^a \cdot \dots \cdot f^{a^{n-1}} = 1$ для любого элемента $f \in F$.

Определение 4. В настоящей работе *группой Фробениуса G* называется полупрямое произведение $G = F \leftthreetimes H$ нетривиальных групп F и H, для которых выполнены следующие условия:

(а) H действует свободно на F;

(б) любой отличный от единицы элемент $h \in H$ конечного порядка действует на F как расщепляющий автоморфизм.

Группа F в этом случае называется *ядром*, а H — *дополнением* группы Фробениуса G.

Для конечных групп F и H это определение эквивалентно обычному определению группы Фробениуса; для бесконечных групп часто используются другие определения, не эквивалентные этому.

2. Предварительные результаты

Лемма 1. *Пусть конечная группа H действует свободно на абелевой группе F. Тогда:*

(а) *Естественное полупрямое произведение $G = F \leftthreetimes H$ является группой Фробениуса с ядром F и дополнением H.*

(б) *Если группа F периодическая, то любой главный фактор V группы G внутри F является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p, взаимно простого с $|H|$, и H действует свободно и неприводимо на V при сопряжении в G.*

$\lhd$ (а): Нужно только проверить условие (F_3) из определения группы Фробениуса.

Пусть $g = fh$, где $f \in F$, $1 \neq h \in H$, и порядок h равен n. Тогда

$$(fh)^n = fh \cdot fh \cdot fh \cdots fh = f \cdot hfh^{-1}h^2fh^{-2}h \cdots fh = ff^{h^{n-1}}f^{h^{n-2}} \cdots f^h$$

и

$$((fh)^n)^h = f^h f^{h^n} f^{h^{n-1}} \cdots f^{h^2} = (fh)^n$$

в силу коммутативности F. Так как h действует на F без неподвижных точек, то $(fh)^n = 1$.

(б) Пусть F_1/F_2 — главный фактор G внутри F. Можно считать, что $F_1 = F$ и $F_2 \neq 1$. Из коммутативности F и конечности H вытекает, что $V = F/F_2$ — конечная элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа p. Если $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ — минимальный набор порождающих группы V, $V_0 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — множество некоторых прообразов элементов $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ в F, то $V_1 = \langle V_0^H \rangle$ — конечно порожденная H-инвариантная подгруппа в F и группа $V_1/V_1 \cap F_2$ изоморфна как H-модуль группе V. Поэтому можно считать, что F конечно порождена. Так как группа F по условию периодическая, то она конечна, и G — группа Фробениуса. Для этого случая справедливость заключения леммы хорошо известна. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть нетривиальная периодическая группа G, порожденная элементами порядка 3, действует свободно на нетривиальной абелевой группе. Тогда G конечна и изморфна либо $SL_2(5)$, либо $SL_2(3)$, либо циклической группе порядка 3.*

$\lhd$ Лемма является частным случаем теоремы 1 из [1]. $\rhd$

Лемма 3 [2]**.** *Нетривиальная группа X, допускающая расщепляющий автоморфизм порядка 3, нильпотентна ступени, не превосходящей числа 3, и порядок каждого нетривиального элемента из третьего члена нижнего центрального ряда группы X равен 3.*

Лемма 4. *Пусть G — группа Фробениуса, порожденная элементами порядка 3. Тогда либо дополнение Фробениуса H группы G является циклической группой порядка 3 и при этом ядро F группы G нильпотентно ступени 1 или 2, либо ядро H изоморфно $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$ и F — абелева группа.*

$\lhd$ Пусть F — ядро Фробениуса группы G, h — элемент порядка 3 из H. Тогда h индуцирует в F при сопряжении в G расщепляющий автоморфизм. По лемме 3 F нильпотентна и период третьего члена $F_3 = [F, F, F]$ нижнего центрального ряда группы F равен 3. Так как h при сопряжении в G индуцирует в F_3 регулярный автоморфизм, то $F_3 = 1$, т. е. ступень нильпотентности F не превосходит двух. Подгруппа H действует свободно на центре Z группы F, и по лемме 2 H удовлетворяет заключению леммы. Если H содержит элемент t порядка 2, то $ff^t = 1$ для любого элемента $f \in F$, поэтому $f^t = f^{-1}$, откуда вытекает коммутативность F. $\rhd$

Лемма 5. *Пусть конечная группа H действует на модуле V над полем P, характеристика которого не делит $|H|$. Это действие является свободным тогда и только тогда, когда для любой циклической подгруппы $A \leqslant H$ простого порядка верно равенство*

$$s = \sum_{a \in A} \chi(a) = 0,$$

где χ — характер представления H на V.

$\lhd$ Доказательство тривиально, поскольку $s/|H|$ равно размерности пространства неподвижных точек подгруппы A в V. $\rhd$

Лемма 6. *Пусть $H = SL_2(3)$ (соответственно, $H = SL_2(5)$) и P — поле, характеристика которого не делит $|H|$. Тогда существует единственный с точностью до подобия* *(и алгебраической сопряженности) (абсолютно) неприводимый HP-модуль V, на котором H действует свободно. При этом $\dim(V) = 2$ и значения характера V на элементах H лежат в поле P (соответственно, в поле $P(\lambda)$, где λ — корень полинома $x^2 + x - 1$).*

$\lhd$ Доказательство вытекает из леммы 6 и соответствующих вычислений таблицы характеров групп $SL_2(3)$ и $SL_2(5)$, доступных в GAP [3] с помощью команд:

```
H:=SL(2,3); (соответственно, H:=SL(2,5);) C:=CharacterTable(C);
Display(C);
```

Таблица 1

Характеры $SL_2(3)$

	$1a$	$2a$	$4a$	$3a$	$6a$	$3b$	$6b$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ε	ε	ε^2	ε^2
χ_3	1	1	1	ε^2	ε^2	ε	ε
χ_4	3	3	-1	.	.	.	.
χ_5	2	-2	.	-1	1	-1	1
χ_6	2	-2	.	$-\varepsilon$	ε	$-\varepsilon^2$	ε^2
χ_7	2	-2	.	$-\varepsilon^2$	ε^2	$-\varepsilon$	ε

Здесь ε — корень полинома $x^2 + x + 1$.

Таблица 2

Характеры $SL_2(5)$

	$1a$	$10a$	$10b$	$2a$	$5a$	$5b$	$3a$	$6a$	$4a$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	2	σ	σ^*	-2	$-\sigma$	$-\sigma^*$	-1	1	.
χ_3	2	σ^*	σ	-2	$-\sigma^*$	$-\sigma$	-1	1	.
χ_4	3	σ^*	σ	3	σ^*	σ	.	.	-1
χ_5	3	σ	σ^*	3	σ	σ^*	.	.	-1
χ_6	4	-1	-1	4	-1	-1	1	1	.
χ_7	4	1	1	-4	-1	-1	1	-1	.
χ_8	5	.	.	5	.	.	-1	-1	1
χ_9	6	-1	-1	-6	1	1	.	.	.

Здесь σ и σ^* — различные корни полинома $x^2 + x - 1$.

Для $SL_2(3)$ искомым модулем является модуль, соответствующий характеру χ_5. Значения этого характера лежат в P.

Для $SL_2(5)$ искомым модулем является один из модулей, соответствующих характерам χ_2 и χ_3 (они алгебраически сопряжены). Значения его характера лежат в поле $P(\varepsilon + \varepsilon^{-1})$, где ε — примитивный корень пятой степени из единицы, т. е. корень полинома

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^2\left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x^2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1\right).$$

Поскольку $\varepsilon + \varepsilon^{-1} \neq 0$, то $\varepsilon + \varepsilon^{-1}$ — корень полинома $x^2 + x - 1$. $\rhd$

Лемма 7. *Пусть χ — характер абсолютно неприводимого представления X конечной группы над полем простой характеристики p. Тогда X эквивалентно некоторому представлению над полем $GF(p)(\chi)$.*

$\lhd$ Доказательство вытекает из [4, следствие 9.23]. $\rhd$

3. Доказательство теоремы

Пусть $G = F \rtimes H$ — группа, удовлетворяющая условиям теоремы. По лемме 4 либо $|H| = 3$ и F — нильпотентная группа ступени 1 или 2, либо $H \simeq SL_2(3)$ или $H \simeq SL_2(5)$ и F абелева. В любом случае по лемме 1 H действует свободно на любом главном факторе V группы G внутри F, и этот фактор является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p, взаимно простого с $|H|$.

Если $H = \langle h \rangle$ — циклическая группа порядка 3 и $v \in V$, то $vv^hv^{h^2} = 1$, откуда $v^{h^2} \in \langle v, v^h \rangle$ и V — группа порядка p или p^2. В этом случае теорема доказана.

Пусть $H \simeq SL_2(3)$. Тогда V — неприводимый H-модуль, на котором H действует свободно. По леммам 6 и 7 размерность V равна 2, и в этом случае теорема доказана.

Пусть $H \simeq SL_2(5)$. По леммам 6 и 7 размерность V равна двум, если корни полинома $x^2 + x - 1$ лежат в $GF(p)$, и равна четырем в противном случае. Если ε — примитивный корень степени 5 из единицы, то, как показано выше, $\varepsilon+\varepsilon^{-1}$ — корень полинома x^2+x-1, и поэтому $\varepsilon+\varepsilon^{-1} \in GF(p)$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon \in GF(p^2)$, т. е. когда 5 — делитель числа $p^2 - 1$. Это доказывает теорему.

Литература

1. *Мазуров В. Д.* Обобщение теоремы Цассенхауза // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, № 1.—С. 40–52.
2. *Журтов А. Х.* О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн.—2000.—Т. 41, № 2.—С. 329–338.
3. GAP: Groups, algorithms, and programming.—http://www/gap-system.org.
4. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups.—Providence (R. I.): American Math. Soc. Chelsea Publ., 2006.—304 p.

Статья поступила 19 января 2018 г.

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. Соболева СО РАН
главный научный сотрудник лаборатории теории групп
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4
E-mail: mazurov@math.nsc.ru

Журтов Арчил Хазешович
Кабардино-Балкарский государственный университет
РОССИЯ, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений
E-mail: zhurtov_a@mail.ru

Лыткина Дарья Викторовна
Сибирский гос. ун-т телекоммуникаций и информатики
РОССИЯ, 630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86,
профессор кафедры высшей математики

Новосибирский государственный университет
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
доцент кафедры алгебры и математической логики
E-mail: daria.lytkin@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 80–85

ON INFINITE FROBENIUS GROUPS

Mazurov V. D.[1], Zhurtov A. K.[2], Lytkina D. V.[3,4]

[1] Sobolev Institute of Mathematics; [2] Kabardino-Balkar State University;
[3] Siberian State University of Telecommunications and Information Sciences;
[4] Novosibirsk State University

Abstract. We study the structure of a periodic group G satisfying the following conditions: (F_1) The group G is a semidirect product of a subgroup F by a subgroup H; (F_2) H acts freely on F with respect to conjugation in G, i. e. for $f \in F$, $h \in H$ the equality $f^h = f$ holds only for the cases $f = 1$ or $h = 1$. In other words H acts on F as the group of regular automorphisms. (F_3) The order of every element $g \in G$ of the form $g = fh$ with $f \in F$ and $1 \neq h \in H$ is equal to the order of h; in other words, every non-trivial element of H induces with respect to conjugation in G a splitting automorphism of the subgroup F. (F_4) The subgroup H is generated by elements of order 3. In particular, we show that the rank of every principal factor of the group G within F is at most four. If G is a finite Frobenius group, then the conditions (F_1) and (F_2) imply (F_3). For infinite groups with (F_1) and (F_2) the condition (F_3) may be false, and we say that a group is Frobenius if all three conditions (F_1)–(F_3) are satisfied. The main result of the paper gives a description of a periodic Frobenius groups with the property (F_4).

Key words: periodic group, Frobenius group, free action, splitting automorphism.

References

1. *Mazurov V. D.* A Generalization of a Theorem of Zassenhaus, *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [Vladikavkaz Math. J.], 2008, vol. 10, no. 1, pp. 40–52 (in Russian).
2. *Zhurtov A. Kh.* On Regular Automorphisms of Order 3 and Frobenius Pairs, *Siberian Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 2, pp. 268–275. DOI: 10.1007/BF02674596.
3. *GAP: Groups, Algorithms, and Programming*, http://www/gap-system.org.
4. *Isaacs I. M. Character Theory of Finite Groups*, Providence (R. I.), American Math. Soc. Chelsea Publ., 2006, 304 p.

Received January 19, 2018

Viktor D. Mazurov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug av., Novosibirsk 630090, Russia
E-mail: `mazurov@math.nsc.ru`

Archil Kh. Zhurtov
Kabardino-Balkar State University,
173 Chernyshevskogo st., Nalchik 360004, Russia
E-mail: `zhurtov_a@mail.ru`

Daria V. Lytkina
Siberian State University of Telecommunications
and Information Sciences,
86 Kirova st., Novosibirsk 630102, Russia
Novosibirsk State University,
2 Pirogova st., Novosibirsk 630090, Russia
E-mail: `daria.lytkin@gmail.com`
http://orcid.org//0000-0003-3028-8490

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 86–94

УДК 517.5+517.9
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14725

CHARACTERIZATIONS OF FINITE DIMENSIONAL ARCHIMEDEAN VECTOR LATTICES

F. Polat[1], **M. A. Toumi**[2]

[1] Cankiri Karatekin University; [2] University of Carthage

To Professor Anatoly Kusraev
with warmest wishes on the occasion
of his 65th anniversary

Abstract. In this paper, we give some necessary and sufficient conditions for an Archimedean vector lattice A to be of finite dimension. In this context, we give three characterizations. The first one contains the relation between the vector lattice A to be of finite dimension and its universal completion A^u. The second one shows that the vector lattice A is of finite dimension if and only if one of the following two equivalent conditions holds : (a) every maximal modular algebra ideal in A^u is relatively uniformly complete or (b) $\mathrm{Orth}(A, A^u) = Z(A, A^u)$ where $\mathrm{Orth}(A, A^u)$ and $Z(A, A^u)$ denote the vector lattice of all orthomorphisms from A to A^u and the sublattice consisting of orthomorphisms π with $|\pi(x)| \leqslant \lambda|x|$ $(x \in A)$ for some $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$, respectively. It is well-known that any universally complete vector lattice A is of the form $C^\infty(X)$ for some Hausdorff extremally disconnected compact topological space X. The point $x \in X$ is called σ- isolated if the intersection of every sequence of neighborhoods of x is a neighborhood of x. The last characterization of finite dimensional Archimedean vector lattices is the following. Let A be a vector lattice and let $A^u (= C^\infty(X))$ be its universal completion. Then A is of finite dimension if and only if each element of X is σ-isolated. Bresar in [1] raised a question to find new examples of zero product determined algebras. Finally, as an application, we give a positive answer to this question.

Key words: hyper-Archimedean vector lattice, f-algebra, universally complete vector lattice.
Mathematical Subject Classification (2000): 47B60, 16E40.

1. Introduction

Throughout the paper, $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ denote real numbers and complex numbers, respectively and let $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. For a set A, A^n denotes the cartesian product $A \times \underbrace{\ldots}_{n \text{ times}} \times A$, $n \in \mathbb{N}$.

The Gelfand–Mazur Theorem states that if A is an associative normed real division algebra, then A is isomorphic to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ or the quaternion field. For the details, we refer to [2]. For the case of lattice-ordered algebras, Huijsmans [3] proved that an Archimedean lattice-ordered algebra with unit element $e > 0$ in which every positive element has a positive inverse is lattice and algebra isomorphic to $\mathbb{R}$. Uyar [4] gave an alternative proof to the result of Huijsmans for Banach lattice algebras. Later on, these two results are generalized and combined in [5] by using an easy observation as follows:

Theorem 1. *Let A be an Archimedean lattice-ordered algebra with unit element $e > 0$. Then the following statements are equivalent:*

(i) *Every positive element has a positive inverse.*

(ii) *A is a d-algebra and every positive element has a positive inverse.*

(iii) *A is an f-algebra and each positive element has a positive inverse.*

(iv) *A is an almost f-algebra and each positive element has an inverse.*

(v) *A is an almost f-algebra and each nonzero element has an inverse.*

(vi) *A is order and algebra isomorphic to $\mathbb{R}$.*

If one of the statements above is satisfied and A is a normed lattice-ordered algebra with $\|e\| = 1$, then A is also isometric to $\mathbb{R}$.

As far as we know, no attention at all has been paid in the literature to the problem when a lattice-ordered algebra is of finite dimension. The aim of this paper is to give a positive answer to this problem. In connection with our problem, Bresar studied the class of finite dimensional spaces which are zero product determined. Recall that an algebra A over a field $\mathbb{K}$ is said to be *zero product determined* if for every bilinear map $f : A \times A \to B$, where B is an arbitrary vector space over $\mathbb{K}$, with the property that for all $x, y \in A$, $f(x, y) = 0$ whenever $xy = 0$, is of the form $f(x, y) = \Phi(xy)$ for some linear map $\Phi : A \to B$. This concept was introduced in [1]. The original motivation for this concept was problems on the zero product preserving linear maps. Recently, Bresar [1] proved the following result.

Theorem 2. *A finite dimensional algebra is zero product determined if and only if it is generated by idempotents.*

Bresar pointed out that the main purpose of the paper [1] was to find new examples of zero product determined algebras, but ultimately it is restricted to an unexpected characterization of finite-dimensional algebras that are generated by idempotents and the initial problem of finding new examples still remains open. Moreover, the problem of finding other classes of algebras for which the characterization of Theorem 1 holds is fully open.

As an application of our study, we will give a new class of non-finite dimensional zero product algebras for which the characterization of the previous theorem holds.

2. Preliminaries

In order to avoid unnecessary repetitions, we assume that all vector lattices under consideration are *Archimedean*.

In the following lines, we recall some definitions and basic facts about vector lattices, lattice-ordered algebras and multilinear maps.

For the unexplained terminology on vector lattices, lattice-ordered algebras and multilinear maps, we refer the reader to [6, 7, 8, 9].

Given a vector lattice A, the set $A^+ = \{a \in A : a \geqslant 0\}$ is called *the positive cone* of A. Let $a, e \in A^+$, then e is called a *component* of a if $e \wedge (a - e) = 0$.

An algebra A which is simultaneously a vector lattice such that the partial ordering and the multiplication in A are compatible, that is $a, b \in A^+$ implies $ab \in A^+$, is called *lattice-ordered algebra* (briefly a *ℓ-algebra*). An ℓ-algebra A is called an *f-algebra* if A verifies the property that $a \wedge b = 0$ and $c \geqslant 0$ imply $ac \wedge b = ca \wedge b = 0$. Any f-algebra is automatically commutative and has positive squares. An ℓ-algebra A is called an *almost f-algebra* whenever it follows from $a \wedge b = 0$ that $ab = ba = 0$. An ℓ-algebra A is called a *d-algebra* if A verifies the property that $a \wedge b = 0$ and $c \geqslant 0$ imply $ac \wedge bc = ca \wedge cb = 0$.

The vector lattice A is called *Dedekind complete* if for each non-empty subset B of A which is bounded above, sup B exists in A. The vector lattice A is called *laterally complete* if every orthogonal system in A has a supremum in A. If A is Dedekind complete and laterally complete, then A is called *universally complete*. Every vector lattice A has a *universal completion* A^u, this means that there exists a unique (up to a lattice isomorphism) universally complete vector lattice A^u such that A can be identified with an order dense sublattice of A^u (see [6, Section 8, Exercise 13] for an interesting approach to the existence of the universal completion by using orthomorphisms).

A vector lattice A is said to have *the countable sup property*, if whenever an arbitrary subset D has a supremum, then there exists an at most countable subset C of D with $\sup C = \sup D$. A Dedekind complete vector lattice with the countable sup property is called *super Dedekind complete* vector lattice.

Let A be a vector lattice. A subset S of A^+ is called an *orthogonal system of* A if $0 \notin S$ and $u \wedge v = 0$ for each pair (u, v) of distinct elements in S. It follows from Zorn's lemma that every orthogonal system of A is contained in a maximal orthogonal system.

A subset S in a vector lattice E is called *solid* if it follows from $|u| \leqslant |v|$ in E and $v \in S$ that $u \in S$. A solid vector subspace of a vector lattice is called *an ideal*. The ideal P in a vector lattice is *prime* whenever it follows from $\inf(a, b) \in P$ that at least one of $a \in P$ or $b \in P$ holds. A *principal ideal* of a vector lattice E is any ideal generated by a singleton $\{u\}$ denoted by E_u. Clearly, $E_u = \{v \in E : \exists \lambda \geqslant 0 \text{ such that } |v| \leqslant \lambda |u|\}$.

An order closed ideal in a vector lattice is called *a band*. A band B of a vector lattice E is said to be a *projection band* if $B \oplus B^d = E$ where B^d denotes *the disjoint complement of* B. A vector lattice has *the projection property* if every band is a projection band.

Let A be a vector lattice and $v \in A^+$. Then the sequence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A is called (v) *relatively uniformly convergent* to $a \in A$ if for every real number $\varepsilon > 0$, there exists a natural number n_ε such that $|a_n - a| \leqslant \varepsilon v$ for all $n \geqslant n_\varepsilon$. This will be denoted by $a_n \to a\ (v)$. If $a_n \to a\ (v)$ for some $0 \leqslant v \in A$, then the sequence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is called (*relatively*) *uniformly convergent* to a, which will be denoted by $a_n \to a\ (r.u)$. The notion of (v) (*relatively*) *uniformly Cauchy* sequence is defined in the obvious way. A vector lattice is called (*relatively) uniformly complete* if every relatively uniformly Cauchy sequence in A has a unique limit. Relatively uniformly limits are unique if A is Archimedean.

Let A and B be vector lattices. A multilinear map $\Psi : A^n \to B$ is said to be *positive* whenever $(a_1, \ldots, a_n) \in (A^+)^n$ implies $\Psi(a_1, \ldots, a_n) \in B^+$. A multilinear map Ψ is said to be *orthosymmetric* if for all $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ such that $a_i \wedge a_j = 0$ for some $1 \leqslant i, j \leqslant n$ implies $\Psi(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

3. Main results

We start with some auxiliary results which will be used in the sequel.

Proposition 1. *Let A be a vector lattice and $n \in \mathbb{N}$. Then the followings are equivalent:*
1) *$A = I_1 \oplus I_2 \oplus \ldots \oplus I_n$ for some simple order ideals $I_1, I_1, \ldots, I_n$ in A.*
2) *$A = \mathbb{R}x_1 \oplus \mathbb{R}x_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}x_n$ for some elements $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$.*

$\lhd$ (1)$\Rightarrow$(2) Since I_i is simple for each $i = 1, 2 \ldots, n$, and according to [3, Proposition 1], it follows that $I_i = \mathbb{R}x_i$ for some elements $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$. Consequently, $A = \mathbb{R}x_1 \oplus \mathbb{R}x_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}x_n$ for some $n \in \mathbb{N}$ and some elements $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$.

(2)$\Rightarrow$(1) This direction is trivial. $\rhd$

Definition 1. The depth of a vector lattice is the supremum (possibly infinite) of the lengths of maximal orthogonal system.

Proposition 2. *Let A be a vector lattice. Then the followings are equivalent:*

1) *A has the projection property and its depth is finite;*

2) *$A = \mathbb{R}x_1 \oplus \mathbb{R}x_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}x_n$ for some $n \in \mathbb{N}$ and some elements $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$.*

$\lhd$ (1)$\Rightarrow$(2): Let $n \in \mathbb{N}$ be the depth of A and $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ be the maximal orthogonal system of length n in A. Since A has the projection property, $A = \{e_1\}^{dd} \oplus \{e_2\}^{dd} \oplus \ldots \{e_i\}^{dd} \oplus \ldots \oplus \{e_n\}^{dd}$. Let $1 \leqslant i \leqslant n$ be fixed and $y \in \{e_i\}^{dd}$. Then $y = y^+ - y^-$ where $y^+, y^- \in \{e_i\}^{dd}$. Let $f_1 = \pi_{\{y^+\}^{dd}}(e_i)$ and $f_2 = \pi_{\{y^+\}^{d}}(e_i)$ where $\pi_{\{y^+\}^{dd}}$ and $\pi_{\{y^+\}^{d}}$ are the band projections on $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ with ranges $\{y^+\}^{dd}$ and $\{y^+\}^{d}$, respectively. It is easy to see that the system $\{e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, f_1, f_2, e_{i+1}, \ldots, e_n\}$ is an orthogonal system of length $n+1$. Therefore, either $f_1 = 0$ or $f_2 = 0$.

Case 1: If $f_1 = 0$, then $e_i = f_2 \in \{y^+\}^d$. Hence $\{y^+\}^{dd} \subset \{e_i\}^{dd} \subset \{y^+\}^d$ and so $y^+ = 0$.

Case 2: If $f_2 = 0$, then $e_i = f_1 \in \{y^+\}^{dd}$. Hence $\{y^-\}^{dd} \subset \{e_i\}^{dd} \subset \{y^+\}^{dd} \subset \{y^-\}^d$ and so $y^- = 0$.

Then, the band $\{e_i\}^{dd}$ is totally ordered for all $1 \leqslant i \leqslant n$. By [3, Proposition 1], $\{e_i\}^{dd} = \mathbb{R}e_i$ for all $1 \leqslant i \leqslant n$. Then $A = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}e_n$ for some $n \in \mathbb{N}$.

The implication (2)$\Rightarrow$(1) is trivial. $\rhd$

To clarify next result, we give the following well-known lemma.

Lemma 1. *Let A be a universally complete vector lattice with a weak order unit e. Then there exists a unique multiplication on A such that A is an f-algebra with e as a unit element.*

Definition 2. A vector lattice A is said to be *hyper-Archimedean* if all quotient spaces E/I, where I is an order ideal in A, are Archimedean.

Several characterizations of hyper-Archimedean vector lattices are known (see, for example, [10], [11, Theorem 37.6, 61.1 and 61.2]). We collect some of them in the following lemma.

Lemma 2. *A vector lattice A is hyper-Archimedean if and only if any of the following equivalent conditions holds.*

(i) *Every prime ideal in A is a maximal ideal.*

(ii) *Every ideal in A is uniformly closed.*

(iii) *The span of the set of all components of u is the principal ideal generated by u for all $u \in A^+$.*

Definition 3. A lattice-ordered algebra A is called *Artinian* (respectively, *super Artinian*) if A satisfies the descending chain condition on order ideals (respectively, on bands).

Definition 4. A lattice-ordered algebra A is called *Noetherian* (respectively, *super Noetherian*) if A satisfies the ascending chain condition on order ideals (respectively, on bands).

Definition 5. Let A be a vector lattice. An element x of A is said to be *super atomic* if the oder ideal A_x generated by x is of finite dimensional.

We now give the following result which shows the relation between the dimensions of a vector lattice and its universal completion.

Proposition 3. *Let A be a vector lattice and A^u be its universal completion. Then A is finite dimension if and only if A^u is finite dimension.*

$\lhd$ Let A be a finite dimension vector lattice. Since A is finite dimension and the elements of any finite orthogonal system of A are linearly independent, it follows that A has $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ as a maximal orthogonal system of length n. Let $y \in \{e_i\}^{dd}$ for a fixed index i with $1 \leqslant i \leqslant n$. Then $y = y^+ - y^-$ with $y^+, y^- \in \{e_i\}^{dd}$. If $y^+ \neq 0$ and $y^- \neq 0$, it is easy to see that the system $\{e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, y^+, y^-, e_{i+1}, \ldots, e_n\}$ is an orthogonal system of length $n+1$, which is a contradiction. Hence, $y^+ = 0$ or $y^- = 0$. Then, the band $\{e_i\}^{dd}$ is totally ordered for all $1 \leqslant i \leqslant n$. By [3, Proposition 1], $\{e_i\}^{dd} = \mathbb{R}e_i$ for all $1 \leqslant i \leqslant n$. Hence, the band generated by e_i in A^u will be equal to $\mathbb{R}e_i$. Then $A^u = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}e_n$ for some $n \in \mathbb{N}$. Hence A^u is finite dimension. Conversely, if A^u is finite dimension, then so is clearly A. $\rhd$

Remark 1. If a vector lattice A is finite dimension then $A = A^u$.

We now have all ingredients to give the first main result of this section.

Theorem 3. *Let A be a vector lattice and A^u be its universal completion. Then the followings are equivalent:*

(1) *A has the projection property and its depth is finite.*

(2) *$A = I_1 \oplus I_2 \oplus \ldots \oplus I_n$ for some simple order ideals $I_1, I_2, \ldots, I_n$ in A, and $n \in \mathbb{N}$.*

(3) *A^u is super Dedekind complete and Artinian.*

(4) *A^u is super Dedekind complete and super Artinian.*

(5) *A^u is super Dedekind complete and Noetherian.*

(6) *A^u is super Dedekind complete and super Noetherian.*

(7) *A^u has at least one super atomic weak order unit.*

(8) *A is finite dimension.*

$\lhd$ (1)$\Rightarrow$(2) This follows from Propositions 1 and 2.

(2) $\Rightarrow$ (3) Since $A = \mathbb{R}x_1 \oplus \mathbb{R}x_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}x_n$ for some $n \in \mathbb{N}$ and some elements $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, it follows that $A^u = A$. Hence, the set of all order ideals of A is finite and then A is Artinian.

(3)$\Rightarrow$(4) This path is trivial.

(4)$\Rightarrow$(6) Let $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be an increasing sequence of bands in A^u. Then $\left(B_n^d\right)_{n\in\mathbb{N}}$ is a decreasing sequence of bands in A^u. By the fact that A is super Artinian, it follows that there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $B_n^d = B_{n_0}^d$ for all $n \geqslant n_0$. Consequently, $B_n = B_{n_0}$ for all $n \geqslant n_0$. Therefore A^u is super Notherian.

(6)$\Rightarrow$(7) Let $S = \{e_i : i \in I\}$ be a maximal orthogonal system in A^u. Then $e = \sup\{e_i : i \in I\}$ is a weak order unit of A^u. Since A^u is super Dedekind complete, it follows that there exists an at most countable subset $T = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ of S such that $e = \sup\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Let $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be an increasing sequence of bands in A^u where $B_n = \{\bigvee_{1\leqslant i\leqslant n} e_i\}^{dd}$. Since A^u is super Notherian, it follows that there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $B_n = B_{n_0}$ for all $n \geqslant n_0$. Consequently, $\{\bigvee_{1\leqslant i\leqslant n_0} e_i\}^{dd} = \{\bigvee_{1\leqslant i\leqslant n} e_i\}^{dd}$ for all $n \geqslant n_0$. Therefore, $e_n = 0$ for all $n > n_0$ and then S is a finite set. Let $S = \{f_{j_n}, j_n \in J_n\}$ be an orthogonal system of A^u such that $e_n = \sup\{f_{j_n}, j_n \in J_n\}$ for all $1 \leqslant n \leqslant n_0$. Since the set $S' = \{f_{j_n}, j_n \in J_n, 1 \leqslant n \leqslant n_0\}$ is a maximal orthogonal system of A^u, it follows that S' is a finite set. Using the same argument with each f_{j_n}, we deduce that there exist $m_0 \in \mathbb{N}$ and a maximal orthogonal system $K = \{k_n, 1 \leqslant n \leqslant m_0\}$ of A^u with $e = \sup\{k_n, 1 \leqslant n \leqslant m_0\}$ such that K will be the finest orthogonal system meaning that we cannot use the decomposition process another time. Consequently, $A_e^u = A_{k_1}^u \oplus A_{k_2}^u \oplus \ldots \oplus A_{k_{m_0}}^u$. Let $1 \leqslant n \leqslant n_0$ and let $0 \leqslant x \leqslant k_n$. Let $H_{k_n} = \left\{y \in A_{k_n}^u, y = \sum_{1\leqslant i\leqslant m} \alpha_i h_i \text{ where } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ and } h_i \text{ is a component of } k_n\right\}$. It is not hard to prove that H_e is a hyper-Archimedean vector sublattice of A^u. Since K is a finest orthogonal system, it follows that the set of all components of k_n is $\{0, k_n\}$.

By Freudenthal Spectral Theorem, there exists $x_m = \sum_{1\leqslant i\leqslant m} \alpha_i h_i = \alpha_m k_n$ with $x_n \to x$ $(r.u)$. Therefore, there exists $\alpha_n \in \mathbb{R}$ such that $x = \alpha_n k_n$. Hence, $H_{k_n} = A_{k_n}^u$ for all $1 \leqslant n \leqslant n_0$.

Since any relatively uniformly complete hyper-Archimedean vector lattice is of finite dimension (see [11, Theorems 37.6, 61.4], [12, Theorem 3]), and $A_{k_n}^u$ is relatively uniformly complete, it follows that A_e^u is of finite dimension. Therefore, e is super atomic.

(7) ⇒ (8) Let e be a super atomic weak order unit of A^u. Then A^u_e is of finite dimension. Since $x \wedge ne \to x\,(r.u)$ for all $0 \leqslant x \in A^u$, it follows that A^u is of finite dimension.

(8) ⇔ (1) This equivalence is trivial.

(1) ⇒ (5) Since A^u is of finite dimension, the set of all order ideals of A^u is finite and then A^u satisfies the ascending chain condition on ideals and so we are done. ▷

Let A be a vector lattice and E be a vector sublattice of A. A positive linear operator $\pi : E \to A$ is said to be a *positive orthomorphism* if $\pi\,(x) \wedge y = 0$ whenever $x \wedge y = 0$ for each $x, y \in E$. An *orthomorphism* is the difference of two positive orthomorphisms. $\mathrm{Orth}(E, A)$ will denote the vector lattice of all orthomorphisms from E to A. $Z\,(E, A)$ will denote the sublattice of $\mathrm{Orth}(E, A)$ consisting of those π for which there is a non-negative real λ with

$$-\lambda x \leqslant \pi\,(x) \leqslant \lambda x$$

for all $x \in E^+$. Let A be a lattice-ordered algebra. $M(A)$ denotes the set of all maximal two-sided algebra ideals. We consider a subset $m(A)$ of $M(A)$ consisting of relatively uniformly closed ideals.

All prerequisites are made for the second main result of this section.

Theorem 4. *Let A be a vector lattice and let A^u be its universal completion unital f-algebra. Then the following conditions are equivalent:*

(1) *A is finite dimension.*

(2) *Every maximal modular algebra ideal in A^u is relatively uniformly closed.*

(3) $\mathrm{Orth}(A, A^u) = Z(A, A^u)$.

◁ (1) ⇒ (2) Since A is of finite dimension, then A^u is of finite dimension so that A^u becomes a Banach lattice. It is well-known that any maximal modular algebra ideal of a commutative Banach algebra is closed. So we are done.

(2) ⇒ (3) Since any maximal modular algebra ideal of A^u is relatively uniformly closed and by using the main result of [13], we deduce that $\mathrm{Orth}(A^u) = Z(A^u)$. Moreover, it is not hard to prove that $\mathrm{Orth}(A^u) = \mathrm{Orth}(A, A^u)$ and $Z(A, A^u) = Z(A^u)$.

(3) ⇒ (1) Since $\mathrm{Orth}(A^u) = \mathrm{Orth}(A, A^u)$, $Z(A, A^u) = Z(A^u)$ and $\mathrm{Orth}(A^u) = Z(A, A^u)$, it follows that $\mathrm{Orth}(A^u) = Z(A^u) = A^u$. Consequently, A^u becomes a Banach lattice and it is well-known that any Banach universally complete vector lattice is of finite dimension. Hence, A is of finite dimension and we are done. ▷

It is well-known that any universally complete vector lattice A is of the form $C^\infty\,(X)$ for some Hausdorff extremally disconnected compact topological space X (i. e. the closure of every open set of X is also open). The symbol $C^\infty\,(X)$ denotes the collection of all continuous functions $f : X \to [-\infty, +\infty]$ for which the open set $\mathrm{dom}\, f = \{x \in X :\, -\infty < f\,(x) < +\infty\}$ is dense in X. It is well-known that $C^\infty\,(X)$ can be equipped with a unital f-algebra multiplication. Moreover, $C^\infty(X)$ is a Dedekind complete f-algebra with $e := \chi_X$ as a unit element. The orthomorphisms in $C^\infty(X)$ are the pointwise multiplications, so $\mathrm{Orth}(C^\infty(X)) = C^\infty(X)$.

In order to reach our aim, we need the following;

Theorem 5 [14, 15]**.** *Given an extremally disconnected compact space X, the following properties of a point $x \in X$ are pairwise equivalent:*

(1) *The intersection of every sequence of neighborhoods of x is a neighborhood of x.*

(2) $x \in \mathrm{dom}\, f$ *for all* $f \in C^\infty(X)$.

(3) *If $f \in C^\infty(X)$ and $f(x) = 0$, then $f \equiv 0$ in some neighborhood of x.*

Definition 6. The point x is called σ-isolated (or a P-point, or bounded) whenever x enjoys any of the properties in Theorem 5.

Theorem 6 [14, 15]. *The maximal algebra ideals of $C^{\infty}(X)$ for $x \in X$ are of the form $(C^{\infty}(X))_x := \{f \in C^{\infty}(X) :\ f \equiv 0$ in some neighborhood of $x\}$.*

We now have gathered all ingredient for the third result of this section.

Theorem 7. *Let A be a vector lattice and let A^u $(= C^{\infty}(X))$ be universal completion unital f-algebra of A. Then the following conditions are equivalent:*

(1) *A is of finite dimension.*

(2) *Each element of X is σ-isolated.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2) Since A is of finite dimension, then A^u is of finite dimension; therefore A^u becomes a Banach unital f-algebra and it is well-known that any maximal algebra ideal of a commutative Banach algebra is closed. By Theorem 6, any maximal algebra ideal is of the form $(C_{\infty}(X))_x$ for some $x \in X$ and since $(C_{\infty}(X))_x$ $(C_{\infty}(X))_x$ is relatively uniformly closed, then x is σ-isolated (see [14, 15]).

(1) $\Rightarrow$ (2) Since any point of X is σ-isolated, it follows that any maximal algebra ideal of A^u is relatively uniformly closed (see [14, 15]). By the main result of [13], we deduce that $\mathrm{Orth}(A^u) = Z(A^u)$. Since $\mathrm{Orth}(A^u) = Z(A^u) = A^u, A^u$ becomes a Banach lattice and it is well-known that any Banach universally complete vector lattice is of finite dimension. Hence, A is of finite dimension and we are done. $\rhd$

Next, we will give a new class of non-finite dimension zero product algebras for which the characterization of Theorem 2 holds.

Theorem 8. *Let A be an Archimedean unital f-algebra. Then A is zero product determined if and only if A is hyper-Archimedean.*

$\lhd$ For the proof of "only if" part, we will use the same argument as in [16, Theorem 8]. Assume that every bilinear map $f : A \times A \to B$, where B is an arbitrary vector space over $\mathbb{K}$, with the property that for all $x, y \in A$, $f(x, y) = 0$ whenever $xy = 0$, is of the form $f(x, y) = \Phi(xy)$ for some linear map $\Phi : A \to B$. Suppose, per contra, that A is not hyper-Archimedean. It follows that there exists a prime ideal I which is not maximal. Hence the quotient A/I is linearly ordered space that is not isomorphic to $\mathbb{R}$ (see [11, Theorem 27.3 and 33.2]). Let $\overline{x}$, $\overline{y}$ in A/I that are linearly independent. Hence $\overline{x} + \overline{y}$, $\overline{x}$ are linearly independent. By using Zorn's Lemma, it is not hard to prove that $\overline{x}$, $\overline{y}$ are contained in a Hamel basis H_1 and $\overline{x} + \overline{y}$, $\overline{x}$ are contained in a Hamel basis H_2 such that $H_1 \neq H_2$. Then there exist two linear maps $f : A/I \to \mathbb{R}$ such that $f(\overline{x}) = 1$ and $f(\overline{y}) = -1$ and $g : A/I \to \mathbb{R}$ such that $g(\overline{x} + \overline{y}) = 1$ and $g(\overline{y}) = -1$. Let the bilinear map $\Psi : A \times A \to \mathbb{R}$ be defined by $\Psi(a, b) = f(\overline{a})g(\overline{b})$, for all $a, b \in A$. Let $a, b \in A$ such that $ab = 0$. Since I is a prime ideal, it follows that $a \in I$ or $b \in I$. Hence $\overline{a} = \overline{0}$ or $\overline{b} = \overline{0}$. Consequently, $f(\overline{a}) = 0$ or $g(\overline{b}) = 0$. Therefore $\Psi(a, b) = 0$. Hence, Ψ is orthosymmetric. Whereas, $\Psi(x, y) = f(\overline{x})g(\overline{y}) \neq f(\overline{y})g(\overline{x}) = \Psi(y, x)$. That is Ψ is not symmetric. Hence Ψ is not of the form $\Phi(xy)$ for some linear map $\Phi : A \to \mathbb{R}$, which is a contradiction.

Then "if" part remains. We will use the same argument as in [17, Theorem 1]. Let $\Psi : A \times A \to B$, where B is an arbitrary vector space over $\mathbb{K}$, with the property that for all $x, y \in A$, $\Psi(x, y) = 0$ whenever $xy = 0$.

Let $x, y \in A$. It follows that $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ and $y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j$, where e_i and f_j are components of $e = |x| + |y|$. Then

$$\Psi(x, y) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n, \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \alpha_i \beta_j \Psi(e_i, f_j). \qquad (1)$$

Let e_i^d be the disjoint complement of e_i. Hence $e = e_i + e_i^d$ where $e_i \wedge e_i^d = 0$. Then

$$f_j = f_j \wedge e = f_j \wedge \left(e_i + e_i^d\right) = \left(f_j \wedge e_i\right) + \left(f_j \wedge e_i^d\right).$$

Since $\left(f_j \wedge e_i^d\right) \wedge e_i = 0$, then $\left(f_j \wedge e_i^d\right) e_i = 0$. Consequently,

$$\Psi(e_i, f_j) = \Psi\left(e_i, \left(f_j \wedge e_i\right) + \left(f_j \wedge e_i^d\right)\right) = \Psi\left(e_i, f_j \wedge e_i\right).$$

Moreover $e_i = e_i \wedge e = e_i \wedge \left(f_j + f_j^d\right) = \left(f_j \wedge e_i\right) + \left(e_i \wedge f_j^d\right)$. Hence,

$$\Psi(e_i, f_j) = \Psi\left(e_i, f_j \wedge e_i\right) = \Psi\left(\left(f_j \wedge e_i\right) + \left(e_i \wedge f_j^d\right), f_j \wedge e_i\right).$$

Since $\left(e_i \wedge f_j^d\right) \wedge \left(f_j \wedge e_i\right) = 0$, it follows that $\left(e_i \wedge f_j^d\right)\left(f_j \wedge e_i\right) = 0$ and then

$$\Psi(e_i, f_j) = \Psi\left(f_j \wedge e_i, f_j \wedge e_i\right) = \Psi(f_j, e_i)$$

By using the same argument, we prove that

$$\Psi(e_i, f_j) = \Psi\left(e_i, f_j \wedge e_i\right) = \Psi\left(f_j \wedge e_i, f_j \wedge e_i\right) = \Psi(f_j, e_i).$$

Therefore, in view of equality (1), we have

$$\Psi(x, y) = \Psi(y, x). \tag{2}$$

Let u be the unit of A and let $z \in A$. Then the following bilinear map $\Psi_z : A \times A \to B$ defined by $\Psi_z(x, y) = \Psi(xz, y)$, for all $x, y \in A$, satisfies the property that $\Psi(x, y) = 0$ whenever $xy = 0$. Therefore, by using the argument as for Ψ, we deduce that $\Psi_z(x, y) = \Psi_z(y, x) = \Psi_x(z, y) = \Psi_x(y, z)$, for all $x, y \in A$. In particular if $z = u$, it follows that $\Psi(x, y) = \Psi_x(y, e) = \Psi(xy, e)$. Consequently, Ψ is not of the form $\Phi(xy)$, where $\Phi : A \to B$ is defined by $\Phi(x) = \Psi(x, e)$, for all $x \in A$ and we are done. $\rhd$

It should be noted that a relatively uniformly complete unital hyper-Archimedean f-algebra is of finite dimension (see [11, Theorems 37.6, 61.4], [12, Theorem 3]). Consequently, we have the following characterization.

Theorem 9. *Let A be a relatively uniformly unital f-algebra. Then the following properties are equivalent.*

(1) *A is zero product determined.*

(2) *A is hyper-Archimedean.*

(3) *A is of finite dimension.*

References

1. *Brešar M.* Finite Dimensional Zero Product Determined Algebras are Generated by Idempotents. *Expo Math.*, 2016, vol. 34, no. 1, pp. 130–143.
2. *Rickart C. E. General Theory of Algebras*, Princeton, Van Nostrand, 1960.
3. *Huijsmans C. B.* Lattice-Ordered Division Algebras. *Proc. R. Ir. Acad.*, 1992, vol. 92A, no. 2, pp. 239–241.
4. *Uyar A.* On Banach lattice algebras. *Turkish J. Math.*, 2005, vol. 29 (3), pp. 287–290. DOI: 10.1007/s11117-015-0358-0.
5. *Ercan Z., Önal S.* Some Observations on Riesz Algebras. *Positivity*, 2006, vol. 10, pp. 731–736.
6. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators*, London, Acad. Press, 1985.
7. *Bernau S. J., Huijsmans C. B.* Almost f-algberas and d-algebras. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1990, vol. 107, no. 2, pp. 287–308.
8. *Buskes G., van Rooij A.* Almost f-Algebras. Commutativity and the Cauchy–Schwarz Inequality. *Positivity*, 2000, vol. 4, pp. 227–331. DOI : 10.1016/j.exmath.2015.07.002.

9. *De Pagter B. f-Algebras and Orthomorphisms. Ph.D. Thesis*, Leiden, Leiden Univ., 1981. DOI: 10.1016/j.jmaa.2008.03.009.
10. *Luxemburg W. A. J., Moore L. C.* Archimedean Quotient Riesz Spaces. *Duke. Math. J.*, 1967, vol. 34, pp. 725–739. DOI: 10.1016/j.indag.2014.03.001.
11. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C. Vector Lattices.* I, Amsterdam, North-Holland, 1971.
12. *Huijsmans C. B.* Some Analogies Between Commutative Rings, Riesz Spaces and Distributive Lattices with Smallest Element. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser.* A77, 1974, vol 36, pp. 132–147. DOI: 10.1007/s11117-006-0047-0.
13. *Toumi M. A.* When Orthomorphisms are in the Ideal Center. *Positivity*, 2014, vol. 18 (3), pp. 579–583. DOI: 10.1007/s00012-012-0166-3.
14. *Nouki N., Toumi M. A.* Derivations on Universally Complete f-Algebras. *Indag. Math.*, 2015, vol. 26 (1), pp. 1–18.
15. *Toumi M. A.* A relationship between the space of orthomorphisms and the centre of a vector lattice revisited. *Positivity*, 2016, vol. 20, no. 2, pp. 337–342. DOI: 10.1007/s11117-013-0263-3.
16. *Marinacci M., Montrucchio L.* On concavity and supermodularity. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 344, pp. 642–654.
17. *Toumi M. A.* Characterization of Hyper-Archimedean Vector Lattices Via Disjointness Preserving Bilinear Maps. *Algebra Univers*, 2012, vol. 67, no. 1, pp. 29–42.

Received July 17, 2017

Faruk Polat
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Cankiri Karatekin University,
Uluyazi Kampusu, Cankiri 18100, Turkey
E-mail: `faruk.polat@gmail.com`

Mohamed Ali Toumi
Department of Mathematics,
Faculty of Science of Bizerte, University of Carthage
Zarzouna, Bizerte 7021, Tunisia
E-mail: `MohamedAli.Toumi@fsb.rnu.tn`

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 86–94

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АРХИМЕДОВЫХ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТОК

Полат Ф., Тоуми М. А.

Аннотация. Статья посвящена условиям конечномерности архимедовых векторных решеток. Найдены три новые характеризации таких решеток. Первая описывает конечномерность векторной решетки A на языке ее универсального пополнения A^u. Вторая утверждает, что векторная решетка конечномерна в том и только в том случае, когда выполнено одно из следующих двух условия: (а) всякий максимальный модулярный алгебраический идеал в A^u равномерно полон; (б) $\mathrm{Orth}(A, A^u) = Z(A, A^u)$, где $\mathrm{Orth}(A, A^u)$ векторная решетка всех ортоморфизмов из A в A^u, а $Z(A, A^u)$ — подрешетка, состоящая из ортоморфизмов π, удовлетворяющих условию $|\pi(x)| \leqslant \lambda|x|$ $(x \in A)$ при некотором положительном $\lambda \in \mathbb{R}$. Хорошо известно, что всякая универсально полная векторная решетка представляется в виде $C^\infty(X)$ для некоторого экстремально несвязного компакта X. Точку $x \in X$ называют σ-изолированной, если пересечение любой последовательности окрестностей точки x является окрестностью точки x. Третья характеризация состоит в том, что векторная решетка A с универсальным расширением $A^u = C^\infty(X)$ конечномерна тогда и только тогда, когда каждая точка в X σ-изолирована. В качестве приложения получен положительный ответ на вопрос Брезара о существовании новых примеров алгебр, определяемых нулевыми произведениями.

Ключевые слова: векторная решетка, f-алгебра, гипер-архимедовость, универсальная полнота.

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 95–108

УДК 517.982+517.983
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14726

ОБ ОПИСАНИИ ПРОСТРАНСТВА РИССОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ФУНКЦИЙ ИЗ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С НЕКОТОРЫМИ АПРИОРНЫМИ СВОЙСТВАМИ[1]

С. Г. Самко, С. М. Умархаджиев

Посвящается 65-летию профессора
Анатолия Георгиевича Кусраева

Аннотация. Рассматривается задача описания пространства $I^\alpha(X)$ функций, представимых риссовым потенциалом $I^\alpha\varphi$ с плотностью φ из заданного пространства X. Предполагается, что $X \subset \Phi'$, где Φ' — пространство распределений над основным классом Φ Лизоркина, инвариантным относительно риссова интегрирования, и образ $I^\alpha(X)$ понимается в смысле распределений. В такой общей постановке поясняется вопрос, при каких предположениях о пространстве X принадлежность элемента f из образа $I^\alpha(X)$ эквивалентна сходимости усеченных гиперсингулярных интегралов $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f$ в пространстве X. Для этой цели вначале указанный вопрос исследуется в контексте топологии пространства Φ. Именно, показывается, что для любого линейного подмножества X в Φ' принадлежность элемента f образу $I^\alpha(X)$ эквивалентна сходимости усеченных гиперсингулярных интегралов на множестве X в топологии пространства Φ'. Если X — банахово пространство, то переход от принадлежности образу к сходимости усеченных гиперсингулярных интегралов по норме доказывается с точностью до аддитивного многочлена в предположении, что некоторая специальная конволюция является аппроксимацией единицы в пространстве X. Известно, что последнее выполняется для многих банаховых функциональных пространств и справедливо для всех тех функциональных пространств X, в которых ограничен максимальный оператор. Обратный переход доказывается для функционального пространства Банаха X, обладающего тем свойством, что ассоциированное с ним пространство X' содержит основной класс Лизоркина.

Ключевые слова: потенциал Рисса, пространство риссовых потенциалов, гиперсингулярный интеграл, распределения, гранд-пространство Лебега, пространство Лизоркина основных функций, аппроксимация единицы, пространство Орлича, пространство Лебега переменного порядка.

1. Введение

Рассматривается вопрос об описании пространства $I^\alpha(X)$ функций, представимых риссовым потенциалом

$$I^\alpha\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_\alpha(x-y)\varphi(y)\,dy, \quad \alpha > 0, \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований обоих авторов, проект № 18-01-00094А, а также второго автора — проект № 17-301-50023 мол-нр.

с плотностью φ из того или иного функционального пространства X. Риссово ядро $k_\alpha(x)$ определяется, как известно, равенством

$$k_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} |x|^{\alpha-n}, & \alpha - n \neq 0, 2, 4, 6, \dots; \\ |x|^{\alpha-n} \ln \frac{1}{|x|}, & \alpha - n = 0, 2, 4, 6, \dots, \end{cases}$$

где $\gamma_n(\alpha)$ — известная нормировочная константа (см., например, [1]).

Заметим, что в случае когда X — пространство функций, обладающих некоторой гладкостью, например, $X = H^\omega(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^\gamma)$ — весовое обобщенное пространство Гёльдера, определяемое заданным модулем непрерывности ω, такое описание возможно в терминах пространств той же серии, т. е. $I^\alpha(H^\omega(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^\gamma)) = H^{\omega_\alpha}(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^{\gamma_\alpha})$, где ω_α и γ_α строятся по ω и γ соответственно; ссылки на работы с такими результатами при $\alpha < 1$ можно найти в обзоре [2, п. 2.3.1].

В случае, когда X — пространство измеримых функций, например, пространства Лебега, Орлича, их весовые версии или иные модификации, подобное точное описание образа $I^\alpha(X)$ невозможно, так как функции $f \in I^\alpha(X)$ обладают некоторой слабой гладкостью (интегрального типа), неприсущей, вообще говоря, пространству X из исходной серии пространств. В этом случае описание функций $f \in I^\alpha(X)$ дается фактически в некоторых дифференциальных терминах порядка α, именно, в терминах сходимости гиперсингулярных интегралов этого порядка.

Подобное описание для $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ впервые было дано при $\alpha < 2$ в [3] для бесселевых потенциалов, которые в отличие от риссовых потенциалов сохраняют, вообще говоря, исходное пространство X. Для произвольного $\alpha > 0$ такое описание было дано в [4], что потребовало использование гиперсингулярных интегралов с разностями высших порядков. Для риссовых потенциалов подобное описание в случае $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha > 0$ (см. в [1]), см. также в § 5 ссылки на работы, относящиеся к другим пространствам X.

В данной работе предлагается некоторый общий подход для подобного описания распределений f, являющихся риссовыми потенциалами функций на $\mathbb{R}^n$ из абстрактного пространства X, удовлетворяющего некоторым априорным свойствам. Распределения рассматриваются над основным классом Лизоркина Φ и оператор I^α трактуется в смысле обобщенных функций.

§§ 2 и 3 содержат необходимые предварительные сведения и вспомогательные результаты, в § 4 даны основные результаты. В § 5 рассматривается вопрос о выполнимости введенных априорных свойств для конкретных функциональных пространств и дается некоторый обзор результатов, относящихся к описанию образа риссова потенциала.

2. Предварительные сведения

Класс Лизоркина Φ, инвариантный относительно оператора I^α, есть подпространство пространства $\mathscr{S}$ шварцевых функций, ортогональных многочленам:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x^j \omega(x)\, dx = 0, \quad |j| = 0, 1, 2, \dots, \quad x^j = x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}, \quad |j| = j_1 + \dots + j_n.$$

Множество Φ плотно в весовом пространстве $L^p(\mathbb{R}^n, w)$, $w \in A_p$ [1, теорема 7.34].

Гиперсингулярный интеграл $\mathbb{D}^\alpha$ определяется как предел $\mathbb{D}^\alpha := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathbb{D}^\alpha_\varepsilon$, где $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon$ — усеченный гиперсингулярный интеграл

$$\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f(x) = \frac{1}{d_{n,\ell}(\alpha)} \int\limits_{|y|>\varepsilon} \frac{\left(\Delta^\ell_y f\right)(x)}{|y|^{n+\alpha}}\, dy, \quad \alpha > 0, \tag{2}$$

где $\Delta_h^\ell f(x) = \sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k \begin{pmatrix} \ell \\ k \end{pmatrix} f(x-kh)$ — конечная разность порядка $\ell > \alpha$ функции f и $d_{n,\ell}(\alpha)$ — нормировочная константа, выбранная так, чтобы построение в (2) не зависело от ℓ (подробности см. в [1]).

При фиксированном $\varepsilon > 0$ усеченные гиперсингулярные интегралы имеют вид

$$\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f(x) = C(\varepsilon) f(x) + \sum_{k=1}^{\ell} C_k(\varepsilon) \int\limits_{|t|>k\varepsilon} \frac{f(x-t)}{|t|^{n+\alpha}}\, dt, \tag{3}$$

получаемый очевидными преобразованиями.

Для конечных разностей функции f имеет место представление

$$\left(\Delta_h^\ell f\right)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\Delta_{\ell,\alpha}\right)(x-y,h)\, \mathbb{D}^\alpha f(y)\, dy, \quad \ell > \alpha, \tag{4}$$

где равенство $\Delta_{\ell,\alpha}(x,h) = \Delta_h^\ell k_\alpha(x)$ справедливое, по крайней мере, на функциях $f \in \Phi$, хотя оно верно для более широкого класса функций, см. [1, (3.64)].

Усеченные гиперсингулярные интегралы $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f$ выражаются через свой предел $\varphi = \mathbb{D}^\alpha f$ с помощью аппроксимации единицы:

$$\left(\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{K}_{\ell,\alpha}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \varphi(y)\, dy =: K_\varepsilon^{\ell,\alpha}\varphi, \tag{5}$$

где

$$\mathscr{K}_{\ell,\alpha}(|x|) = \frac{1}{d_{n,\ell}(\alpha)|x|^n} \int\limits_{|y|<|x|} k_{\ell,\alpha}(y)\, dy, \tag{6}$$

$k_{\ell,\alpha}(x) = \Delta_{\ell,\alpha}(x, e_1)$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ (см. [1, (3.63)]).

Ядро $\mathscr{K}_{\ell,\alpha}$ имеет оценку [1, лемма 3.16]

$$\begin{aligned} &|\mathscr{K}_{\ell,\alpha}(|x|)| \leqslant c \begin{cases} |x|^{\min\{\alpha-n,0\}}, & \alpha \neq n; \\ \ln \frac{2}{|x|}, & \alpha = n, \end{cases} && \text{при } |x| \leqslant 1, \\ &|\mathscr{K}_{\ell,\alpha}(|x|)| \leqslant c|x|^{\alpha-n-\ell-1}, && \text{при } |x| > 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Для ядра $\mathscr{K}_{\ell,\alpha}(|x|)$ известна формула [1, (3.66)]

$$F(\mathscr{K}_{\ell,\alpha})(\xi) = \frac{1}{d_{n,\ell}(\alpha)|\xi|^\alpha} \int\limits_{|y|>1} \frac{(1-e^{i\xi y})^\ell}{|y|^{n+\alpha}}\, \mathrm{d}y, \tag{8}$$

где $(F\varphi)(x) = \widehat{\varphi}(x)$ — преобразование Фурье функции φ.

Топология в шварцевом пространстве $\mathscr{S}$ задается счетным набором (полу)норм

$$\nu_{k,j}(\omega) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^k |(D^j\omega)(x)|, \quad k \in N_0, \;\; j \in N_0^n, \;\; \omega \in \mathscr{S}.$$

Сходимость последовательности $\omega_m \to \omega$ в топологии $\mathscr{S}$ означает, что

$$\lim_{m\to\infty} \nu_{k,j}(\omega_m - \omega) = 0$$

для любых фиксированных k и j.

Пространство Лизоркина Φ основных функций и двойственное пространство $\Psi = F(\Phi)$ являются замкнутыми подпространствами в $\mathscr{S}$ относительно указанной топологии, при этом на функциях $\omega \in \mathscr{S}$ эта топология эквивалентна топологии, задаваемой полунормами

$$\nu_{k,l,j}(\omega) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^l\big(1+|x|\big)^k\big|\big(D^j\omega\big)(x)\big|, \quad k\in N_0,\ l\in Z,\ j\in N_0^n,\ \omega\in\mathscr{S}.$$

Напомним, что $\Phi' = \mathscr{S}'/\mathscr{P}$, где $\mathscr{S}'/\mathscr{P}$ есть фактор-пространство пространства $\mathscr{S}'$ по множеству $\mathscr{P}$ всех многочленов (см. [1, с. 41]).

Лемма 2.1. *Пространство Φ инвариантно относительно оператора усеченного гиперсингулярного интегрирования $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon$, $\varepsilon \geqslant 0$, и оператора свертки $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.*

$\lhd$ Доказательство леммы см. в работе [5]. $\rhd$

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 3.1. *Оператор $K^{\ell,\alpha} = K^{\ell,\alpha}_\varepsilon|_{\varepsilon=1}$ непрерывен в пространстве Φ.*

$\lhd$ Покажем, прежде всего, что оператор $K^{\ell,\alpha}$ сохраняет пространство Φ. Достаточно показать, что умножение на преобразование Фурье ядер этих операторов сохраняет двойственное пространство $\Psi = F(\Phi)$.

Обозначив $m(\xi) := \widehat{\mathscr{K}_{\ell,\alpha}}(\xi)$, переходя в (8) к полярным координатам, после замен подобия и вращения получаем

$$m(\xi) = \int\limits_{|\xi|}^{\infty} \frac{E(\rho)}{\rho^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}\rho, \tag{9}$$

где $E(\rho) = \frac{1}{d_{n,\ell}(\alpha)}\int_{S^{n-1}}(1-e^{i\rho\sigma_1})^\ell\,\mathrm{d}\sigma$. Легко видеть, что $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, все производные функции m стремятся к 0 при $|\xi|\to\infty$ и имеют не более, чем степенной рост при $|\xi|\to 0$, что и гарантирует указанное сохранение пространства Ψ при умножении на $m(\xi)$.

Доказательство непрерывности умножения на $m(\xi)$ требует более аккуратных рассуждений. Пусть последовательность функций $\psi_s(x)$, $s\in N$, из Ψ сходится к 0 в топологии пространства $\mathscr{S}$: $\lim_{s\to\infty}\nu_{k,j}(\psi_s) = 0$ для всех k и j. Нужно проверить, что $\lim_{s\to\infty}\nu_{k,j}(m\psi_s) = 0$ для того же множества индексов k и j. Имеем

$$D^j(m(x)\psi_s(x)) = \sum_{0\leqslant i\leqslant j}\begin{pmatrix} j\\ i\end{pmatrix} D^i m(x) D^{j-i}\psi_s(x),$$

$$D^i m(x) = \sum_{|k|=1}\frac{x^k}{|x|}D^{i-k}\left(\frac{E(|x|)}{|x|^{1+\alpha}}\right) = \sum_{|k|=1}\frac{x^k}{|x|}\sum_{0\leqslant h\leqslant i-k}\begin{pmatrix} i-k\\ h\end{pmatrix} D^h\left(|x|^{-1-\alpha}\right)D^{i-k-h}E(|x|),$$

$D^h\left(|x|^{-1-\alpha}\right) = |x|^{-1-\alpha-|h|}P_h(x)$, где $P_h(x)$ — однородный многочлен степени $|h|$. Так как $\left|D^h\left(|x|^{-1-\alpha}\right)\right| \leqslant C|x|^{-1-\alpha-|h|}$ и $|D^jE(|x|)| \leqslant C|x|^{\ell-|j|}$, то

$$|D^i m(x)| \leqslant C|x|^{1-\alpha-|h|+\ell-|i|+1+|h|} \leqslant C|x|^{-\alpha+\ell-|i|}. \tag{10}$$

Отсюда $|D^i m(x)| \leqslant C|x|^{-1-[\alpha]+\ell-|i|}$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α. Следовательно, $\nu_{k,j}(m\psi_s) \leqslant \sum_{0\leqslant i\leqslant j} C(i,j)\nu_{k,\ell-1-[\alpha]-|i|,j-i}(\psi_s)$. Отсюда в силу эквивалентности топологий, задаваемых полунормами $\nu_{k,j}$ и $\nu_{k,\ell,j}$, получим $\lim_{s\to\infty}\nu_{k,j}(m\psi_s) = 0$, что и требовалось. $\rhd$

Следствие 3.2. *Оператор $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha$ непрерывен в пространстве Φ для любого $\varepsilon > 0$.*

$\lhd$ Достаточно заметить, что в образах Фурье имеем $\widehat{\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha\omega}(\xi) = |\xi|^\alpha m(\varepsilon\xi)\widehat{\omega}(\xi)$, где $|\xi|^\alpha m(\varepsilon\xi)$ является мультипликатором в Ψ, коль скоро m является там мультипликатором в силу леммы 3.1. $\rhd$

Лемма 3.3. *Операторы $K_\varepsilon^{\ell,\alpha}$ сходятся при $\varepsilon \to 0$ в пространстве Φ к единичному оператору.*

$\lhd$ Нужно доказать, что для произвольной функции $\omega \in \Phi$ выполняется

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\nu_{k,j}(K_\varepsilon^{\ell,\alpha}\omega - \omega) = 0, \quad k \in N_0,\ j \in N_0^n. \tag{11}$$

Напомним, что согласно лемме 3.1 операторы $K_\varepsilon^{\ell,\alpha}$ сохраняют пространство Φ. Так как топология в пространстве $F(\mathscr{S})$, индуцированная из пространства Шварца $\mathscr{S}$, совпадает с топологией пространства $\mathscr{S}$, то (11) равносильно соотношениям

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\nu_{k,j}([m(\varepsilon x) - 1]\psi(x)) = 0, \quad k \in N_0,\ j \in N_0^n, \tag{12}$$

где m — функция (9) и $\psi = \widehat{\omega} \in \Psi$.

Рассмотрим сначала случай $j = 0$. Надо показать, что $\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^k|m(\varepsilon x)-1||\psi(x)| = 0$. Имеем $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^k|m(\varepsilon x)-1||\psi(x)| = \max\{S_1(\varepsilon), S_2(\varepsilon)\}$, где

$$S_1(\varepsilon) := \sup_{|x|<1}(1+|x|)^k|m(\varepsilon x)-1||\psi(x)|, \quad S_2(\varepsilon) := \sup_{|x|\geqslant 1}(1+|x|)^k|m(\varepsilon x)-1||\psi(x)|.$$

Для $S_1(\varepsilon)$ имеем $S_1(\varepsilon) \leqslant \nu_{k,j}(\psi)\sup_{|x|<1}|m(\varepsilon x)-1|$. Так как $m(0) = \widehat{\mathscr{K}_{\ell,\alpha}}(0) = 1$ и $m(x)$ непрерывна, то $\lim_{\varepsilon\to 0} S_1(\varepsilon) = 0$.

Для $S_2(\varepsilon)$, учитывая, что для любого числа $\mu > 0$ справедлива оценка $|\psi(x)| \leqslant C|x|^{-k-\mu}$, где выбором μ распорядимся позже, получим

$$S_2(\varepsilon) \leqslant C\sup_{|x|>1}|x|^{-\mu}|m(\varepsilon x)-1| = C\varepsilon^\mu\sup_{|x|>1}\frac{|m(\varepsilon x)-1|}{(\varepsilon|x|)^\mu}.$$

Остается показать, что при некотором выборе μ функция $|m(y)-1||y|^{-\mu}$ ограничена. При $|y| \geqslant 1$ эта ограниченность очевидна для любого $\mu > 0$. Когда $|y| < 1$ воспользуемся формулой (9) и тем фактом, что $1 = \widehat{\mathscr{K}_{\ell,\alpha}}(0)$, в силу чего

$$\frac{|m(y)-1|}{|y|^\mu} = \frac{1}{|y|^\mu}\int\limits_0^{|y|}\frac{E(\rho)}{\rho^{1+\alpha}}\,d\rho.$$

Легко видеть, что здесь правая часть ограничена при выборе $\mu \geqslant \ell - \alpha$.

Перейдем к случаю $j \neq 0$. Имеем

$$D^j\big([m(\varepsilon x)-1]\psi(x)\big) = \big[m(\varepsilon x)-1\big]D^j\psi(x) + \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant j,\\ i\neq 0}} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \Lambda_i(\varepsilon,x), \tag{13}$$

где $\Lambda_i(\varepsilon,x) := \varepsilon^{|i|}(D^i m)(\varepsilon x)D^{j-i}\psi(x)$. Первое слагаемое в (13) уже оценено выше поскольку $D^j\psi(x)\in\Psi$, $j\in N_0^n$. Для $\Lambda(\varepsilon,x)$ с учетом оценки (10) получим

$$|\Lambda(\varepsilon,x)| \leqslant \varepsilon^{\ell-\alpha}C_{i,j}|x|^{\ell-\alpha-|i|}|D^{j-i}\psi(x)|.$$

Отсюда приходим к оценке $\nu_{k,j}(\Lambda(\varepsilon,x)) \leqslant C\varepsilon^{\ell-\alpha}\nu_{k,\ell-1-[\alpha]-|j|,j-i}(\psi)$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α.

Резюмируя, приходим к (12). $\rhd$

4. Основные утверждения

4.1. Описание в терминах распределений.

Определение 4.1. Пусть X — линейное подмножество в Φ' и $f\in\Phi'$. Будем говорить, что $f\in I^\alpha(X)$, $\alpha>0$, если существует распределение $\varphi\in X$ такое, что

$$(f,\omega) = (\varphi, I^\alpha\omega) \tag{14}$$

для всех $\omega\in\Phi$ (напомним, что пространство Φ инвариантно относительно оператора I^α).

В последующем усеченные гиперсингулярные интегралы (2) обощенной функции $f\in\Phi'$ определяются равенством

$$(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f,\omega) := (f,\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon\omega) \tag{15}$$

с учетом инвариантности пространства Φ относительно оператора $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon$, $\varepsilon>0$, см. лемму 2.1.

Теорема 4.2. *Пусть X — линейное подмножество пространства Φ'. Следующие утверждения равносильны:*

(P_1) $f\in I^\alpha(X)$;

(P_2) *существует элемент $\phi\in X$ такой, что $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f$ сходится к ϕ в Φ' :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f,\omega) = (\phi,\omega),\quad \omega\in\Phi,$$

при этом элемент ϕ и элемент φ из (14) *совпадают как элементы пространства Φ'.*

$\lhd$ Покажем, что $(P_1)\Rightarrow(P_2)$. В силу (3) и следствия 3.2 при любом фиксированном $\varepsilon>0$ имеем $(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f,\ \omega) = (f,\ \mathbb{D}^\alpha_\varepsilon\omega) = (f,\ \mathbb{D}^\alpha_\varepsilon I^\alpha\mathbb{D}^\alpha\omega)$, где мы воспользовались тем, что $\omega = I^\alpha\mathbb{D}^\alpha\omega$ для $\omega\in\Phi$.

Тогда в силу формулы (5) имеем $(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f,\omega) = (f, K^{\ell,\alpha}_\varepsilon\mathbb{D}^\alpha\omega)$. Так как $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon\mathbb{D}^\alpha\omega\in\Phi$ в силу леммы 2.1 и операторы $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon$ и $\mathbb{D}^\alpha$ коммутируют на функциях из Φ, то по определению образа $I^\alpha(X)$ существует функция $\varphi\in X$, такая что

$$(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f,\omega) = (\varphi, K^{\ell,\alpha}_\varepsilon\omega). \tag{16}$$

В силу леммы 3.3 получаем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f,\omega) = (\varphi, \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ (\mathscr{S})}} K^{\ell,\alpha}_\varepsilon\omega) = (\varphi,\omega)$. Следовательно, $\phi=\varphi$ и (P_2) получено.

Докажем $(P_2) \Rightarrow (P_1)$. Рассуждая как и в предыдущем пункте, только в обратном направлении, имеем

$$\begin{aligned}(\phi,\omega) &= \lim_{\varepsilon\to 0}(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f,\ \omega) = \lim_{\varepsilon\to 0}(f,\ \mathbb{D}^\alpha_\varepsilon \omega) = \lim_{\varepsilon\to 0}(f,\ \mathbb{D}^\alpha_\varepsilon I^\alpha \mathbb{D}^\alpha\omega)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}(f,\ K^{\ell,\alpha}_\varepsilon \mathbb{D}^\alpha\omega) = (f,\ \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ (\mathscr{S})}} K^{\ell,\alpha}_\varepsilon \mathbb{D}^\alpha\omega) = (f, \mathbb{D}^\alpha\omega).\end{aligned}$$

Таким образом, $(f,\mathbb{D}^\alpha\omega) = (\phi,\omega)$. Следовательно, $(\phi, I^\alpha\omega) = (f,\omega)$, $\omega\in\Phi$, что завершает доказательство теоремы. $\rhd$

4.2. Об априорных предположениях о банаховом пространстве X. В следующем пункте мы изучаем образ $I^\alpha(X)$ потенциала Рисса, трактуемый в смысле распределений, где X — произвольное банахово пространство функций на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее некоторым априорным предположениям.

В различных утверждениях ниже будет использоваться одно или несколько из следующих свойств пространства X:

(S_1) Пространство X обладает свойством решетки: если $\varphi\in X$ и $|\psi(x)| \leqslant |\varphi(x)|$, $x\in\mathbb{R}^n$, то $\psi\in X$ и $\|\psi\|_X \leqslant \|\varphi\|_X$.

(S_2) Пространство X не содержит многочлен.

(S_3) Максимальный оператор $M\varphi(x) := \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |\varphi(y)|dy$ ограничен в X.

(S_4) Операторы $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon$ являются аппроксимацией единицы: $\lim_{\varepsilon\to 0}\|K^{\ell,\alpha}_\varepsilon\varphi - \varphi\|_X = 0$ для всех $\varphi\in X$.

(S_5) Пространство X', ассоциированное с X, содержит класс Φ.

Напомним, что ассоциированным с X называется пространство X' функций ψ на $\mathbb{R}^n$ таких, что

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\psi(x)\,dx\right| < \infty \ \ (\forall\,\varphi\in X), \qquad \|\psi\|_{X'} = \sup_{\|\varphi\|_X=1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\psi(x)\,dx\right|,$$

см. [6, с. 9].

Замечание 4.3. При наличии свойства (S_1) в свойстве (S_2) достаточно потребовать, чтобы константы, отличные от нуля, не принадлежали бы пространству X.

Нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения об ограниченности операторов свертки в пространстве X.

Обозначим через $\mathfrak{K}$ класс ядер $k(x)$, удовлетворяющих условиям $|k(x)| \leqslant \mathscr{K}(|x|)$, где $\mathscr{K}(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{K}(r), r\in\mathbb{R}_+$, убывает, и

$$K_\varepsilon\varphi := \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} k\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varphi(y)\,dy.$$

Хорошо известно (см., например, [7, гл. 5, § 2.1] поточечное неравенство $|K_\varepsilon\varphi(x)| \leqslant cM\varphi(x)$, где $k\in\mathfrak{K}$. Из этого неравенства следует утверждение.

Предложение 4.4. *Пусть $k\in\mathfrak{K}$. Операторы K_ε равномерно ограничены в любом пространстве X со свойствами (S_1) и (S_3).*

Для нас более содержательным является следующее утверждение:

Лемма 4.5. *Пусть $0<\alpha<\infty$ и $\ell>\alpha$. Тогда $\mathscr{K}_{\ell,\alpha}\in\mathfrak{K}$.*

$\lhd$ Утверждение леммы следует из оценки (7). $\rhd$

4.3. Описание в терминах сходимости по норме пространства X. В дальнейшем считаем, что X — банахово пространство функций на $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|_X$.

Определение 4.6. Будем говорить, что значение параметра $\alpha > 0$ является естественно соответствующим пространству X, если функционал $f \in I^\alpha(X)$ является регулярным и с точностью до многочлена совпадает со сходящимся интегралом (1) для всех $\varphi \in X$ таких, что $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_\alpha(x-y)\varphi(y)\,dy + P(x)$, $\varphi \in X$. В этом случае первое слагаемое в правой части будем называть интегральным представителем функционала $f \in I^\alpha(X)$.

Например, в случае $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, значениями α, естественно соответствующими пространству $L^p(\mathbb{R}^n)$, являются $\alpha \in \left(0, \frac{n}{p}\right)$. В случае весового пространства

$$L^p_\gamma(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi : \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p (1+|x|)^\gamma dx < \infty \right\}, \quad \gamma > -n,$$

указанный интервал заменяется интервалом $\alpha \in (0, \frac{n+\gamma}{p})$. В случае когда X есть пространство Орлича интервал для естественно соответствующих значений α может быть получен в терминах индексов Матушевской — Орлича и условия сходимости интеграла в формуле (27) следующего параграфа, на чем мы не останавливаемся. Пусть теперь X — так называемое гранд-пространство Лебега $\mathring{L}^{p)}_a(\mathbb{R}^n)$ с грандизатором $a(x)$ (см. определение в (22)). Такие пространства исследовались в работах [5, 8, 9, 10]. В этом случае интервал естественно соответствующих значений α тот же, что и для обычных пространств Лебега при условиях $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и

$$a^\delta \in A_\infty \tag{17}$$

при некотором $\delta > 0$, где A_∞ известный класс Макенхаупта.

Теорема 4.7 (Необходимые условия)**.** *Пусть X удовлетворяет предположению (S_4) и $f \in I^\alpha(X)$ в смысле определения 4.1. Тогда $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f$ есть регулярный функционал, совпадающий с некоторой функцией из X с точностью до многочлена:*

$$\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f = \varphi_\varepsilon(x) + P_\varepsilon(x), \quad \varphi_\varepsilon \in X, \tag{18}$$

и существует функция $\varphi \in X$ такая, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_X = 0. \tag{19}$$

Если пространство X обладает свойством (S_2) и f означает интегральный представитель функционала $f \in I^\alpha(X)$, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f - \varphi\|_X = 0. \tag{20}$$

$\lhd$ Воспользуемся представлением (16). Условие (S_4) подразумевает ограниченность оператора $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon$ в пространстве X (по крайней мере для малых ε). Поэтому из (16) имеем $(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f, \omega) = (K^{\ell,\alpha}_\varepsilon \varphi, \omega)$. Так как $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon \varphi$ является регулярным функционалом, то $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f$ также регулярный функционал. Тогда функции $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f$ и $K^{\ell,\alpha}_\varepsilon \varphi$, совпадающие как элементы пространства Φ', различаются разве лишь многочленом:

$$\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f = K^{\ell,\alpha}_\varepsilon \varphi + P_\varepsilon(x). \tag{21}$$

Отсюда следует утверждение (18) с $\varphi_\varepsilon = K^{\ell,\alpha}_\varepsilon \varphi$, а также в силу свойства (S_4) и утверждение (19).

Пусть теперь α — значение, естественно соответствующее пространству X. Так как оператор $K_\varepsilon^{\ell,\alpha}$ сохраняет пространство X, то в силу свойства (S_2) функционал $K_\varepsilon^{\ell,\alpha}\varphi$ не может содержать полиномиального слагаемого. Покажем, что левая часть также не содержит полиномиального слагаемого, что будет означать $P_\varepsilon(x) = 0$. Так как в левой части f есть интегральный представитель функционала $f \in I^\alpha(X)$, то f представима обычным интегралом, т. е. как свертка функции $\varphi \in X$ с ядром $k_\alpha(x)$. Тогда ни при каких α функция $f(x)$ не может вести себя на бесконечности как многочлен. Следовательно, равенство (21) возможно только когда $P_\varepsilon(x) = 0$, и мы получаем (20). $\rhd$

Рассмотрим отдельно случай когда пространство X инвариантно относительно сдвига: $\|\tau_h\varphi\|_X \leqslant C(h)\|\varphi\|_X$, где $\tau_h\varphi = \varphi(x-h)$, $h \in \mathbb{R}^n$, и $C(h)$ локально ограничена: $\sup_{|h|<N} C(h) =: C_N < \infty$. В этом случае для функций $f \in I^\alpha(X)$ можно дать дополнительную информацию о поведении их конечных разностей. Конечные разности обобщенных функций $f \in \Phi'$ определяются обычным образом: $(\Delta_h^\ell f, \omega) := (f, \Delta_{-h}^\ell \omega)$.

Теорема 4.8. *Пусть пространство X инвариантно относительно сдвига и обладает свойствами (S_1) и (S_3). Если $f \in I^\alpha(X)$, то конечные разности $\Delta_h^\ell f$ порядка $\ell > \alpha$ являются регулярными функционалами и существует многочлен $P_h(x)$ такой, что $\Delta_h^\ell f - P_h(x) \in X$ при любом $h \in \mathbb{R}^n$.*

$\lhd$ Стандартными перебросами на основные функции с учетом формулы (4), инвариантности класса Φ относительно потенциала Рисса и свертки с ядром $\Delta_{\ell,\alpha}(\cdot, h)$, получаем

$$(\Delta_h^\ell f, \omega) = (f, \Delta_{-h}^\ell \omega) = (\varphi, I^\alpha(\Delta_{-h}^\ell \omega))$$
$$= (\varphi, \Delta_{-h}^\ell I^\alpha \omega) = (\varphi, \Delta_{\ell,\alpha}(\cdot, -h) * \omega)) = (\Delta_{\ell,\alpha}(\cdot, h) * \varphi, \omega).$$

Следовательно, $\Delta_h^\ell f$ и $\Delta_{\ell,\alpha}(\cdot, h) * \varphi$ совпадают как обобщенные функции из Φ', что и доказывает регулярность функционала $\Delta_h^\ell f$.

Остается доказать, что $\Delta_{\ell,\alpha}(\cdot, h) * \varphi \in X$. Основываемся для этого на предложении 4.4, применимом при условиях теоремы. Заметим, что ядро $\Delta_{\ell,\alpha}(x, h)$ при больших значениях $|x|$ имеет оценку ([1, (3.51)]) $|\Delta_{\ell,\alpha}(x,h)| \leqslant c|h|^\ell(|x|+|h|)^{\alpha-n-\ell}$, $|x| \geqslant (\ell+1)|h|$. Поэтому ядро $\Delta_{\ell,\alpha}(x, h)$ можно представить в виде

$$\Delta_{\ell,\alpha}(x,h) = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \begin{pmatrix} \ell \\ i \end{pmatrix} k_\alpha(x - ih)\chi_{B\left(0,\frac{|h|}{2}\right)}(x - ih) + J(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\chi_{B(0,r)}(x)$ — характеристическая функция шара $B\,(0, r)$, а ядро $J(x)$ имеет оценку $|J(x)| \leqslant \frac{c|h|^\ell}{(1+|x|)^{n-\alpha+\ell}}$, и, следовательно, принадлежит классу $\mathfrak{K}$. Принадлежность функции $k_\alpha(x)\chi_{B\left(0,\frac{|h|}{2}\right)}(x)$ классу $\mathfrak{K}$ очевидна. Остается сослаться на инвариантность пространства X относительно сдвига. $\rhd$

Теорема 4.9 (Достаточные условия). *Пусть $\alpha > 0$ и $f \in \Phi'$ и $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f$, $\varepsilon > 0$, — обобщенные функции, определенные равенством* (15). *Если пространство X обладает свойством (S_5), $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f \in X$ и существует $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ (X)}} \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f = \varphi$, то $f \in I^\alpha(X)$ в смысле определения* 4.1 *и $f = I^\alpha\varphi$.*

$\lhd$ Имеем $|(\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f - \varphi, \omega)| \leqslant \|\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f - \varphi\|_X \|\omega\|_{X'} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в силу свойства (S_5). Таким образом, $\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f, \omega) = (\varphi, \omega)$ для всех $\omega \in \Phi$ и тогда $f \in I^\alpha(X)$ в силу эквивалентности утверждений (P_1) и (P_2) теоремы 4.2. $\rhd$

Следствие 4.10. *Пусть пространство X обладает свойствами (S_2), (S_4) и (S_5). Для того, чтобы $f \in I^\alpha(X)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f \in X$ и $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f$ имело вид* (18), *где φ_ε сходится в пространстве X при $\varepsilon \to 0$.*

Подчеркнем, что в этом параграфе мы фактически полностью исследовали вопрос об описании образа $I^\alpha(X)$, $\alpha > 0$, для произвольного пространства X функций на $\mathbb{R}^n$ при выполнении некоторых априорных предположений о пространстве X. Однако, это сделано при условии, что оператор I^α понимается в смысле распределений. Существенный интерес представляет описание абсолютно сходящихся интегралов $I^\alpha\varphi$, $\varphi \in X$. Это, однако, требует работы в конкретном пространстве: допустимые значения α зависят тогда от пространства X. В следующем параграфе мы касаемся этого вопроса для некоторых классических и нестандартных функциональных пространств. Кроме того, в следующем параграфе рассматривается вопрос о выполнимости для них свойств (S_1)–(S_5).

5. О выполнимости свойств (S_1)–(S_5) и о пространстве $I^\alpha(X)$ со значениями α, естественно соответствующими пространству X

В приведенной ниже теореме показано, что все свойства (S_1)–(S_5) выполняются для пространств X_i из следующего списка при соответствующих предположениях о параметрах пространств:

- классические пространства Лебега $X_1 = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$;
- весовые пространства $X_2 = L^p(\mathbb{R}^n, w)$, $1 < p < \infty$, где w — вес Макенхаупта;
- гранд-пространства Лебега $X_3 = \mathring{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, функций f, удовлетворяющих условиям

$$\|f\|_{L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^\theta \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-\varepsilon} a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dx \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty \tag{22}$$

и $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{p\theta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-\varepsilon} a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}} dx = 0$, где $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и a удовлетворяет условию (17).

- пространства Лебега $X_4 = L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с переменным показателем $p(x)$ (см. [11, 12, 13]), где $1 < \inf_{x\in\mathbb{R}^n} p(x) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} p(x) < \infty$, определяемые нормой

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leqslant 1 \right\},$$

где $p(x)$ удовлетворяет стандартным для таких пространств условиям:

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{C}{\ln\frac{1}{|x-y|}}, \quad |x-y| < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad |p(x) - p(\infty)| \leqslant \frac{C}{\ln\frac{1}{e+|x|}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n;$$

- пространства Орлича $X_5 = L^M(\mathbb{R}^n)$, где M — функция Юнга, функция M и дополнительная к ней удовлетворяют условию удвоения.

Теорема 5.1. *Каждое из пространств X_1–X_5 при указанных выше предположениях обладает всеми свойствами (S_1)–(S_5).*

$\lhd$ Выполнимость свойства (S_1) очевидна.

Свойство (S_2) для пространства X_1 также очевидно. Для пространства X_2 с учетом замечания 4.3 оно следует из свойства $\int_{\mathbb{R}^n} w(x)\, dx = \infty$ весов Макенхаупта; см., например, [14, лемму 7.5], откуда вытекает указанное свойство. Для пространства X_3 свойство (S_2) следует из вложения

$$\mathring{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p-\varepsilon}\big(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}}\big), \quad 0 < \varepsilon < p-1, \tag{23}$$

с учетом свойства (17); доказательство этого вложения можно найти в [8]. Свойство (S_2) для пространств X_4 и X_5 очевидно.

Свойство (S_3) для пространств X_1 и X_2 хорошо известно, см., например, [14, теорему 7.3]. Для гранд-пространства X_3 свойство (S_3) доказано в [9], а для пространства X_4 — в работе [15]. Для пространства X_5 свойство (S_3) доказано в [16], см. также [17, теорему 2.1.1].

Свойство (S_4) для пространств X_1 и X_2 является следствием известных теорем об аппроксимации единицы в весовых пространствах, см. [1, теорему 7.31]. Свойство (S_4) для пространства X_3 доказано в [9]. Для пространства X_4 свойство (S_4) следует с учетом леммы 4.5 из общей теоремы об аппроксимации единицы в пространствах Лебега с переменным показателем, см. [11, теорему 5.11], а для пространства X_5 установлено в [18].

Свойство (S_5) для пространств X_1, X_2, X_4 и X_5 очевидно. Для пространства X_3 в силу вложения (23) имеем

$$L^{(p-\varepsilon)'}\left(\mathbb{R}^n, a^{-\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon-1)}}\right) = \left[L^{p-\varepsilon}\left(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)\right]' \subset \left[L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)\right]'. \tag{24}$$

Ввиду (17) имеем $a^{\frac{\varepsilon}{p}} \in A_{p-\varepsilon}$ при некотором ε и тогда $a^{-\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon-1)}} \in A_{(p-\varepsilon)'}$. Вложение $\Phi \subset L^{(p-\varepsilon)'}\left(\mathbb{R}^n, a^{-\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon-1)}}\right)$ очевидно, что в силу вложения в (24) доказывает свойство (S_5). $\rhd$

Дадим также информацию об импликациях

$$f \in I^\alpha(X) \Rightarrow f \in X^\alpha \quad \text{и} \quad \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f \text{ сходятся в } X, \tag{25}$$

$$f \in X^\alpha \quad \text{и} \quad \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f \text{ сходятся в } X \Rightarrow f \in I^\alpha(X), \tag{26}$$

где X^α — некоторое пространство, определяемое исходным пространством X и параметром α, для пространств X из того же списка. Для них известно следующее:

1. Пусть $0 < \alpha < \frac{n}{p}$. Импликации (25) и (26) с $X^\alpha = L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, известны давно, см. [1, с. 532–538], [19], [20, с. 179–184]. Отметим также работу [21], где описание пространства $I^\alpha(L^p)$ получено в терминах сходимости гиперсингулярных интегралов малого порядка от старших производных, т. е. конструкций вида $\mathbb{D}_\varepsilon^{\alpha-[\alpha]} D^j f$, $|j| = [\alpha]$; в случае целых α пространство $I^\alpha(L^p)$ совпадает с пространством типа Соболева

$$W^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^q(\mathbb{R}^n),\ D^j f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ для всех } \ j \text{ таких, что } |j| = \alpha\right\}.$$

2. Аналогичные результаты для пространств Лебега с весами Макенхаупта получены в [22].

3. Для гранд-пространств Лебега $\mathring{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, импликации (25) и (26) с $X^\alpha = \mathring{L}_a^{q),\theta}(\mathbb{R}^n)$ доказаны в [9] и [5] соответственно в предположении, что a удовлетворяет условию (17).

4. Для пространств Лебега $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с переменным показателем $p(x)$ импликации (25) и (26) с $X^\alpha = L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha}{n}$, получены в [23] и [24] соответственно. Эти результаты можно найти также в книге [13].

5. Пусть $M^{-1}(u)$ обозначает функцию, обратную к функции Юнга $M(u)$, и α таково, что интеграл $\int_0^u t^{-\frac{\alpha}{n}-1} M^{-1}(t)\,dt$ сходится и функция $M_\alpha(u)$ определяется своей обратной:

$$M_\alpha^{-1}(u) = \int\limits_0^u \frac{M^{-1}(t)}{t^{1+\frac{\alpha}{n}}}\,dt. \tag{27}$$

Следующие утверждения равносильны см. [1, с. 220–223], [18]:
1) $f \in I^\alpha(L^M)$;
2) $f \in L^{M_\alpha}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathbb{D}^\alpha f \in L^M(\mathbb{R}^n)$.

Литература

1. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and their Applications.—London–N. Y.: Taylor & Francis, 2002.—358+xvii p.—(Ser. Analytical Methods and Special Functions. Vol. 5).
2. *Rafeiro H., Samko S.* Fractional integrals and derivatives: mapping properties // Fract. Calc. Appl. Anal.—2016.—Vol. 19, № 3.—P. 580–607. DOI: 10.1515/fca-2016-0032.
3. *Stein E. M.* The characterization of functions arising as potentials // Bull. Amer. Math. Soc.—1961.—Vol. 67, № 1.—P. 102–104.
4. *Лизоркин П. И.* Описание пространства $L_p^r(R^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов // Мат. сб.—1970.—Т. 81, № 1.—С. 79–91.
5. *Умархаджиев С. М.* Описание пространства риссовых потенциалов функций из град-пространства Лебега на $\mathbb{R}^n$ // Математические заметки.—2018.—(В печати).
6. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators.—Boston: Academic Press Inc., 1988.—(Pure Appl. Math. Vol. 129).
7. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.—xiii+695 p.
8. *Умархаджиев С. М.* Обобщение понятия гранд-пространства Лебега // Известия вузов. Математика.—Изв. вузов. Сер. Математика.—2014.—Т. 4.—С. 42–51.
9. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* Riesz fractional integrals in grand Lebesgue spaces // Fract. Calc. Appl. Anal.—2016.—Vol. 19, № 3.—P. 608–624. DOI: 10.1515/fca-2016-0033.
10. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On grand Lebesgue spaces on sets of infinite measure // Mathematische Nachrichten.—2017.—Vol. 290, № 5–6.—P. 913–919. DOI:10.1002/mana.201600136.
11. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A.* Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis.—Birkhauser, 2013.—316 p.—(Appl. Numerical Harmonic Anal.).
12. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., and Růžička M.* Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents.—Berlin: Springer-Verlag, 2011.—(Lecture Notes in Math. Vol. 2017). DOI: 10.1007/978-3-642-18363-8.
13. *Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., and Samko S.* Integral Operators in Non-standard Function Spaces. Vol. I. Variable Exponent Lebesgue and Amalgam Spaces.—Birkhäser, 2015.—586 p.
14. *Duoandikoetxea J.* Fourier Analysis.—Providence (R. I.): Amer. Math. Soc., 2001.—(Graduate Studies. Vol. 29).
15. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A., and Neugebauer C. J.* The maximal function on variable L^p-spaces // Ann. Acad. Scient. Fennicae. Math.—2003.—Vol. 28.—P. 223–238.
16. *Kerman R., Torchinsky A.* Integral inequalities with weights for the Hardy maximal function // Stud. Math.—1982.—Vol. 71.—P. 277–284.
17. *Kokilashvili V., Krbec M.* Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz spaces.—Singapore: World Scientific Publ., 1991.—233 p.
18. *Чувенков А. Ф.* Пространства Соболева — Орлича дробного порядка // Изв. Сев.-Кавк. центра высш. школы. Сер. естеств. наук.—1978.—Т. 1.—С. 6–10.
19. *Самко С. Г.* О пространствах риссовых потенциалов // Изв. АН СССР. Сер. Математика.—1976.—Т. 40, № 5.—С. 1143–1172.
20. *Samko S. G., Kilbas A. A., and Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications.—London–N. Y.: Gordon & Breach. Sci. Publ., 1993.—1012 p.
21. *Самко С. Г., Умархаджиев С. М.* Описание пространства риссовых потенциалов в терминах старших производных // Изв. вузов. Сер. Математика.—1980.—Т. 11.—С. 79–82.
22. *Kokilashvili V., Meskhi A., and Samko S.* On the inversion and characterization of the Riesz potentials in the weighted Lebesgue spaces // Memoirs on Differential Equations and Mahematical Physics.—2003.—Vol. 29.—P. 99–106.
23. *Almeida A.* Inversion of the Riesz Potential Operator on Lebesgue Spaces with Variable Exponent // Frac. Calc. Appl. Anal.—2003.—Vol. 6, № 3.—P. 311–327.
24. *Almeida A., Samko S.* Characterization of Riesz and Bessel potentials on variable Lebesgue spaces // J. Function Spaces and Applic.—2006.—Vol. 4, № 2.—P. 113–144.

Статья поступила 29 марта 2018 г.

Самко Стефан Григорьевич, *профессор*
Университет Алгарве
Campus de Gambelas, 8005-139 Faro, Portugal
E-mail: ssamko@ualg.pt
https://orcid.org/0000-0002-8022-2863

Умархаджиев Салаудин Мусаевич
Комплексный научно-исследовательский
институт им. Х. И. Ибрагимова РАН
РОССИЯ, 364051, Грозный, Старопромысловское шоссе, 21 а
ведущий научный сотрудник;
Академия наук Чеченской Республики
РОССИЯ, 364024, Грозный, пр-кт им. М. Эсамбаева, 13
заведующий отделом прикладной семиотики
E-mail: `umsalaudin@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0002-8283-1515

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 95–108

ON A CHARACTERISATION OF THE SPACE OF RIESZ POTENTIAL OF FUNCTIONS IN BANACH SPACES WITH SOME À PRIORI PROPERTIES

Samko S. G.[1], Umarkhadzhiev S. M.[2,3]
[1] Universidade do Algarve Campus de Gambelas;
[2] Kh. Ibragimov Complex Institute of the Russian Academy of Sciences;
[3] Academy of Sciences of the Chechen Republic

Abstract. We consider the problem of describing the space $I^\alpha(X)$ of functions representable by the Riesz potential $I^\alpha\varphi$ with density φ in the given space X. It is assumed that $X \subset \Phi'$, where Φ' is the space of distributions over the Lizorkin test function space Φ, invariant with respect to Riesz integration, and the range $I^\alpha(X)$ is understood in the sense of distributions. In this general setting, we study the question under what assumptions on the space X the inclusion of the element f in to the range $I^\alpha(X)$ is equivalent to the convergence of the truncated hypersingular integrals $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f$ in the space X. For this purpose, this question is first investigated in the context of the topology of the space Φ. Namely, for any linear subset X in Φ' it is shown that the inclusion of f into the range $I^\alpha(X)$ is equivalent to the convergence of truncated hypersingular integrals on the set X in the topology of the space Φ'. If X is a Banach space, the passage from the inclusion into the range to the convergence of truncated hypersingular integrals in the norm is proved up to an additive polynomial term under the assumption that some special convolution is an identity approximation in the space X. It is known that the latter holds for many Banach function spaces and is valid for function spaces X where the maximal operator is bounded. The inverse passage is proved for the Banach function space X enjoying the property that the associated space X' includes the Lizorkin test function space.

Key words: Riesz potential, space of Riesz potentials, hypersingular integral, distributions, grand Lebesgue space, Lizorkin test functions space, identity approximation, Orlicz space, variable order Lebesgue space.

References

1. *Samko S. G. Hypersingular Integrals and their Applications*, London–N. Y., Taylor & Francis, 2002, 358+xvii p. (Ser. Analytical Methods and Special Functions, vol. 5).
2. *Rafeiro H., Samko S.* Fractional Integrals and Derivatives: Mapping Properties. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2016, vol. 19, no. 3, pp. 580–607. DOI: 10.1515/fca-2016-0032.
3. *Stein E. M.* The Characterization of Functions Arising as Potentials. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1961, vol. 67, no. 1, pp. 102–104.
4. *Lizorkin P. I.* Description of the Spaces $L^r_p(R^n)$ in Terms of Singular Difference Integrals. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1970, vol. 10, no. 1, pp. 77–89. DOI: 10.1070/SM1970v010n01ABEH001587.
5. *Umarkhadzhiev S. M.* Description of a Space of Riesz Potentials of Functions from Grand Lebesgue Space on $\mathbb{R}^n$. *Math. Notes*, 2018 (in print).
6. *Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators. Ser. Pure Appl. Math., vol.* 129, Boston, Academic Press Inc., 1988.

7. *Stein E. M. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1993, xiii+695 p.
8. *Umarkhadzhiev S. M.* Generalization of a Notion of Grand Lebesgue Space, *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 4, pp. 35—43. DOI: 10.3103/S1066369X14040057.
9. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* Riesz Fractional Integrals in Grand Lebesgue Spaces, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2016, vol. 19, no. 3, pp. 608–624. DOI: 10.1515/fca-2016-0033.
10. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On Grand Lebesgue Spaces on Sets of Infinite Measure, *Mathematische Nachrichten*, 2017, vol. 290, no. 5–6, pp. 913–919. DOI: 10.1002/mana.201600136.
11. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A. Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis*, Birkhauser, 2013, 316 p.
12. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., and Růžička M. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Ser. Lecture Notes in Math., vol.* 2017, Berlin, Springer-Verlag, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-18363-8.
13. *Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., and Samko S. Integral Operators in Non-standard Function Spaces, vol. I. Variable Exponent Lebesgue and Amalgam Spaces*, Birkhäser, 2015, 586 p.
14. *Duoandikoetxea J. Fourier Analysis. Ser. Graduate Studies, vol.* 29, Providence (R. I.), Amer. Math. Soc., 2001.
15. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A., and Neugebauer C. J.* The Maximal Function on Variable L^p-spaces. *Ann. Acad. Scient. Fennicae. Math.*, 2003, vol. 28, pp. 223–238.
16. *Kerman R., Torchinsky A.* Integral Inequalities with Weights for the Hardy Maximal Function, *Stud. Math.*, 1982, vol. 71, pp. 277–284.
17. *Kokilashvili V., Krbec M. Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, Singapore, World Scientific Publ., 1991, 233 p.
18. *Chuvenkov A. F.* Sobolev-Orlicz Spaces of Fractional Order. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Severo-Kavkazskij region. Estestvennye nauki* [Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Natural Sciences], 1978, vol. 1, pp. 6–10 (in Russian).
19. *Samko S. G.* On Spaces of Riesz Potentials. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1976, vol. 10, no. 5, pp. 1089–1117. DOI: 10.1070/IM1976v010n05ABEH001827.
20. *Samko S. G., Kilbas A. A., and Marichev O. I. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, London–N. Y., Gordon & Breach. Sci. Publ., 1993, 1012 p.
21. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* Description of a Space of Riesz Potentials in Terms of Higher Derivatives. *Soviet Mathematics* (*Izvestiya VUZ. Matematika*), 1980, vol. 24, no. 11, pp. 95—98.
22. *Kokilashvili V., Meskhi A., and Samko S.* On the Inversion and Characterization of the Riesz Potentials in the Weighted Lebesgue Spaces. *Memoirs on Differential Equations and Mahematical Physics*, 2003, vol. 29, pp. 99–106.
23. *Almeida A.* Inversion of the Riesz Potential Operator on Lebesgue Spaces with Variable Exponent. *Frac. Calc. Appl. Anal.*, 2003, vol. 6, no. 3, pp. 311–327.
24. *Almeida A., Samko S.* Characterization of Riesz and Bessel Potentials on Variable Lebesgue Spaces. *J. Function Spaces and Appl.*, 2006, vol. 4, no. 2, pp. 113–144.

Received March 29, 2018

Stefan G. Samko,
Universidade do Algarve Campus de Gambelas,
Campus de Gambelas, 8005-139 Faro, Portugal
E-mail: `ssamko@ualg.pt`
http://orcid.org/0000-0002-8022-2863

Salaudin M. Umarkhadzhiev
Kh. Ibragimov Complex Institute of the Russian Academy of Sciences,
21a Staropromyslovskoe shosse, Grozny 364051, Russia;
Academy of Sciences of the Chechen Republic,
13 Esambaev av., Grozny 364024, Russia
E-mail: `umsalaudin@gmail.com`
http://orcid.org/0000-0002-8283-1515

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 109–110

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

А. Г. КУСРАЕВ — УЧЕНЫЙ И ГРАЖДАНИН (К 65-ЛЕТИЮ)

14 февраля 2018 г. — день 65-летия выдающегося российского ученого Анатолия Георгиевича Кусраева.

Кусраев — математик, в творчестве которого значительное место занимают взаимосвязанные прикладные и фундаментальные проблемы. В этом он следует традициям школы Леонида Витальевича Канторовича, академика по математике и нобелиата по экономике.

В сфере оптимизации Кусраеву принадлежит наиболее общая схема общего положения системы множеств. Общее положение позволяет применять технику выпуклого анализа для частично определенных выпуклых операторов. Кусраев сформулировал концепцию общего положения в топологических и борнологических пространствах. Частные варианты несплющенности до сих переоткрываются в некоторых прикладных исследованиях. Кусраев предложил новые схемы локальной аппроксимации произвольных отображений в стиле конуса Кларка и дал одни из наиболее общих необходимых условий для ряда невыпуклых задач оптимизации.

Выдающийся вклад внесен Кусраевым в исследование различных классов векторных решеток и операторов в них. Один из первых фундаментальных его результатов в этом направлении — объяснение условия разложимости векторной нормы, впервые введенное Канторовичем. Потом это условие отбрасывалось ввиду не понимания его особой роли. Кусраев доказал, что разложимость векторной нормы обеспечивает ее экстенсиональность, т. е. булевозначную интерпретацию расширения области прибытия векторной нормы.

Исследование разложимости нормы естественно связано с новейшей математической технологией — аппаратом булевозначных моделей теории множеств, возникшей на пути осмысления и освоения метода форсинга Коэна. Гордоном была открыта связь универсально полных пространств Канторовича с булевозначнами моделями поля вещественных чисел. Это открыло принципиально новые возможности для функционального анализа и теории операторов в векторных решетках и многих классов банаховых алгебр. Новое направление получило наименование «булевозначный анализ». Сам термин восходит к Такеути, а наметил новую область исследований Скотт, использовавший термин «булев анализ».

Кусраев вскоре стал одним из признанных лидеров этого направления, обогатив функциональный анализ теоремой о представлении разных классов решеток, модулей и алгебр. Его вклад в теорию операторов стал фундаментальным после построения теории мажорируемых операторов, вклада в проблему Викстеда и описание инъективных банаховых решеток. Кусраевым доказаны десятки первоклассных теорем об этих объектах, которые еще очень мало доступны представителям классического анализа, не владеющего методами теории моделей. Результаты Кусраева устремлены в будущее и ждут новых исследователей, владеющих современными методами логики.

Кусраев сочетает напряженную научную работу с огромной деятельностью по развитию науки на Северном Кавказе. Он один из создателей и бессменный руководитель Владикавказского научного центра РАН. Кусраев — директор-организатор Южного математического института, создатель и главный редактор Владикавказского математического журнала и Вестника ВНЦ. Под его руководством в республике Северная Осетия-Алания создана система непрерывного математического образования талантливой молодежи от школы до аспирантуры, проводятся региональные, всероссийские и международные конференции.

Кусраев закончил Новосибирский государственный университет, воспринял творческие установки Новосибирского академгородка и применил полученные знания на благо своей республики. Много лет Кусраев мой друг и соавтор. Более близкого, надежного, ответственного и преданного науке коллеги мне повстречать не доводилось.

Сердечно поздравляю Анатолия Георгиевича с юбилеем и желаю счастья и радости ему и его семье.

С. С. Кутателадзе

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 111–119

К 65-ЛЕТИЮ АНАТОЛИЯ ГЕОРГИЕВИЧА КУСРАЕВА

14 февраля 2018 г. исполнилось 65 лет известному российскому математику специалисту по функциональному анализу, доктору физико-математических наук, профессору Анатолию Георгиевичу Кусраеву.

Анатолий Георгиевич — представитель научной школы выдающегося советского математика, лауреата Нобелевской премии по экономике академика Л. В. Канторовича. Он является первым и бессменным председателем Владикавказского научного центра Российской академии наук, заведует кафедрой математического анализа Северо-Осетинского университета им. К. Л. Хетагурова. В трудные для Южной Осетии годы возглавлял на своей малой родине Министерство образования и науки.

Анатолий Георгиевич родился в селении Гром Цхинвальского района Юго-Осетинской автономной области в семье сельского учителя. После окончания средней школы г. Цхинвал продолжил свою учебу сначала в Северо-Осетинском, а затем в Новосибирском государственном университете, в 1975 г. с отличием закончил механико-математический факультет НГУ.

Научным руководителем А. Г. Кусраева в студенческие и аспирантские годы был выдающийся педагог Глеб Павлович Акилов, создавший совместно с Л. В. Канторовичем всемирно известный учебник по функциональному анализу. В дальнейшем научная судьба свела его с профессором Семеном Самсоновичем Кутателадзе. Многолетная совместная деятельность сформировала замечательный математический тандем «Кусраев — Кутателадзе», которому принадлежат циклы глубоких исследований по выпуклому анализу, теории операторов, нестандартным методам анализа.

Свою первую работу А. Г. Кусраев опубликовал будучи аспирантом в 1977 г., после чего наступил период активной научной деятельности. Кандидатская диссертация была защищена в 1979 г., а докторская в 1986 г.

Кусраевым А. Г. опубликованы около 300 научных трудов, в том числе 26 монографий и 27 учебных пособий. Научные результаты А. Г. Кусраева охватывают широкий круг вопросов функционального анализа и его приложений. Им предложены и разработаны оригинальные методы исследования функциональных пространств и операторов в них: метод общего положения, метод циклической компактности, метод булевозначных реализаций. Для работ последнего десятилетия характерно комбинирование различных методов анализа, алгебры и математической логики. На этой основе им получен ряд крупных результатов: получено новое решение проблемы Э. Викстеда о порядковой ограниченности нерасширяющих операторов в векторных решетках; установлено существование нетривиальных дифференцирований в кольце измеримых функций, завершена полная структурная классификация инъективных банаховых решеток; найдено описание операторов, факторизуемых через инъективные банаховы решетки и др. Эти методы вместе с их многочисленными приложениями получили мировое признание.

Анатолий Георгиевич занимается педагогической деятельностью. С 1991 г. и по настоящее время он возглавляет кафедру математического анализа Северо-Осетинского государственного университета. Много сил отдает научно-организационной деятельности и работе с молодежью. Среди его учеников 23 кандидата и доктора наук. Является главным редактором Владикавказского математического журнала, членом редколлегии международного журнала «Positivity».

И в связи с наступившей знаменательной датой от всего сердца поздравляем Анатолия Георгиевича. Желаем ему дальнейших профессиональных успехов и творческих удач!

И самое главное пожелание — мира, здоровья и благополучия Анатолию Георгиевичу и всем его родным и близким!

А. В. Абанин, Е. К. Басаева , А. О. Ватульян, С. К. Водопьянов,
А. Е. Гутман, В. А. Койбаев, Ю. Ф. Коробейник, С. Б. Климентов,
С. С. Кутателадзе, А. А. Махнев, Б. Б. Тасоев,
С. М. Умарходжиев, М. З. Худалов

Вниманию авторов

Владикавказский математический журнал (ВМЖ) — научное периодическое издание, выходящее четыре раза в год. Журнал издается Южным математическим институтом — филиалом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Поступившие в редакцию ВМЖ статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи в порядке цитирования или по алфавиту. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов ($\approx$ 12 стр. формата А4). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взымается.

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 50-18-06;
E-mail: rio@smath.ru
Зав. редакцией: Кибизова В. В.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 20

Выпуск 2

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

Подписано в печать 06.07.2018. Дата выхода в свет 12.07.2018.
Формат бумаги 60×84¹/₈. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 13,14. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель и издатель:
Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.