ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

http://www.vlmj.ru

Том 22, выпуск 4 2020

ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

http://www.vlmj.ru

Volume 22, Issue 4

2020

SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 50-18-06; E-mail: `rio@smath.ru`
Зав. редакцией: В. В. БОЗРОВА

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vlmj.ru**

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций:
свид. ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.;
свид. ЭЛ № ФС77-70171 от 21 июня 2017 г.

Editorial Office: 22 Markusa St., Vladikavkaz 362027,
the Republic of North Ossetia-Alania, Russia
Phone: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru

Managing Editor: VICTORIA V. BOZROVA

The journal was founded in 1999. It is published four times a year.
ELECTRONIC VERSION: **www.vlmj.ru**

Registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom,
Information Technologies and Mass Communications:
ПИ № ФС77-70008 dated May 31, 2017; ЭЛ № ФС77-70171 dated June 21, 2017.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 22, выпуск 4 октябрь–декабрь, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Владикавказ
2020

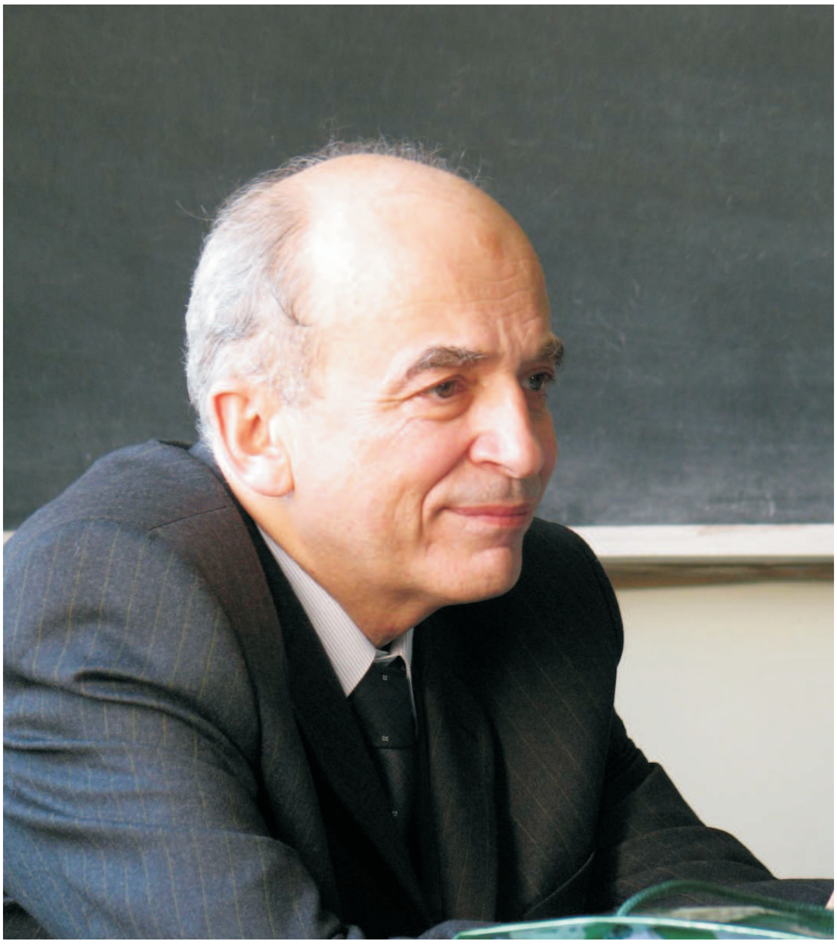
RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTER
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 22, issue 4 October–December, 2020

CONTENT

Vladikavkaz
2020



Редакционная коллегия поздравляет
доктора физико-математических наук,
профессора Семёна Самсоновича Кутателадзе
с 75-летием со дня рождения

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 4, P. 7–15

УДК 517.53 + 517.54
DOI 10.46698/q5183-3412-9769-d

SOME SUBORDINATION RESULTS FOR CERTAIN CLASS WITH COMPLEX ORDER DEFINED BY SALAGEAN TYPE q-DIFFERENCE OPERATOR

M. K. Aouf[1] and T. M. Seoudy[2,3]

[1] Department of Mathematics, Faculty of Science,
Mansoura University, Mansoura 35516, Egypt;
[2] Department of Mathematics, Faculty of Science,
Fayoum University, Fayoum 63514, Egypt;
[3] Department of Mathematics, Jamoum University College,
Umm Al-Qura University, Makkah, Saudi Arabia

E-mail: mkaouf127@yahoo.com, tms00@fayoum.edu.eg, tmsaman@uqu.edu.sa

Abstract. The theory of the basic quantum calculus (that is, the basic q-calculus) plays important roles in many diverse areas of the engineering, physical and mathematical science. Making use of the basic definitions and concept details of the q-calculus, Govindaraj and Sivasubramanian [10] defined the Salagean type q-difference (q-derivative) operator. In this paper, we introduce a certain subclass of analytic functions with complex order in the open unit disk by applying the Salagean type q-derivative operator in conjunction with the familiar principle of subordination between analytic functions. Also, we derive some geometric properties such as sufficient condition and several subordination results for functions belonging to this subclass. The results presented here would provide extensions of those given in earlier works.

Key words: analytic function, subordinating factor sequence, hadamard product (or convolution), q-derivative operator, Salagean operator.

Mathematical Subject Classification (2010): 30C45, 30C50.

For citation: *Aouf, M. K. and Seoudy, T. M.* Some Subordination Results for Certain Class with Complex Order Defined by Salagean Type q-Difference Operator, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 7–15. DOI: 10.46698/q5183-3412-9769-d.

1. Introduction

Let $\mathscr{A}$ denote the class of functions of the form:

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \tag{1.1}$$

which are analytic in the open unit disc $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. We also denote by $\mathscr{K}$ the class of functions $f \in \mathscr{A}$ that are convex in $\mathbb{U}$. For two functions f and g, analytic in $\mathbb{U}$, we say that f is *subordinated* to g in $\mathbb{U}$, written $f(z) \prec g(z)$, if there exists a Schwarz function $w(z)$, which (by definition) is analytic in $\mathbb{U}$ with $w(0) = 0$ and $|w(z)| < 1$, such that $f(z) = g(w(z)), z \in \mathbb{U}$. Furthermore, if the function g is univalent in $\mathbb{U}$, then (see [1, 2])

$$f(z) \prec g(z) \Leftrightarrow f(0) = g(0) \quad \text{and} \quad f(\mathbb{U}) \subset g(\mathbb{U}).$$

Given two functions $f, g \in \mathscr{A}$, where f is given by (1.1) and g is given by

$$g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k, \tag{1.2}$$

the *Hadamard product* (or *convolution*) $f * g$ is defined by

$$(f * g)(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k b_k z^k = (g * f)(z).$$

For $0 < q < 1$, the *q-derivative* of a function $f \in \mathscr{A}$ is defined by (see [3–9])

$$D_q f(z) = \begin{cases} f'(0), & z = 0, \\ \frac{f(qz)-f(z)}{(q-1)z}, & z \neq 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

and $D_q^2 f(z) = D_q(D_q f(z))$. From (1.3), we have

$$D_q f(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} [k]_q \ a_k z^{k-1}, \tag{1.4}$$

where

$$[k]_q = \frac{1-q^k}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1}, \tag{1.5}$$

and

$$\lim_{q \to 1^-} D_q f(z) = \lim_{q \to 1^-} \frac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z} = f'(z),$$

for a function f which is differentiable in a given subset of $\mathbb{C}$.

For $f \in \mathscr{A}$, Govindaraj and Sivasubramanian [10] defined the Salagean type q-difference operator as follows:

$$\begin{aligned} D_q^0 f(z) &= f(z), \\ D_q^1 f(z) &= z D_q f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} [k]_q \ a_k z^k, \\ D_q^2 f(z) &= z D_q \left(D_q^1 f(z)\right) = z + \sum_{k=2}^{\infty} ([k]_q)^2 \ a_k z^k, \\ D_q^n f(z) &= z D_q \left(D_q^{n-1} f(z)\right), \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}. \end{aligned}$$

It is easily see that

$$D_q^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} ([k]_q)^n \ a_k z^k, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.6}$$

We note that

$$\lim_{q \to 1^-} D_q^n f(z) = D^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n \ a_k z^k, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

The differential operator D^n was introduced and studied by Salagean [11] (see also Srivastava and Aouf [12]).

Let $\mathscr{G}_q^n(\lambda, b, A, B)$ denote the subclass of $\mathscr{A}$ consisting of functions $f(z)$ which satisfy

$$1 + \frac{1}{b}\left[(1-\lambda)\frac{D_q^n f(z)}{z} + \lambda D_q\left(D_q^n f(z)\right) - 1\right] \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \tag{1.7}$$

or satisfying

$$\left|\frac{(1-\lambda)\frac{D_q^n f(z)}{z} + \lambda D_q\left(D_q^n f(z)\right) - 1}{B\left[(1-\lambda)\frac{D_q^n f(z)}{z} + \lambda D_q\left(D_q^n f(z)\right)\right] - \left[B + (A-B)b\right]}\right| < 1, \tag{1.8}$$

$$b \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\};\quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1;\quad -1 \leqslant A < B \leqslant 1;\quad 0 < B \leqslant 1;\quad z \in \mathbb{U}.$$

We note that:

(i) $\lim\limits_{q\to 1^-} \mathscr{G}_q^n(\lambda, b, A, B) = \mathscr{G}^n(\lambda, b, A, B)$ (see [13])

$$= \left\{f \in \mathscr{A} : 1 + \frac{1}{b}\left[(1-\lambda)\frac{D^n f(z)}{z} + \lambda\left(D^n f(z)\right)' - 1\right] \prec \frac{1+Az}{1+Bz}\right\};$$

(ii) $\lim\limits_{q\to 1^-} \mathscr{G}_q^n(\lambda, b, 1, -1) = \mathscr{G}^n(\lambda, b)$ (see [14])

$$= \left\{f \in \mathscr{A} : \Re\left(1 + \frac{1}{b}\left[(1-\lambda)\frac{D^n f(z)}{z} + \lambda\left(D^n f(z)\right)' - 1\right]\right) > 0\right\};$$

(iii) $\mathscr{G}_q^0(\lambda, b, A, B) = \mathscr{G}_q(\lambda, b, A, B)$

$$= \left\{f \in \mathscr{A} : 1 + \frac{1}{b}\left[(1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda D_q f(z) - 1\right] \prec \frac{1+Az}{1+Bz}\right\};$$

(iv) $\mathscr{G}_q^n(\lambda, b, -1, 1) = \mathscr{G}_q^n(\lambda, b)$

$$= \left\{f \in \mathscr{A} : \Re\left(1 + \frac{1}{b}\left[(1-\lambda)\frac{D_q^n f(z)}{z} + \lambda D_q\left(D_q^n f(z)\right) - 1\right]\right) > 0\right\};$$

(v) $\mathscr{G}_q^n(0, 1-\alpha) = \mathscr{G}_q^n(\alpha) = \left\{f \in \mathscr{A} : \Re\left[\frac{D_q^n f(z)}{z}\right] > \alpha,\ 0 \leqslant \alpha < 1\right\}$,

$\mathscr{G}_q^n(0, 1-\alpha) = \mathscr{R}_q^n(\alpha) = \left\{f \in \mathscr{A} : \Re\left[D_q\left(D_q^n f(z)\right)\right] > \alpha,\ 0 \leqslant \alpha < 1\right\}$;

(vi) $\mathscr{G}_q^n(\lambda, 1-\alpha, -1, 1) = \mathscr{G}_q^n(\lambda, \alpha)$

$$= \left\{f \in \mathscr{A} : \Re\left[(1-\lambda)\frac{D_q^n f(z)}{z} + \lambda D_q\left(D_q^n f(z)\right)\right] > \alpha\right\}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1;$$

(vii) $\mathscr{G}_q^n\left(\lambda, e^{-i\theta}(1-\alpha)\cos\theta, -1, 1\right) = \mathscr{G}_q^n(\lambda, \alpha, \theta)$

$$= \left\{f \in \mathscr{A} : \Re\left(e^{i\theta}\left[(1-\lambda)\frac{D_q^n f(z)}{z} + \lambda D_q\left(D_q^n f(z)\right)\right]\right) > \alpha\cos\theta\right\},$$

$$|\theta| < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1.$$

2. Main Result

To prove our main result we need the following definition and lemmas.

Definition 1 (Subordinating Factor Sequence [15]). A sequence $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ of complex numbers is said to be a *subordinating factor sequence* if, whenever $f(z)$ of the form (1.1) is analytic, univalent and convex in $\mathbb{U}$, we have the subordination given by

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k z^k \prec f(z), \quad z \in \mathbb{U}, \ a_1 = 1.$$

Lemma 1 [15]. *The sequence $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ is a subordinating factor sequence if and only if*

$$\Re\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right\} > 0, \quad z \in \mathbb{U}.$$

Now, we prove the following lemma which gives a sufficient condition for functions to belong to the class $\mathscr{G}_q^n(\lambda, b, A, B)$.

Lemma 2. *Let the function f which is defined by* (1.1) *satisfy the following condition:*

$$\sum_{k=2}^{\infty} (1+B)\left\{1+\lambda\left([k]_q - 1\right)\right\}\left([k]_q\right)^n |a_k| \leqslant (B-A)|b|, \tag{2.1}$$

then $f \in \mathscr{G}_q^n(\lambda, b, A, B)$.

$\lhd$ Suppose that the inequality (2.1) holds. Then we have for $z \in \mathbb{U}$,

$$\begin{aligned}
&\left|(1-\lambda)\frac{D_q^n f(z)}{z} + \lambda D_q\left(D_q^n f(z)\right) - 1\right| \\
&\qquad - \left|B\left[(1-\lambda)\frac{D_q^n f(z)}{z} + \lambda D_q\left(D_q^n f(z)\right)\right] - B - (A-B)b\right| \\
&= \left|\sum_{k=2}^{\infty}\left\{1+\lambda\left([k]_q - 1\right)\right\}\left([k]_q\right)^n a_k z^{k-1}\right| \\
&\qquad - \left|(B-A)b + B\sum_{k=2}^{\infty}\left\{1+\lambda\left([k]_q - 1\right)\right\}\left([k]_q\right)^n a_k z^{k-1}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\left\{1+\lambda\left([k]_q - 1\right)\right\}\left([k]_q\right)^n |a_k||z|^{k-1} \\
&\qquad - \left\{(B-A)|b| - B\sum_{k=2}^{\infty}\left\{1+\lambda\left([k]_q - 1\right)\right\}\left([k]_q\right)^n |a_k||z|^{k-1}\right\} \\
&\leqslant \sum_{k=2}^{\infty}(1+B)\left\{1+\lambda\left([k]_q - 1\right)\right\}\left([k]_q\right)^n |a_k| z^{k-1} - (B-A)|b| \leqslant 0,
\end{aligned}$$

which shows that $f(z)$ belongs to the class $\mathscr{G}_q^n(\lambda, b, A, B)$. $\rhd$

Let $\mathscr{G}_q^{n*}(\lambda, b, A, B)$ denote the class of functions $f(z) \in \mathscr{A}$ whose coefficients satisfy the condition (2.1). We note that $\mathscr{G}_q^{n*}(\lambda, b, A, B) \subseteq \mathscr{G}_q^n(\lambda, b, A, B)$. Also, let $\mathscr{G}_q^{0*}(\lambda, b, A, B) = \mathscr{G}_q^{*}(\lambda, b, A, B)$, $\mathscr{G}_q^{n*}(\lambda, b, -1, 1) = \mathscr{G}_q^{n*}(\lambda, b)$, $\mathscr{G}_q^{n*}(\lambda, 1-\alpha, -1, 1) = \mathscr{G}_q^{n*}(\lambda, \alpha)$, $\mathscr{G}_q^{n*}\left(\lambda, e^{-i\theta}(1-\alpha)\cos\theta, -1, 1\right) = \mathscr{G}_q^{n*}(\lambda, b, \theta)$ $\left(|\theta| < \frac{\pi}{2}, \ 0 \leqslant \alpha < 1\right)$.

In this paper we prove several subordination relationships involving the functional class $\mathscr{G}_q^{n*}(\lambda, b, A, B)$ employing the technique used earlier by Attiya [16] and Srivastava and Attiya [17] (see also [13, 14, 18–22]).

Theorem 1. *Let the function f defined by* (1.1) *be in the class $\mathscr{G}_q^{n*}(\lambda, b, A, B)$ and $g \in \mathscr{K}$. Then*

$$\left(\frac{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}{2\left[(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n + (B-A)|b|\right]}\right)(f * g)(z) \prec g(z) \tag{2.2}$$

and

$$\Re\{f(z)\} > -\frac{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n + (B-A)|b|}{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}, \quad z \in \mathbb{U}. \tag{2.3}$$

The constant factor $\frac{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}{2[(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n + (B-A)|b|]}$ in the subordination result (2.2) *cannot be replaced by a larger one.*

$\lhd$ Let $f \in \mathscr{G}_q^{n*}(\lambda, b, A, B)$ and let $g(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} c_k z^k \in \mathscr{K}$. Then we have

$$\begin{aligned}&\left(\frac{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}{2\left[(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n + (B-A)|b|\right]}\right)(f * g)(z)\\ &= \left(\frac{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}{2\left[(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n + (B-A)|b|\right]}\right)\left(z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k c_k z^k\right).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Thus, by Definition 1, the subordination result (2.2) will hold true if the sequence

$$\left\{\frac{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n + (B-A)|b|}a_k\right\}_{k=1}^{\infty} \tag{2.5}$$

is a subordinating factor sequence, with $a_1 = 1$. In view of Lemma 1, this is equivalent to the following inequality:

$$\Re\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n + (B-A)|b|}a_k z^k\right\} > 0, \quad z \in \mathbb{U}. \tag{2.6}$$

Since

$$\Psi(k) = \left\{1 + \lambda\left([k]_q - 1\right)\right\}\left([k]_q\right)^n, \quad k \geqslant 2,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ 0 < q < 1,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

is an increasing function of k ($k \geqslant 2$), when $|z| = r < 1$, we have

$$\begin{aligned}&\Re\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n + (B-A)|b|}a_k z^k\right\}\\
&= \Re\left\{1 + \frac{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n + (B-A)|b|}z\right.\\
&\qquad\left. + \frac{(1+B)\sum\limits_{k=2}^{\infty}(1+\lambda q)(1+q)^n}{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n + (B-A)|b|}a_k z^k\right\}\\
&\geqslant 1 - \frac{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n + (B-A)|b|}r - \frac{\sum\limits_{k=2}^{\infty}(1+B)\left\{1 + \lambda\left([k]_q - 1\right)\right\}\left([k]_q\right)^n|a_k|}{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n + (B-A)|b|}r^k\\
&> 1 - \frac{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n + (B-A)|b|}r - \frac{(B-A)|b|}{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n + (B-A)|b|}r\\
&= 1 - r > 0, \quad |z| = r < 1,\end{aligned}$$

where we have also made use of assertion (2.1) of Lemma 2. Thus (2.6) holds true in $\mathbb{U}$ and also the subordination result (2.2) asserted by Theorem 1. The inequality (2.3) follows from (2.2) by taking the convex function $g(z)=\frac{z}{1-z}=z+\sum_{k=2}^{\infty}z^k$. To prove the sharpness of the constant $\frac{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}{2[(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n+(B-A)|b|]}$, we consider the function $f_0(z)\in\mathcal{G}_q^{n*}(\lambda,b,A,B)$ given by

$$f_0(z)=z-\frac{(B-A)|b|}{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}z^2. \tag{2.7}$$

Thus from (2.2), we have

$$\frac{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}{2[(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n+(B-A)|b|]}f_0(z)\prec\frac{z}{1-z},\quad z\in\mathbb{U}. \tag{2.8}$$

Moreover, it can easily be verified for the function $f_0(z)$ given by (2.7) that

$$\min_{|z|\leqslant r}\left\{\Re\left(\frac{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}{2[(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n+(B-A)|b|]}f_0(z)\right)\right\}=-\frac{1}{2}. \tag{2.9}$$

This shows that the constant $\frac{(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n}{2[(1+B)(1+\lambda q)(1+q)^n+(B-A)|b|]}$ is the best possible, this completes the proof of Theorem 1. $\rhd$

Putting $n=0$ in Theorem 1, we have

Corollary 1. *Let the function f defined by (1.1) be in the class $\mathcal{G}_q^{*}(\lambda,b,A,B)$ and $g\in\mathcal{K}$. Then*

$$\left(\frac{(1+B)(1+\lambda q)}{2[(1+B)(1+\lambda q)+(B-A)|b|]}\right)(f*g)(z)\prec g(z),\quad z\in\mathbb{U}, \tag{2.10}$$

and

$$\Re\{f(z)\}>-\frac{(1+B)(1+\lambda q)+(B-A)|b|}{(1+B)(1+\lambda q)}. \tag{2.11}$$

The constant factor $\frac{(1+B)(1+\lambda q)}{2[(1+B)(1+\lambda q)+(B-A)|b|]}$ in the subordination result (2.10) cannot be replaced by a larger one.

Putting $A=-1$ and $B=1$ in Theorem 1, we have

Corollary 2. *Let the function f defined by (1.1) be in the class $\mathcal{G}_q^{n*}(\lambda,b)$ and $g\in\mathcal{K}$. Then*

$$\left(\frac{(1+\lambda q)(1+q)^n}{2[(1+\lambda q)(1+q)^n+|b|]}\right)(f*g)(z)\prec g(z),\quad z\in\mathbb{U}, \tag{2.12}$$

and

$$\Re\{f(z)\}>-\frac{(1+\lambda q)(1+q)^n+|b|}{(1+\lambda q)(1+q)^n},\quad z\in\mathbb{U}. \tag{2.13}$$

The constant factor $\frac{(1+\lambda q)(1+q)^n}{2[(1+\lambda q)(1+q)^n+|b|]}$ in the subordination result (2.12) cannot be replaced by a larger one.

Putting $b=1-\alpha(0\leqslant\alpha<1)$, $A=-1$ and $B=1$ in Theorem 1, we have

Corollary 3. *Let the function f defined by (1.1) be in the class $\mathcal{G}_q^{n*}(\lambda,\alpha)$ $(0\leqslant\alpha<1)$ and $g\in\mathcal{K}$. Then*

$$\left(\frac{(1+\lambda q)(1+q)^n}{2[(1+\lambda q)(1+q)^n+1-\alpha]}\right)(f*g)(z)\prec g(z),\quad z\in\mathbb{U}, \tag{2.14}$$

and

$$\Re\left\{f\left(z\right)\right\} > -\frac{\left(1+\lambda q\right)\left(1+q\right)^{n}+1-\alpha}{\left(1+\lambda q\right)\left(1+q\right)^{n}}, \quad z \in \mathbb{U}. \tag{2.15}$$

The constant factor $\frac{(1+\lambda q)(1+q)^{n}}{2[(1+\lambda q)(1+q)^{n}+1-\alpha]}$ *in the subordination result* (2.14) *cannot be replaced by a larger one.*

Putting $b = e^{-i\theta}\left(1-\alpha\right)\cos\theta$ $\left(|\theta| < \frac{\pi}{2};\ 0 \leqslant \alpha < 1\right)$, $A = -1$ and $B = 1$ in Theorem 1, we have

Corollary 4. *Let the function f defined by* (1.1) *be in the class* $\mathscr{G}_{q}^{n*}\left(\lambda,\alpha,\theta\right)$ $\left(|\theta| < \frac{\pi}{2};\right.$ $\left.0 \leqslant \alpha < 1\right)$ *and* $g \in \mathscr{K}$*. Then*

$$\left(\frac{\left(1+\lambda q\right)\left(1+q\right)^{n}}{2\left[\left(1+\lambda q\right)\left(1+q\right)^{n}+\left(1-\alpha\right)\cos\theta\right]}\right)\left(f*g\right)\left(z\right) \prec g\left(z\right), \quad z \in \mathbb{U}, \tag{2.16}$$

and

$$\Re\left\{f\left(z\right)\right\} > -\frac{\left(1+\lambda q\right)\left(1+q\right)^{n}+\left(1-\alpha\right)\cos\theta}{\left(1+\lambda q\right)\left(1+q\right)^{n}}, \quad z \in \mathbb{U}. \tag{2.17}$$

The constant factor $\frac{(1+\lambda q)(1+q)^{n}}{2[(1+\lambda q)(1+q)^{n}+(1-\alpha)\cos\theta]}$ *in the subordination result* (2.14) *cannot be replaced by a larger one.*

Remark 1. Taking $A = -1$, $B = 1$ and letting $q \to 1^{-}$ in Theorem 1, we get the result obtained by Aouf [14, Theorem 1].

Remark 2. Replacing A by $-A$, B by $-B$ and letting $q \to 1^{-}$ in Theorem 1, we obtain the result get by Sivasubramanian et al. [13, Theorem 2.2].

Remark 3. Putting $n = \lambda = 0$, $b = 1-\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ and letting $q \to 1^{-}$ in Corollary 2, we get the result obtained by Aouf [14, Corollary 3].

Remark 4. Putting $n = 0$, $\lambda = 1$, $b = 1-\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ and letting $q \to 1^{-}$ in Corollary 2, we get the result obtained by Aouf [14, Corollary 4].

References

1. *Bulboacă, T. Differential Subordinations and Superordinations, New Results*, Cluj-Napoca, House of Scientific Boook Publ., 2005.
2. *Miller, S. S. and Mocanu, P. T. Differential Subordinations. Theory and Applications, Series on Monographs and Textbooks in Pure and Appl. Math.*, no. 255, New York, Marcel Dekker Inc., 2000, 480 p. DOI: 10.1201/9781482289817.
3. *Annaby, M. H. and Mansour, Z. S. q-Fractional Calculus and Equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2056, Berlin, Springer-Verlag, 2012. DOI: 10.1007/978-3-642-30898-7.
4. *Aouf, M. K. and Seoudy, T. M.* Convolution Properties for Classes of Bounded Analytic Functions with Complex Order Defined by q-Derivative Operator, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 2019, vol. 113, no. 2, pp. 1279–1288. DOI: 10.1007/s13398-018-0545-5.
5. *Aral, A., Gupta, V. and Agarwal, R. P. Applications of q-Calculus in Operator Theory*, New York, Springer, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4614-6946-9.
6. *Gasper, G. and Rahman, M. Basic Hypergeometric Series*, Cambridge, Cambridge University Press, 1990, xx+287 p.
7. *Jackson, F. H.* On q-Functions and a Certain Difference Operator, *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 1908, vol. 46, pp. 253–281. DOI: 10.1017/S0080456800002751.
8. *Seoudy, T. M. and Aouf, M. K.* Convolution Properties for Certain Classes of Analytic Functions Defined by q-Derivative Operator, *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2014, art. ID 846719, pp. 1–7. DOI: 10.1155/2014/846719.
9. *Seoudy, T. M. and Aouf, M. K.* Coefficient Estimates of New Classes of q-Starlike and q-Convex Functions of Complex Order, *Journal of Mathematical Inequalities*, 2016, vol. 10, no. 1, pp. 135–145. DOI: 10.7153/jmi-10-11.

10. *Govindaraj, M. and Sivasubramanian, S.* On a Class of Analytic Functions Related to Conic Domains Involving q-Calculus, *Analysis Mathematica*, 2017, vol. 43, no. 3, pp. 475–487. DOI: 10.1007/s10476-017-0206-5.
11. *Salagean, G. S. Subclasses of Univalent Functions*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1013, Berlin, Springer-Verlag, 1983, pp. 362–372. DOI: 10.1007/BFb0066543.
12. *Aouf, M. K. and Srivastava, H. M.* Some Families of Starlike Functions with Negative Coefficients, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1996, vol. 203, no. 3, pp. 762–790. DOI: 10.1006/jmaa.1996.0411.
13. *Sivasubramanian, S., Mohammed, A. and Darus, M.* Certain Subordination Properties for Subclasses of Analytic Functions Involving Complex Order, *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2011, art. ID 375897, pp. 1–8. DOI: 10.1155/2011/375897.
14. *Aouf, M. K.* Subordination Properties for a Certain Class of Analytic Functions Defined by the Salagean Operator, *Applied Mathematics Letters*, 2009, vol. 22, no. 10, pp. 1581–1585. DOI: 10.1016/j.aml.2009.05.005.
15. *Wilf, H. S.* Subordinating Factor Sequence for Convex Maps of the Unit Circle, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1961, vol. 12, pp. 689–693. DOI: 10.1090/S0002-9939-1961-0125214-5.
16. *Attiya, A. A.* On Some Application of a Subordination Theorems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, vol. 311, no. 2, pp. 489–494. DOI: 10.1016/j.jmaa.2005.02.056.
17. *Srivastava, H. M. and Attiya, A. A.* Some Subordination Results Associated with Certain Subclass of Analytic Functions, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 2004, vol. 5, no. 4, pp. 1–6.
18. *Aouf, M. K. and Mostafa, A. O.* Some Subordination Results for Classes of Analytic Functions Defined by the Al-Oboudi-Al-Amoudi, *Archiv der Mathematik*, 2009, vol. 92, pp. 279–286. DOI: 10.1007/s00013-009-2984-x.
19. *Aouf, M. K., Shamandy, A. A., Mostafa, O. and El-Emam, F.* Subordination Results Associated with β-Uniformly Convex and Starlike Functions, *Proceedings of the Pakistan Academy of Sciences*, 2009, vol. 46, no. 2, pp. 97–101.
20. *Aouf, M. K., Shamandy, A., Mostafa, A. O. and Adwan, E. A.* Subordination Results for Certain Class of Analytic Functions Defined by Convolution, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 2011, vol. 60, pp. 255–262. DOI: 10.1007/s12215-011-0048-0.
21. *Aouf, M. K. Shamandy, A. Mostafa, A. O. and Adwan, E. A.* Subordination Theorem for Analytic Functions Defined by Convolution, *Complex Analysis and Operator Theory*, 2013, vol. 7, pp. 1117–1126. DOI: 10.1007/s11785-011-0171-0.
22. *Bulut, S. and Aouf, M. K.* Subordination Properties for a Certain Class of Analytic Functions with Complex Order, *Le Matematiche*, 2014, vol. 69, no. 2, pp. 117–128.

Received April 1, 2020

Mohamed K. Aouf
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Mansoura University, Mansoura 35516, Egypt,
Professor
E-mail: `mkaouf127@yahoo.com`
https://orcid.org/0000-0001-9398-4042;

Tamer M. Seoudy
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Fayoum University, Fayoum 63514, Egypt,
Associate Professor;

Department of Mathematics, Jamoum University College,
Umm Al-Qura University, Makkah, Saudi Arabia,
Associate Professor
E-mail: `tms00@fayoum.edu.eg`, `tmsaman@uqu.edu.sa`
https://orcid.org/0000-0001-6427-6960

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 4, С. 7–15

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ПОДЧИНЕНИИ ДЛЯ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО КЛАССА, ОПРЕДЕЛЯЕМОГО q-РАЗНОСТНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТИПА САЛАГИНА

Ауф М. К.[1], Сеуди Т. М.[2,3]

[1] Университет Мансура, Мансура 35516, Египет;
[2] Университет Файюма, Файюм 63514, Египет;
[3] Университет Умм-Аль-Кура, Мекка, Саудовская Аравия

E-mail: `mkaouf127@yahoo.com`, `tms00@fayoum.edu.eg`, `tmsaman@uqu.edu.sa`

Аннотация. Теория базового квантового исчисления (то есть базового q-исчисления) играет важную роль в различных областях знания, инженерии, физико-математических науках. Используя основные определения и некоторые детали q-исчисления, Говиндарадж и Сивасубраманиан [10] определили q-разностный (q-производный) оператор типа Салагина. В этой статье мы вводим определенный подкласс аналитических функций со сложным порядком в открытом единичном круге, применяя q-производный оператор типа Салагина в сочетании с известным принципом подчинения между аналитическими функциями. Кроме того, мы выводим некоторые геометрические свойства и несколько результатов о подчинении для функций, принадлежащих этому подклассу. Представленные здесь результаты расширяют результаты, представленные в более ранних работах.

Ключевые слова: аналитическая функция, подчиняющая фактор последовательность, произведение Адамара (или конволюция), q-производный оператор, оператор Салагина.

Mathematical Subject Classification (2010): 30C45, 30C50.

Образец цитирования: *Aouf M. K. and Seoudy T. M.* Some Subordination Results for Certain Class with Complex Order Defined by Salagean Type q-Difference Operator // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, № 4.—С. 7–15 (in English). DOI: 10.46698/q5183-3412-9769-d.

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 4, С. 16–27

УДК 517.968.74
DOI 10.46698/e6476-5914-8893-f

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЕРТКИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ И НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ[#]

С. Н. Асхабов[1,2]

[1] Чеченский государственный педагогический университет,
Россия, 364068, Грозный, пр. Исаева, 62;
[2] Чеченский государственный университет,
Россия, 364024, Грозный, ул. Шерипова, 32
E-mail: askhabov@yandex.ru

Посвящается 75-летию профессора С. С. Кутателадзе

Аннотация. Изучается вольтерровское интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью, переменным коэффициентом $a(x)$ и неоднородностью $f(x)$ в линейной части, которое тесно связано с соответствующим нелинейным интегральным уравнением, возникающим при исследовании инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду, при описании процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом, при решении задачи о нагревании полубесконечного тела при нелинейном теплопередаточном процессе, в моделях популяционной генетики и других. Важно отметить, что в связи с указанными и другими приложениями особый интерес представляют непрерывные положительные при $x > 0$ решения интегрального уравнения. На основе полученных точных нижней и верхней априорных оценок решения интегрального уравнения мы строим весовое полное метрическое пространство P_b, инвариантное относительно нелинейного интегрального оператора свертки, порожденного этим уравнением, и, применяя метод весовых метрик (аналог метода Белицкого), доказываем глобальную теорему о существовании и единственности решения изучаемого нелинейного интегро-дифференциального уравнения как в пространстве P_b, так и во всем классе Q_0^1 непрерывно дифференцируемых положительных при $x > 0$ функций. Показано, что решение может быть найдено в пространстве P_b методом последовательных приближений пикаровского типа. Для последовательных приближений получены оценки скорости их сходимости к точному решению в терминах весовой метрики пространства P_b. В частности, при $f(x) = 0$ из этой теоремы вытекает, что соответствующее однородное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, в отличие от линейного случая, имеет нетривиальное решение. Приведены также примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, степенная нелинейность, переменный коэффициент, априорные оценки, последовательные приближения, метод весовых метрик.

Mathematical Subject Classification (2010): 45G05, 46L05.

Образец цитирования: *Асхабов С. Н.* Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки с переменным коэффициентом и неоднородностью в линейной части // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 4.—С. 16–27. DOI: 10.46698/e6476-5914-8893-f.

1. Введение

Как известно [1, 2], в настоящее время теория линейных уравнений типа свертки достаточно хорошо разработана. В ряде прикладных задач теории переноса излучения, следящих систем (сервомеханизмов), электрических сетей, содержащих нелинейные эле-

[#]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-41-200001. Статья публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611.

менты, в моделях популяционной генетики и других возникают нелинейные уравнения типа свертки (подробнее см. [3, 4]). Особенностью исследования нелинейных уравнений типа свертки является, в частности, то, что в отличие от линейного случая, где основные результаты имеют место сразу для целой серии пространств L_p, C, C_0, M и других [2, гл. 3, п. 3.2], здесь картина существенно зависит как от выбора рассматриваемого пространства, в котором разыскиваются решения, так и от характера допускаемой нелинейности.

В ряде работ [5–8] изучалось нелинейное интегральное уравнение типа свертки вида

$$u^\alpha(x) = a(x) \int\limits_0^x k(x-t)u(t)\,dt + f(x), \quad x > 0,\ \alpha > 1, \tag{1}$$

возникающее при исследовании инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду, при описании процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом, при решении задачи о нагревании полубесконечного тела при нелинейном теплопередаточном процессе, в моделях популяционной генетики и других (подробнее см. в [3, 4, 9]). Важно отметить, что в связи с указанными и другими приложениями особый интерес представляют непрерывные положительные при $x > 0$ решения интегрального уравнения (1).

В данной работе в конусе Q_0^1, образованном неотрицательными непрерывно дифференцируемыми на полуоси $(0,\infty)$ функциями, удовлетворяющими условию, что $u(0) = 0$, изучается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки

$$u^\alpha(x) = a(x) \int\limits_0^x k(x-t)u'(t)\,dt + f(x), \quad x > 0,\ \alpha > 1, \tag{2}$$

тесно связанное, как будет показано ниже, с интегральным уравнением вида (1).

Исследование основывается на некоторой *модификации* принципа сжимающих отображений (аналог метода А. Белицкого), *позволяющей* доказывать глобальные теоремы существования и единственности без ограничений на область определения решений (описание метода Белицкого и его преимуществ приведено в [10, гл. 3, п. 3.1.3]).

На основе полученных точных нижней и верхней априорных оценок решения интегрального уравнения вида (1) мы строим весовое полное метрическое пространство P_b и, применяя аналог метода Белицкого, доказываем глобальную теорему о существовании и единственности решения интегро-дифференциального уравнения (2) как в пространстве P_b, так и во всем классе Q_0^1 непрерывно дифференцируемых положительных при $x > 0$ функций. Показано, что решение уравнения (2) может быть найдено в P_b методом последовательных приближений пикаровского типа. Для последовательных приближений получены оценки скорости их сходимости к точному решению в терминах весовой метрики пространства P_b.

2. Свойства неотрицательных решений

Основным объектом исследования в данной работе является уравнение (2), в котором ядро $k(x)$, коэффициент $a(x)$ и неоднородность $f(x)$ удовлетворяют условиям:

$$k \in C^1[0,\infty), \quad k'(x) \text{ не убывает на } [0,\infty), \quad k(0) = 0 \quad \text{и} \quad k'(0) > 0, \tag{3}$$

$$a \in C^1[0,\infty), \quad a(x) \text{ не убывает на } [0,\infty) \quad \text{и} \quad a(x) > 0 \text{ при } x > 0, \tag{4}$$

$$f \in C^1[0,\infty), \quad f(x) \text{ не убывает на } [0,\infty) \quad \text{и} \quad f(0)=0, \tag{5}$$

где $C^1[0,\infty)$ означает пространство непрерывно дифференцируемых на $[0,\infty)$ функций.

В связи с указанными во введении приложениями, будем искать решения уравнения (2) в классе

$$Q_0^1 = \big\{u(x):\, u \in C[0,\infty)\cap C^1(0,\infty),\ u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при } x>0\big\}.$$

Наряду с уравнением (2) будет рассматриваться также интегральное уравнение

$$u^\alpha(x) = a(x)\int_0^x k'(x-t)u(t)\,dt + f(x), \quad x>0,\ \alpha>1, \tag{6}$$

в конусе пространства непрерывных функций $C[0,\infty)$:

$$Q_0 = \big\{u(x):\, u\in C[0,\infty),\, u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при}\, x>0\big\}.$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (3)–(5). *Если $u\in Q_0$ является решением интегрального уравнения* (6), *то функция $u(x)$ не убывает и непрерывно дифференцируема на $(0,\infty)$, т. е. $u\in C^1(0,\infty)$.*

$\lhd$ Пусть $u\in Q_0$ является решением уравнения (6) и $x_1,x_2\in[0,\infty)$ — любые числа такие, что $x_1<x_2$. Так как $k'(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то свертка $(k'*u)(x)=\int_0^x k'(x-t)u(t)dt$ также не убывает, поскольку

$$(k'*u)(x_2)-(k'*u)(x_1) = \int_0^{x_1}\big[k'(x_2-t)-k'(x_1-t)\big]\,u(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} k'(x_2-t)u(t)\,dt \geqslant 0.$$

Так как $a(x)$ и $f(x)$ не убывают, то $u^\alpha(x)$ также не убывает на $[0,\infty)$. Следовательно, сама функция $u(x)$ не убывает и поэтому почти всюду дифференцируема на $[0,\infty)$.

Докажем теперь, что решение $u\in C^1(0,\infty)$. Так как по условию $k'(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то по теореме Лебега (см., например, [3, теорема 17.7]) почти всюду на $[0,\infty)$ существует вторая производная $k''(x)$, которая по теореме об интегрировании производной [3, теорема 17.8] локально суммируема. Следовательно, правая часть тождества (6) дифференцируема и в силу свойства коммутативности свертки [3, §17]

$$\left(\int_0^x k'(x-t)u(t)\,dt\right)' = \int_0^x k''(x-t)u(t)\,dt + k'(0)u(x) = \int_0^x k''(t)u(x-t)\,dt + k'(0)u(x). \tag{7}$$

Поскольку функция $u(x)$ не убывает, а функция $k''(x)$ локально суммируема на $[0,\infty)$, то в силу теоремы о непрерывности свертки [3, теорема 17.9] производная (7) непрерывна на $[0,\infty)$. Но тогда существует и непрерывна производная левой части тождества (6), что влечет за собой существование и непрерывность производной $u'(x)$ при $x>0$. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (3)–(5). *Если $u\in Q_0^1$ является решением интегро-дифференциального уравнения* (2), *то $u\in Q_0$ и является решением интегрального уравнения* (6). *Обратно, если уравнение* (6) *имеет решение $u\in Q_0$, то $u\in Q_0^1$ и является решением уравнения* (2).

◁ Пусть $u \in Q_0^1$ является решением уравнения (2). Поскольку $Q_0^1 \subset Q_0$, то $u \in Q_0$. Так как $k(0) = 0$ и $u(0) = 0$, то, вычисляя интеграл в (2) по частям, получаем

$$u^\alpha(x) = a(x) \int_0^x k(x-t)\, du(t) + f(x) = a(x) \int_0^x u(t) k'(x-t)\, dt + f(x), \tag{8}$$

т. е. $u(x)$ является решением уравнения (6).

Обратно, пусть $u \in Q_0$ является решением уравнения (6). Тогда согласно лемме 1 функция $u(x)$ принадлежит пространству $C^1(0,\infty)$, а значит, $u \in Q_0^1$. Используя дважды свойство коммутативности свертки, формулу интегрирования по частям, равенства $k(0) = 0$ и $u(0) = 0$, из уравнения (6) имеем

$$u^\alpha(x) = a(x) \int_0^x k'(t) u(x-t)\, dt + f(x) = a(x) \int_0^x k(x-t) u'(t)\, dt + f(x),$$

т. е. $u(x)$ является решением уравнения (2). ▷

Из леммы 2 вытекает, что для доказательства существования в классе Q_0^1 решения интегро-дифференциального уравнения (2) достаточно доказать существование в классе Q_0 решения интегрального уравнения (6). Кроме того, из леммы 2 следует, что уравнения (2) и (6) имеют одно и то же множество решений.

Далее предполагается, что выполнено дополнительное условие

$$g(0) = 0, \quad \text{где} \quad g(x) = \frac{f(x)}{a(x)}. \tag{9}$$

Доказательство основных результатов данной статьи будет базироваться на априорных оценках решений уравнения (6). При доказательстве верхней априорной оценки нам понадобится неравенство Чебышева (см., например, [3, лемма 17.1]):

$$\int_0^x v(x-t)\, w(t)\, dt \leqslant \int_0^x v(t)\, w(t)\, dt, \quad x > 0, \tag{10}$$

справедливое для любых неубывающих на $[0,\infty)$ функций $v(x)$ и $w(x)$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (3)–(5) *и* (9). *Если $u \in Q_0$ является решением интегрального уравнения* (6), *то $u(x)$ удовлетворяет неравенствам*

$$F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x), \tag{11}$$

где

$$F(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} k'(0)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} a^{\frac{1}{\alpha}}(x) \left(\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\, dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

$$G(x) = a^{\frac{1}{\alpha}}(x) \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t) k'(t)\, dt + \left(\frac{f(x)}{a(x)}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

◁ Пусть $u \in Q_0$ — решение уравнения (6). Так как при $x = 0$ неравенства (11) обращаются в очевидные равенства, то будем считать далее, что $x > 0$.

Докажем сначала первое неравенство из (11). Так как $a(x) \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ и $k'(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то из тождества (6) имеем

$$u(x) \geqslant \bigl(k'(0)a(x)\bigr)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int\limits_0^x u(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\forall\, x > 0), \tag{12}$$

или, что то же самое, поскольку $k'(0) > 0$ и $u(x) > 0$ при $x > 0$,

$$u(t)\left(\int\limits_0^t u(s)ds\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \geqslant \bigl(k'(0)a(t)\bigr)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\forall\, t > 0).$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x, получим

$$\left(\int\limits_0^x u(t)\,dt\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \geqslant \frac{\alpha-1}{\alpha}\,(k'(0))^{\frac{1}{\alpha}} \int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt \quad (\forall\, x > 0),$$

откуда

$$\left(\int\limits_0^x u(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} (k'(0))^{\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}} \left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{13}$$

Таким образом, первое неравенство из (11) вытекает из неравенств (12) и (13).

Докажем теперь второе неравенство из (11). Так как в силу условия (3) и леммы 1 функции $k'(x)$ и $u(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то вследствие неравенства Чебышева (10) из тождества (6) вытекает неравенство

$$u^{\alpha}(x) \leqslant a(x)\int\limits_0^x k'(t)u(t)\,dt + f(x) \quad (\forall\, x > 0),$$

т. е.

$$u(x) \leqslant a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int\limits_0^x k'(t)u(t)\,dt + g(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\forall\, x > 0), \tag{14}$$

или, поскольку $k'(t) > 0$,

$$k'(t)u(t) + g'(t) \leqslant k'(t)a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\left(\int\limits_0^t k'(s)u(s)\,ds + g(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}} + g'(t) \quad (\forall\, t > 0),$$

откуда

$$\left(\int\limits_0^t k'(s)u(s)\,ds + g(t)\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \bigl(k'(t)u(t) + g'(t)\bigr) \leqslant k'(t)a^{\frac{1}{\alpha}}(t) + I(t), \tag{15}$$

где

$$I(t) = g'(t)\left(\int\limits_0^t k'(s)u(s)\,ds + g(t)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Точно так же, как и при доказательстве неравенства (13) из [11], проверяется, что

$$\int\limits_0^x I(t)\,dt \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\,g^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x). \tag{16}$$

Интегрируя неравенство (15) в пределах от 0 до x, с учетом условия (9) и неравенства (16), будем иметь

$$\left(\int\limits_0^x k'(s)u(s)\,ds + g(x)\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \leqslant \frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\int\limits_0^x k'(t)a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt + \frac{\alpha}{\alpha-1}\,g^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\right) \quad (\forall\, x>0),$$

откуда

$$\left(\int\limits_0^x k'(t)u(t)\,dt + g(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x k'(t)a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt + g^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{17}$$

Таким образом, второе неравенство в (11) вытекает из неравенств (14) и (17). $\rhd$

Из леммы 3 следует, что решения уравнения (6) естественно искать в классе

$$P = \bigl\{u(x) :\; u \in C[0,\infty) \text{ и } F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\bigr\}.$$

Пример 1. Непосредственно проверяется, что функция

$$u^*(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\,p\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

является решением интегрального уравнения (6) при $k(x) = px$ и $f(x) = 0$, где $p > 0$ — любое число. Следовательно, если $k(x) = p \cdot x$ и $f(x) = 0$, то справедливы равенства $F(x) = u^*(x) = G(x)$ для любого $x \in [0,\infty)$, которые показывают, что в определенном смысле априорные оценки решения интегрального уравнения (6), доказанные в лемме 3, точные.

3. Теоремы существования и единственности решения

Определим нелинейный интегральный оператор свертки T равенством

$$(Tu)(x) = \left(a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt + f(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad x>0,\ \alpha>1.$$

Прежде чем доказать следующую теорему заметим, что так как

$$G(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\,a^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)k'(t)\,dt + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

то функция $G(x)$ в силу условий (3)–(5) не убывает на $[0,\infty)$ и $G(0) = 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3)–(5) *и* (9). *Тогда класс P инвариантен относительно нелинейного оператора T, т. е. $T : P \to P$.*

$\lhd$ Пусть $u \in P$. Нужно доказать, что $Tu \in C[0,\infty)$ и $F(x) \leqslant (Tu)(x) \leqslant G(x)$.

1. Так как функции $k'(x)$, $a(x)$, $f(x)$ неотрицательны и принадлежат пространству $C[0,\infty)$, а $1/\alpha > 0$, то очевидно, что оператор T на классе функций $u \in P$ определен корректно и $Tu \in C[0,\infty)$.

2. Покажем, что $(Tu)(x) \geqslant F(x)$. Поскольку $k'(x)$, $a(x)$, $f(x)$ неотрицательны, $k'(x)$ не убывает и $u(x) \geqslant F(x)$, то

$$\big[(Tu)(x)\big]^\alpha \geqslant a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt \geqslant a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)F(t)\,dt \geqslant k'(0)a(x)\int\limits_0^x F(t)\,dt$$

$$= k'(0)a(x)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\,k'(0)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\left(\int\limits_0^t a^{\frac{1}{\alpha}}(s)\,ds\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}dt = \big[F(x)\big]^\alpha,$$

т. е. $(Tu)(x) \geqslant F(x)$.

3. Покажем, наконец, что $(Tu)(x) \leqslant G(x)$. Так как $a(x)$, $k'(x)$ неотрицательны и $u(x) \leqslant G(x)$, а функции $k'(x)$ и $G(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то в силу неравенства Чебышева (10) и условия (9), получаем

$$\big[(Tu)(x)\big]^\alpha \leqslant a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)\,G(t)\,dt + f(x) \leqslant a(x)\left(\int\limits_0^x k'(t)\,G(t)\,dt + \int\limits_0^x g'(t)\,dt\right)$$

$$= a(x)\int\limits_0^x G(t)\left[k'(t) + \frac{g'(t)}{G(t)}\right]dt \leqslant a(x)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)$$

$$\times\left[\int\limits_0^t a^{\frac{1}{\alpha}}(s)k'(s)\,ds + \frac{\alpha}{\alpha-1}\,g^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(s)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}\left[k'(t) + \frac{g'(t)}{a^{\frac{1}{\alpha}}(t)g^{\frac{1}{\alpha}}(t)}\right]dt = G^\alpha(x),$$

т. е. $(Tu)(x) \leqslant G_(x)$. $\rhd$

Введем следующий класс функций:

$$P_b = \big\{u(x) :\, u \in C[0,b] \text{ и } F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\big\},$$

где $b > 0$ — произвольное число.

В силу вольтерровости оператора T из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Если выполнены условия* (3)–(5) *и* (9), *то класс* P_b *инвариантен относительно интегрального оператора* T.

Далее будем предполагать, что выполнено условие

$$D = \sup_{0<x\leqslant b}\left(\frac{f(x)}{a(x)}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{-1} < \infty. \tag{18}$$

Заметим, что выполнение условия (18) обеспечивает выполнение условия (9) и условие (18) совпадает с условием (16) из [11] при $a(x) = 1$.

Зададим на прямом произведении $P_b \times P_b$ функцию ρ_b формулой

$$\rho_b(u_1,u_2) = \sup_{0<x\leqslant b}\frac{|u_1(x)-u_2(x)|}{a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}e^{\beta x}}, \quad \beta > 0. \tag{19}$$

Поскольку $e^{\beta x} \geqslant 1$ и $|u_1(x) - u_2(x)| \leqslant G(x) - F(x)$ для любых $u_1, u_2 \in P_b$, то

$$\rho_b(u_1, u_2) \leqslant \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\, k'(b) + D\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\, k'(0)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} < \infty.$$

Лемма 4. *Множество P_b с метрикой ρ_b является полным метрическим пространством.*

$\lhd$ Выполнимость аксиом метрики очевидна. Докажем полноту пространства P_b. Пусть $\{u_n\}$ есть любая *фундаментальная последовательность* из P_b. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$ такой, что для любых $m, n \geqslant N$ выполняется неравенство $\rho_b(u_m, u_n) < \varepsilon$, т. е.

$$\frac{|u_m(x) - u_n(x)|}{a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x}} < \varepsilon \qquad (\forall\, m, n \geqslant N,\ \ \forall\, x \in (0, b]). \tag{20}$$

Так как

$$a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} e^{\beta x} \leqslant a^{\frac{1}{\alpha}}(b)\left(\int\limits_0^b a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta b} \equiv M,$$

то

$$\frac{|u_m(x) - u_n(x)|}{a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)dt\right)^{\frac{1}{(\alpha-1)}} e^{\beta x}} \geqslant \frac{1}{M}\big|u_m(x) - u_n(x)\big|.$$

Поэтому из (20) имеем $|u_m(x) - u_n(x)| \leqslant M\varepsilon$ для любых $m, n \geqslant N$ и для любого $x \in [0, b]$ (здесь учли, что $u_m(0) = u_n(0) = 0$), т. е. $\{u_n\}$ является фундаментальной последовательностью в $C[0, b]$. В силу полноты пространства $C[0, b]$ существует функция $u \in C[0, b]$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x). \tag{21}$$

Покажем, что $u \in P_b$. Так как $\{u_n\} \in P_b$, то для любого n и для любого $x \in [0, b]$, имеем $F(x) \leqslant u_n(x) \leqslant G(x)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, с учетом равенства (21), получаем $F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)$, т. е. $u \in P_b$.

Осталось доказать сходимость последовательности $\{u_n(x)\}$ к $u(x)$ по метрике ρ_b. Переходя в неравенстве (20) к пределу при $m \to \infty$, имеем

$$\frac{|u(x) - u_n(x)|}{a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x}} < \varepsilon$$

для любого $n \geqslant N$ и для любого $x \in (0, b]$, т. е. $\rho_b(u_n, u) < \varepsilon$ для любого $n \geqslant N$. $\rhd$

Выберем теперь достаточно малое число $c \in (0, b)$ такое, что выполняется неравенство

$$k'(c) < \alpha k'(0). \tag{22}$$

Положим

$$\beta = \frac{1}{k'(0)} \sup_{c\leqslant x\leqslant b} \frac{k'(x) - k'(0)}{x}. \tag{23}$$

Справедлива следующая лемма (подробное доказательство см. [11, лемма 5], ср. [12]).

Лемма 5. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (3). Тогда для любого $x \in [0,b]$ справедливо неравенство*

$$k'(x)e^{-\beta x} \leqslant k'(c), \tag{24}$$

где числа c и β определяются из условия (22) и формулы (23), соответственно.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (3)–(5) и (18). Тогда оператор $T : P_b \to P_b$ и является сжимающим, при этом для любых $u_1, u_2 \in P_b$ выполняется неравенство*

$$\rho_b(Tu_2, Tu_1) \leqslant \frac{k'(c)}{\alpha k'(0)} \rho_b(u_2, u_1), \tag{25}$$

где число c определяется из условия (22).

$\lhd$ То, что оператор $T : P_b \to P_b$ вытекает из следствия 1. Докажем неравенство (25), т. е., что оператор T в силу неравенства (22) является сжимающим. Пусть $u_1, u_2 \in P_b$ и $x \in (0,b]$. По теореме Лагранжа для любых $z_1, z_2 > 0$ имеем

$$z_1^{\frac{1}{\alpha}} - z_2^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\, \Theta^{\frac{1}{\alpha}-1}(z_1 - z_2),$$

где Θ лежит между z_1 и z_2. Поэтому, если $z_1 \geqslant z_0$ и $z_2 \geqslant z_0$, где $z_0 > 0$, то $\Theta > z_0$ и

$$\left| z_1^{\frac{1}{\alpha}} - z_2^{\frac{1}{\alpha}} \right| \leqslant \frac{1}{\alpha} \frac{|z_1 - z_2|}{\{z_0\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}.$$

Используя это неравенство и то, что $(Tu_1)(x) \geqslant F(x)$, $(Tu_2)(x) \geqslant F(x)$ для всех $x \in (0,b]$, имеем

$$\begin{aligned}
&\big|(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)\big| \\
&= \left| \left(a(x) \int_0^x k'(x-t) u_2(t)\, dt + f(x) \right)^{\frac{1}{\alpha}} - \left(a(x) \int_0^x k'(x-t) u_1(t)\, dt + f(x) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right| \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha}\, \left(F^{\alpha}(x)\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left| a(x) \int_0^x k'(x-t) \big[u_2(t) - u_1(t)\big]\, dt \right| \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\, k'(0) \right)^{-1} a^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(x) \left(\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\, dt \right)^{-1} a(x) \int_0^x k'(x-t) \big|u_2(t) - u_1(t)\big|\, dt.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\big|(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)\big| \leqslant \frac{a^{\frac{1}{\alpha}}(x)}{(\alpha-1)k'(0) \int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\, dt} \int_0^x k'(x-t) \big|u_2(t) - u_1(t)\big|\, dt. \tag{26}$$

Поскольку для любого $x \in (0,b)$

$$\begin{aligned}
\big|u_2(x) - u_1(x)\big| &= a^{\frac{1}{\alpha}}(x) \left(\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\, dt \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x} \frac{|u_2(x) - u_1(x)|}{a^{\frac{1}{\alpha}}(x) \left(\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\, dt \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x}} \\
&\leqslant a^{\frac{1}{\alpha}}(x) \left(\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\, dt \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x} \rho_b(u_2, u_1),
\end{aligned}$$

то из (26) с учетом леммы 5 получим

$$\begin{aligned}
&\big|(Tu_2)(x)-(Tu_1)(x)\big| \\
&\quad\leqslant \frac{a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\rho_b(u_2,u_1)e^{\beta x}}{(\alpha-1)k'(0)\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt}\int\limits_0^x k'(x-t)e^{-\beta(x-t)}a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\left(\int\limits_0^t a^{\frac{1}{\alpha}}(s)ds\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}dt \\
&\qquad\leqslant \frac{k'(c)a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\rho_b(u_2,u_1)e^{\beta x}}{(\alpha-1)k'(0)\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt}\,\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(s)\,ds\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\
&\qquad\qquad= \frac{k'(c)}{\alpha k'(0)}\,a^{\frac{1}{\alpha}}(x)e^{\beta x}\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\rho_b(u_2,u_1).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{|(Tu_2)(x)-(Tu_1)(x)|}{a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}e^{\beta x}}\leqslant\frac{k'(c)}{\alpha\,k'(0)}\,\rho_b(u_2,u_1)\quad(\forall\,x\in(0,b]),$$

что равносильно неравенству (25). Поскольку в силу неравенства (22) коэффициент в неравенстве (25) $k'(c)/[\alpha\,k'(0)]<1$, то оператор T является сжимающим. $\rhd$

Теорема 3. *Если выполнены условия* (3)–(5) *и* (18), *то интегральное уравнение* (6) *имеет в* Q_0 (*и в* P_b *при любом* $b>0$) *единственное решение. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике* (19) *при любом* $b<\infty$.

$\lhd$ Запишем уравнение (6) в операторном виде: $u=Tu$. Из леммы 6 и теоремы 2 следует, что выполнены все требования принципа сжимающих отображений, из которого непосредственно вытекает, что уравнение (6) имеет единственное решение в пространстве P_b при любом $b>0$, и это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике (19) при любом $b<\infty$.

То, что уравнение (6) имеет единственное решение во всем классе Q_0 доказывается точно так же, как в теореме 3 из [11]. $\rhd$

Таким образом, на основании теоремы 3, используя связь между решениями уравнений (6) и (2), установленную в лемме 2, мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 4. *Если выполнены условия* (3), (4), (5) *и* (18), *то интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью* (2) *имеет в конусе* Q_0^1 (*и в классе* P_b *при любом* $b>0$) *единственное решение* $u^*(x)$. *Это решение удовлетворяет неравенствам* (11) *и его можно найти в полном метрическом пространстве* P_b *методом последовательных приближений по формуле* $u_n=Tu_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, *со сходимостью по метрике* (19), *в которой числа* c *и* β *определяются условием* (22) *и формулой* (23). *При этом справедлива оценка погрешности:*

$$\rho_b(u_n,u^*)\leqslant\frac{q^n}{1-q}\,\rho_b(Tu_0,u_0),\quad n\in\mathbb{N},$$

где $q=k'(c)/(\alpha\,k'(0))<1$, *а* $u_0(x)\in P_b$ — *начальное приближение.*

Из теорем 3 и 4 вытекает, в частности, что при $f(x) = 0$ нелинейные уравнения (2) и (6) имеют, в отличие от линейного случая ($\alpha = 1$), нетривиальное решение и, таким образом, нелинейные уравнения типа свертки обладают особенностями, существенно отличающими их от соответствующих линейных уравнений.

Литература

1. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки.—М.: Наука, 1978.—296 с.
2. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений.—М.: Мир, 1979.—496 с.
3. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки.—М.: Физматлит, 2009.—304 с.
4. *Brunner H.* Volterra Integral Equations: an Introduction to the Theory and Applications.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017.—387 p. DOI: 10.1017/9781316162491.
5. *Асхабов С. Н., Карапетянц Н. К., Якубов А. Я.* Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью и их системы // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 311, № 5.—С. 1035–1039.
6. *Askhabov S. N., Betilgiriev M. A.* A-priori estimates for the solutions of a class of nonlinear convolution equations // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen.—1991.—Vol. 10, № 2.—P. 201–204. DOI: 10.4171/ZAA/442.
7. *Kilbas A. A., Saigo M.* On solution of nonlinear Abel–Volterra integral equations // J. Math. Anal. Appl.—1999.—Vol. 229, № 1.—P. 41–60. DOI: 10.1006/jmaa.1998.6139.
8. *Karapetiants N. K., Kilbas A. A., Saigo M., Samko S. G.* Upper and lower bounds for solutions of nonlinear Volterra convolution integral equations with power nonlinearity // J. Integr. Equat. Appl.—2001.—Vol. 12, № 4.—P. 421–448. DOI: 10.1216/jiea/1020282237.
9. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math.—1989.—Vol. 4, № 2.—P. 51–74.
10. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ: теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
11. *Асхабов С. Н.* Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Диф. уравнения.—2020.—Т. 56, № 6.—С. 786–795. DOI: 1134/S0374064120060102.
12. *Okrasinski W.* On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain nonlinear convolution equation // Annal. Polon. Math.—1979.—Vol. 36, № 1.—P. 61–72.

Статья поступила 6 сентября 2020 г.

Асхабов Султан Нажмудинович
Чеченский государственный педагогический университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 364068, Грозный, пр. Исаева, 62;

Чеченский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии
РОССИЯ, 364024, Грозный, ул. Шерипова, 32
E-mail: askhabov@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 4, P. 16–27

A CONVOLUTION TYPE NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH A VARIABLE COEFFICIENT AND AN INHOMOGENEITY IN THE LINEAR PART

Askhabov, S. N.[1,2]

[1]Chechen State Pedagogical University, 62 Isaev Ave., Grozny 364068, Russian;
[2]Chechen State University, 32 Sheripov St., Grozny 364024, Russian

E-mail: askhabov@yandex.ru

Abstract. We study a Volterra integro-differential equation of convolution type with a power nonlinearity, variable coefficient $a(x)$ and an inhomogeneity $f(x)$ in the linear part, which is closely related to the corresponding nonlinear integral equation, arising in the study of fluid infiltration from a cylindrical reservoir into an isotropic homogeneous porous medium, when describing the process of propagation of shock waves in gas-filled pipes, when solving the problem about heating a half-infinite body in a nonlinear heat-transfer process, in models of population genetics, and others. It is important to note that in relation to the above-mentioned and other applications, of special interest are continuous positive (for $x > 0$) solutions of the integral equation. Based on the obtained exact lower and upper a priori estimates for the solution of the integral equation, we construct a weighted complete metric space P_b, invariant with respect to the nonlinear integral convolution operator generated by this equation, and, using the method of weighted metrics (an analogue of Belitsky's method), we prove the global existence theorem and the uniqueness of the solution of the nonlinear integro-differential equation under study both in the space P_b and in the whole class Q_0^1 of continuously differentiable functions positive for $x > 0$. It is shown that the solution can be found in the P_b space by a successive approximation method of the Picard type. Estimates for the rate of convergence of the successive approximations to the exact solution in terms of the weight metric of the space P_b are derived. In particular, for $f(x) = 0$, this theorem implies that the corresponding homogeneous nonlinear integro-differential equation, in contrast to the linear case, has a nontrivial solution. Examples are also given to illustrate the results obtained.

Key words: integro-differential equation, power nonlinearity, variable coefficient, a priori estimates, successive approximation, weight metrics method.

Mathematical Subject Classification (2010): 45G05, 46L05.

For citation: *Askhabov, S. N.* A Convolution Type Nonlinear Integro-Differential Equation with a Variable Coefficient and an Inhomogeneity in the Linear Part, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 16–27 (in Russian). DOI: 10.46698/e6476-5914-8893-f.

References

1. *Gakhov, F. D. and Cherskii, Yu. I. Uravneniya tipa svertki* [Equations of Convolution Type], Moscow, Nauka, 1978, 296 p. (in Russian).
2. *Prossdorf, S. Einige Klassen Singularer Gleichungen*, Berlin, Akademie-Verlag, 1974, 369 p.
3. *Askhabov, S. N. Nelineinye uravneniya tipa svertki* [Nonlinear Equations of Convolution Type], Moscow, Fizmatlit, 2009, 304 p. (in Russian).
4. *Brunner, H. Volterra Integral Equations: an Introduction to the Theory and Applications*, Cambridge, Cambridge University Press, 2017, 387 p. DOI: 10.1017/9781316162491.
5. *Askhabov, S. N., Karapetyants, N. K. and Yakubov, A. Ya.* Integral Equations of Convolution Type with a Power Nonlinearity and their Systems, *Soviet Mathematics Doklady*, 1990, vol. 41, no. 2, pp. 323–327.
6. *Askhabov, S. N. and Betilgiriev, M. A.* A-Priori Estimates for the Solutions of a Class of Nonlinear Convolution Equations, *Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen*, 1991, vol. 10, no. 2, pp. 201–204. DOI: 10.4171/ZAA/442.
7. *Kilbas, A. A. and Saigo, M.* On Solution of Nonlinear Abel–Volterra Integral Equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1999, vol. 229, no. 1, pp. 41–60. DOI: 10.1006/jmaa.1998.6139.
8. *Karapetiants, N. K., Kilbas, A. A., Saigo, M. and Samko, S. G.* Upper and Lower Bounds for Solutions of Nonlinear Volterra Convolution Integral Equations with Power Nonlinearity, *Journal of Integral Equations and Applications*, 2001, vol. 12, no. 4, pp. 421–448. DOI: 10.1216/jiea/1020282237.
9. *Okrasinski, W.* Nonlinear Volterra Equations and Physical Applications, *Extracta Mathematicae*, 1989, vol. 4, no. 2, pp. 51–74.
10. *Edwards, R. E. Functional Analysis: Theory and Applications*, New York, Holt, Rinehart, and Winston, 1965, 1072 p.
11. *Askhabov, S. N.* Integro-Differential Equation of the Convolution Type with a Power Nonlinearity and Inhomogeneity in the Linear Part, *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 775–784. DOI: 10.1134/S0012266120060105.
12. *Okrasinski, W.* On the Existence and Uniqueness of Nonnegative Solutions of a Certain Nonlinear Convolution Equation, *Annales Polonici Mathematici*, 1979, vol. 36, no. 1, pp. 61–72.

Received September 6, 2020

Sultan N. Askhabov
Chechen State Pedagogical University,
62 Isaev Ave., Grozny 364068, Russia, *Professor*;
Chechen State University,
32 Sheripov St., Grozny 364024, Russia, *Professor*
E-mail: `askhabov@yandex.ru`

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 4, С. 28–44

УДК 517.955.8
DOI 10.46698/s0301-1959-8380-s

ВОССТАНОВЛЕНИЕ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПО ЧАСТИЧНОЙ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ[#]

П. В. Бабич[1], В. Б. Левенштам[1]

[1] Математический институт им. В. А. Стеклова
Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8
E-mail: xblahblahc@gmail.com, vlevenshtam@yandex.ru

Работа посвящается 75-летию Семена Самсоновича Кутателадзе

Аннотация. В работе исследуется однородная начально-краевая задача для одномерного волнового уравнения с неизвестной быстро осциллирующей по времени правой частью. Последняя представлена произведением двух функций, одна из которых зависит от пространственной переменной, а вторая — от временной и быстрой временной переменных. Рассматриваются четыре различных случая, в двух из которых одна из функций-сомножителей известна, а в двух других — обе функции неизвестны. В каждом случае поставлены и решены обратные задачи о восстановлении неизвестных функций по некоторым сведениям о частичных асимптотиках решений исходной задачи с известными данными. Указанные сведения состоят в основном в задании значений определенных коэффициентов асимптотик в некоторых точках пространства и/или времени. Использование дополнительных условий (условий переопределения) в таком виде говорит о коренном отличии данных постановок обратных задач от классики, где дополнительные условия ставятся на точные решения. Построение асимптотики решения исходной задачи при этом подходе играет роль прямой задачи. Указанный подход к обратным задачам с быстро осциллирующими по времени данными авторы данной статьи развивают несколько последних лет.

Ключевые слова: одномерное волновое уравнение, быстро осциллирующая правая часть, асимптотика решения, обратные задачи о восстановлении правой части.

Mathematical Subject Classification (2010): 35L05, 35L20, 35R30.

Образец цитирования: *Бабич П. В., Левенштам В. Б.* Восстановление быстро осциллирующей правой части волнового уравнения по частичной асимптотике решения // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 4.—С. 28–44. DOI: 10.46698/s0301-1959-8380-s.

Введение

В работе рассматривается начально-краевая задача для одномерного волнового уравнения с неизвестной быстро осциллирующей по времени правой частью. Исследуется задача о восстановлении этой правой части по тем или иным сведениям (дополнительным условиям) о нескольких первых коэффициентах асимптотики решения. Ранее аналогичный вопрос был исследован нами для одномерного уравнения теплопроводности [1, 2]. Теории обратных задач посвящен целый ряд монографий (см., например [3–6]) и большое число статей. В статьях [7–9], например, решены различные задачи о восстановлении

[#]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 20-11-20141.

неизвестных правых частей одномерных уравнения теплопроводности и волнового уравнения. В [3–9] быстрые осцилляции данных задачи отсутствуют. В данной работе задача о восстановлении правой части вида $f(x,t)r(t,\omega t)$, где сомножитель $r(t,\tau)$ периодичен по τ, волнового уравнения с большим параметром ω поставлена и решена в следующих четырех случаях:

1) не известна функция $r(t,\tau)$;
2) не известна функция $f(x,t) \equiv f(x)$;
3) в паре f, r известно лишь среднее r_0 функции $r(t,\tau)$ по τ;
4) не известны обе функции — f и r.

Каждая из этих задач снабжена дополнительными условиями, которые относятся к нескольким первым коэффициентам асимптотики решения. В этом состоит основное отличие данных постановок обратных задач от классических, где дополнительные условия относятся к точному решению. В заключение отметим, что результаты, аналогичные теоремам 1, 2 раздела 1 данной работы, относящимся к задаче 1), установлены нами и для многомерных гиперболических уравнений [10]. При этом доказательство этих результатов в [10] базируется на важной работе [11], а соответствующие одномерные результаты данной работы доказаны в разделе 1 с помощью непосредственного использования техники одномерных рядов Фурье, так что они изложены в замкнутом виде.

1. Неизвестный сомножитель источника зависит только от временной переменной

1.1. Прямая задача. Символом Π обозначим замкнутый плоский прямоугольник:

$$\Pi = \{(x,t):\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;\ 0 \leqslant t \leqslant T\}, \quad T > 0.$$

Рассмотрим в Π начально-краевую задачу для волнового уравнения с большим параметром ω:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)r(t,\omega t), \quad (x,t) \in \Pi, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{x=0,\pi} = 0. \tag{3}$$

Здесь функция $f(x,t)$ определена на Π и существуют непрерывные на Π функции

$$f,\ f''_{x^2},\ f'''_{x^2t},\ f'_t,\ f''_{t^2},\ f'''_{t^3}, \tag{4}$$

обращающиеся в нуль при $x = 0$, $x = \pi$, причем каждая из функций (4) имеет две непрерывные на Π производные по x. Ясно, что справедливость условий равенства нулю функций (4) при $x = 0, \pi$ достаточно проверять лишь для функций f и f''_{x^2}.

Пусть Q — полуполоса: $Q = \{(t,\tau) \in [0,T] \times [0,\infty)\}$. Относительно функции $r(t,\tau)$ будем предполагать, что она определена и непрерывна на множестве Q, а также 2π-периодична по τ. Обозначим через $r_0(t)$ ее среднее по τ, т. е. плавную часть:

$$r_0(t) = \langle r(t,\tau)\rangle_\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(t,\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

а через $r_1(t,\tau)$ — быструю часть:

$$r_1(t,\tau) = r(t,\tau) - r_0(t) \equiv \{r_1(t,\tau)\}_\tau. \tag{6}$$

Будем предполагать, что функции $\frac{\partial^k r_1}{\partial t^k} \in C(Q)$, $k = 0,1,2,3$. Функцию $r(t,\tau)$, удовлетворяющую указанным в этом абзаце условиям, будем для краткости называть функцией класса (A).

Введем некоторые обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем:

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi f(s,t)\sin ns\,ds, \quad f_{2,n}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s^2}\sin ns\,ds,$$

$$\begin{gathered}\rho_0(t,\tau) = \int\limits_0^\tau\left(\int\limits_0^p r_1(t,s)\,ds - \left\langle\int\limits_0^\tau r_1(t,s)\,ds\right\rangle_\tau\right)dp \\ -\left\langle\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_0^p r_1(t,s)\,ds - \left\langle\int\limits_0^\tau r_1(t,s)\,ds\right\rangle_\tau\right)dp\right\rangle_\tau \equiv \left\{\int\limits_0^\tau\left\{\int\limits_0^p r_1(t,s)\,ds\right\}_p dp\right\}_\tau.\end{gathered} \tag{7}$$

Решение задачи (1)–(3) представим в виде:

$$u_\omega(x,t) = U_\omega(x,t) + W_\omega(x,t), \quad \omega \gg 1, \tag{8}$$

где

$$U_\omega(x,t) = u_0(x,t) + \omega^{-1}u_1(x,t) + \omega^{-2}\big[u_2(x,t) + v_2(x,t,\omega t)\big], \quad \omega \gg 1, \tag{9}$$

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n}\int\limits_0^t \sin n(t-s) f_n(s) r_0(s)\,ds, \tag{10}$$

$$u_1(x,t) = -\sum_{n=1}^\infty f_n(0)\rho'_{0t}(0,0)\frac{\sin nx}{n}\sin nt, \tag{11}$$

$$v_2(x,t,\tau) = f(x,t)\rho_0(t,\tau), \tag{12}$$

$$\begin{gathered}u_2(x,t) = -\sum_{n=1}^\infty f_n(0)\rho_0(0,0)\cos nt\sin nx \\ + \sum_{n=1}^\infty \big(f'_{nt}(0)\rho_0(0,0) + f_n(0)\rho'_{0t}(0,0)\big)\sin nt\frac{\sin nx}{n}.\end{gathered} \tag{13}$$

Теорема 1. *Решение $u_\omega(x,t)$ задачи (1)–(3) представимо в виде (8)–(13), где функция W_ω удовлетворяет соотношению*

$$\|W_\omega(x,t)\|_{C(\Pi)} = o(\omega^{-2}), \quad \omega \to \infty. \tag{14}$$

1.2. Обратная задача 1. Предположим, что в задаче (1)–(3) фигурирует та же, что в п.1.1, функция $f(x,t)$, а функция $r(t,\tau)$ класса (A) неизвестна. Пусть задана точка

$x_0 \in (0,\pi)$ такая, что $f(x_0,t) \neq 0$, $t \in [0,T]$, и функции $\varphi_0(t)$ и $\chi(t,\tau)$, принадлежащие следующим классам:

$$\varphi_0 \in C^2([0,T]), \quad \varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0'(0) = 0;$$

$\chi(t,\tau)$ — непрерывная в Q, 2π-периодическая по τ с нулевым средним функция, производные которой $\frac{\partial^{k+2}\chi}{\partial t^k \partial \tau^2}$, $k = 0,1,2,3$, принадлежат $C(Q)$. Введем теперь функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$:

$$\varphi_1(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)\rho_{0t}'(0,0)\sin nt \frac{\sin nx_0}{n}, \tag{15}$$

$$\varphi_2(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)\rho_0(0,0)\cos nt \sin nx_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(f_{nt}'(0)\rho_0(0,0) + f_n(0)\rho_{0t}'(0,0)\big)\sin nt \frac{\sin nx_0}{n}, \tag{16}$$

где $\rho_0(t,\tau)$ задается равенством (7) с

$$r_1(t,\tau) = \frac{1}{f(x_0,t)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\chi(t,\tau). \tag{17}$$

Обратная задача 1 заключается в определении функции $r(t,\tau)$ класса (A), при которой для решения $u_\omega(x,t)$ задачи (1)–(3) (функция $f(x,t)$ задана в п.1.1) выполняется асимптотическое равенство

$$\left\| u_\omega(x_0,t) - \left[\varphi_0(t) + \frac{1}{\omega}\varphi_1(t) + \frac{1}{\omega^2}\big(\varphi_2(t) + \chi(t,\omega t)\big)\right] \right\|_{C([0,T])} = o(\omega^{-2}), \quad \omega \to \infty. \tag{18}$$

Здесь точка x_0 и функции φ_0, φ_1, φ_2, χ удовлетворяют условиям, указанным в предыдущей части этого пункта.

Теорема 2. *Для любых функций χ, φ_0 и точки x_0, удовлетворяющих сформулированным выше условиям, обратная задача* 1 *однозначно разрешима, т. е. найдется единственная функция r класса* (A), *при которой решение $u_\omega(x,t)$ задачи* (1)–(3) *удовлетворяет соотношению* (18).

Замечание. Функция $r_0(t) = \langle r(t,\tau)\rangle_\tau$ находится из уравнения Вольтерра второго рода, а $r_1(t,\tau)$ определяется равенством (17).

1.3. Доказательство основных результатов.

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Решение задачи (1)–(3) запишем в виде суммы

$$u_\omega(x,t) = u_0(x,t) + \omega^{-1}u_1(x,t) + \omega^{-2}\big[u_2(x,t) + v_2(x,t,\omega t)\big] + \omega^{-3}v_3(x,t,\omega t) + Z_\omega(x,t),$$

где функции u_i, v_i и Z_ω будут определены ниже.

Подставив последнее представление u_ω в равенства (1)–(3), придем к соотношениям

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial \tau^2} + \omega^{-1}\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 v_2}{\partial\tau\partial t} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2}\right] + \omega^{-2}\left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 v_3}{\partial\tau\partial t}\right] \\ \qquad + \omega^{-3}\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 Z_\omega}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \omega^{-1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \omega^{-2}\left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right] + \omega^{-3}\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} \\ \qquad\quad + \frac{\partial^2 Z_\omega}{\partial x^2} + f(x,t)r(t,\tau); \\ \left[u_0 + \omega^{-1}u_1 + \omega^{-2}(u_2+v_2) + \omega^{-3}v_3 + Z_\omega\right]_{t,\tau=0} = 0; \\ \left[\frac{\partial u_0}{\partial t} + \omega^{-1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial \tau}\right) + \omega^{-2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial \tau}\right) + \omega^{-3}\frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial Z_\omega}{\partial t}\right]_{t,\tau=0} = 0; \\ \left[u_0 + \omega^{-1}u_1 + \omega^{-2}(u_2+v_2) + \omega^{-3}v_3 + Z_\omega\right]_{x=0,\pi} = 0, \ \tau = \omega t. \end{cases} \tag{19}$$

Приравняем формально в последних равенствах коэффициенты при явно выписанных степенях ω^{-k}, $k = 0,1,2,3$. Применяя к полученным уравнениям операцию усреднения $\langle \ldots \rangle$ по $\tau = \omega t$, придем к задачам

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + f(x,t)r_0(t); \\ u_0|_{t=0} = 0, \ \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0} = 0; \\ u_0|_{x=0,\pi} = 0, \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \tau^2} = f(x,t)r_1(t,\tau); \\ v_2(x,t,\tau+2\pi) = v_2(x,t,\tau); \\ \langle v_2(x,t,\tau)\rangle_\tau = 0, \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}; \\ u_1|_{t=0} = 0, \ \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial v_2}{\partial \tau}\right|_{t,\tau=0}; \\ u_1|_{x=0,\pi} = 0, \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} = -2\frac{\partial^2 v_2}{\partial\tau\partial t}; \\ v_3(x,t,\tau+2\pi) = v_3(x,t,\tau); \\ \langle v_3(x,t,\tau)\rangle_\tau = 0, \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}; \\ u_2|_{t=0} = -\, v_2|_{t,\tau=0}\,, \ \left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = -\left[\frac{\partial v_3}{\partial \tau} + \frac{\partial v_2}{\partial t}\right]_{t,\tau=0}; \\ u_2|_{x=0,\pi} = 0, \end{cases} \tag{24}$$

В силу (20)–(24) функции u_0, u_1, u_2, v_2 имеют вид (10), (11), (12) и (13) соответственно, что устанавливается с помощью элементарного применения рядов Фурье. Из системы (23) находим

$$v_3(x,t,\tau) = 2f'_t(x,t)\rho_1(t,\tau) + 2f(x,t)\rho'_{1t}(t,\tau), \tag{25}$$

$$\rho_1(t,\tau) = \left\langle \int\limits_0^\tau \rho_0(t,s)\,ds \right\rangle_\tau - \int\limits_0^\tau \rho_0(t,s)\,ds.$$

Из (19) с учетом (20)–(24) следует, что функция $Z_\omega(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Z_\omega}{\partial t} - \frac{\partial^2 Z_\omega}{\partial x^2} = \omega^{-2}\left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2 v_3}{\partial\tau\partial t}\right] \\ \qquad + \omega^{-3}\left[\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}\right] \equiv \omega^{-2}p_1(x,t,\omega t) + \omega^{-3}p_2(x,t,\omega t); \\ Z_\omega|_{t=0} = -\omega^{-3}\, v_3|_{\substack{t=0,\\ \tau=0}} \equiv \omega^{-3}c_1(x), \quad \frac{\partial Z_\omega}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\omega^{-3}\frac{\partial v_3}{\partial t}\Big|_{\substack{t=0,\\ \tau=0}} \equiv \omega^{-3}c_2(x); \\ Z_\omega|_{x=0,\pi} = 0. \end{cases} \tag{26}$$

При этом согласно (12), (25) функции $p_i(x,t,\tau)$ 2π-периодичны по τ с нулевым средним и, кроме того, $p_i(x,t,\tau)|_{x=0,\pi} = 0$, $c_i(x)|_{x=0,\pi} = 0$, $i = 1,2$.

Решение задачи (26) имеет вид

$$Z_\omega(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \Bigg[\int_0^t \frac{\sin n(t-s)}{n} \left(\omega^{-2}p_{1,n}(s,\omega s) + \omega^{-3}p_{2,n}(s,\omega s)\right) ds$$
$$+ \,\omega^{-3}c_{1,n}\cos nt + \omega^{-3}\frac{c_{2,n}}{n}\sin nt\Bigg],$$

где

$$p_{i,n}(t,\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi p_i(s,t,\tau)\sin ns\,ds, \quad c_{i,n} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi c_i(s)\sin ns\,ds, \quad i = 1,2.$$

Поскольку $W_\omega(x,t) = Z_\omega(x,t) + \omega^{-3}v_3(x,t,\omega t)$, то теорема 1 будет доказана, если мы установим асимптотическое равенство

$$\|Z_\omega\|_{C(\overline{\Pi})} = o(\omega^{-2}), \quad \omega \to \infty.$$

Заметим, что благодаря требованиям, предъявленным к f и r, функции $p_2(x,t,\tau)$, $c_1(x)$, $c_2(x)$ непрерывны, а ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\int_0^t \sin n(t-s)p_{i,n}(s,\omega s)ds, \quad i = 1,2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{1,n}\sin nx\cos nt, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{2,n}}{n}\sin nx\sin nt,$$

сходятся равномерно относительно $(x,t)\in\overline{\Pi}$. Отсюда следует, что нам теперь достаточно доказать при любом фиксированном $n_0\in\mathbb{N}$ оценку

$$\left\|\sum_{n=1}^{n_0}\frac{\sin nx}{n}\int_0^t \sin n(t-s)p_{1,n}(s,\omega s)\,ds\right\|_{C([0,T])} = o(1), \quad \omega\to\infty. \tag{27}$$

Проведем ее в два этапа. Пусть ε — произвольное положительное число. На первом этапе подберем достаточно малое число $t_0 > 0$, при котором для всех $x\in[0,\pi]$, $t\in[0,t_0]$, и $\omega > 0$ справедлива оценка

$$\left|\sum_{n=1}^{n_0}\frac{\sin nx}{n}\int_0^t \sin n(t-s)p_{1,n}(s,\omega s)\,ds\right| < \varepsilon. \tag{28}$$

На втором этапе участок $[0,t]$, $t\in[t_0,T]$, разобьем на m равных частей $[t_j,t_{j+1})$, $j=0,1,\dots,m-1$, и воспользуемся равенством

$$\int\limits_0^t \sin n(t-s)p_{1,n}(s,\omega s)\,ds$$

$$=\sum_{j=0}^{m-1}\left[\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\sin n(t-s)p_{1,n}(s,\omega s)\,ds-\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\sin n(t-t_j)p_{1,n}(t_j,\omega s)\,ds\right]$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\sin n(t-t_j)p_{1,n}(t_j,\omega s)\,ds=S_1+S_2.$$

Выберем m столь большим, что при всех $\omega>0$

$$|S_1|<\frac{\varepsilon}{2n_0}. \tag{29}$$

Далее, в силу равенства

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\sin n(t-t_j)p_{1,n}(t_j,\omega s)\,ds=\sin n(t-t_j)\left[\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega t_{j+1}}p_{1,n}(t_j,\tau)\,d\tau-\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega t_j}p_{1,n}(t_j,\tau)\,d\tau\right]$$

и того факта, что функция $p_{1,n}(s,\tau)$ имеет нулевое среднее по второй переменной, найдем такое $\omega_0>0$, что при $\omega>\omega_0$

$$|S_2|<\frac{\varepsilon}{2n_0}. \tag{30}$$

Из соотношений (28)–(30) следует (27). Теорема 1 доказана. $\triangleright$

$\triangleleft$ Доказательство теоремы 2. В силу теоремы 1 решение задачи (1)–(3) при заданной функции $r(t,\tau)$ класса (A) представимо в виде (8), (9)–(13), где

$$\|W_\omega\|_{C(\Pi)}=o(\omega^{-2}),\quad \omega\to\infty.$$

Предположим, что $r(t,\tau)$ является решением обратной задачи, и u_ω — отвечающее ему решение задачи (1)–(3). В силу соотношений (14), (18) равномерно относительно $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}u_0(x_0,t)&+\omega^{-1}u_1(x_0,t)+\omega^{-2}\big[u_2(x_0,t)+v_2(x_0,t,\omega t)\big]\\&=\varphi_0(t)+\frac{1}{\omega}\varphi_1(t)+\frac{1}{\omega^2}\big(\varphi_2(t)+\chi(t,\omega t)\big)+o(\omega^{-2}),\quad \omega\gg1.\end{aligned} \tag{31}$$

Приравняв в (31) коэффициенты при одинаковых степенях ω и используя операцию усреднения по τ, приходим к соотношениям

$$u_0(x_0,t)=\varphi_0(t),u_1(x_0,t)=\varphi_1(t),\quad u_2(x_0,t)=\varphi_2(t),v_2(x_0,t,\tau)=\chi(t,\tau),$$

где $t\in[0,T]$, $\tau\in[0,\infty)$. Дифференцируя первое из этих равенств дважды по t, а последнее дважды по τ, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_0(x_0,t)=\varphi_0''(t), \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}v_2(x_0,t,\tau)=\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\chi(t,\tau). \tag{33}$$

Согласно п.1.1 $\frac{\partial^2 v_2(x,t,\tau)}{\partial\tau^2} = f(x,t)r_1(t,\tau)$. Отсюда с учетом (33) находим

$$f(x_0,t)r_1(t,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\chi(t,\tau). \tag{34}$$

В силу п.1.1 функция $u_0(x,t)$ удовлетворяет равенству (10), так что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_0(x_0,t) = f(x_0,t)r_0(t) + \int\limits_0^t K(t,s)r_0(s)\,ds, \tag{35}$$

где

$$K(t,s) = -\sum_{n=1}^{\infty} nf_n(s)\sin n(t-s)\sin nx_0.$$

Отсюда следует, что функция $K(t,s)$ непрерывна. От равенств (32), (35) приходим к уравнению Вольтерра второго рода

$$f(x_0,t)r_0(t) + \int\limits_0^t K(t,s)r_0(s)\,ds = \varphi_0'',(t), \tag{36}$$

из которого однозначно определяется непрерывная функция $r_0(t)$. Из уравнения (34) функция r_1 также определяется единственным образом:

$$r_1(t,\tau) = \frac{1}{f(x_0,t)}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\chi(t,\tau),$$

которая в силу условий, наложенных на функцию χ, удовлетворяет указанным в п.1.1 условиям.

Поскольку найденная функция $r(t,\tau) = r_0(t)+r_1(t,\tau)$ является функцией класса (A), то для нее справедлива теорема 1, так что решение задачи (1)–(3) представимо в виде (8)–(13). Покажем, что для функции $u_\omega(x,t)$ будет выполнено условие (18). Для этого достаточно установить равенства:

$$u_0(x_0,t) = \varphi_0(t), \quad u_1(x_0,t) = \varphi_1(t), \quad u_2(x_0,t) = \varphi_2(t), \quad v_2(x_0,t,\tau) = \chi(t,\tau).$$

В силу соотношений (35), (36) $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_0(x_0,t) = \varphi_0''(t)$. Поскольку $u_0(x_0,0) = \varphi_0(0) = 0$, $\frac{\partial u_0(x_0,t)}{\partial t}\big|_{t=0} = \varphi_0'(0) = 0$, то $u_0(x_0,t) = \varphi_0(t)$. Выразим r_1 из (34) и подставим в (21). Положим затем $x = x_0$ и учтем, что функции $\chi(t,\tau)$ и $v_2(x,t,\tau)$ 2π-периодические с нулевым средним по τ. В результате получим $v_2(x_0,t,\tau) = \chi(t,\tau)$. Заметим, наконец, что согласно (11) и (15) $u_1(x_0,t) = \varphi_1(t)$, а согласно (13) и (16) $u_2(x_0,t) = \varphi_2(t)$. Теорема 2 доказана. $\triangleright$

2. Неизвестный сомножитель источника зависит от пространственной переменной

2.1. Прямая задача. Пусть Π и Q — те же множества, что в п. 1.1. Рассмотрим задачу (1)–(3) с $f(x,t) \equiv f(x)$. Предположим, что $f \in C^2([0,\pi])$, $f(0) = f(\pi) = 0$, а непрерывная функция $r(t,\tau) = r_0(t) + r_1(t,\tau)$ — 2π-периодична по τ, $r_0 \in C([0,T])$ — ее среднее, $r_1 \in C^{\alpha,0}_{2\pi}(Q)$, $\alpha \in (0,1)^*$. Введем обозначение:

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx \int\limits_0^t \frac{\sin n(t-s)}{n} r_0(s)ds \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_n \Lambda_n(t) \sin nx, \qquad (37)$$

где f_n — коэффициенты разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам (см. п.1.1).

Теорема 3. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\|u_\omega - u_0\|_{C(\Pi)} = o(1), \quad \omega \to \infty,$$

где u_ω — решение задачи (1)–(3).

2.2. Обратная задача 2. Рассмотрим задачу (1)–(3). Будем считать, что функция $r(t,\tau)$ известна, удовлетворяет условиям п.2.1 и дополнительно $r_0 \in C^2([0,T])$, а функция $f(x,t) \equiv f(x)$, удовлетворяющая условиям п.2.1, неизвестна.

Справедлива следующая лемма, в которой $\Lambda_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,T]$, — те же функции, что в формуле (37).

Лемма 1. *Если существует число $t_0 \in (0,T]$, при котором $|r_0(t_0)| > |r_0(0)|$, то найдутся числа $c_0 > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что при $n \geqslant n_0$ справедливы оценки $\Lambda_n(t_0) > \frac{c_0}{n^2}$.*

Если $r_0 = \mathrm{const} \neq 0$ и $t_{0,1} = 2\pi \frac{l_0}{m_0}$, где $l_0, m_0 \in \mathbb{N}$ — взаимно просты, то найдутся числа $c_1 > 0$ и $n_1 \in \mathbb{N}$, при которых для всех $n \geqslant n_1$, $n \neq sm_0$, $s \in \mathbb{N}$, имеют место оценки $\Lambda_n(t_{0,1}) > \frac{c_0}{n^2}$.

Замечание. При $r_0 \equiv 0$, очевидно, $\Lambda_n(t) \equiv 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через M_0 множество индексов $n \in \mathbb{N}$ таких, что $\Lambda_n(t_0) = 0$.

Задачу (1)–(3) с неизвестной функцией f дополним заданием некоторой функции

$$\psi \in C^5([0,\pi]), \quad \psi^{(2j)}(0) = \psi^{(2j)}(\pi) = 0, \quad j = 0,1,2. \qquad (38)$$

Обратная задача 2 состоит в нахождении функции f, удовлетворяющей условиям п.2.1, при которой для решения $u_\omega(x,t)$ задачи (1)–(3) выполнено соотношение

$$\|u_\omega(x,t_0) - \psi(x)\|_{C([0,\pi])} = o(1), \quad \omega \to \infty. \qquad (39)$$

Теорема 4. *Пусть существует t_0 такое, что $|r_0(t_0)| > |r_0(0)|$. Тогда при $M_0 = \emptyset$ обратная задача однозначно разрешима, и при этом $f_n = \frac{\psi_n}{\Lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Если же $M_0 \neq \emptyset$, то она разрешима тогда и только тогда, когда $\psi_n = 0$, $n \in M_0$, и при этом $f_n = \frac{\psi_n}{\Lambda_n}$, $n \notin M_0$, f_n — любое число при $n \in M_0$.*

2.3. Доказательство основных результатов.

$\lhd$ Доказательство теоремы 3. Рассмотрим функцию

$$W_\omega(x,t) = u_\omega(x,t) - u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx \int\limits_0^t \frac{\sin n(t-s)}{n} r_1(s,\omega s)\,ds$$

$$= \sum_{n=1}^{n_0} f_n \sin nx \int\limits_0^t \frac{\sin n(t-s)}{n} r_1(s,\omega s)\,ds + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} f_n \sin nx \int\limits_0^t \frac{\sin n(t-s)}{n} r_1(s,\omega s)\,ds$$

$$\equiv S_{\omega,1} + S_{\omega,2}, \quad n_0 \in \mathbb{N}.$$

*Символом $C^{\alpha,0}_{2\pi}(Q)$ обозначено обычное банахово пространство непрерывных на множестве Q функций $v(t,\tau))2\pi$-периодичных по τ, удовлетворяющих равномерно относительно $(t,\tau) \in Q$ условию Гёльдера по t с показателем α и снабженных естественной нормой.

Пусть ε — произвольное положительное число. Заметим, что в силу условий, наложенных в п.2.1 на f, r_1, ряд, представляющий W_ω, сходится абсолютно и равномерно относительно $(x,t) \in \Pi$, $\omega > 0$. Учитывая это и используя неравенство Коши — Буняковского, подберем n_0 столь большим, что при всех $\omega > 0$, $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,T]$

$$|S_{\omega,2}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{40}$$

Далее выберем число $t_0 > 0$ столь малым, что при всех $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,t_0]$ и $\omega > 0$

$$\|S_{\omega,1}\|_{C(\Pi)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{41}$$

При $t \in [t_0, T]$ участок интегрирования $[0,t]$ разобьем на m равных частей $[t_j, t_{j+1})$, $j = 0, \dots, m-1$, и воспользуемся соотношением

$$S_{\omega,1} = \sum_{n=1}^{n_0} f_n \sin nx \int\limits_0^t \sin n(t-s) r_1(s,\omega s)\, ds$$

$$= \sum_{n=1}^{n_0} f_n \sin nx \sum_{j=0}^{m-1} \left[\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \sin n(t-s) r_1(s,\omega s)\, ds - \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \sin n(t-t_j) r_1(t_j,\omega s)\, ds \right]$$

$$+ \sum_{n=1}^{n_0} f_n \sin nx \sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \sin n(t-t_j) r_1(t_j,\omega s)\, ds = U_{\omega,1} + U_{\omega,2}.$$

Как и при доказательстве теоремы 1 выберем m столь большим, что при всех $(x,t) \in [0,\pi] \times [t_0,T]$ и $\omega > 0$

$$|U_{\omega,1}| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{42}$$

В силу равенства $\langle r_1(t,\tau)\rangle_\tau = 0$ подберем ω_0 столь большим, что при выбранных $m, t \in [t_0,T]$ и всех $\omega > \omega_0$

$$|U_{\omega,1}| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{43}$$

В силу неравенств (42), (43) существует такое число $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$

$$|S_{\omega,1}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{44}$$

Согласно соотношениям (40), (44) теорема 3 доказана. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство леммы 1. Пусть существует $t_0 \in (0,T]$ такое, что $|r_0(t_0)| > |r_0(0)|$. Воспользуемся представлением

$$\Lambda_n(t_0) = \int\limits_0^{t_0} \frac{\sin n(t_0-s)}{n} r_0(s)\, ds = \frac{r_0(t_0) - r_0(0)\cos nt_0}{n^2} + \int\limits_0^{t_0} \frac{\cos n(t_0-s)}{n^2} r_0'(s)\, ds.$$

Отсюда видно, что найдутся положительные числа c_1 и N_1 такие, что при $n > \mathbb{N}$

$$|\Lambda_n(t_0)| > \frac{c_1}{n^2}.$$

Пусть теперь $r_0 = \mathrm{const} \neq 0$. Без нарушения общности можем считать $r_0 = 1$. Тогда

$$\Lambda_n(t_{0,1}) = \int\limits_0^{t_{0,1}} \frac{\sin n(t_{0,1} - s)}{n}\, ds = \frac{1 - \cos n t_{0,1}}{n^2}, \quad t_{0,1} = 2\pi \frac{l_0}{m_0},$$

так что имеет место указанное в лемме заключение. Лемма 1 доказана. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 4. Пусть существует число $t_0 \in (0, T]$ такое, что $|r_0(t_0)| > |r_0(0)|$. Предположим, что функция f, удовлетворяющая условиям п. 2.2, найдена. Тогда в силу теоремы 3 и соотношений (37), (39) справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Lambda_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin nx, \tag{45}$$

в котором коэффициенты ψ_n представим в виде $\psi_n = \alpha_n n^{-5}$, где последовательность $\alpha_n \in l_2$. При $M_0 = \emptyset$ из (45) с учетом леммы 1 однозначно находим

$$f_n = \frac{\psi_n}{\Lambda_n} = \beta_n n^{-3}, \quad \beta_n \in l_2. \tag{46}$$

Предполагая теперь, что функция f не известна, восстановим ее по формуле

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx,$$

где числа f_n определяются соотношениями (46). При этом построенная функция f будет, очевидно, удовлетворять требованиям определения обратной задачи 2. Если $M_0 \neq \emptyset$, то для возможности восстановления функции f, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы при $n \in M_0$ выполнялись равенства $\psi_n = 0$. В этом случае $f_n = 0$, $n \in M_0$ и $f_n = \frac{\psi_n}{\Lambda_n}, n \notin M_0$. Таким образом доказана первая часть теоремы. Вторая часть (при $r_0 = \mathrm{const} \neq 0$) доказывается аналогично. $\rhd$

3. Известно лишь среднее значение зависящего от времени сомножителя источника

3.1. Обратная задача 3. В этом разделе вновь рассмотрим задачу вида (1)–(3) с $f(x,t) \equiv f(x) \in C^4([0,\pi])$, $f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(\pi) = 0$, $k = 0, 1$, и функцией r класса (A), удовлетворяющей дополнительному условию $r_0 \in C^2([0,\pi])$. Будем считать, что функция r_0 известна, причем, существует такая точка $t_0 \in (0, T]$, что $|r_0(t_0)| > |r_0(0)|$ (также нетрудно рассмотреть случай $r_0(t) \equiv \mathrm{const}$ — см. раздел 2), а функции f и r_1 неизвестны. Пусть $\Lambda_n = \Lambda_n(t_0)$, $n \in \mathbb{N}$, — набор чисел, вычисленных в соответствие с формулой (37). Ради краткости будем считать, что множество M_0 номеров n, при которых $\Lambda_n(t_0) = 0$, пусто. Пусть задана в Q непрерывная 2π-периодическая с нулевым средним по второй переменной функция $\chi(t, \tau)$, для которой определены производные $\frac{\partial^{k+2}\chi}{\partial t^k \partial \tau^2}$, $k = 0, 1, 2, 3$, принадлежащие $C(Q)$, а также функция $\psi \in C^7([0,\pi])$, $\psi^{(2j)}(0) = \psi^{(2j)}(\pi) = 0$, $j = 0, 1, 2, 3$, и пусть существует точка $x_0 \in (0, \pi)$, в которой $\widetilde{f}(x_0) \neq 0$, где

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_n \sin nx, \quad \widetilde{f}_n = \frac{\psi_n}{\Lambda_n}. \tag{47}$$

Как и в предыдущих пунктах рассмотрим функции $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, определяющиеся следующим образом. Функция $\varphi_0(t)$ является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} \varphi_0''(t) = \widetilde{f}(x_0)r_0(t) + \int\limits_0^t K(t,s)r_0(s)\,ds; \\ \varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0, \end{cases}$$

где

$$K(t,s) = -\sum_{n=1}^{\infty} n\widetilde{f}_n \sin n(t-s)\sin nx_0.$$

Функции φ_1, φ_2 удовлетворяют условиям п.1.2 с заменой $f(x,t)$ на $\widetilde{f}(x)$, т. е.

$$\varphi_1(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_n \rho_{0t}'(0,0)\sin nt \frac{\sin nx_0}{n},$$

$$\varphi_2(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_n \rho_0(0,0)\cos nt \sin nx_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_n \rho_{0t}'(0,0)\sin nt \frac{\sin nx_0}{n}.$$

Обратная задача 3 состоит в нахождении таких функций f и r, удовлетворяющих указанным в начале этого пункта условиям, что для решения $u_\omega(x,t)$ задачи (1)–(3) будут выполнены соотношения

$$\left\| u_\omega(x_0,t) - \left[\varphi_0(t) + \frac{1}{\omega}\varphi_1(t) + \frac{1}{\omega^2}\big(\varphi_2(t) + \chi(t,\omega t)\big)\right]\right\|_{C([0,T])} = o(\omega^{-2}), \tag{48}$$

$$\|u_\omega(x,t_0) - \psi(x)\|_{C([0,\pi])} = o(1), \quad \omega \to \infty. \tag{49}$$

Из результатов разделов 1, 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть функции $r_0(t)$, $\varphi_0(t)$, $\psi(x)$, $\chi(t,\tau)$ и точки x_0, t_0 удовлетворяют указанным в этом пункте условиям. Тогда обратная задача 3 однозначно разрешима, т. е. существует единственная (в указанных в п.3.1 классах) пара функций f и r_1, при которых решение $u_\omega(x,t)$ задачи (1)–(3) при $f(x,t) \equiv f(x)$ удовлетворяет условиям (48) и (49). При этом функция $f(x) = \widetilde{f}(x)$ вычисляется по формуле (47), а $r_1(t,\tau) = (f(x_0))^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\chi(t,\tau)$.*

4. Не известны оба сомножителя источника

4.1. Обратная задача 4. Рассмотрим задачу (1)–(3), в которой функции $f(x,t) \equiv f(x)$ и $r(t,\tau)$ не известны. Однако известно, что $r(t,\tau)$ — функция класса (A) и дополнительно $r_0 \in C^2([0,\pi])$, а $f(x) = \sum_{n=1}^N f_n \sin nx$ — функция с заданным числом N гармоник с неизвестными амплитудами f_n. Пусть, кроме того, заданы точки $t_0 \in (0,T)$, $x_j \in (0,\pi)$, $j = 0,\dots,N-1$, где $x_i \neq x_k$ при $i \neq k$, а также функции $\varphi_0(t)$, $\chi(t,\tau)$ и $\alpha_j(t)$, удовлетворяющие следующим условиям: φ_0 и χ — те же, что в п.1.2, и дополнительно $\varphi_0 \in C^4([0,T)$,

$$\alpha_j \in C^1([t_0-\delta, t_0+\delta]) \text{ при некотором } \delta > 0,\ (t_0-\delta, t_0+\delta) \subset (0,T), \quad j = 1,\dots,N-1.$$

Введем еще функции:

$$\varphi_1(t) = -\sum_{n=1}^{N} f_n \rho_{0t}'(0,0)\sin nt \frac{\sin nx}{n}, \tag{50}$$

$$\varphi_2(t) = -\sum_{n=1}^{N} f_n\rho_0(0,0)\cos nt \sin nx + \sum_{n=1}^{N} f_n\rho'_{0t}(0,0)\sin nt\frac{\sin nx}{n}, \tag{51}$$

в которых фигурирует пока неизвестная функция $f(x)$.

Обратная задача 4 состоит в определении таких функций $f(x)$ и $r(t,\tau)$, удовлетворяющих указанным в начале этого пункта условиям, при которых для решения $u_\omega(x,t)$ задачи (1)–(3) выполнены асимптотические формулы

$$\left\| u_\omega(x_0,t) - \left[\varphi_0(t) + \frac{1}{\omega}\varphi_1(t) + \frac{1}{\omega^2}\big(\varphi_2(t) + \chi(t,\omega t)\big)\right]\right\|_{C([0,T])} = o(\omega^{-2}), \quad \omega \to \infty. \tag{52}$$

$$\|u_\omega(x_j,t) - \alpha_j(t)\|_{C([t_0-\delta,t_0+\delta])} = o(1), \quad j = 1,\ldots,N-1,\ \omega \to \infty. \tag{53}$$

Прежде чем изложить основной результат данного параграфа введем ряд обозначений и сформулируем некоторые дополнительные условия. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{N} \psi_n \sin nx_0 = \varphi_0(t_0); \\ \sum\limits_{n=1}^{N} \psi_n \sin nx_j = \alpha_j(t_0), \quad j = 1,\ldots,N-1, \end{cases} \tag{54}$$

относительно неизвестных ψ_n, $n = 1,\ldots,N$. Поскольку матрица $A = (\sin nx_j)_{n=1,\,j=0}^{N,\,N-1}$ невырождена, то из (54) однозначно найдем вектор-функцию $\psi \equiv \psi(\varphi_0(t_0),\alpha(t_0))^{**}$. Нормируем искомую функцию $r_0(t)$ условием $r_0(t_0) = 1$. Рассмотрим теперь систему

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{N} f_n \sin nx_0 = \sum\limits_{n=1}^{N} n^2\psi_n \sin nx_0 + \varphi''_0(t_0); \\ \sum\limits_{n=1}^{N} f_n \sin nx_j = \sum\limits_{n=1}^{N} n^2\psi_n \sin nx_j + \alpha''_j(t_0), \quad j = 1,\ldots,N-1, \end{cases} \tag{55}$$

относительно неизвестных f_n, $n = 1,\ldots,N$, из которой однозначно найдем вектор

$$f \equiv F(\psi(\varphi_0(t_0),\alpha(t_0)),\varphi''_0(t_0),\alpha''(t_0)) = f(\varphi_0,\alpha,t_0). \tag{56}$$

Будем предполагать, что выполнено соотношение

$$\sum_{n=1}^{N} f_n \sin nx_0 \neq 0. \tag{57}$$

Рассмотрим теперь уравнение Вольтерра второго рода

$$f(x_0)l(t) + \int_0^t K(t,s)l(s)\,ds = \mu(t), \quad \mu \in C([0,T]), \tag{58}$$

где $K(t,s) = -\sum_{n=1}^{N} nf_n \sin n(t-s)\sin nx_0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n \sin nx, f_n$ определены в (56). Его единственное в пространстве $C([0,T])$ решение $l(t)$ обозначим символом $S(\varphi_0,\alpha,t_0,\mu(t))$.

**Зависимость функций от точек x_j, $j = 0,\ldots,N-1$, мы здесь и ниже для упрощения записи не отмечаем.

Теорема 6. *Для любого набора функций φ_0, χ, α_j, $j = 1, \dots, N-1$, и точек t_0, x_k, $k = 0, \dots, N-1$, удовлетворяющих указанным выше условиям, обратная задача 4 однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия согласования:*

$$\sum_{n=1}^{N} \sin nx_j f_n(\varphi_0, \alpha, t_0) \int\limits_0^t \frac{\sin n(t-s)}{n} S(\alpha, t_0, \varphi_0''(s))\, ds = \alpha_j(t),$$
$$j = 1, \dots, N-1, \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta). \tag{59}$$

Замечание. При выполнении условий (59) для нахождения функции $f(x)$ требуется решить две системы линейных уравнений с единой невырожденной основной матрицей; для нахождения $r_0(t)$ — решить уравнение Вольтерра второго рода (58) с $\mu(t) = \varphi_0''(t)$, а функция $r_1(t,\tau) = (f(x_0))^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \chi(t,\tau)$.

$\lhd$ Доказательство теоремы 6. Предположим, что пара функций (f, r) является решением обратной задачи. Как и при доказательстве теоремы 2 представим решение $u_\omega(x,t)$ в виде (8)–(13). Таким образом в силу теорем 1 и 3, а также соотношений (52), (53) получим систему

$$\begin{cases} [u_0 + \omega^{-1} u_1 + \omega^{-2}[u_2 + v_2]]_{x=x_0} = \varphi_0 + \frac{1}{\omega}\varphi_1 + \frac{1}{\omega^2}[\varphi_2 + \chi] + o(\omega^{-2}); \\ u_0|_{x=x_j} = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, N-1. \end{cases} \tag{60}$$

Приравнивая в первом уравнении (60) коэффициенты при ω^0, и учитывая представление (37) функции u_0, придет к системе

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{N} f_n \Lambda_n(t) \sin nx_0 = \varphi_0(t); \\ \sum\limits_{n=1}^{N} f_n \Lambda_n(t) \sin nx_j = \alpha_j(t), \quad j = 1, \dots, N-1, \ t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \end{cases} \tag{61}$$

Полагая в уравнениях последней системы $t = t_0$, $f_n \Lambda_n(t_0) = \psi_n$, придем к системе (54). Как было отмечено выше, вектор ψ находится отсюда однозначно. Продифференцировав уравнения (61) дважды по t и вновь подставляя $t = t_0$, $f_n \Lambda_n(t_0) = \psi_n$, получим систему (55), откуда находим вектор f. Вопрос о нахождении функции r при известной $f(x)$ исследован в теореме 2. Таким образом, нахождение функции $r_0(t) = S(\varphi_0, \alpha, t_0, \varphi_0''(t))$ сведено к решению уравнения Вольтерра второго рода вида (58); а также $r_1(t,\tau) = (f(x_0))^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \chi(t,\tau)$. Из проведенных рассуждений следует, что если обратная задача 4 разрешима, то она разрешима однозначно и в силу требования (53) условие согласования (59) выполнено.

Пусть теперь известно, что условие (59) выполнено. Определим $f(x)$ и $r(t,\tau)$ формулами, которые установлены в первой части доказательства теоремы. Тогда для них справедливы теорема 1 и решение u_ω задачи (1)–(3) представимо в виде (8)–(13), где

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{N} f_n(\varphi_0, \alpha, t_0) \sin nx \int\limits_0^t \frac{\sin n(t-s)}{n} S(\varphi_0, \alpha, t_0, \varphi_0''(s))\, ds,$$

$$u_1(x,t) = -\sum_{n=1}^{N} f_n(\varphi_0, \alpha, t_0) \rho_{0t}'(0,0) \frac{\sin nx}{n} \sin nt,$$

$$u_2(x,t) = -\sum_{n=1}^{N} f_n(\varphi_0,\alpha,t_0)\rho_0(0,0)\cos nt \sin nx + \sum_{n=1}^{N} f_n(\varphi_0,\alpha,t_0)\rho'_{0t}\sin nt \frac{\sin nx}{n},$$

$$v_2(x,t) = \sum_{n=1}^{N} f_n(\varphi_0,\alpha,t_0)\sin nx \rho_0(t,\tau).$$

Покажем, что для функции u_ω будут выполнены условия (52), (53). Для этого, в силу теоремы 1, достаточно доказать равенства:

$$u_0(x_0,t) = \varphi_0(t), \quad u_1(x_0,t) = \varphi_1(t), \quad u_2(x_0,t) = \varphi_2(t),$$
$$v_2(x_0,t,\tau) = \chi(t,\tau), \quad u_0(x_j,t) = \alpha_j(t).$$

Справедливость первого из них нами установлена в ходе предыдущей части доказательства данной теоремы. Второе и третье равенства выполняются согласно представлениям (50), (51) функций φ_1, φ_2 и теоремы 1. Четвертое равенство, очевидно, также справедливо. Последнее вытекает из условия согласования (59). Теорема 6 доказана. $\triangleright$

4.2. Пример. Рассмотрим обратную задачу (1)–(3) в случае $N = 2$. В качестве исходных данных возьмем следующие:

$$t_0 = 1,\ x_0 = \frac{\pi}{2},\ x_1 = \frac{\pi}{6},$$
$$\varphi_0(t) = \sin t - t,$$
$$\alpha_1(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{\sqrt{3}}{16}\sin 2t - \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{8}t,$$
$$\chi(t,\tau) = \cos\tau.$$

Проверим для этих данных справедливость условий теоремы 6 (59). Система (54) в данном случае принимает вид

$$\begin{cases} \psi_1 = \sin 1 - 1; \\ \frac{1}{2}\psi_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_2 = \frac{4\sin 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2 - 4 + \sqrt{3}}{8}, \end{cases}$$

откуда находим $\psi_1 = \sin 1 - 1$, $\psi_2 = -\frac{1}{8}\sin 2 + \frac{1}{4}$. Система (55) имеет вид

$$\begin{cases} f_1 = \sin 1 - 1 - \sin 1; \\ \frac{1}{2}f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_2 = -\frac{1}{2} + 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{8}\sin 2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2, \end{cases}$$

откуда определим $f_1 = -1$, $f_2 = 1$. Справедливо соотношение (57): $-\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi = -1 \neq 0$. Из уравнения Вольтерра второго рода

$$-r_0(t) + \int_0^t \sin(t-s) r_0(s)\,ds = -\sin t$$

находим $r_0(t) = t$. Теперь можно выписать условие согласования (59):

$$-\frac{1}{2}\int_0^t s\sin(t-s)\,ds + \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^t s\sin 2(t-s)\,ds = \alpha_1(t), \quad t \in (t_0-\delta, t_0+\delta),\ \delta > 0.$$

Легко проверяется его справедливость. Таким образом

$$f(x) = -\sin x + \sin 2x, \quad r_0(t) = t, \quad r_1(t,\tau) = \cos\tau.$$

Литература

1. *Babich P. V., Levenshtam V. B.* Direct and inverse asymptotic problems high-frequency terms // Asymptotic Analysis.—2016.—Vol. 97.—P. 329–336.
2. *Бабич П. В., Левенштам В. Б., Прика С. П.* Восстановление быстро осциллирующего источника в уравнении теплопроводности по асимптотике решения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2017.—Т. 57, № 12.—С. 1955–1965. DOI: 10.7868/S0044466917120079.
3. *Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г., Яхно В. Г.* Одномерные обратные задачи математической физики.—Новосибирск: Наука, 1982.—88 с.
4. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики.—М.: МГУ, 1984.
5. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач.—М.: Наука, 1994.
6. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи.—Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2008.—450 с.
7. *Денисов А. М.* Асимптотика решений обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2013.—Т. 53, № 5.—С. 744–752. DOI: 10.7868/S0044466913050049.
8. *Денисов А. М.* Задачи определения неизвестного источника в параболическом и гиперболическом уравнениях // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2015.—Т. 55, № 5.—С. 830–835. DOI: 10.7868/S0044466915050087.
9. *Камынин В. Л.* Обратная задача одновременного определения правой части и коэффициента при младшей производной в параболическом уравнении на плоскости // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 6.—С. 795–806.
10. *Бабич П. В., Левенштам В. Б.* Восстановление быстро осциллирующего свободного члена в многомерном гиперболическом уравнении // Мат. заметки.—2018.—Т. 104, № 4.—С. 505–515. DOI: 10.4213/mzm12151.
11. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук.—1960.—Т. 15, № 2.—С. 97–154.

Статья поступила 8 августа 2020 г.

Бабич Павел Васильевич
Математический институт им. В. А. Стеклова,
младший научный сотрудник
РОССИЯ, 119991, Москва, ул. Губкина, 8
E-mail: xblahblahc@gmail.com

Левенштам Валерий Борисович
Математический институт им. В. А. Стеклова,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 119991, Москва, ул. Губкина, 8
E-mail: vlevenshtam@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 4, P. 28–44

RECOVERY OF RAPIDLY OSCILLATED RIGHT-HAND SIDE OF THE WAVE EQUATION BY THE PARTIAL ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION

Babich, P. V.[1] and Levenshtam, V. B.[1]

[1]Steklov Mathematical Institute of RAS,
8 Gubkina St., Moscow 119991, Russia
E-mail: xblahblahc@gmail.com, vlevenshtam@yandex.ru

Abstract. The initial-boundary problem for the one-dimensional wave equation with unknown rapidly oscillated right-handside is considered in the paper. The latter is represented as a product of two functions; the first function depends on the spatial variable and the second one depends on time and fast time variables.

Four different cases are considered: in two cases one of the factor-functions is known and in two other cases both factor-functions are unknown. In each of these cases, the inverse problems of recovering unknown functions from some information about partial asymptotics of the original problem with known data are posed and solved. This specified information consists, in general, in setting values for certain asymptotics coefficients in some spatial and/or time points. The use of some additional conditions (overdetermination conditions) in this form speaks of a fundamental difference between the above statements of inverse problems and the classics, where additional conditions are imposed on exact solutions. The construction of solutions asymptotics of the original problem with this approach act as direct problem. This approach to inverse problems with rapidly oscillated data in time is developed by the author over the past few years.

Key words: one-dimensional wave equation, rapidly oscillating absolute term, asymptotics of solution, inverse problem.

Mathematical Subject Classification (2010): 35L05, 35L20, 35R30.

For citation: *Babich, P. V. and Levenshtam, V. B.* Recovery of Rapidly Oscillated Right-Hand Side of the Wave Equation by the Partial Asymptotics of the Solution, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 28–44 (in Russian). DOI: 10.46698/s0301-1959-8380-s.

References

1. *Babich, P. V. and Levenshtam, V. B.* Direct and Inverse Asymptotic Problems High-frequency Terms, *Asymptotic Analysis*, 2016, vol. 97, pp. 329–336.
2. *Babich, P. V., Levenshtam, V. B. and Prika, S. P.* Recovery of a Rapidly Oscillating Source in the Heat Equation from Solution Asymptotics, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 12, pp. 1908–1918. DOI: 10.1134/S0965542517120065.
3. *Lavret'ev, M. M., Reznitskaya, K. G. and Yakhno, V. G. Odnomernye obratnye zadachi matematicheskoj fiziki* [One-Dimensional Inverse Problems of Mathematical Physics], Novosibirsk, Nauka, 1982 (in Russian).
4. *Romanov, V. G. Obratnye zadachi matematicheskoj fiziki* [Inverse Problems of Mathematical Physics], Moscow, Nauka, 1984 (in Russian).
5. *Denisov, A. M. Vvedenie v teoriyu obratnyh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Problems], Moscow, Nauka, 1994 (in Russian).
6. *Kabanikhin, S. I. Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and Ill-Posed Problems], Novosibirsk, Sibirskoe Nauchnoe Izdatel'stvo, 2008 (in Russian).
7. *Denisov, A. M.* Asymptotic Expansions of Solutions to Inverse Problems for a Hyperbolic Equation with a Small Parameter Multiplying the Highest Derivative, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, no. 5, pp. 580–587. DOI: 10.1134/S0965542513050047.
8. *Denisov, A. M.* Problems of Determining the Unknown Source in Parabolic and Hyperbolic Equations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 5, pp. 829–833. DOI: 10.1134/S0965542515050085.
9. *Kamynin, V. L.* Inverse Problem of Simultaneously Determining the Right-hand Side and the Coefficient of a Lower Order Derivative for a Parabolic Equation on the Plane, *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 6, pp. 792–804.
10. *Babich, P. V. and Levenshtam, V. B.* Recovery of a Rapidly Oscillating Absolute Term in the Multidimensional Hyperbolic Equation, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 104, no. 4, pp. 489–497. DOI: 10.1134/S000143461809016X.
11. *Ilin, V. A.* The Solvability of Mixed Problems for Hyperbolic and Parabolic Equations, *Russian Mathematical Surveys*, 1960, vol. 15, no. 1, pp. 85–142. DOI: 10.1070/RM1960v015n02ABEH004217.

Received August 8, 2020

Pavel V. Babich
Steklov Mathematical Institute of RAS,
8 Gubkina St., Moscow 119991, Russia,
Junior Researcher
E-mail: `xblahblahc@gmail.com`

Valeriy B. Levenshtam
Steklov Mathematical Institute of RAS,
8 Gubkina St., Moscow 119991, Russia,
Leading Researcher
E-mail: `vlevenshtam@yandex.ru`

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 4, С. 45–57

УДК 519.63
DOI 10.46698/p2286-5792-9411-x

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА[#]

М. Х. Бештоков[1], З. В. Бештокова[1], М. З. Худалов[2]

[1] Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;
[2] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru, zarabaeva@yandex.ru, hmz@mail.ru

Посвящается 75-летию Семена Самсоновича Кутателадзе

Аннотация. В прямоугольной области исследуется нелокальная краевая задача для одномерного по пространственной переменной нагруженного уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной на границе теплоемкостью, выступающего в качестве математической модели, возникающего, в частности, в практике регулирования солевого режима почв с фрактальной организацией, когда расслоение верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности, затопленного на некоторое время участка. Основным методом исследования является метод энергетических неравенств. При предположении существования регулярного решения дифференциальной задачи получена априорная оценка, откуда следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи. На равномерной сетке в соответствие дифференциальной задаче ставится разностная схема второго порядка аппроксимации по параметрам сетки. Для решения разностной задачи получена априорная оценка в разностной форме, из чего следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным. В силу линейности рассматриваемой задачи полученное неравенство позволяет утверждать сходимость приближенного решения к точному (в предположении существования последнего в классе достаточно гладких функций) со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации. Проведены численные эксперименты, иллюстрирующие полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, дробная производная Капуто, сосредоточенная теплоемкость, разностные схемы, устойчивость, сходимость.

Mathematical Subject Classification (2010): 65N06, 65N12.

Образец цитирования: *Бештоков М. Х., Бештокова З. В., Худалов М. З.* Конечно-разностный метод решения нелокальной краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности дробного порядка // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 4.—С. 45–57. DOI: 10.46698/p2286-5792-9411-x.

Введение

В настоящей работе рассматривается нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности дробного порядка с нестандартными краевыми условиями, когда на границе помещается сосредоточенная теплоемкость величины C_0 и происходит

[#]Исследование частично выполнено вторым соавтором при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 20-51-53007.

теплообмен с внешней средой по закону Ньютона [1, с. 396]. Такие условия возникают в случае, когда рассматривается тело с большой теплопроводностью, вследствие чего температуру по всему объему этого тела можно считать постоянной (см. [2, с. 186]), а также при решении задачи об установлении температуры в ограниченной среде при наличии нагревателя, трактуемого как сосредоточенная теплоемкость [3]. Тогда краевое условие, например, при $x = 0$, (выражающее уравнение теплового баланса) будет иметь вид

$$C_0 \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_0), \quad C_0 = \text{const} > 0,$$

где u_0 — температура внешней среды.

Условия такого рода возникают также в практике регулирования солевого режима почв, когда рассоление верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности, затопленного на некоторое время участка (см. [4, с. 233]). Если на поверхности поля имеется слой воды постоянной толщины h, то на верхней границе следует задать условие

$$h \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial c}{\partial x}, \tag{$*$}$$

где c — концентрация соли в почвенном растворе, D — коэффициент диффузивности.

Для описания движения примеси в потоке однородной жидкости используется дифференциальное уравнение дробного порядка [5]. Для определения целесообразности режима смены воды может потребоваться решение краевой задачи с условиями на верхней границе толщи, отличающейся от $(*)$. Так как почву следует рассматривать как среду фрактальную, то при написании граничных условий есть смысл также использовать концепцию фрактала

$$C_0 \partial_{0t}^{\alpha} u = k \frac{\partial u}{\partial x}.$$

В настоящее время стало очевидным, что при решении многих задач в механике, физике, биологии часто встречаются среды и системы, которые хорошо интерпретируются как фракталы, примерами последних могут служить сильно пористые среды, каковым, например, является почвогрунт. Решение различных задач для таких сред приводит к краевым задачам для дифференциальных уравнений с дробной производной. Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка являются обобщением уравнений с частными производными целочисленного порядка и вызывают большой теоретический и практический интерес [6–10].

Численным методам решения локальных и нелокальных краевых задач для различных уравнений дробного порядка посвящены работы [11–19]. В работах [11–13] получены результаты, позволяющие, как и в классическом случае ($\alpha = 1$), применять метод энергетических неравенств для нахождения априорных оценок краевых задач для уравнения дробного порядка в дифференциальной и разностной трактовках.

1. Постановка задачи и априорная оценка в дифференциальной форме

В замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x)\,\partial u \partial x - q(x,t)u(x_0,t) + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$k(0)u_x(0,t) = \beta_{11}(t)u(0,t) + \beta_{12}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t) - \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$-k(l)u_x(l,t)=\beta_{21}(t)u(l,t)+\beta_{22}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)-\mu_2(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} 0<c_0\leqslant k(x),\quad \beta_{12}(t),\beta_{22}(t)\leqslant c_1,\\ \bigl|\beta_{11}(t),\,\beta_{21}(t),\,r(x),\,q(x,t),\,k_x(x),\,r_x(x)\bigr|\leqslant c_2, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\partial_{0t}^{\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\,d\tau$$

— дробная производная в смысле Капуто порядка α, $0<\alpha<1$, $c_i=\mathrm{const}>0$, $i=0,1,2$.

Далее предполагается, что дифференциальная задача (1)–(4) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными.

В работе будем использовать обозначения $M_i=\mathrm{const}>0$, $i=1,2,\ldots$, которые зависят только от входных данных рассматриваемой задачи.

Теорема 1. *Если*

$$k(x)\in C^1[0,l],\quad r(x)\in C[0,l],\quad q(x,t),f(x,t)\in C\bigl(\overline{Q}_T\bigr),$$

$$u(x,t)\in C^{2,0}(Q_T)\cap C^{1,0}\bigl(\overline{Q}_T\bigr),\quad \partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C\bigl(\overline{Q}_T\bigr)$$

и выполнены условия (5), *тогда для решения задачи* (1)–(4) *справедлива априорная оценка*

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\left(\|u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2\right)\leqslant M\left(D_{0t}^{-\alpha}\bigl(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\bigr)+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right),$$

где $M=\mathrm{const}>0$, *зависящее только от входных данных* (1)–(4),

$$D_{0t}^{-\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{u\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$$

— дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$.

$\lhd$ Для получения априорной оценки решения задачи (1)–(4) в дифференциальной форме умножим уравнение (1) скалярно на $U=u+\partial_{0t}^{\alpha}u$:

$$(\partial_{0t}^{\alpha}u,U)=\left((ku_x)_x,U\right)+(ru_x,U)-(qu(x_0,t),U)+(f,U), \tag{6}$$

где

$$(a,b)=\int\limits_0^l ab\,dx,\quad (a,a)=\|a\|_0^2,$$

a, b — заданные на $[0,l]$ функции.

Преобразуем слагаемые, входящие в тождество (6), пользуясь неравенством Коши с ε и леммой 1 из [11]:

$$\bigl(\partial_{0t}^{\alpha}u,U\bigr)=\bigl(\partial_{0t}^{\alpha}u,u+\partial_{0t}^{\alpha}u\bigr)=\bigl(1,u\partial_{0t}^{\alpha}u\bigr)+\bigl(1,(\partial_{0t}^{\alpha}u)^2\bigr)\geqslant\frac12\,\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\bigl((ku_x)_x,U\bigr)=\bigl((ku_x)_x,u+\partial_{0t}^{\alpha}u\bigr)=Uku_x\big|_0^l-\bigl(ku_x,u_x+\partial_{0t}^{\alpha}u_x\bigr)\\ =Uku_x\big|_0^l-\bigl(k,u_x^2\bigr)-\bigl(k,u_x\partial_{0t}^{\alpha}u_x\bigr)\leqslant Uku_x\big|_0^l-c_0\|u_x\|_0^2-\frac12\,\partial_{0t}^{\alpha}\|\sqrt{k}\,u_x\|_0^2,\end{gathered} \tag{8}$$

$$(ru_x, U) = \big(ru_x, u + \partial_{0t}^{\alpha} u\big) = (ru_x, u) + \big(ru_x, \partial_{0t}^{\alpha} u\big) \leqslant \varepsilon \left\|\partial_{0t}^{\alpha} u\right\|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\big), \quad (9)$$

$$\begin{gathered} -\big(qu(x_0,t), U\big) = -\big(qu(x_0,t), u + \partial_{0t}^{\alpha} u\big) = -\big(qu(x_0,t), u\big) - \big(qu(x_0,t), \partial_{0t}^{\alpha} u\big) \\ \leqslant \frac{1}{2}\,(q,u)^2 + \varepsilon \left\|\partial_{0t}^{\alpha} u\right\|_0^2 + M_2^{\varepsilon} u^2(x_0,t) \leqslant \varepsilon \left\|\partial_{0t}^{\alpha} u\right\|_0^2 + M_3^{\varepsilon}\big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\big), \end{gathered} \quad (10)$$

$$(f, U) = \big(f, u + \partial_{0t}^{\alpha} u\big) = (f, u) + \big(f, \partial_{0t}^{\alpha} u\big) \leqslant \varepsilon \left\|\partial_{0t}^{\alpha} u\right\|_0^2 + M_4^{\varepsilon}\, \|f\|_0^2 + \|u\|_0^2. \quad (11)$$

Учитывая преобразования (7)–(11), из (6) находим

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\big\|u\big\|_0^2 + \big\|\partial_{0t}^{\alpha} u\big\|_0^2 + c_0\|u_x\|_0^2 + \frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\big\|\sqrt{k}\,u_x\big\|_0^2 \\ \leqslant Uku_x\big|_0^l + \varepsilon \left\|\partial_{0t}^{\alpha} u\right\|_0^2 + M_5^{\varepsilon}\big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\big) + M_6^{\varepsilon}\big\|f\big\|_0^2. \end{gathered} \quad (12)$$

Выбирая $\varepsilon = \frac{1}{2}$, из (12) находим

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\big\|u\big\|_0^2 + \frac{1}{2}\,\big\|\partial_{0t}^{\alpha} u\big\|_0^2 + c_0\big\|u_x\big\|_0^2 + \frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\big\|\sqrt{k}\,u_x\big\|_0^2 \\ \leqslant Uku_x\big|_0^l + M_5\left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right) + M_6\big\|f\big\|_0^2. \end{gathered} \quad (13)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (13), тогда получим

$$\begin{gathered} Uku_x\big|_0^l = \big(u(l,t) + \partial_{0t}^{\alpha} u(l,t)\big)\big(\mu_2(t) - \beta_{21}(t)u(l,t) - \beta_{22}(t)\partial_{0t}^{\alpha} u(l,t)\big) \\ + \big(u(0,t) + \partial_{0t}^{\alpha} u(0,t)\big)\big(\mu_1(t) - \beta_{11}u(0,t) - \beta_{12}(t)\partial_{0t}^{\alpha} u(0,t)\big) = \mu_2(t)u(l,t) + \mu_2(t)\partial_{0t}^{\alpha} u(l,t) \\ - \beta_{21}(t)u^2(l,t) - \beta_{21}(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha} u(l,t) - \beta_{22}(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha} u(l,t) - \beta_{22}(t)\left(\partial_{0t}^{\alpha} u(l,t)\right)^2 \\ + \mu_1(t)u(0,t) + \mu_1(t)\partial_{0t}^{\alpha} u(0,t) - \beta_{11}(t)u^2(0,t) - \beta_{11}u(0,t)\partial_{0t}^{\alpha} u(0,t) \\ - \beta_{12}(t)u(0,t)\partial_{0t}^{\alpha} u(0,t) - \beta_{12}\left(\partial_{0t}^{\alpha} u(0,t)\right)^2 \leqslant M_7^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right) + \varepsilon_1\left(\partial_{0t}^{\alpha} u(l,t)\right)^2 \\ + \varepsilon_2\left(\partial_{0t}^{\alpha} u(0,t)\right)^2 + M_8^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right) - \beta_{22}(t)\left(\partial_{0t}^{\alpha} u(l,t)\right)^2 - \beta_{12}(t)\left(\partial_{0t}^{\alpha} u(0,t)\right)^2. \end{gathered}$$

Выбирая $\varepsilon_1 = \beta_{22}(t)$, $\varepsilon_2 = \beta_{12}(t)$, из последнего находим

$$Uku_x\big|_0^l \leqslant M_9\left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right) + M_{10}\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right). \quad (14)$$

Учитывая (14), из (13) находим

$$\begin{gathered} \partial_{0t}^{\alpha}\left(\|u\|_0^2 + \big\|\sqrt{k}u_x\big\|_0^2\right) + \big\|u_x\big\|_0^2 + \big\|\partial_{0t}^{\alpha} u\big\|_0^2 \\ \leqslant M_{11}\left(\|u\|_0^2 + \big\|\sqrt{k}\,u_x\big\|_0^2\right) + M_{12}\left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\right). \end{gathered} \quad (15)$$

Применяя к обеим частям неравенства (15) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\begin{gathered} \big\|u\big\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha}\left(\|u_x\|_0^2 + \|\partial_{0t}^{\alpha} u\|_0^2\right) \leqslant M_{13} D_{0t}^{-\alpha}\big\|u\big\|_{W_2^1(0,l)}^2 \\ + M_{14}\left(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\right) + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2\right), \end{gathered} \quad (16)$$

где $\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 = \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2$.

На основании [11, лемма 2] из (16) находим априорную оценку

$$\begin{gathered} \big\|u\big\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha}\left(\|u_x\|_0^2 + \|\partial_{0t}^{\alpha} u\|_0^2\right) \\ \leqslant M\left(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\right) + \big\|u_0(x)\big\|_{W_2^1(0,l)}^2\right), \end{gathered} \quad (17)$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, зависящее только от входных данных (1)–(4).

Из оценки (17) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части в смысле нормы $\|u\|_1^2 = \|u\|^2_{W_2^1(0,l)} + D_{0t}^{-\alpha}\left(\|u_x\|_0^2 + \|\partial_{0t}^{\alpha} u\|_0^2\right)$. $\rhd$

2. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1)–(4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y = \varkappa_i\big(a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\big)_x + b_i a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x},i} + b_i a_{i+1} y^{(\sigma)}_{x,i} - d_i^j\big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\big) + \varphi_i^j, \tag{18}$$

$$\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} = \beta_{11} y^{(\sigma)}_0 + 0.5hd_0\big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\big) + \tilde{\beta}_{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0 - \tilde{\mu}_1, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{19}$$

$$-\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} = \beta_{21} y^{(\sigma)}_N + 0.5hd_N\big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\big) + \tilde{\beta}_{22}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N - \tilde{\mu}_2, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{20}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{21}$$

где

$$\tilde{\beta}_{12} = \beta_{12} + 0.5h, \quad \tilde{\mu}_1(t_{j+\sigma}) = \mu_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_0^j,$$

$$\tilde{\beta}_{22} = \beta_{22}(t_{j+\sigma}) + 0.5h, \quad \tilde{\mu}_2(t_{j+\sigma}) = \mu_2(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_N^j,$$

$$a_i = k(x_{i-0.5}), \quad b_i^j = \frac{r(x_i)}{k(x_i)}, \quad \varphi = f(x_i, t_{j+\sigma}),$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j, \quad d_i^j = d(x_i, t_{j+\sigma}), \quad a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha},$$

$$a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha}, \quad l \geqslant 1, \quad \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha}\big[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}\big] - \frac{1}{2}\big[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}\big], \quad l \geqslant 1,$$

$$\text{при } j = 0, \quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$\text{при } j > 0, \quad c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)}, & s = 0, \\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)}, & 1 \leqslant s \leqslant j-1, \\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)}, & s = j, \end{cases}$$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)} > \frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha} > 0, \quad x^-_{i_0} = \frac{x_{i_0+1} - x_0}{h}, \quad x^+_{i_0} = \frac{x_0 - x_{i_0}}{h}, \quad x_{i_0} \leqslant x_0 \leqslant x_{i_0+1},$$

$\varkappa = \frac{1}{1+R}$, $R = \frac{0.5h|r|}{k}$ — разностное число Рейнольдса, $\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j} c^{(\alpha,\sigma)}_{j-s} y_t^s$ — дискретный аналог дробной производной Капуто порядка α, $0<\alpha<1$, обеспечивающий порядок точности $O(\tau^{3-\alpha})$ [12].

Введем скалярные произведения и норму:

$$[u,v] = \sum_{i=0}^{N} u_i v_i \hbar, \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h, & i = 0, N, \\ h, & i \neq 0, N, \end{cases}$$

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i h, \quad [u,u] = \big[1, u^2\big] = \big|[u]\big|_0^2.$$

Перепишем (18)–(21) в операторной форме

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y = \overline{\Lambda}\,(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)} + \overline{\Phi}, \tag{22}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{23}$$

где

$$\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}$$
$$= \begin{cases} \tilde{\Lambda} y^{(\sigma)}_i = \varkappa\big(a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\big)_x + b^- a y^{(\sigma)}_{\bar{x}} + b^+ a^{(+1)} y^{(\sigma)}_x - d\big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\big), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ \Lambda^- y^{(\sigma)}_0 = \dfrac{2}{h}\left(\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} - \beta_{11} y^{(\sigma)}_0 - 0.5hd_0\big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\big) - \beta_{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0\right), \\ \Lambda^+ y^{(\sigma)}_N = \dfrac{2}{h}\left(-\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} - \beta_{21} y^{(\sigma)}_N - 0.5hd_N\big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\big) - \beta_{22}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N\right), \end{cases}$$

$$\overline{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, & i = 1, \dots, N-1, \\ \varphi^- = \dfrac{2}{h}\big(\mu_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi^j_0\big), & i = 0, \\ \varphi^+ = \dfrac{2}{h}\big(\mu_2(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi^j_N\big), & i = N, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varkappa = \dfrac{1}{1 + \frac{0.5h|r|}{k}} \\ \varkappa_0 = \dfrac{1}{1 + \frac{0.5h|r_0|}{k_{0.5}}}, & r_0 \leqslant 0 \\ \varkappa_N = \dfrac{1}{1 + \frac{0.5h|r_N|}{k_{N-0.5}}}, & r_N \geqslant 0. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (5)*, тогда существует такое* τ_0*, что если* $\tau \leqslant \tau_0$*, то для решения разностной задачи* (18)–(21) *справедлива априорная оценка*

$$\big|[y^{j+1}]\big|^2_{W^1_2(0,l)} \leqslant M\Big(\big|[y^0]\big|^2_{W^1_2(0,l)} + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\Big(\big|[\varphi^{j'}]\big|^2_0 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big)\Big), \tag{24}$$

где $M = \text{const} > 0$*, не зависящая от* h *и* τ*,* $|[y]|^2_{W^1_2(0,l)} = |[y]|^2_0 + |[y_{\bar{x}}]|^2_0$*.*

$\lhd$ Умножим (22) скалярно на $\bar{y} = y^{(\sigma)} + \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y:$

$$\big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, \bar{y}\big] = \big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, \bar{y}\big] + \big[\overline{\Phi}, \bar{y}\big]. \tag{25}$$

Оценим суммы, входящие в (25), с учетом [12, лемма 1]:

$$\begin{gathered} \big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, \bar{y}\big] = \big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, y^{(\sigma)} + \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y\big] \\ = \big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, y^{(\sigma)}\big] + \big[1, (\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y)^2\big] \geqslant \frac{1}{2}\,\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} \big|[y]\big|^2_0 + \big|\big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y\big]\big|^2_0, \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} \big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, \bar{y}\big] = \big(\tilde{\Lambda} y^{(\sigma)}, \bar{y}\big) + 0.5h\bar{y}_0 \Lambda^- y^{(\sigma)}_0 + 0.5h\bar{y}_N \Lambda^+ y^{(\sigma)}_N \\ = \big(\varkappa\big(a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\big)_x, \bar{y}\big) + \big(b^- a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \bar{y}\big) + \big(b^+ a^{(+1)} y^{(\sigma)}_x, \bar{y}\big) - \big(d\big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\big), \bar{y}\big) \\ + \bar{y}_0 \varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} - \beta_{11} y^{(\sigma)}_0 \bar{y}_0 - \varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} \bar{y}_N - 0.5hd_0\big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\big)\bar{y}_0 \\ - \beta_{21} y^{(\sigma)}_N \bar{y}_N - 0.5hd_N\big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\big)\bar{y}_N - \overline{y}_0 \beta_{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0 - \overline{y}_N \beta_{22}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N. \end{gathered} \tag{27}$$

Преобразуем слагаемые в правой части (27):

$$\begin{gathered}\big(\varkappa\big(ay_{\bar x}^{(\sigma)}\big)_x,\bar y\big)=\bar y\varkappa ay_{\bar x}^{(\sigma)}\Big|_0^N-\big(ay_{\bar x}^{(\sigma)},(\varkappa\bar y)_{\bar x}\big]=\bar y_N\varkappa_Na_Ny_{\bar x,N}^{(\sigma)}-\bar y_0\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}\\ -\big(ay_{\bar x}^{(\sigma)},\varkappa_{\bar x}\bar y+\varkappa^{(-1)}\bar y_{\bar x}\big]=\bar y_N\varkappa_Na_Ny_{\bar x,N}^{(\sigma)}-\bar y_0\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}-\big(ay_{\bar x}^{(\sigma)},\varkappa_{\bar x}y^{(\sigma)}\big]\\ -\big(ay_{\bar x}^{(\sigma)},\varkappa_{\bar x}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y\big]-\big(ay_{\bar x}^{(\sigma)},\varkappa^{(-1)}y_{\bar x}^{(\sigma)}\big]-\big(ay_{\bar x}^{(\sigma)},\varkappa^{(-1)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_{\bar x}\big]\leqslant\bar y_N\varkappa_Na_Ny_{\bar x,N}^{(\sigma)}\\ -\bar y_0\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}+\varepsilon\,\big|\big[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y\big]\big|_0^2+M_1^\varepsilon\left(\big|\big[y^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big|\big[y_{\bar x}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\right)-\frac{1}{1+hM_2}\left(a\varkappa,\big(y_{\bar x}^{(\sigma)}\big)^2\right]\\ -\frac{1}{2(1+hM_2)}\left(a\varkappa,\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_{\bar x}^2\right]\leqslant\bar y_N\varkappa_Na_Ny_{\bar x,N}^{(\sigma)}-\bar y_0\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}+\varepsilon\,\big|\big[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y\big]\big|_0^2\\ +M_1^\varepsilon\Big(\big|\big[y^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big|\big[y_{\bar x}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\Big)-M_2\big|\big[y_{\bar x}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2-M_3\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha\big|\big[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar x}\big]\big|_0^2,\end{gathered}\tag{28}$$

$$\begin{gathered}\big(b^-ay_{\bar x}^{(\sigma)},\bar y\big)+\big(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)},\bar y\big)=\big(b^-ay_{\bar x}^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\big)\\ +\big(b^-ay_{\bar x}^{(\sigma)},\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y\big)+\big(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\big)+\big(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)},\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y\big)\\ \leqslant\varepsilon\big|\big[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y\big]\big|_0^2+M_4^\varepsilon\Big(\big|\big[y^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big|\big[y_{\bar x}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\Big),\end{gathered}\tag{29}$$

$$\begin{gathered}-\big(d\big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big),\bar y\big)-0.5hd_0\big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big)\bar y_0\\ -0.5hd_N\big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big)\bar y_N-\overline{y}_0\beta_{12}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0-\overline{y}_N\beta_{22}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N-\beta_{11}y_0^{(\sigma)}\bar y_0\\ -\beta_{21}y_N^{(\sigma)}\bar y_N=-\big[d\big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big),y^{(\sigma)}\big]-\big[d\big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big),\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y\big]\\ -\beta_{11}\big(y_0^{(\sigma)}\big)^2-\beta_{11}y_0^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0-\beta_{21}\big(y_N^{(\sigma)}\big)^2-\beta_{21}y_N^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N-\beta_{12}y_0^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0\\ -\beta_{12}\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0\big)^2-\beta_{22}y_N^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N-\beta_{22}\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\big)^2\leqslant\varepsilon_1\big|\big[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y\big]\big|_0^2\\ +M_5^{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(\big|\big[y^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big|\big[y_{\bar x}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\Big)+\varepsilon_2\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0\big)^2+\varepsilon_3\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\big)^2\\ -\beta_{12}\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0\big)^2-\beta_{22}\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\big)^2.\end{gathered}\tag{30}$$

Учитывая преобразования (28)–(30), из (27) получим

$$\begin{gathered}\big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},\bar y\big]\leqslant\varepsilon_1\big|\big[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y\big]\big|_0^2+\varepsilon_2\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0\big)^2+\varepsilon_3\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\big)^2\\ -\beta_{12}\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0\big)^2-\beta_{22}\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\big)^2+M_6^{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(\big|\big[y^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big|\big[y_{\bar x}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\Big)\\ -M_2\big|\big[y_{\bar x}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2-M_3\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha\big|\big[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar x}\big]\big|_0^2,\end{gathered}\tag{31}$$

$$\begin{gathered}\big[\overline{\Phi},\bar y\big]=(\varphi,\bar y)+0.5h\varphi^-\bar y_0+0.5h\varphi^+\bar y_N=(\varphi,\bar y)+\bar y_0(\mu_1+0.5h\varphi_0)\\ +\bar y_N(\mu_2+0.5h\varphi_N)=(\varphi,\bar y)+\bar y_0\mu_1+0.5h\varphi_0\bar y_0+\bar y_N\mu_2+0.5h\varphi_N\bar y_N\\ =[\varphi,\bar y]+\mu_1\bar y_0+\mu_2\bar y_N=\big[\varphi,y^{(\sigma)}\big]+\big[\varphi,\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y\big]+\mu_1y_0^{(\sigma)}+\mu_1\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0\\ +\mu_2y_N^{(\sigma)}+\mu_2\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\leqslant\varepsilon_1\big|[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y]\big|_0^2+\varepsilon_2\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0\big)^2+\varepsilon_3\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\big)^2\\ +M_7^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\big(\mu_1^2+\mu_2^2\big)+M_8\Big(\big|\big[y^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big|\big[y_{\bar x}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\Big)+M_9^{\varepsilon_1}\big|[\varphi]\big|_0^2.\end{gathered}\tag{32}$$

Принимая во внимание преобразования (26)–(32), из (25) находим

$$\begin{gathered}\frac12\,\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha\big|[y]\big|_0^2+\big|[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y]\big|_0^2+M_3\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha\big|\big[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar x}\big]\big|_0^2+M_2\big|\big[y_{\bar x}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\\ +\beta_{12}(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0)^2+\beta_{22}(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N)^2\leqslant2\varepsilon_1\big|[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y]\big|_0^2+2\varepsilon_2(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0)^2\\ +2\varepsilon_3(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N)^2+M_{11}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(\big|\big[y^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big|\big[y_{\bar x}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\Big)+M_{12}^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\big(\mu_1^2+\mu_2^2\big)+M_{13}^{\varepsilon_1}\big|[\varphi]\big|_0^2.\end{gathered}\tag{33}$$

Выбирая $\varepsilon_1=\frac{1}{4}$, $\varepsilon_2=\frac{\beta_{12}}{4}$, $\varepsilon_3=\frac{\beta_{22}}{4}$, из (33) получаем

$$\begin{gathered}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left(|[y]|_0^2+\left|\left[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar{x}}\right]\right|_0^2\right)+\left|\left[y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right]\right|_0^2+\left|\left[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y\right]\right|_0^2\\ \leqslant M_{14}\left(|[y^{\sigma}]|_0^2+\left|\left[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar{x}}^{\sigma}\right]\right|_0^2\right)+M_{15}\big(|[\varphi]|_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2\big).\end{gathered}\tag{34}$$

Перепишем (34) в другой форме:

$$\begin{gathered}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left(|[y]|_0^2+\left|\left[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar{x}}\right]\right|_0^2\right)\leqslant M_{16}^{\sigma}\left(|[y^{j+1}]|_0^2+\left|\left[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar{x}}^{j+1}\right]\right|_0^2\right)\\ +M_{17}^{\sigma}\left(\left|\left[y^j\right]\right|_0^2+\left|\left[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar{x}}^j\right]\right|_0^2\right)+M_{18}\left(\left|[\varphi]\right|_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2\right).\end{gathered}\tag{35}$$

На основании [13, лемма 7] из (35) получаем априорную оценку (24). $\rhd$

Из (24) следуют единственность и устойчивость решения задачи (18)–(21) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(4), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ — решение разностной задачи (18)–(21). Для оценки точности разностной схемы (18)–(21) рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения (18)–(21), получаем задачу для функции z

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z=\varkappa_i\big(a_iz_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)_x+b_ia_iz_{\bar{x},i}^{(\sigma)}+b_ia_{i+1}z_{x,i}^{(\sigma)}-d_i^j\big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big)+\Psi_i^j,\tag{36}$$

$$\varkappa_0a_1z_{x,0}^{(\sigma)}=\beta_{11}z_0^{(\sigma)}+0.5hd_0\big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big)+\tilde{\beta}_{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_0-\tilde{\nu}_1,\quad t\in\overline{\omega}_{\tau},\tag{37}$$

$$-\varkappa_Na_Nz_{\bar{x},N}^{(\sigma)}=\beta_{21}z_N^{(\sigma)}+0.5hd_N\big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big)+\tilde{\beta}_{22}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_N-\tilde{\nu}_2,\quad t\in\overline{\omega}_{\tau},\tag{38}$$

$$z(x,0)=0,\quad x\in\overline{\omega}_h,\tag{39}$$

где $\Psi=O(h^2+\tau^2)$, $\tilde{\nu}_1=O(h^2+\tau^2)$, $\tilde{\nu}_2=O(h^2+\tau^2)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1)–(4) разностной схемой (18)–(21) в классе решении $u=u(x,t)$ задачи (1)–(4).

Применяя априорную оценку (24) к решению задачи (36)–(39), получаем

$$\left|\left[z^{j+1}\right]\right|^2_{W_2^1(0,l)}\leqslant M\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\left|\left[\Psi^{j'}v\right]\right|_0^2+\nu_1^{j'2}+\nu_2^{j'2}\right),\tag{40}$$

где $M=\mathrm{const}>0$, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (40) следует сходимость решения разностной задачи (18)–(21) к решению дифференциальной задачи (1)–(4) в смысле нормы $|[z^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)}$ на каждом слое так, что существует такое τ_0, что при $\tau\leqslant\tau_0$ справедлива оценка

$$\left|\left[y^{j+1}-u^{j+1}\right]\right|^2_{W_2^1(0,l)}\leqslant M\left(h^2+\tau^2\right).$$

Замечание. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда уравнение (1) имеет вид:

$$\partial^{\alpha}_{0t}u=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x}-\sum_{s=1}^{p}q_s(x,t)u(x_s,t)+f(x,t),\quad 0<x<l,\ 0<t\leqslant T,$$

если потребовать выполнения условия $|q_s|\leqslant c_2$.

Таблица 1

Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах $|[\cdot]|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки при различных значениях $\alpha = 0.01, 0.5, 0.99$, $x_0 = 0.1, 0.5, 0.9$ на $t = 1$, когда $h = \tau$.

x_0	α	h	$\max\limits_{0<j<m} \left|\left[z^j\right]\right|_0$	ПС в $|[\cdot]|_0$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0.1	0.01	$\frac{1}{10}$	0.002461288		0.004945295	
		$\frac{1}{20}$	0.000709828	1.7939	0.001370038	1.8518
		$\frac{1}{40}$	0.000189682	1.9039	0.000358807	1.9329
		$\frac{1}{80}$	0.000048964	1.9538	0.000091710	1.9680
		$\frac{1}{160}$	0.000012434	1.9774	0.000023177	1.9844
	0.50	$\frac{1}{10}$	0.002410158		0.004896138	
		$\frac{1}{20}$	0.000695374	1.7933	0.001357438	1.8508
		$\frac{1}{40}$	0.000185902	1.9032	0.000355618	1.9325
		$\frac{1}{80}$	0.000048000	1.9534	0.000090909	1.9678
		$\frac{1}{160}$	0.000012191	1.9772	0.000022976	1.9843
	0.99	$\frac{1}{10}$	0.002348582		0.004835296	
		$\frac{1}{20}$	0.000677813	1.7928	0.001341856	1.8494
		$\frac{1}{40}$	0.000181299	1.9025	0.000351677	1.9319
		$\frac{1}{80}$	0.000046825	1.9530	0.000089918	1.9676
		$\frac{1}{160}$	0.000011895	1.9770	0.000022727	1.9842
0.5	0.01	$\frac{1}{10}$	0.005818396		0.011982345	
		$\frac{1}{20}$	0.001450348	2.0042	0.003006671	1.9947
		$\frac{1}{40}$	0.000358978	2.0144	0.000748225	2.0066
		$\frac{1}{80}$	0.000088729	2.0164	0.000185823	2.0095
		$\frac{1}{160}$	0.000021955	2.0149	0.000046162	2.0091
	0.50	$\frac{1}{10}$	0.005817273		0.011985970	
		$\frac{1}{20}$	0.001450169	2.0041	0.003007649	1.9946
		$\frac{1}{40}$	0.000358970	2.0143	0.000748501	2.0066
		$\frac{1}{80}$	0.000088736	2.0163	0.000185900	2.0095
		$\frac{1}{160}$	0.000021958	2.0148	0.000046184	2.0091
	0.99	$\frac{1}{10}$	0.005795148		0.011971269	
		$\frac{1}{20}$	0.001444472	2.0043	0.003003788	1.9947
		$\frac{1}{40}$	0.000357554	2.0143	0.000747532	2.0066
		$\frac{1}{80}$	0.000088388	2.0162	0.000185661	2.0095
		$\frac{1}{160}$	0.000021873	2.0147	0.000046125	2.0091
0.9	0.01	$\frac{1}{10}$	0.007597214		0.015083738	
		$\frac{1}{20}$	0.001892530	2.0052	0.003776815	1.9978
		$\frac{1}{40}$	0.000472130	2.0031	0.000943657	2.0008
		$\frac{1}{80}$	0.000117779	2.0031	0.000235615	2.0018
		$\frac{1}{160}$	0.000029375	2.0034	0.000058814	2.0022
	0.50	$\frac{1}{10}$	0.007645309		0.015135554	
		$\frac{1}{20}$	0.001904477	2.0052	0.003789580	1.9978
		$\frac{1}{40}$	0.000475108	2.0031	0.000946830	2.0009
		$\frac{1}{80}$	0.000118524	2.0031	0.000236407	2.0018
		$\frac{1}{160}$	0.000029562	2.0034	0.000059012	2.0022
	0.99	$\frac{1}{10}$	0.007667485		0.015167028	
		$\frac{1}{20}$	0.001909692	2.0054	0.003797057	1.9980
		$\frac{1}{40}$	0.000476377	2.0032	0.000948656	2.0009
		$\frac{1}{80}$	0.000118837	2.0031	0.000236860	2.0019
		$\frac{1}{160}$	0.000029640	2.0034	0.000059125	2.0022

Заключение

В данной работе исследуется нелокальная краевая задача в прямоугольной области для одномерного нагруженного уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной на границе теплоемкостью. Основной результат работы заключается в доказательстве априорных оценок для решения задачи как в дифференциальном, так и в разностном виде. Полученные неравенства означают устойчивость решения относительно входных данных. В силу линейности рассматриваемых задач эти неравенства позволяют утверждать сходимость приближенного решения к точному (в предположении существования последнего в классе достаточно гладких функций) со скоростью $O(h^2+\tau^2)$. Проведены численные эксперименты, иллюстрирующие полученные теоретические результаты.

Результаты численного эксперимента

Коэффициенты уравнения (1) подбираются следующим образом:

$$k(x,t)=e^x,\quad r(x,t)=(x-0.5)e^x,\quad q(x,t)=e^{x-t},$$

$$f(x,t)=e^x\,\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}-2t^3e^{2x+t}-(x-0.5)e^{2x+t}t^3+e^{x_0+x-t}t^3,\quad l=1,\ T=1.$$

$$\beta_{11}=0.5e^t,\quad \beta_{12}=e^t,\quad \beta_{21}=e^{l+t},\quad \beta_{22}=e^{l+t},$$

$$\mu_1=-0.5t^3e^t+e^t\,\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)},\quad \mu_2=2t^3e^{2l+t}+e^{2l+t}\,\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}.$$

Точным решением задачи (1)–(4) является функция

$$u(x,t)=t^3e^x.$$

В таблице 1 при различных значениях параметров $\alpha=0.01,0.5,0.99$, $x_0=0.1,0.5,0.9$ и уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z=y-u$) и порядок сходимости (ПС) в нормах $|[\,\cdot\,]|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar w_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar w_{h\tau})}=\max_{(x_i,t_j)\in\bar w_{h\tau}}|y|$, когда $h=\tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$. Порядок сходимости определяется по следующей формуле:

$$\text{ПС}=\log_{\frac{h_1}{h_2}}\frac{|[z_1]|_0}{|[z_2]|_0},$$

где z_i — это погрешность, соответствующая h_i.

Литература

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—616 с.
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1977.—735 с.
3. *Самарский А. А.* Об одной задаче распространения тепла: Избр. тр. А. А. Самарского.—М.: МАКС Пресс, 2003.—531 с.
4. *Нерпин С. В., Чудновский А. Ф.* Энерго- и массообмен в системе растение–почва–воздух.—Л.: Гидрометеоиздат, 1975.—358 с.
5. *Нигматуллин Р. Р.* Особенности релаксации системы с «остаточной» памятью // Физика твердого тела.—1985.—Т. 27, № 5.—С. 1583–1585.

6. *Тарасов В. Е.* Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка, М.–Ижевск: Ижев. ин-т компьютер. исслед., 2011.—568 с.
7. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит.—2003.—272 с.
8. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных.—Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008.—512 с.
9. *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Nature.—N. Y.: W. H. Freeman and Company, 1982.—460 p.
10. *Бегли Р. Л., Торвик П. Дж.* Дифференциальное исчисление, основанное на производных дробного порядка — новый подход к расчету конструкций с вязкоупругим демпфированием // Аэрокосмическая техника.—1984.—Т. 2, № 2.—С. 84–93.
11. *Алиханов А. А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Диф. уравнения.—2010.—Т. 46, № 5.—С. 658—664.
12. *Alikhanov A. A.* A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. Comput. Phys.—2015.—Vol. 280.—P. 424–438. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.09.031.
13. *Бештоков М. Х.* К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто // Изв. вузов. Математика.—2018.—№ 10.—С. 3–16.
14. *Бештоков М. Х.* Краевые задачи для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто // Диф. уравнения.—2019.—Т. 55, № 7.—С. 919–928. DOI: 10.1134/S0374064119070021.
15. *Бештоков М. Х., Водахова В. А.* Нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки.—2019.—Т. 29, № 4.—С. 459–482. DOI: 10.20537/vm190401.
16. *Бештоков М. Х., Эржибова Ф. А.* К краевым задачам для интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка // Мат. тр.—2020.—Т. 23, № 1.—С. 16–36. DOI: 10.33048/mattrudy.2020.23.102.
17. *Beshtokov M. Kh., Khudalov M. Z.* Difference methods of the solution of local and non-local boundary value problems for loaded equation of thermal conductivity of fractional order // Stability, Control and Differential Games.—2020.—P. 187–201.—(Lect. Notes Control Inform. Sci. — Proc.).—DOI: 10.1007/978-3-030-42831-0_17.
18. *Худалов М. З.* Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа // Владикавк. мат. журн.—2002.—Т. 4, № 4.—С. 59–64.
19. *Алиханов А. А., Березгов А. М., Шхануков-Лафишев М. Х.* Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.—2008.—Т. 48, № 9.—С. 1619–1628.

Статья поступила 10 июля 2020 г.

Бештоков Мурат Хамидбиевич
Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов
РОССИЯ, 360000, Нальчик, Шортанова, 89 А
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211

Бештокова Зарьяна Владимировна
Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
младший научный сотрудник отдела вычислительных методов
РОССИЯ, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: zarabaeva@yandex.ru

Худалов Марат Захарович
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры прикладной математики и информатики
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: hmz@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 4, P. 45–57

FINITE-DIFFERENCE METHOD FOR SOLVING OF A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LOADED THERMAL CONDUCTIVITY EQUATION OF THE FRACTIONAL ORDER

Beshtokov, M. Kh.[1], Beshtokova, Z. V.[1] and Khudalov, M. Z.[2]

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanova St., Nalchik 360000, Russia;
[2] North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
44–46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru, zarabaeva@yandex.ru, hmz@mail.ru

Abstract. We study a nonlocal boundary value problem in a rectangular area for a one-dimensional in a spatial variable of the loaded heat fractional conductivity equation with a heat capacity concentrated at the boundary. The problem is considered as a mathematical model, arising, in particular, in the practice of regulating the salt regime of soils with a fractal organization, when the lamination of the upper layer is achieved by drain layer of the water from the surface of an area flooded for some time. The main research method is the method of energy inequalities. An a priori estimate is obtained by the assumption of the existence of a regular solution to the differential problem, which implies the uniqueness and continuous dependence of the solution from the input data of the problem. A difference scheme of the second order of approximation by the grid parameters is put on a uniform grid by correspondence with the differential problem. Under the assumptions of the existence of a regular solution to the differential problem, an a priori estimate is obtained, which implies the uniqueness and continuous dependence of the solution on the right side and the initial data. By virtue of the linearity of the problem under consideration, the received inequality allows us to assert the convergence of the approximate solution to the exact one (assuming that the latter exists in the class of sufficiently smooth functions) with a rate equal to the order of the approximation error. The numerical experiments are carried out to illustrate the recieved theoretical results.

Key words: heat equation, fractional Caputo derivative, lumped heat capacity, difference schemes, stability, convergence.

Mathematical Subject Classification (2010): 65N06, 65N12.

For citation: *Beshtokov, M. Kh., Beshtokova, Z. V. and Khudalov, M. Z.* Finite-Difference Method for Solving of a Nonlocal Boundary Value Problem for a Loaded Thermal Conductivity Equation of the Fractional Order, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 45–57 (in Russian). DOI: 10.46698/p2286-5792-9411-x.

References

1. *Samarsky, A. A. Teoriya raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1983, 616 p. (in Russian).
2. *Tikhonov, A. N. and Samarsky, A. A. Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Moscow, Nauka, 1977, 735 p. (in Russian).
3. *Samarsky, A. A. Ob odnoy zadache rasprostraneniya tepla: Izbrannye trudy A. A. Samarskogo* [On One Problem of Heat Propagation: Selected Works A. A. Samarsky], Moscow, MAKS Press, 2003, 531 p. (in Russian).
4. *Nerpin, S. V. and Chudnovsky, A. F. Energo- i massoobmen v sisteme rastenie–pochva–vozdukh* [Energy- and mass transfer in a system plant–soil–air], Leningrad, Gidrometeoizdat, 1975, 358 p. (in Russian).
5. *Nigmatullin, P. P.* Features of Relaxation of a System with "Residual" Memory, *Fizika Tverdogo Tela* [Physics of the Solid State], 1985, vol. 27, no. 5, pp. 1583–1585 (in Russian).
6. *Tarasov, V. E. Modeli teoreticheskoy fiziki s integro-differentsirovaniem drobnogo poryadka* [Models of Theoretical Physics with Fractional Order Integro-Differentiation], Moscow, Izhevsk, Izhevsk Institute for Computer Research, 2011, 568 p. (in Russian).

7. *Nakhushev, A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and its Application], Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 p. (in Russian).
8. *Uchaykin, V. V. Metod drobnykh proizvodnykh* [The Method of Fractional Derivatives], Ulyanovsk, Artichoke Publ., 2008, 512 p. (in Russian).
9. *Mandelbrot, B. B. The Fractal Geometry of Nature*, New York, W. H. Freeman and Company, 1982, 460 p.
10. *Begli, R. L. and Torvik, P. J.* Differential Calculus Based On Fractional Order Derivatives: A New Approach for Calculating Construction with Viscoelastic Damping, *Aerokosmicheskaya Tekhnika*, 1984, vol. 2, no. 2, pp. 84–93 (in Russian).
11. *Alikhanov, A. A.* A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 660–666. DOI: 10.1134/S0012266110050058.
12. *Alikhanov A. A.* A New Difference Scheme for the Time Fractional Diffusion Equation, *Journal of Computational Physics*, 2015, vol. 280, pp. 424–438. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.09.031.
13. *Beshtokov, M. Kh.* To Boundary Value Problems for Degenerating Pseudoparabolic Equations with Gerasimov–Caputo Fractional Derivative, *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, pp. 1–14. DOI: 10.3103/S1066369X18100018.
14. *Beshtokov, M. Kh.* Boundary Value Problems for a Pseudoparabolic Equation with a Fractional Caputo Derivative, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 7, pp. 884–893, DOI: 10.1134/S0012266119070024.
15. *Beshtokov, M. Kh. and Vodakhova, V. A.* Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Convection-Diffusion Equations, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 459–482 (in Russian). DOI: 10.20537/vm190401.
16. *Beshtokov, M. Kh. and Erzhibova, F. A.* On Boundary Value Problems For Integro-Differential Equations of Fractional Order, *Matematicheskie Trudy*, 2020, vol. 23, no. 1, pp. 16–36 (in Russian). DOI: 10.33048/mattrudy.2020.23.102.
17. *Beshtokov, M. Kh. and Khudalov, M. Z.* Difference Methods of the Solution of Local and Non-Local Boundary Value Problems for Loaded Equation of Thermal Conductivity of Fractional Order, *Stability, Control and Differential Games*, Lecture Notes in Control and Information Sciences — Proceedings, 2020, pp. 187–201. DOI: 10.1007/978-3-030-42831-0_17.
18. *Khudalov, M. Z.* Nonlocal Boundary Value Problem for a Loaded Parabolic Equation, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2002, vol. 4, no. 4, pp. 59–64 (in Russian).
19. *Alikhanov, A. A., Berezgov, A. M. and Shkhanukov-Lafishev, M. X.* Boundary Value Problems for Certain Classes of Loaded Differential Equations and Solving them by Finite Difference Methods, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 9. pp. 1581–1590. DOI: 10.1134/S096554250809008X.

Received July 10, 2020

MURAT KH. BESHTOKOV
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanova St., Nalchik 360000, Russia,
Leading Researcher Computational Methods Department
E-mail: `beshtokov-murat@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211

ZARYANA V. BESHTOKOVA
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanova St., Nalchik 360000, Russia,
Junior Researcher Computational Methods Department
E-mail: `zarabaeva@yandex.ru`

MARAT Z. KHUDALOV
North Ossetian State University,
44–46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Associate Professor of the Department
of Applied Mathematics and Informatics
E-mail: `hmz@mail.ru`

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 4, С. 58–67

УДК 517.958:531.332
DOI 10.46698/s8185-4696-7282-p

РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ КАРЛЕМАНА ЧЕРЕЗ РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕНЛЕВЕ

С. А. Духновский[1]

[1] Национальный исследовательский Московский
государственный строительный университет,
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26

E-mail: `sergeidukhnvskijj@rambler.ru`

Посвящается 75-летию Семёна Самсоновича Кутателадзе

Аннотация. Рассматривается одномерная дискретная кинетическая система уравнений Карлемана. Система Карлемана является кинетическим уравнением Больцмана и для нее не сохраняется импульс и энергия. Данная система описывает одноатомный разреженный газ, состоящий из двух групп частиц. Данные группы частиц двигаются вдоль прямой, в противоположных направлениях с единичной скоростью. Взаимодействие частиц происходит внутри одной группы, т. е. сами с собой, меняя направление движения. В последнее время особое внимание уделяется построению точных решений неинтегрируемых уравнений в частных производных с использованием усеченного ряда Пенлеве. Применяя разложение Пенлеве к неинтегрируемым уравнениям в частных производных, получают условия в резонансе, которые должны выполняться. Решение системы ищется с помощью усеченного разложения Пенлеве. Данная система не удовлетворяет тесту Пенлеве. Это приводит к некоторым ограничениям на многообразие особенностей, одним из которых является двумерное уравнение Бейтмена. Зная неявное решение уравнения Бейтмена, можно найти новые частные решения самой системы Карлемана. Также отдельно решение строится с помощью анзаца масштабирования, которое позволяет свести задачу к нахождению решений соответствующего уравнения Риккати.

Ключевые слова: система уравнений в частных производных Карлемана, разложение Пенлеве, уравнение Бейтмена.

Mathematical Subject Classification (2010): 35A24, 35Q20, 35C99.

Образец цитирования: *Духновский С. А.* Решения системы Карлемана через разложение Пенлеве // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 4.—С. 58–67. DOI: 10.46698/s8185-4696-7282-p.

1. Введение

Основными дискретными кинетическими системами, описывающими различные процессы в газе между группами частиц, являются модели типа Карлемана, Годунова — Султангазина, Бродуэлла [1, 2, 3–5]. Исследование асимптотической устойчивости состояний равновесия кинетических систем в весовом пространстве $L_{2,\gamma}$ для периодических начальных данных изучалось в работах [3–6]. Здесь решение искалось для малых возмущений состояния равновесия. Более того, доказана экспоненциальная скорость стабилизации к состоянию равновесия. Литература, посвященная нахождению решений в виде солитонов, приведена в [7–9], стационарных решений в [10, 11]. В статье [1] были найдены решения с помощью усеченных рядов Пенлеве для моделей Годунова — Султангазина и Бродуэлла. В данной работе будут построены новые решения аналогичным способом для одномерной системы Карлемана.

2. Решение системы Карлемана

Рассмотрим одномерную систему уравнений Карлемана [2, 12–14]:

$$\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(w^2 - u^2), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{1}$$

$$\partial_t w - \partial_x w = -\frac{1}{\varepsilon}(w^2 - u^2). \tag{2}$$

Проверяем на тест Пенлеве [15]. Ищем решение в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{\varphi^p(x,t)} \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x,t)\varphi^j(x,t),$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\varphi^\beta(x,t)} \sum_{j=0}^{\infty} w_j(x,t)\varphi^j(x,t).$$

Для $j = 0$ имеем

$$u(x,t) = u_0(x,t)\varphi^{-p}(x,t), \tag{3}$$

$$w(x,t) = w_0(x,t)\varphi^{-\beta}(x,t). \tag{4}$$

Подставляем (3)–(4) в систему уравнений (1)–(2):

$$u_{0,t}\varphi^{-p} - p\varphi^{-p-1}\varphi_t u_0 + u_{0,x}\varphi^{-p} - p\varphi^{-p-1}\varphi_x u_0 = \frac{1}{\varepsilon}\big(w_0^2\varphi^{-2\beta} - u_0^2\varphi^{-2p}\big),$$

$$w_{0,t}\varphi^{-\beta} - \beta\varphi^{-\beta-1}\varphi_t u_0 - w_{0,x}\varphi^{-\beta} + \beta\varphi^{-\beta-1}\varphi_x w_0 = -\frac{1}{\varepsilon}\big(w_0^2\varphi^{-2\beta} - u_0^2\varphi^{-2p}\big).$$

Отсюда находим, что $p = 1$, $\beta = 1$. В этом случае имеем

$$-\varphi_t u_0 - \varphi_x u_0 = \frac{1}{\varepsilon}\big(w_0^2 - u_0^2\big), \quad -\varphi_t w_0 + \varphi_x w_0 = -\frac{1}{\varepsilon}\big(w_0^2 - u_0^2\big).$$

Отсюда

$$u_0(x,t) = -\varepsilon\frac{(\varphi_t - \varphi_x)^2(\varphi_t + \varphi_x)}{4\varphi_t\varphi_x}, \quad w_0(x,t) = \varepsilon\frac{(\varphi_t - \varphi_x)(\varphi_t + \varphi_x)^2}{4\varphi_t\varphi_x}. \tag{5}$$

Далее находим резонансы. Подставляем соотношения

$$u(x,t) = u_0\varphi^{-1} + u_j\varphi^{j-1}, \quad w(x,t) = w_0\varphi^{-1} + w_j\varphi^{j-1}$$

в систему (1)–(2), в итоге имеем

$$\mathbf{Q}(j)\begin{pmatrix} u_j \\ w_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (j-1)(\varphi_t + \varphi_x) + \frac{2}{\varepsilon}u_0 & -\frac{2}{\varepsilon}w_0 \\ -\frac{2}{\varepsilon}u_0 & (j-1)(\varphi_t - \varphi_x) + \frac{2}{\varepsilon}w_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_j \\ w_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{j-1} \\ g_{j-1} \end{pmatrix},$$

где f_{j-1}, g_{j-1} зависят от функций $u_0, w_0, \ldots, u_{j-1}, w_{j-1}, \varphi$. Для произвольности функций u_j, w_j необходимо, чтобы определитель матрицы равнялся нулю. Тогда

$$\det\mathbf{Q}(j) = (j+1)(j-1)(\varphi_t + \varphi_x)(\varphi_t - \varphi_x) = 0.$$

Отсюда получаем два резонанса $j=-1,1$. Далее исходя из того, что $j=1$ — резонанс, то ищем решение в виде

$$u(x,t)=\frac{u_0(x,t)}{\varphi}+u_1(x,t), \tag{6}$$

$$w(x,t)=\frac{w_0(x,t)}{\varphi}+w_1(x,t). \tag{7}$$

Подставляем (6)–(7) в (1)–(2):

$$u_{0,t}\varphi^{-1}-\varphi^{-2}\varphi_t u_0+u_{1,t}+u_{0,x}\varphi^{-1}-\varphi^{-2}\varphi_x u_0+u_{1,x}=\frac{1}{\varepsilon}I(u_0,w_0,u_1,w_1),$$

имеет такой же вид

$$w_{0,t}\varphi^{-1}-\varphi^{-2}\varphi_t w_0+w_{1,t}-w_{0,x}\varphi^{-1}+\varphi^{-2}\varphi_x w_0-w_{1,x}=-\frac{1}{\varepsilon}I(u_0,w_0,u_1,w_1),$$

где

$$I(u_0,w_0,u_1,w_1)=\frac{w_0^2}{\varphi^2}-\frac{u_0^2}{\varphi^2}+2\frac{w_0}{\varphi}w_1-2\frac{u_0}{\varphi}u_1+w_1^2-u_1^2.$$

Теперь группируем слагаемые при одинаковых степенях φ. Получаем для них уравнения

$$\begin{gathered}\varphi^{-1}\Big(u_{0,t}+u_{0,x}-\frac{2}{\varepsilon}w_0w_1+\frac{2}{\varepsilon}u_0u_1\Big)+\varphi^0\Big(u_{1,t}+u_{1,x}-\frac{1}{\varepsilon}(w_1^2-u_1^2)\Big)\\+\varphi^{-2}\Big(-\varphi_t u_0-\varphi_x u_0-\frac{1}{\varepsilon}(w_0^2-u_0^2)\Big)=0,\\ \varphi^{-1}\Big(w_{0,t}-w_{0,x}+\frac{2}{\varepsilon}w_0w_1-\frac{2}{\varepsilon}u_0u_1\Big)+\varphi^0\Big(w_{1,t}-w_{1,x}+\frac{1}{\varepsilon}(w_1^2-u_1^2)\Big)\\+\varphi^{-2}\Big(-\varphi_t w_0+\varphi_x w_0+\frac{1}{\varepsilon}(w_0^2-u_0^2)\Big)=0.\end{gathered}$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях φ, получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}-\varphi_t u_0-\varphi_x u_0-\frac{1}{\varepsilon}\big(w_0^2-u_0^2\big)=0,&\quad -\varphi_t w_0+\varphi_x w_0+\frac{1}{\varepsilon}\big(w_0^2-u_0^2\big)=0,\\ u_{0,t}+u_{0,x}-\frac{2}{\varepsilon}(w_0w_1-u_0u_1)=0,&\quad w_{0,t}-w_{0,x}+\frac{2}{\varepsilon}(w_0w_1-u_0u_1)=0,\\ u_{1,t}+u_{1,x}-\frac{1}{\varepsilon}\big(w_1^2-u_1^2\big)=0,&\quad w_{1,t}-w_{1,x}+\frac{1}{\varepsilon}\big(w_1^2-u_1^2\big)=0.\end{aligned}$$

Первые уравнения системы дает нам уже известные ведущие члены разложения, которые определяются по формуле (5).

Нас интересует выполнение уравнений при резонансе $j=1$:

$$u_{0,t}+u_{0,x}=\frac{2}{\varepsilon}(w_0w_1-u_0u_1),\quad w_{0,t}-w_{0,x}=-\frac{2}{\varepsilon}(w_0w_1-u_0u_1).$$

Складываем уравнения

$$u_{0,t}+u_{0,x}=\frac{2}{\varepsilon}(w_0w_1-u_0u_1), \tag{8}$$

$$u_{0,t}+u_{0,x}=-(w_{0,t}-w_{0,x}). \tag{9}$$

Очевидно, что уравнение (9) не удовлетворяется. Подставляя найденные главные члены разложения (5) в (9), получаем:

$$\varphi_{tt}\varphi_x^2 - 2\varphi_x\varphi_t\varphi_{xt} + \varphi_t^2\varphi_{xt} = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) представляет собой двумерное уравнение Бейтмена [16]. Тест Пенлеве будет выполнен только в том случае, если φ удовлетворяет уравнению (10). Это является ограничением на данную функцию. Поскольку $u_1 = w_1 = 0$ являются частным решением системы (1)–(2), получим уравнение для нахождения функции φ:

$$\begin{aligned} -\varphi_x^3(\varphi_{tt} + \varphi_{xt}) + \varphi_t^2\varphi_x(-2\varphi_{tt} - \varphi_{xt} + \varphi_{xx}) + \varphi_t^3(\varphi_{xt} + \varphi_{xx}) \\ + \varphi_t\varphi_x^2(-\varphi_{tt} + \varphi_{xt} + 2\varphi_{xx}) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Общее решение двумерного уравнения Бейтмена (10) записывается в виде

$$f(\varphi) = x + g(\varphi)t, \tag{12}$$

где f, g являются гладкими произвольными функциями.

Лемма. *Для двухскоростной модели (1)–(2) усеченное разложение Пенлеве*

$$u(x,t) = \frac{u_0(x,t)}{\varphi}, \quad w(x,t) = \frac{w_0(x,t)}{\varphi}, \tag{13}$$

где u_0, w_0 заданы формулами (5), дает условия на функцию φ (10) и (11) со следующими решениями

$$\varphi(x,t) = \frac{x + k_0t - c_2}{c_1},$$

где $k_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$, $c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_2 \in \mathbb{R}$;

$$\varphi(x,t) = F(x \pm t),$$

F — произвольная обратимая функция;

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{2(1 - (\frac{x-c_2}{c_1-t})^2)} + B\right),$$

где $\{A, c_1\} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\{c_2, B\} \in \mathbb{R}$.

$\triangleleft$ Диффренцируем неявное решение (12) и подставляем в (11):

$$\frac{-\varepsilon(g^2-1)\Big(\big(1+3g^2\big)\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial g}{\partial\varphi} - \big(t+3tg^2\big)\Big(\frac{\partial g}{\partial\varphi}\Big)^2 - g(g^2-1)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} - t\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\Big)\Big)}{4g^2\Big(\frac{\partial f}{\partial\varphi} - t\frac{\partial g}{\partial\varphi}\Big)^3} = 0.$$

Отсюда собираем слагаемые при одинаковых степенях при t:

$$\big(1+3g^2\big)\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial g}{\partial\varphi} - g\big(g^2-1\big)\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} = 0,$$

$$-\big(1+3g^2\big)\left(\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)^2 + g\big(g^2-1\big)\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Случай 1. Рассмотрим при $g = \pm 1$. Тогда

$$\varphi_t = \pm \varphi_x.$$

Отсюда согласно (12) получаем $\varphi(x,t) = F(x \pm t)$, где F – обратимая функция. Решение системы Карлемана при $g = 1$ имеет вид

$$u(x,t) = 0, \quad w(x,t) = 0.$$

Система (1)–(2) при $g = -1$ также имеет нулевое решение.

Случай 2. Пусть $g = k_0$, $k_0 \notin \{0, \pm 1\}$. Тогда получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0 \Rightarrow f(\varphi) = c_1 \varphi + c_2.$$

$$c_1 \varphi + c_2 = x + k_0 t \Rightarrow \varphi(x,t) = \frac{x + k_0 t - c_2}{c_1}.$$

Получаем решение системы (1)–(2) в следующем виде

$$u(x,t) = -\varepsilon \frac{(k_0 - 1)^2 (k_0 + 1)}{4 k_0 (x + k_0 t - c_2)}, \quad w(x,t) = \varepsilon \frac{(k_0 - 1)(k_0 + 1)^2}{4 k_0 (x + k_0 t - c_2)}.$$

Случай 3. Пусть $g'(\varphi) \neq 0$. Тогда систему можно переписать в виде

$$\frac{f''}{f'} = \frac{g''}{g'}, \tag{14}$$

$$-\bigl(1 + 3g^2\bigr) \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi} \right)^2 + g\bigl(g^2 - 1\bigr) \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{15}$$

Отсюда интегрируя (14), имеем

$$f(\varphi) = c_1 g(\varphi) + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ c_1 \neq 0.$$

Используя решение уравнения Бейтмена (12), можно выразить функцию g:

$$g(x,t) = \frac{x - c_2}{c_1 - t}. \tag{16}$$

Более того, из уравнения (15) получаем, что

$$\frac{dg}{d\varphi} = A \frac{\bigl(1 - g^2\bigr)^2}{g}, \quad A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{17}$$

Решение (17) с учетом (16) записывается в виде

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{2\bigl(1 - \bigl(\frac{x - c_2}{c_1 - t}\bigr)^2\bigr)} + B \right), \tag{18}$$

где $B \in \mathbb{R}$ — постоянная интегрирования. Таким образом, решение системы Карлемана (1)–(2) с помощью (5), (13) и (18) имеет вид

$$u(x,t) = -\frac{(c_1 + c_2 - t - x)\varepsilon}{G(x,t)}, \quad w(x,t) = -\frac{(c_1 - c_2 - t + x)\varepsilon}{G(x,t)},$$

где

$$G(x,t) = 2\Big((1+2B)c_1^2 + t^2 - 2c_1(t+2Bt) - 2B(c_2^2 - t^2 - 2c_2x + x^2)\Big). \rhd$$

Предложение. *Решение двухскоростной модели может быть представлено в виде*

$$u(x,t) = u_0 H_1(\varphi), \quad w(x,t) = w_0 H_2(\varphi),$$

где

$$H_1(\varphi) = H_2(\varphi) + b, \quad b \in \mathbb{R},$$

а H_2 удовлетворяет уравнению Риккати

$$\frac{dH_2}{d\varphi} = -H_2^2 + \frac{b(g-1)^2}{2g} H_2 + \frac{b^2(g-1)^2}{4g}. \tag{19}$$

Здесь u_0, w_0 заданы в (5), *функция φ удовлетворяет уравнениям* (10) *и* (11).

$\lhd$ Ищем решение в следующем виде

$$u(x,t) = \frac{u_0}{\varphi} f_1(\varphi), \quad w(x,t) = \frac{w_0}{\varphi} f_2(\varphi). \tag{20}$$

После подстановки (20) в (1)–(2), получим условия для нахождения функций f_1, f_2:

$$\varphi_t\varphi_x(4\varphi f_1' - 4f_1 + 2f_1^2 + 2f_2^2) - \varphi_t^2(f_1^2 - f_2^2) - \varphi_x^2(f_1^2 - f_2^2) = 0,$$

$$\varphi_t\varphi_x(4\varphi f_2' - 4f_2 + 2f_1^2 + 2f_2^2) - \varphi_t^2(f_1^2 - f_2^2) - \varphi_x^2(f_1^2 - f_2^2) = 0.$$

Сделаем подстановку $f_i(\varphi) = H_i(\varphi)\varphi$, $i = 1, 2:$

$$\varphi_t\varphi_x(4H_1' + 2H_1^2 + 2H_2^2) - \varphi_t^2(H_1^2 - H_2^2) - \varphi_x^2(H_1^2 - H_2^2) = 0,$$

$$\varphi_t\varphi_x(4H_2' + 2H_1^2 + 2H_2^2) - \varphi_t^2(H_1^2 - H_2^2) - \varphi_x^2(H_1^2 - H_2^2) = 0.$$

Вычитаем одно из другого

$$4\varphi_t\varphi_x(H_1' - H_2') = 0, \tag{21}$$
$$\varphi_t\varphi_x(4H_2' + 2H_1^2 + 2H_2^2) - \varphi_t^2(H_1^2 - H_2^2) - \varphi_x^2(H_1^2 - H_2^2) = 0. \tag{22}$$

Из первого уравнения (21) следует, что

$$H_1 = H_2 + b, \quad b \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Подставляем (23) в (22). После некоторых преобразований получим уравнение Риккати

$$\frac{dH_2}{d\varphi} = -H_2^2 + \frac{-4gb + 2g^2b + 2b}{4g} H_2 + \frac{-2gb^2 + g^2b^2 + b^2}{4g}. \rhd$$

Здесь воспользовались, что

$$\frac{\varphi_t}{\varphi_x} = g(\varphi).$$

Рассмотрим примеры, когда уравнение Риккати дает различные решения для системы Карлемана.

Пример 1. Пусть $g = 3$, $b = 1$, $\varphi = x + 3t$ при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. В этом случае имеем уравнение Риккати
$$\frac{dH_2}{d\varphi} = -H_2^2 + \frac{2}{3}H_2 + \frac{1}{3},$$
которое имеет решение
$$H_2(\varphi) = \frac{3e^{\frac{4\varphi}{3}} - e^{4A}}{3\Big(e^{\frac{4\varphi}{3}} + e^{4A}\Big)},$$
где A — постоянная интегрирования. Окончательно получаем решение нашей системы (1)–(2):
$$u(x,t) = u_0(H_2(\varphi)+1) = -\frac{4\varepsilon}{3}\left(\frac{3e^{\frac{4(x+3t)}{3}} - e^{4A}}{3\Big(e^{\frac{4(x+3t)}{3}} + e^{4A}\Big)} + 1\right),$$
$$w(x,t) = w_0 H_2(\varphi) = \frac{8\varepsilon}{9}\frac{\Big(3e^{\frac{4(x+3t)}{3}} - e^{4A}\Big)}{e^{\frac{4(x+3t)}{3}} + e^{4A}}.$$

Пример 2. При $g(\varphi) = 1$ уравнение (19) принимает вид
$$\frac{dH_2}{d\varphi} = -H_2^2.$$
Отсюда
$$H_2(\varphi) = \frac{1}{F(x+t) + C_1}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$
Решение системы (1)–(2), также как и выше, имеет вид
$$u(x,t) = 0, \quad w(x,t) = 0.$$
При $g(\varphi) = -1$ получам нулевое решение.

Пример 3. Рассмотрим оставшийся случай при $g'(\varphi) \neq 0$. Сделаем подстановку $H_2(\varphi) = \widehat{H}_2(g)$, используя (18). Также воспользуемся тем, что
$$\frac{dH_2}{d\varphi} = \frac{d\widehat{H}_2}{dg}\frac{dg}{d\varphi}.$$
Тогда уравнение Риккати перепишется в виде
$$\frac{d\widehat{H}_2}{dg} = -\frac{g}{A(g-1)^2(g+1)^2}\widehat{H}_2^2 + \frac{b}{2A(g+1)^2}\widehat{H}_2 + \frac{b^2}{4A(g+1)^2}.$$
Положим $b = 0$. В этом случае решение имеет вид
$$\widehat{H}_2(g) = -\frac{2A(g^2-1)}{1 + 2A(g^2-1)C_2}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$
Решение системы Карлемана принимает форму
$$u(x,t) = -\frac{\varepsilon}{4A(c_1 - c_2 - t + x)}\widehat{H}_2(g), \quad w(x,t) = -\frac{\varepsilon}{4A(c_1 + c_2 - t - x)}\widehat{H}_2(g).$$

Литература

1. *Линдблом О., Эйлер Н.* Решение уравнений Больцмана для дискретных скоростей при помощи уравнений Бейтмена и Риккати // Теорет. и мат. физика.—2002.—Т. 131, № 2.—С. 522–526. DOI: 10.4213/tmf322.
2. *Годунов С. К., Султангазин У. М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи мат. наук.—1971.—Т. 26, № 3 (159).—С. 3–51.
3. *Радкевич Е. В.* О поведении на больших временах решений задачи Коши для двумерного дискретного кинетического уравнения // Соврем. математика. Фундам. направления.—2013.—Т. 47.—С. 108–139.
4. *Духновский С. А.* О скорости стабилизации решений задачи Коши для уравнения Карлемана с периодическими начальными данными // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2017.—Т. 21, № 1.—С. 7–41. DOI: 10.14498/vsgtu1529.
5. *Духновский С. А.* Об асимптотической устойчивости состояний равновесия для систем уравнений Карлемана и Годунова — Султангазина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.—2019.—Т. 74, № 6.—С. 55–57.
6. *Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В.* О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова — Султангазина // Соврем. математика. Фундам. направления.—2016.—Т. 60.—С. 23–81.
7. *Cabannes H., Dang Hong Tiem* Exact Solutions for some Discrete Models of the Boltzmann Equation // Complex Systems.—1987.—Vol. 1, № 4.—P. 575–584.
8. *Cornille H.* Exact $(2+1)$-dimensional solutions for two discrete velocity Boltzmann models with four independent densities // J. Phys. A: Math. Gen.—1987.—Vol. 20, № 16.—P. 1063–1067. DOI: 10.1088/0305-4470/20/16/005.
9. *Cornille H.* Exact $(1+1)$-dimensional solutions of discrete planar velocity Boltzmann models // J. Stat. Phys.—1987.—Vol. 48.—С. 789–811. DOI: 10.1007/BF01019697.
10. *Ильин О. В.* Изучение существования решений и устойчивости кинетической системы Карлемана // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2007.—Т. 47, № 12.—С. 2076–2087.
11. *Ильин О. В.* Стационарные решения кинетической модели Бродуэлла // Теорет. и мат. физика.—2012.—Т. 170, № 3.—С. 481–488. DOI: 10.4213/tmf6780.
12. *Карлеман Т.* Математические задачи кинетической теории газов.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960.—120 с.
13. *Platkowski T., Illner R.* Discrete velocity models of the Boltzmann equation: a survey on the mathematical aspects of the theory // SIAM Review.—1988.—Vol. 30, № 2.—P. 213–255. DOI: 10.1137/1030045.
14. *Веденяпин В. В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова.—М.: Физматлит., 2001.—107 с.
15. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painlevé property for partial diferential equation // J. Math. Phys.—1983.—Vol. 24, № 3.—P. 522–526. DOI: 10.1063/1.525721.
16. *Euler N., Lindblom O., Euler M. and Persson L.-E.* The Higher dimensional Bateman equation and Painlevé analysis of nonintegrablee wave equations // Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics.—1997.—Vol. 1.—P. 185–192.

Статья поступила 2 апреля 2020 г.

Духновский Сергей Анатольевич
Национальный исследовательский Московский
государственный строительный университет,
преподаватель
РОССИЯ, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26
E-mail: `sergeidukhnvskijj@rambler.ru`
https://orcid.org/0000-0001-9643-7394

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 4, P. 58–67

SOLUTIONS OF THE CARLEMAN SYSTEM VIA THE PAINLEVÉ EXPANSION

Dukhnovskii, S. A.[1]

[1] Moscow State University of Civil Engineering,
26 Yaroslavskoe Shosse, Moscow 129337, Russia

E-mail: `sergeidukhnvskijj@rambler.ru`

Abstract. The one-dimensional discrete kinetic system of Carleman equations is considered. This system describes a monatomic rarefied gas consisting of two groups of particles. These groups of particles move along a straight line, in opposite directions at a unit speed. Particles interact within one group, i. e. themselves, changing direction. Recently, special attention has been paid to the construction of exact solutions of non-integrable partial differential equations using the truncated Painlevé series. Applying the Painlevé expansion to non-integrable partial differential equations, we obtain the conditions in resonance that must be satisfied. Solution of the system is sought using the truncated Painlevé expansion. This system does not satisfy the Painlevé test. It leads to the singularity manifold constraints, one of which is the Bateman equation. Knowing the implicit solution of the Bateman equation, one can find new particular solutions of the Carleman system. Also, the solution is constructed using the rescaling ansatz, which allows us to reduce the problem to finding solutions to the corresponding Riccati equation.

Key words: system of partial differential equations Carleman, Painlevé expansion, Batemans equation.

Mathematical Subject Classification (2010): 35A24, 35Q20, 35C99.

For citation: *Dukhnovskii, S. A.* Solutions of the Carleman System Via the Painlevé Expansion, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 58–67 (in Russian). DOI: 10.46698/s8185-4696-7282-p.

References

1. *Lindblom, O. and Euler, N.* Solutions of Discrete-Velocity Boltzmann Equations via Bateman and Riccati Equations, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2002, vol. 131, no. 2, pp. 595–608. DOI: 10.1023/A:1015428229008.
2. *Godunov, S. K. and Sultangazin, U. M.* On Discrete Models of the Kinetic Boltzmann Equation, *Russian Mathematical Surveys*, 1971, vol. 26, no. 3, pp. 1–56. DOI: 10.1070/RM1971v026n03ABEH003822.
3. *Radkevich, E. V.* On the Large-Time Behavior of Solutions to the Cauchy Problem for a 2-dimensional Discrete Kinetic Equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 202, no. 5, pp. 735–768. DOI: 10.1007/s10958-014-2074-x.
4. *Dukhnovskii, S. A.* On a Speed of Solutions Stabilization of the Cauchy Problem for the Carleman Equation with Periodic Initial Data, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 7–41. DOI: 10.14498/vsgtu1529 (in Russian).
5. *Dukhnovskii, S. A.* Asymptotic Stability of Equilibrium States for Carleman and Godunov–Sultangazin Systems of Equations, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, vol. 74, no. 7, pp. 246–248. DOI: 10.3103/S0027132219060068.
6. *Vasil'eva, O. A., Dukhnovskii, S. A. and Radkevich, E. A.* On the Nature of Local Equilibrium in the Carleman and Godunov-Sultangazin Equations, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 235, pp. 392–454. DOI: 10.1007/s10958-018-4080-x.
7. *Cabannes, H. and Dang Hong Tiem.* Exact Solutions for some Discrete Models of the Boltzmann Equation, *Complex Systems*, 1987, vol. 1, no. 4, pp. 575–584.
8. *Cornille, H.* Exact (2 + 1)-Dimensional Solutions for Two Discrete Velocity Boltzmann Models with Four Independent densities, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1987, vol. 20, no. 16, pp. 1063–1067. DOI: 10.1088/0305-4470/20/16/005.
9. *Cornille, H.* Exact (1+1)-Dimensional Solutions of Discrete Planar Velocity Boltzmann Models, *Journal of Statistical Physics*, 1987, vol. 48, pp. 789–811. DOI: 10.1007/BF01019697.

10. *Il'in, O. V.* Investigation of the Existence of Solutions and of the Stability of the Carleman Kinetic System, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 12, pp. 1990–2001. DOI: 10.1134/S0965542507120093.
11. *Il'in, O. V.* Stationary Solutions of the Kinetic Broadwell Model, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 170, no. 3, pp. 406–412. DOI: 10.1007/s11232-012-0039-0.
12. *Carleman, T. Problèmes Mathématiques dans la Théorie Cinetique des Gaz*, Publications Scientifiques de l'Institut Mittag–Leffler, Almqvist & Wiksells, Uppsala, 1957, 112 p.
13. *Platkowski, T. and Illner, R.* Discrete Velocity Models of the Boltzmann Equation: a Survey on the Mathematical Aspects of the Theory, *SIAM Review*, 1988, vol. 30, no. 2, pp. 213–255. DOI: 10.1137/1030045.
14. *Vedenyapin, V., Sinitsyn, A. and Dulov, E.* Kinetic Boltzmann, Vlasov and Related Equations, Elsevier, Amsterdam, 2011, xiii+304 p. DOI: 10.1016/C2011-0-00134-5.
15. *Weiss, J., Tabor, M. and Carnevale, G.* The Painlevé Property for Partial Diferential Equation, *Journal of Mathematical Physics*, 1983, vol. 24, no. 3, pp. 522–526. DOI: 10.1063/1.525721.
16. *Euler, N., Lindblom, O., Euler, M. and Persson, L.-E.* The Higher Dimensional Bateman Equation and Painlevé Analysis of Nonintegrablee Wave Equations, *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics*, 1997, vol. 1, pp. 185–192.

Received April 2, 2020

Sergey A. Dukhnovskii
Moscow State University of Civil Engineering,
26 Yaroslavskoe Shosse, Moscow 129337, Russia,
Teacher
E-mail: `sergeidukhnvskijj@rambler.ru`
https://orcid.org/0000-0001-9643-7394

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 4, P. 68–86

УДК 519.642
DOI 10.46698/n8076-2608-1378-r

NEW NUMERICAL METHOD FOR SOLVING NONLINEAR STOCHASTIC INTEGRAL EQUATIONS

R. Zeghdane[1]

[1] Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics,
University of Bordj-Bou-Arreridj,
El-Anasser 34030, Bordj-Bou-Arreridj, Algeria
E-mail: `rebihae@yahoo.fr`

Abstract. The purpose of this paper is to propose the Chebyshev cardinal functions for solving Volterra stochastic integral equations. The method is based on expanding the required approximate solution as the element of Chebyshev cardinal functions. Though the way, a new operational matrix of integration is derived for the mentioned basis functions. More precisely, the unknown solution is expanded in terms of the Chebyshev cardinal functions including undetermined coefficients. By substituting the mentioned expansion in the original problem, the operational matrix reducing the stochastic integral equation to system of algebraic equations. The convergence and error analysis of the etablished method are investigated in Sobolev space. The method is numerically evaluated by solving test problems caught from the literature by which the computational efficiency of the method is demonstrated. From the computational point of view, the solution obtained by this method is in excellent agreement with those obtained by other works and it is efficient to use for different problems.

Key words: Chebyshev cardinal functions, stochastic operational matrix, Brownian motion, Itô integral, collocation method, numerical solution.

Mathematical Subject Classification (2010): 45G10, 65R20.

For citation: *Zeghdane, R.* New Numerical Method for Solving Nonlinear Stochastic Integral Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 68–86. DOI: 10.46698/n8076-2608-1378-r.

1. Introduction

In recent years, the cardinal functions have been finding an important role in numerical analysis [1]. Both mathematicians and physicists have devoted considerable effort to find robust and stable analytical and numerical methods for solving stochastic differential equations, Adomian method [2], implicit Taylor methods [3, 4] and recently the operational matrices ofintegration for orthogonal polynomials Legendre wavelets, Chebyshev polynomials, etc. [5–20]. Several analytical and numerical methods have been proposed for solving various types of stochastic problems with the classical Brownian motion [10, 12, 14, 21–23]. Noting that finding the exact solutions for most of these equations is hard, therefore, we have to apply approximate numerical methods to obtain numerical solutions. This motivates our interest to propose an efficient and accurate computational method for solving stochastic integral equations. In [24] M. H. Heydari & al. used Chebyshev cardinal wavelets and their application in solving nonlinear stochastic differential equations with fractional Brownian motion. M. H. Heydari obtained a new method based on the Chebyshev cardinal functions for variable-order fractional optimal control problems [25]. An effective direct method to determine the numerical solution of Volterra–Fredholm integro-differential equations based on Chebyshev cardinal functions and deterministic operational matrices was also found in [26]. The aim of this paper is to use cardinal Chebyshev functions to solve nonlinear stochastic integral equations:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t k_1(t,s)\big[X(s)\big]^p\,ds + \int_0^t k_2(t,s)\big[X(s)\big]^q\,dB(s), \tag{1}$$

under the initial condition $X(0) = X_0$, where $X(t)$ is an unknown process, the function $k_1(t,s)$, $k_2(t,s)$ are defined on the square $0 \leqslant t,\ s \leqslant 1$, X_0 is a random variable, $B(s)$ is a Brownian motion and $p, q \in \mathbb{N}$. After, we apply cardinal Chebyshev functions to SDE in the following general form

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(s, X(s))\,ds + \int_0^t b(s, X(s))\,dB(s), \tag{2}$$

where $a(s, X(s,\omega))$, $b(s, X(s,\omega))$ for $s,t \in [0,1]$ are known stochastic processes defined on the same filtered probability space $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$ with natural filtration $\mathscr{F}_t$, X_0 is the known random variable with $E|X_0|^2 < +\infty$ and $X(t)$ is unknown stochastic process which should be computed. The second integral in (2) is the Itô integral. Furthermore, all Lebesgue's and Itô integrals in (1) and (2) are well defined. The organization of this paper is as follows. In the second section, we give some preliminaries of stochastic calculus. We introduce Chebyshev cardinal functions and operational matrix of integration in Section 3. In Sections 4 and 5 we describe the numerical procedure of the numerical solution of the proposed problem. Convergence analysis of the method will be investigated in Section 6. To show the effectness of the numerical technique, some numerical examples are illustrated in Section 7. Finally, a brief conclusion is drawn on Section 8.

2. Preliminaries

Definition 1. Let $\mathscr{V} = \mathscr{V}(S,T)$ be the class of functions $g(t,\omega) : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ such that:
1) the function $g(t,\omega)$ be $\mathscr{B} \times \mathscr{F}$ measurable, where $\mathscr{B}$ is the Borel σ-algebra of $\mathbb{R}^+$;
2) the function $g(t,\omega)$ is $\mathscr{F}_t$-adapted (measurable);
3) $E\big[\int_S^T g^2(t,\omega)dt\big] < \infty$.

Lemma 1 (Itô isometry)**.** *For each $X(t,\omega) \in \mathscr{V}(S,T)$, we have*

$$E\left(\int_0^t X(s,\omega)\,dB(s)\right)^2 = E\left(\int_0^t X^2(s,\omega)\,ds\right).$$

Lemma 2 (the Gronwall inequality)**.** *Let α, $\beta : [t_0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ be integrable with*

$$0 \leqslant \alpha(t) \leqslant \beta(t) + L\int_{t_0}^t \alpha(s)\,ds \tag{3}$$

for $t \in [t_0,T]$, where $L > 0$. Then

$$0 \leqslant \alpha(t) \leqslant \beta(t) + L\int_{t_0}^t e^{L(t-s)}\beta(s)\,ds, \quad t \in [t_0,T]. \tag{4}$$

3. Chebyshev Cardinal Functions

In this section, to construct the so called Chebyshev cardinal functions for the set of orthogonal Chebyshev polynomials $T_N(x)$, we will use the Taylor expansion of $T_{N+1}(x)$ in neighborhood the j-th root of $T_{N+1}(x)$, which gives

$$T_{n+1}(x) \simeq T_{N+1}(x_j) + T_{N+1,x}(x - x_j) + o(x - x_j)^2.$$

Since the first term in the right hand side vanishes, we can define the cardinal function of degree N in $[-1, 1]$ as follows [1, 27]

$$C_j(x) = \frac{T_{N+1}(x)}{T_{N+1,x}(x_j)(x - x_j)}, \quad x \in [-1, 1], \tag{5}$$

where the subscript x denotes x differentiation and x_j are the zeros of $T_{N+1}(x)$ defined by

$$x_j = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2N+2}\right), \quad j = 1, \ldots, N+1, \tag{6}$$

with the kronecker property

$$C_j(x_i) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{if } j = i, \\ 0, & \text{if } j \neq i. \end{cases}$$

3.1. Function approximation. To obtain cardinal functions in the interval $[0, 1]$, we change the variable $t = \frac{x+1}{2}$, then the shifted Chebyshev cardinal functions are defined on the interval $[0, 1]$ as follows:

$$C_i^*(t) = C_i(2t - 1), \quad i = 1, \ldots, N+1. \tag{7}$$

Remark 1. The shifted Chebyshev cardinal functions are orthogonal with respect to the weight function $w^*(t) = w(2t - 1)$ on $[0, 1]$, where $w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ and we have

$$\langle C_i^*(t), C_j^*(t) \rangle = \int_0^1 C_i^*(t) C_j^*(t) w^*(t)\, dt = \frac{\pi}{2(N+1)} \delta_{ij}. \tag{8}$$

Theorem 1. *Any function $g(t)$ mean square integrable on $[0, 1]$ can expanded by element of shifted cardinal Chebyshev function as follow*

$$g(t) = \sum_{j=1}^{N+1} u_j C_i^*(t) = U^T \Phi_N(t), \tag{9}$$

where

$$u_j = g(t_j), \quad t_j = \frac{x_j + 1}{2}, \quad j = 1, \ldots, N+1,$$

are the shifted points of x_j,

$$U = \big(u_1, u_2, \ldots, u_{N+1}\big)^T, \quad \Phi_N(t) = \big(C_1^*, C_2^*, \ldots, C_{N+1}^*\big)^T.$$

$\lhd$ If $g(t) = \sum_{j=1}^{N+1} u_j C_j^*(t)$, then

$$g(t_i) = \sum_{i=1}^{N+1} u_j C_j^*(t_i) = \sum_{i=1}^{N+1} u_j \delta_{ji}.$$

Then $u_i = g(t_i)$. $\rhd$

Theorem 2. *Any function $g(t,s)$ mean square integrable on $[0,1]\times[0,1]$ can be approximated by cardinal functions as follow*

$$g(t,s) = \sum_{j=1}^{N+1}\sum_{i=1}^{N+1} g(t_i,s_j) C_i^*(t) C_j^*(t) = \Phi_N(t)^T K_1 \Phi_N(s), \tag{10}$$

where $K_{1,(i,j)} = g(t_i,s_j)$ and t_j, s_j are the corresponding shifted points of x_j.

$\lhd$ The proof proceeds in a similar way as the proof of Theorem 1. $\rhd$

3.2. Deterministic and stochastic operational matrices. Let

$$\Phi_N(t) = \left(C_1^*, C_2^*, \dots, C_{N+1}^*\right)^T.$$

Lemma 3. *We have*

$$\int\limits_0^t \Phi_N(s)\, ds = P^{-1} Q \Phi_N(t), \tag{11}$$

where the $(N+1)\times(N+1)$ matrix P is called the transform matrix (or Vandermonde's matrix) and is given by

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{N+1} \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_{N+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^{N-1} & t_2^{N-1} & \dots & t_{N+1}^{N-1} \\ t_1^N & t_2^N & \dots & t_{N+1}^N \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Q = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_{N+1} \\ \frac{t_1^2}{2} & \frac{t_2^2}{2} & \dots & \frac{t_{N+1}^2}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{t_1^{N-1}}{N-1} & \frac{t_2^{N-1}}{N-1} & \dots & \frac{t_{N+1}^{N-1}}{N-1} \\ \frac{t_1^N}{N} & \frac{t_2^N}{N} & \dots & \frac{t_{N+1}^N}{N} \\ \frac{t_1^{N+1}}{N+1} & \frac{t_2^{N+1}}{N+1} & \dots & \frac{t_{N+1}^{N+1}}{N+1} \end{pmatrix}.$$

$\lhd$ Let $\psi_i(t) = t^{i-1}$ for $i = 1, \dots N+1$, by expanding $\psi_i(t)$ in $(N+1)$ terms of the shifted Chebyshev cardinal functions, we obtain

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^{N+1} \psi_i(t_j) C_j^*(t), \quad i = 1, 2, \dots, N+1.$$

Then

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \dots \\ \psi_{N+1}(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} C_1^*(t) \\ C_2^*(t) \\ \dots \\ C_{N+1}^*(t) \end{pmatrix} = P\Phi_N(t).$$

Since the matrix P is invertible, $\Phi_N(t) = P^{-1}\Psi_N(t)$, where

$$\Psi_N(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \dots \\ \psi_{N+1}(t) \end{pmatrix}.$$

Hence

$$\int\limits_0^t \Phi_N(s)\,ds = \int\limits_0^t P^{-1}\Psi_N(s)\,ds = P^{-1}\int\limits_0^t \Psi_N(s)\,ds = P^{-1}\begin{pmatrix} t \\ \frac{t^2}{2} \\ \dots \\ \frac{t^{N+1}}{N+1} \end{pmatrix}.$$

Now, let $g_i(t) = \frac{t^i}{i}$, $i = 1, 2, \dots, N+1$, we have $g_i(t) = \sum_{j=1}^{N+1} g_i(t_j)C_j^*(t) = Q\Phi_N(t)$. Then

$$\int\limits_0^t \Phi_N(s)\,ds = P^{-1}Q\Phi_N(t). \quad \rhd$$

Lemma 4. *Assume* $\Phi_N(t) = \left(C_1^*, C_2^*, \dots, C_{N+1}^*\right)^T$ *and* $U = (u_1, u_2, \dots, u_{N+1})^T$. *Then*

$$\Phi_N(t)\Phi_N^T(t)U = \widetilde{U}\Phi_N(t), \tag{12}$$

where $\widetilde{U} = \mathrm{diag}[u_1, u_2, \dots, u_{N+1}]$.

$\lhd$ We have

$$\Phi_N(t)\Phi_N^T(t)U \simeq \begin{pmatrix} C_1^*(t)C_1^*(t) & C_1^*(t)C_2^*(t) & \dots & C_1^*(t)C_{N+1}^*(t) \\ C_2^*(t)C_1^*(t) & C_2^*(t)C_2^*(t) & \dots & C_2^*(t)C_{N+1}^*(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{N+1}^*(t)C_1^*(t) & C_{N+1}^*(t)C_2^*(t) & \dots & C_{N+1}^*(t)C_{N+1}^*(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{N+1} \end{pmatrix}$$

and expanding $C_i(t)C_j(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, N+1$, by the elements of Chebyshev cardinal functions, we get

$$C_i(t)C_j(t) \simeq \sum_{k=1}^{N+1} C_i(t_k)C_j(t_k)C_k(t) \simeq \sum_{k=1}^{N+1} \delta_{ik}\delta_{jk}C_k(t).$$

From this we conclude

$$\Phi_N(t)\Phi_N^T(t)U \simeq \begin{pmatrix} C_1^*(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2^*(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{N+1}^*(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{N+1} \end{pmatrix} = \widetilde{U}\Phi_N(t). \quad \rhd$$

Lemma 5 [26]**.** *If we consider* $X(t) \simeq U^T\Phi_N(t)$, *then for every* $p \in \mathbb{N}$, *we have*

$$\left[X(t)\right]^p \simeq U_p^T\Phi_N(t) \simeq U^T\left(\widetilde{U}\right)^{p-1}\Phi_N(t), \tag{13}$$

or

$$\left[X(t)\right]^p \simeq \left[u_1^p, u_2^p, \dots, u_{N+1}^p\right]\Phi_N(t), \tag{14}$$

where $\widetilde{U} = \mathrm{diag}(u_1, u_2, \dots, u_{N+1})$.

3.3. Stochastic operational matrices of integration. In this subsection, we give stochastic operational matrix of integration with respect to Brownian motion we have

$$\int_0^t \Phi_N(s)\,dB(s) = \int_0^t P^{-1}\Psi_N(s)\,dB(s) = P^{-1}\int_0^t \Psi_N(s)\,dB(s)$$
$$= P^{-1}\left[\int_0^t dB(s),\ \int_0^t s\,dB(s),\ \ldots,\ \int_0^t s^N\,dB(s)\right]^T$$

we apply Itô formula, we get

$$\begin{pmatrix} \int_0^t dB(s) \\ \int_0^t s\,dB(s) \\ \int_0^t s^2\,dB(s) \\ \cdots \\ \int_0^t s^N\,dB(s) \end{pmatrix} = B(t)\Psi_N(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^t B(s)\,ds \\ 2\int_0^t sB(s)\,ds \\ \cdots \\ N\int_0^t s^{N-1}B(s)\,ds \end{pmatrix} = A_N(t) = (a_i)_{i=0,\ldots,N},$$

where

$$a_i = t^iB(t) - i\int_0^t s^{i-1}B(s)\,ds, \quad i = 0,\ldots,N.$$

For the integral $\int_0^t s^{i-1}B(s)\,ds$, we can use Simpson rule as follow

$$\int_0^t s^{i-1}B(s)\,ds \simeq \frac{t}{6}\left(0^{i-1}B(0) + 4\left(\frac{t}{2}\right)^{i-1}B\left(\frac{t}{2}\right) + t^{i-1}B(t)\right), \quad i = 1,2,\ldots,$$

so

$$a_i = t^iB(t) - i\,\frac{t}{6}\left(4\left(\frac{t}{2}\right)^{i-1}B\left(\frac{t}{2}\right) + t^{i-1}B(t)\right) = \left(\left(1-\frac{i}{6}\right)B(t) - \frac{i}{3\cdot 2^{i-2}}B\left(\frac{t}{2}\right)\right)t^i,$$
$$i = 1,2,\ldots,$$

$$a_i = B(t) \quad \text{for} \quad i = 0.$$

Also we approximate $B(t)$ and $B\left(\frac{t}{2}\right)$ for $0 \leqslant t \leqslant 1$ by $B(0.5)$ and $B(0.25)$, then we obtain

$$P^{-1}A_N(t)$$
$$= P^{-1}\begin{pmatrix} B(0.5) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{5}{6}B(0.5) - \frac{2}{3}B(0.25) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \left(1-\frac{N}{6}\right)B(0.5) - \frac{N}{3\cdot 2^{N-2}}B(0.25) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \ldots \\ t^N \end{pmatrix}.$$

Then

$$P^{-1}A_N(t) = P^{-1}A_s\Psi_N(t) = P^{-1}A_sP\Phi_N(t) = P_s\Phi_N(t), \tag{15}$$

where

$$A_s = \begin{pmatrix} B(0.5) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{5}{6}\,B(0.5) - \frac{2}{3}\,B(0.25) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \left(1-\frac{N}{6}\right)B(0.5) - \frac{N}{3\cdot 2^{N-2}}\,B(0.25) \end{pmatrix}$$

and $P_s = P^{-1}A_sP$ is $(N+1)\times(N+1)$ stochastic operational matrix. Finally,

$$\int_0^t \Phi_N(t)\,dB(t) \simeq P_s\Phi_N(t). \tag{16}$$

4. Numerical Method for Solving Stochastic Integral Equation (1)

In section, we describe numerical technique for solving stochastic integral equation (1), first we approximate the functions $k_1(t,s)$, $k_2(t,s)$ and $X(t)$ by elements of the basis C_i^*, $i = 1, 2, \dots, N+1$, as follow

$$X(t) \simeq U^T\Phi_N(t), \quad k_1(t,s) \simeq \Phi_N(t)^T K_1\Phi_N(s), \quad k_2(t,s) \simeq \Phi_N^T(t)K_2\Phi_N(s). \tag{17}$$

Then, we approximate the integrals $\int_0^t k_1(t,s)[X(s)]^p ds$ and $\int_0^t k_2(t,s)[X(s)]^q dB(s)$, we obtain

$$\begin{aligned} \int_0^t k_1(t,s)[X(s)]^p ds &\simeq \int_0^t \Phi_N(t)^T K_1\Phi_N(s)\Phi_N(s)^T U_p ds \simeq \Phi_N(t)^T K_1 \int_0^t \Phi_N(s)\Phi_N(s)^T U_p ds \\ &\simeq \Phi_N(t)^T K_1\widetilde{U}_p \left[\int_0^t \Phi_N(s)\,ds\right] \simeq \Phi_N(t)^T K_1\widetilde{U}_p P^{-1}Q\Phi_N(t), \end{aligned} \tag{18}$$

where $\widetilde{U}_p = \operatorname{diag}(u_1^p, u_2^p, \dots, u_{N+1}^p)$ and U_p are the coefficients of $X^p(t)$ in the basis $\Phi_N(t)$. Let U_q be the coefficients of $X^q(t)$ in the basis $\Phi_N(t)$. Then we have

$$\begin{aligned} \int_0^t k_2(t,s)\big[X(s)\big]^q\,dB(s) &\simeq \int_0^t \Phi_N(t)^T K_2\Phi_N(s)\Phi_N(s)^T U_q\,dB(s) \\ \simeq \Phi_N(t)^T K_2 \int_0^t \Phi_N(s)\Phi_N(s)^T U_q\,dB(s) &\simeq \Phi_N(t)^T K_2\widetilde{U}_q \left[\int_0^t \Phi_N(s)\,dB(s)\right] \\ &\simeq \Phi_N(t)^T K_2\widetilde{U}_q P_s\Phi_N(t). \end{aligned} \tag{19}$$

We replace equations (17), (18) and (19) in equation (1), we get

$$U^T\Phi_N(t) - X_0 - \Phi_N(t)^T K_1\widetilde{U}_p P^{-1}Q\Phi_N(t) - \Phi_N(t)^T K_2\widetilde{U}_q P_s\Phi_N(t) = 0. \tag{20}$$

To solve equation (20), we have three methods.

1. First, by collacting equation (20) in $(N+1)$ points t_j, $j=1,2,\dots,N+1$, shifted points of x_j, we obtain

$$U^T\Phi_N(t_j)-X_0-\Phi_N(t_j)^TK_1\widetilde{U}_pP^{-1}Q\Phi_N(t_j)-\Phi_N(t_j)^TK_2\widetilde{U}_qP_s\Phi_N(t_j)=0, \quad j=1,2,\dots,N+1. \tag{21}$$

We have $\Phi_N(t_j)=e_j^N$, where e_j^N denotes the column of ordre j of identity matrix I of order $N+1$. Then we obtain a nonlinear system included $N+1$ unknowns $(u_1,u_2,\dots,u_{N+1})^T$ and $N+1$ equations, Newton method can be used to obtain accurate solution of nonlinear systems.

2. Here, we approximate $\Phi_N(t_j)^TK_1\widetilde{U}_pP^{-1}Q\Phi_N(t_j)$ and $\Phi_N(t_j)^TK_2\widetilde{U}_qP_s\Phi_N(t_j)$ as follow

Lemma 6. *We have*

$$\Phi_N(t)^TK_1\widetilde{U}_pP^{-1}Q\Phi_N(t)\simeq M_1\Phi_N(t), \tag{22}$$

$$\Phi_N(t)^TK_2\widetilde{U}_qP_s\Phi_N(t)\simeq M_2\Phi_N(t), \tag{23}$$

where M_1 and M_2 are $(N+1)$ row vectors including elements equal to the diagonal entries of $K_1\widetilde{U}_pP^{-1}Q$ and $K_2\widetilde{U}_qP_s$ respectibely.

$\lhd$ It is easy to proof identity (22) and (23). $\rhd$

We replace (22) and (23) in equation (20), we get

$$U^T\Phi_N(t)-X_0-M_1\Phi_N(t)-M_2\Phi_N(t)=0. \tag{24}$$

Hence

$$\big[U^T-A_0-M_1-M_2\big]\Phi_N(t)=0, \tag{25}$$

where A_0 is $(N+1)$ row vector including elements equal to X_0. The obtained system (25) is a nonlinear system with $N+1$ unknowns $(u_1,u_2,\dots,u_{N+1})^T$.

3. We can use orthogonality condition.

5. Solving Stochastic Integral Equation (2)

We approximate equation (2) as follows:

$$z_1(t)=a(t,X(t)), \quad z_2(t)=b(t,X(t)), \quad t\in[0,1]. \tag{26}$$

By using equation (2) and (26), we have

$$\begin{cases} z_1(t)=a\Big(t,\ X_0+\int_0^t z_1(s)\,ds+\int_0^t z_2(s)dB(s)\Big), \\ z_2(t)=b\Big(t,\ X_0+\int_0^t z_1(s)\,ds+\int_0^t z_2(s)dB(s)\Big). \end{cases} \tag{27}$$

By expanding $z_1(t)$ and $z_2(t)$ by elements of cardinal functions, we get

$$z_1(t)=U_1^T\Phi_N(t), \quad z_2(t)=U_2^T\Phi_N(t). \tag{28}$$

By substituting equation (28) in (27), we obtain

$$\begin{cases} z_1(t) = a\Big(t,\ X_0 + \int\limits_0^t U_1^T \Phi_N(s)\, ds + \int\limits_0^t U_2^T \Phi_N(s)\, dB(s)\Big), \\ z_2(t) = b\Big(t,\ X_0 + \int\limits_0^t U_1^T \Phi_N(s)\, ds + \int\limits_0^t U_2^T \Phi_N(s)\, dB(s)\Big), \end{cases} \tag{29}$$

which is equivalent to

$$\begin{cases} z_1(t) = a\Big(t,\ X_0 + U_1^T \int\limits_0^t \Phi_N(s)\, ds + U_2^T \int\limits_0^t \Phi_N(s)\, dB(s)\Big), \\ z_2(t) = b\Big(t,\ X_0 + U_1^T \int\limits_0^t \Phi_N(s)\, ds + U_2^T \int\limits_0^t \Phi_N(s)\, dB(s)\Big). \end{cases} \tag{30}$$

By using equation (11) and (16), we get

$$\begin{cases} U_1^T \Phi_N(t) = a\big(t,\ X_0 + U_1^T P^{-1} Q \Phi_N(t) + U_2^T P_s \Phi_N(t)\big), \\ U_2^T \Phi_N(t) = b\big(t,\ X_0 + U_1^T P^{-1} Q \Phi_N(t) + U_2^T P_s \Phi_N(t)\big). \end{cases} \tag{31}$$

We collocate (29) at shifted points t_j, $j = 1, 2, \dots N+1$, and we arrive at

$$\begin{cases} U_1^T e_j^N = a\big(t_j,\ X_0 + U_1^T P^{-1} Q e_j^N + U_2^T P_s e_j^N\big), \\ U_2^T e_j^N = b\big(t_j,\ X_0 + U_1^T P^{-1} Q e_j^N + U_2^T P_s e_j^N\big), \end{cases} \tag{32}$$

where e_j^N denotes the column of ordre j of identity matrix I of order $N+1$. The system (32) can be solved for the unknown U_1 and U_2 with Matlab software packages or by the Newton's iterative method. By determining U_1 and U_2, we can determine the approximate solution of $X(t)$ as follow

$$X_N(x) = X_0 + U_1^T P^{-1} Q \Phi_N(t) + U_2^T P_s \Phi_N(t). \tag{33}$$

6. Convergence Analysis

In this section, we investigate the convergence and error analysis of the proposed method in the Sobolev space.

Definition 2 [28]. The Sobolev space $H_w^m(a, b)$ is defined as follow:

$$H_w^m(a, b) = \big\{u \in L_w^2(a, b),\ u^{(j)}(t) \in L_w^2(a, b),\ j = 0, 1, \dots, m\big\}, \tag{34}$$

where w be a weight function and $m \geqslant 0$ be an integer.

Remark 2. The Sobolev space $H_w^m(a, b)$ is endowed with the following weighted inner product

$$\big\langle u(t), v(t)\big\rangle_{m,w} = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_a^b u^{(j)} v^{(j)} w(t)\, dt. \tag{35}$$

The space $H_w^m(a, b)$ is a Hilbert space with the following norm

$$\big\|u(t)\big\|_{H_w^m(a,b)} = \left(\sum_{i=1}^{m} \big\|u^{(j)}\big\|_{L_w^2(a,b)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{36}$$

Lemma 7 [28]. *Let*

$$u \in H_w^m(-1,1), \quad w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{and} \quad I_N u = \sum_{j=1}^{N+1} u_j C_j(t)$$

be the Chebyshev interpolant of $u(t)$ *Then, the truncated error* $u - I_N u$ *satisfies*

$$\|u - I_N u\|_{L_w^2(-1,1)} \leqslant \widehat{C}_m N^{-m} \left(\sum_{j=\min(m,N)}^{m} \|u^{(j)}\|_{L_w^2(-1,1)} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{37}$$

where $\widehat{C}_m$ *is a positive constant independent of* N *and dependent on* m. *Moreover, in the maximum norm, it yields*

$$\|u - I_N u\|_{L_w^\infty(-1,1)} \leqslant \widehat{C}_m N^{\frac{1}{2}-m} \left(\sum_{j=\min(m,N)}^{m} \|u^{(j)}\|_{L_w^2(-1,1)} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{38}$$

where $\widehat{C}_m$ *is a positive constant independent of* N *and dependent on* m, *and* $\|u\|_{L_w^\infty(-1,1)} = \sup_{-1\leqslant t\leqslant 1} |u(t)|$.

Theorem 3. *Let*

$$u \in H_{w^*}^m(0,1), \ w^*(t) = w(2t-1) \quad \text{and} \quad I_N^* u = \sum_{j=1}^{N+1} u_j C_j^*(t), \ u_j = u(t_j)$$

be the Chebyshev interpolant of $u(t)$. *Then, the truncated error* $u - I_N^* u$ *satisfies*

$$\|u - I_N^* u\|_{L_{w^*}^2(0,1)} \leqslant \widehat{C}_m N^{-m} \left(\sum_{j=\min(m,N)}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \|u^{(j)}\|_{L_{w^*}^2(0,1)} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{39}$$

where $\widehat{C}_m$ *is a positive constant independent of* N *and dependent on* m. *Moreover, in the maximum norm, it yields*

$$\|u - I_N u\|_{L^\infty(0,1)} \leqslant \widehat{C}_m N^{\frac{1}{2}-m} \sqrt{2} \left(\sum_{j=\min(m,N)}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \|u^{(j)}\|_{L_{w^*}^2(0,1)} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{40}$$

where $\widehat{C}_m$ *is a positive constant independent of* N *and dependent on* m, *and* $\|u\|_{L^\infty(0,1)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |u(t)|$.

$\lhd$ The proof proceeds in a same manner as the one of Theorem (5.4) in [24]. $\rhd$

Theorem 4. *Suppose* $X(t) \in H_w^m(0,1)$ *and* $X_N(x)$ *be the exact and approximate solutions of equation* (2), *respectively, furthermore, we suppose that*

(H1) $|a(t, X_1(t)) - a(t, X_2(t))| + |b(t, X_1(t)) - b(t, X_2(t))| \leqslant L|X_1 - X_2|$ (*Lipschitz condition*).

(H2) $|a(t, X(t))| + |b(t, X(t))| \leqslant L(1 + |X|)$ (*Linear growth condition*), *where* $t \in [0,1]$, $X_1, X_2 \in \mathbb{R}$ *and* L_i *are positive constants for* $i = 1, 2$.

(H3) $E|X_0|^2 < \infty$.

Then $X_n(t)$ *converges to* $X(t)$ *in* L^2.

$\lhd$ Let $e_N(t) = X(t) - X_N(t)$ be an error function of approximate solution $X_N(t)$ to the exact solution $X(t)$,

$$X(t) - X_N(t) = \int_a^t \big(z_1(s) - \bar{z}_1(s)\big)\,ds + \int_a^t \big(z_2(s) - \bar{z}_2(s)\big)\,dB(s), \tag{41}$$

where $z_i(t)$, $i = 1,2$, are given by $z_1(t) = a(t, X(t))$, $z_2(t) = b(t, X(t))$, also $\bar{z}_i(t)$, $i = 1,2$, is approximated form of $z_i(t)$ by schifted cardinal Chebyshev function

$$\bar{z}_1(t) = \mathrm{app}_N(a(t, X_N(t)), \quad \bar{z}_2(t) = \mathrm{app}_N(b(t, X_N(t)),$$

$$z_1^N(t) = a(t, X_N(t)), \quad z_2^N(t) = b(t, X_N t)),$$

$$e_N(t) = \int_0^t \big(z_1(s) - \bar{z}_1(s)\big)\,ds + \int_0^t \big(z_2(s) - \bar{z}_2(s)\big)\,dB(s),$$

$$E\left|e_N(t)\right|^2 = E\left(\left|\int_0^t \big(z_1(s) - \bar{z}_1(s)\big)\,ds + \int_0^t \big(z_2(s) - \bar{z}_2(s)\big)\,dB(s)\right|\right)^2.$$

Using the inequality $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, we get

$$E\left|e_N(t)\right|^2 \leqslant 2E\left|\int_0^t \big(z_1(s) - \bar{z}_1(s)\big)\,ds\right|^2 + 2E\left|\int_0^t \big(z_2(s) - \bar{z}_2(s)\big)\,dB(s)\right|^2$$

by the Schwartz inequality and Itô isometry, we get

$$E\left|e_N(t)\right|^2 \leqslant 2E\left(\int_0^t \left|z_1(s) - \bar{z}_1(s)\right|^2 ds\right) + 2E\left(\int_0^t \left|z_2(s) - \bar{z}_2(s)\right|^2 ds\right),$$

consequently,

$$2E\left(\int_0^t \left|z_1(s) - \bar{z}_1(s)\right|^2 ds\right) \leqslant 4E\left(\int_0^t \left|z_1(s) - z_1^N(s)\right|^2 ds\right) + 4E\left(\int_0^t \left|z_1^N(s) - \bar{z}_1(s)\right|^2 ds\right),$$

$$2E\left(\int_0^t \left|z_2(s) - \bar{z}_2(s)\right|^2 ds\right) \leqslant 4E\left(\int_0^t \left|z_2(s) - z_2^N(s)\right|^2 ds\right) + 4E\left(\int_0^t \left|z_2^N(s) - \bar{z}_2(s)\right|^2 ds\right).$$

By using Theorem 3, there exists $\alpha_j(m, N)$, $j = 1,2$, such that

$$E\left\|z_j^N(s) - \bar{z}_j(s)\right\|^2 \leqslant \big(\alpha_j(m, N)\big)^2, \quad j = 1,2,$$

where

$$\alpha_i(m, N) = \widehat{C}_m N^{-m}\left(\sum_{j=\min(m,N)}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \left\|\big(z_i^N\big)^{(j)}\right\|_{L^2_{w^*}(0,1)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1,2.$$

Then

$$E\left|e_n(t)\right|^2 \leqslant 4\big(\alpha_1(m,N)+\alpha_2(m,N)\big)^2+4\left(\int_0^t E\left|z_1(s)-z_1^n(s)\right|^2 ds+\int_0^t E\left|z_2(s)-z_2^n(s)\right|^2 ds\right).$$

By using Lipschitz condition, we get

$$E\left|e_n(t)\right|^2 \leqslant 4\big(\alpha_1(m,N)+\alpha_2(m,N)\big)^2+8L\int_0^t E\left|e_n(s)\right|^2 ds, \tag{42}$$

hence by Gronwall inequality we obtain $E|e_N(t)|^2 \longrightarrow 0$, as $N \longrightarrow \infty$. ▷

Remark 3. We can see that if m is sufficiently large than the error in Lemma (7) is sufficiently small.

7. Numerical Examples

To demonstrate the accuracy and effectiveness of the method proposed herein, we have applied it to several examples. These examples are solved in different references, so the numerical results obtained here can be compared with those of other numerical methods. In order to analyze the error of the method we introduce the absolute error, with M simulations

$$e_N(t)=\big|X(t)-X_N(t)\big|.$$

Example 1. Consider the deterministic Volterra integral equation of the kind as follows [29]:

$$-\frac{1}{15}\big(-8\exp(2t)+6\sin(t)+3\cos(t)+5\exp(-t)\big)-\int_0^t \big(\exp(s-t)+\sin(t-s)X(s)\big)\,ds,$$

where the exact solution is $X(t)=\exp(2t)$. The numerical results are summarized in Table 1.

Table 1. The absolute errors obtained by the proposed method with different values of N for Example 1

t	$N=4$	$N=10$	$N=15$
0	8.1011 E−3	6.4010 E−9	8.3377 E−14
0.2	5.3252 E−3	6.6734 E−9	2.5157 E−13
0.4	9.8748 E−3	1.0813 E−9	3.5527 E−15
0.6	1.0258 E−3	8.5579 E−9	2.0872 E−14
0.8	1.5953 E−2	4.6935 E−9	1.4264 E−12
1	7.2225 E−2	1.1335 E−7	3.9968 E−13

Example 2. Consider the deterministic Volterra integral equation of the second kind as follows:

$$X(t)=\cos(t)-\int_0^t (t-s)\cos(t-s)X(s)\,ds,$$

where the exact solution is $X(t)=\frac{1}{3}(2\cos\sqrt{3t}+1)$. The numerical results are shown in Fig. 1–2.

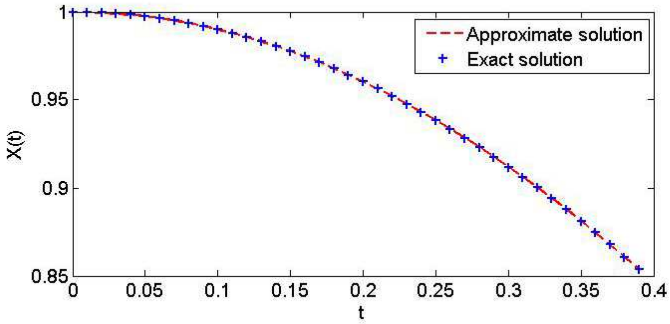


Fig. 1. The graphs of exact and approximate solutions for $N = 4$ for Example 2.

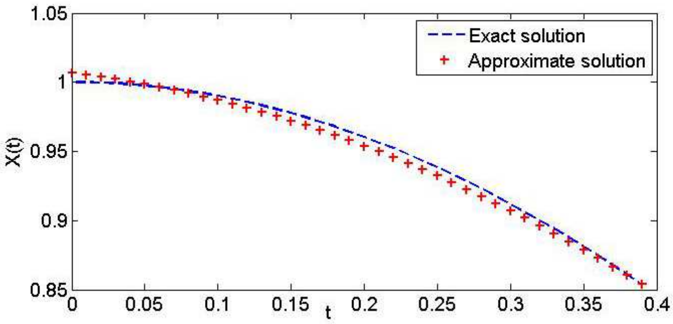


Fig. 2. The graphs of exact and approximate solutions for $N = 2$ for Example 2.

The proposed method, can be also applied to nonlinear deterministic Fredhoml integral equations.

EXAMPLE 3. Consider the Fredholm integral equation of the second kind [30]

$$X(t) = \exp\left(2t + \left(\frac{1}{3}\right)\right) + \int_0^1 \exp\left(2t - \left(\frac{5}{3}\right)s\right) X(s)\, ds, \tag{43}$$

with the exact solution $X(t) = \exp(2t)$. The computational results are compared with that obtained in [30] and are illustrated in Table 2.

Table 2. The absolute errors obtained by the proposed method with different values of N for Example 3

t	$N = 5$	$N = 6$	$N = 10$	$m = 64$ [30]	$m = 128$ [30]
0	1.0589 E−4	7.6683 E−6	6.2495 E−11	5.6999 E−5	4.0000 E−5
0.2	8.3927 E−5	7.8574 E−6	4.6068 E−11	1.2000 E−4	1.9999 E−5
0.4	4.1799 E−5	8.3148 E−6	5.3258 E−11	9.9992 E−5	3.0000 E−5
0.6	4.4243 E−5	8.7391 E−6	5.5025 E−11	4.5999 E−4	4.9999 E−5
0.8	9.9533 E−5	9.1235 E−6	5.0805 E−11	7.5999 E−4	2.9999 $E-5$
1	1.4078 E−4	9.8403 E−6	7.3655 E−11	3.5000 E−4	4.9999 E−5

EXAMPLE 4. Consider the deterministic Riccati differential equation

$$u'(t) + u^2(t) - 1 = 0, \quad u(0) = 0. \tag{44}$$

The exact solution is given by $u(t) = \frac{\exp(2t)-1}{\exp(2t)+1}$. The numerical results of this example are given in Table 3, and are compared with the results obtained in [31].

Table 3. The absolute errors obtained by the proposed method with two values of N for Example 4

t	$N=6$ (Present method)	$N=12$ (Present method)	$m=12$ [31]
0.1	1.2775 E−6	1.6259 E−11	1.11 E−10
0.2	2.6439 E−6	2.5123 E−12	2.04 E−10
0.3	1.3688 E−7	2.3986 E−11	2.10 E−12
0.4	2.8560 E−6	2.2805 E−11	2.23 E−10
0.5	7.3035 E−7	1.3141 E−11	4.03 E−10
0.6	2.39994 E−6	2.3181 E−13	1.79 E−10
0.7	9.8334 E−7	1.1980 E−11	8.59 E−11
0.8	2.5757 E−6	1.4748 E−11	2.70 E−10
0.9	2.8394 E−7	5.0553 E−12	1.89 E−10
1.0	2.6817 E−6	2.3652 E−11	2.66 E−11

Example 5. Let us consider the problem

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a^2 \cos(X(s)) \sin^3(X(s))\, ds - a \int_0^t \sin^2(X(s))\, dB(s), \quad t \in [0,1]. \tag{45}$$

The exact solution is $X(t) = \operatorname{arccot}(aB(s) + \cot(X_0))$. The computed errors for $N = 5$, $a = 1/8$ and $X_0 = \pi/32$, $X_0 = 0.1$, $X_0 = 0.01$, $X_0 = 1$ are summarized in Table 4.

Table 4. The absolute errors obtained by the proposed method with different values of X_0 for Example 5

t	$X0=0.01$	$X0=\pi/32$	$X0=0.1$	$X0=1$
0	8.2145 E−6	4.0132 E−4	8.3099 E−4	6.2593 E−2
0.1	7.7400 E−6	6.8875 E−4	7.8514 E−4	5.9772 E−2
0.2	1.0725 E−6	8.6983 E−4	1.1750 E−4	1.1500 E−2
0.3	4.6979 E−7	4.2429 E−4	4.6663 E−4	3.2472 E−2
0.4	4.2535 E−6	9.1225 E−5	3.0996 E−5	1.2364 E−3
0.5	7.6467 E−6	1.3240 E−4	7.8170 E−4	6.1292 E−2
0.6	3.0515 E−6	1.2116 E−4	3.2278 E−4	2.8464 E−2
0.7	6.1677 E−6	3.2922 E−4	6.1092 E−4	4.1968 E−2
0.8	1.5208 E−6	6.1442 E−4	1.3615 E−4	4.9793 E−3
0.9	3.2037 E−6	9.8149 E−4	3.0564 E−4	1.7478 E−2

Example 6 (Stochastic Lotka–Volterra model). Lotka–Volterra model also known as the predator-prey equations, in deterministic subclasses, are well-known and have been an active area of research concerning ecological population modeling [32]. The logistic model is often represented as follow:

$$\begin{cases} dX(t) = X(t)\big(b_1 - a_{11}X(t) - a_{12}Y(t)\big)dt + \sigma_1 X(t) dB_1(t), \\ dY(t) = Y(t)\big(b_2 - a_{21}X(t) - a_{22}Y(t)\big)dt + \sigma_2 Y(t) dB_1(t), \end{cases}$$

with initial conditions $X(0) = X_0$, $Y(0) = Y_0$, where a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2, σ_1 and σ_2 are parameters. The application of the proposed method, gives the corresponding nonlinear system

$$\begin{cases} U^T = X_0^T + b_1 U^T P^{-1} Q - a_{11} \widetilde{U}_2^T P^{-1} Q - a_{12} U^T \widetilde{V} P^{-1} Q + \sigma_1 U^T P_s^{B_1}, \\ V^T = Y_0^T + b_2 V^T P^{-1} Q - a_{21} V^T \widetilde{U} P^{-1} Q - a_{22} \widetilde{V}_2^T P^{-1} Q + \sigma_2 V^T P_s^{B_2}, \end{cases}$$

where

$$X(t) = U^T Q_N(t), \quad Y(t) = V^T Q_N(t), \quad X^2(t) = \widetilde{U}_2^T Q_N(t), \quad Y^2(t) = \widetilde{V}_2^T Q_N(t),$$

$$\widetilde{V} = \mathrm{diag}\big[v_1, v_2, \dots, v_{N+1}\big], \quad \widetilde{U} = \mathrm{diag}\big[u_1, u_2, \dots, u_{N+1}\big],$$

$$\widetilde{V}_2 = \big(v_1^2, v_2^2, \dots v_{N+1}^2\big)^T, \quad \widetilde{U}_2 = \big(u_1^2, u_2^2, \dots u_{N+1}^2\big)^T,$$

with $U = (u_1, u_2, \dots, u_{N+1})$, $V = (v_1, v_2, \dots, v_{N+1})$. In this example, we take $X(0) = 0.5$, $Y(0) = 1$ and $b_1 = 20$, $B_2 = -30$, $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = a_{21} = 25$ and $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$. We take $M = 80$ simulations for $N = 8$ and $M = 30$ for $N = 5$, we compute the means of $X(t)$ and $Y(t)$. The numerical results are shown in Fig. 3–4.

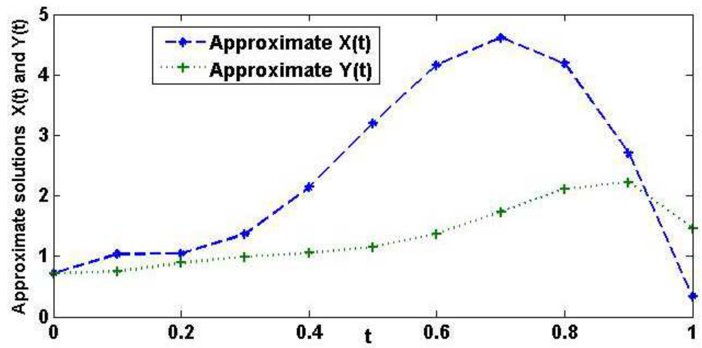


Fig. 3. Approximate solutions for $M = 80$ and $N = 8$ for Example 6.

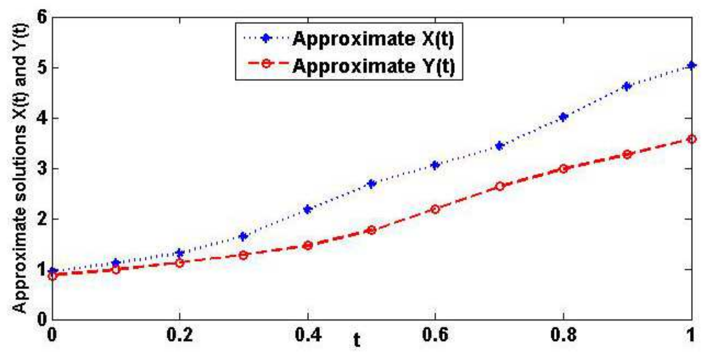


Fig. 4. Approximate solutions for $M = 30$ and $N = 5$ for Example 6.

EXAMPLE 7. Consider the following nonlinear stochastic Itô integral equation

$$X(t) = 1 + \int_0^t X(t)\Big(\frac{1}{32} - X^2(t)\Big)\,dt + \int_0^t 0.25X(t)\,dB(t), \quad t \in [0,1], \tag{46}$$

with the exact solution

$$X(t) = \frac{\exp(0.25B(t))}{\sqrt{1 + 2\int_0^t \exp(0.5B(s))\,ds}}, \tag{47}$$

where $X(t)$ is a stochastic process defined on the probability space $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. The numerical results with $M = 150$ simulations are shown in Table 5 and are compared with the results obtained in [10].

Table 5. The absolute errors obtained by the proposed method with different values of N for Example 7

t	$N = 4$	$N = 8$	$N = 10$	$N = 4$ [10]	$N = 8$ [10]	$N = 10$ [10]
0	1.6360 E−3	4.0901 E−2	1.4337 E−1	8.17 E−2	2.76 E−2	9.29 E−2
0.1	3.4591 E−2	7.6948 E−2	8.2714 E−2	5.29 E−2	2.51 E−2	6.31 E−2
0.2	1.1814 E−1	6.9798 E−2	1.3960 E−3	2.89 E−2	2.59 E−2	3.86 E−2
0.3	9.468 E−2	2.4183 E−2	1.7747 E−2	6.7 E−3	3.06 E−2	1.65 E−2
0.4	7.5338 E−2	9.7591 E−3	8.4280 E−3	1.59 E−2	3.84 E−2	4.3 E−3
0.5	7.7120 E−2	6.4695 E−3	5.9106 E−2	4.12 E−2	4.87 E−2	2.41 E−2
0.6	6.1632 E−2	9.0339 E−3	1.2380 E−2	7.25 E−2	6.08 E−2	4.31 E−2
0.7	5.4542 E−2	1.0809 E−1	4.8138 E−2	1.141 E−1	7.42 E−2	6.12 E−2
0.8	6.9447 E−2	6.1975 E−2	4.8274 E−2	1.714 E−1	8.89 E−2	7.87 E−2
0.9	6.6438 E−2	2.3192 E−2	8.8528 E−2	2.512 E−1	1.055 E−1	9.55 E−2

Example 8 (the basic Black–Scholes model). Consider the following linear stochastic equation

$$dX(t) = \lambda X(t)dt + \mu X(t)dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad t \in [0,1], \tag{48}$$

where the exact solution is given by

$$X(t) = \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)t + \mu W(t)\right).$$

The results obtained for $\lambda = -10$, $\mu = 1$, $N = 5$ and $M = 100$ simulations of this example are given in Table 6 and in Fig. 5–6.

Table 6. Computed errors for Example 8

t	$X_0 = 0.001$	$X_0 = 0.01$	$X_0 = 1$
0	6.0012 E−5	2.1938 E−3	1.2309 E−1
0.1	7.1472 E−4	2.5322 E−3	9.5855 E−2
0.2	8.3066 E−4	1.5726 E−3	2.8627 E−2
0.3	7.0929 E−4	6.0209 E−4	4.0362 E−2
0.4	4.8256 E−4	4.1796 E−4	1.8396 E−2
0.5	2.3794 E−4	3.8518 E−4	2.7327 E−2
0.6	5.5484 E−5	4.4513 E−4	3.7373 E−2
0.7	2.6947 E−5	5.3577 E−4	2.9311 E−2
0.8	1.8354 E−6	5.6066 E−4	5.1787 E−3
0.9	8.6807 E−5	5.4154 E−4	2.0294 E−2

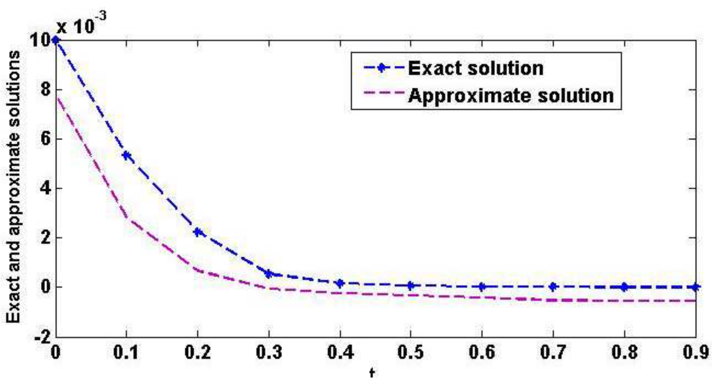


Fig. 5. Exact and approximate solutions for $X_0 = 0.01$ for Example 8.

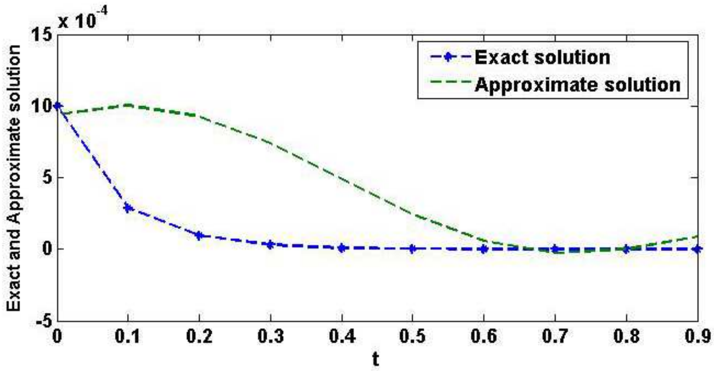


Fig. 6. Exact and approximate solutions for $X_0 = 0.001$ for Example 8.

8. Conclusion

Some stochastic differential equations can be written as stochastic Volterra integral equations. There are many stochastic integral equations which can not be solved analytically. In recent decade, many researcher are trying to develop the numerical methods for solving stochastic integral equations. In this paper, we introduced the cardinal Chebyshev functions, then the deterministic and stochastic operational matrices of these orthogonal functions have been obtained. These matrices can be also used to solve linear and nonlinear differential equations. These cardinal functions was used and applied for solving linear and nonlinear Volterra integral equations. The convergence and error analysis of the proposed method were investigated. Finally, several examples were included to demonstrate the applicability of the presented approach, the method of Chebyshev cardinal functions proposed in this paper can be further expanded to solve systems of stochastic integro-and integral equations for futur studies.

Acknowledgments. The author wish to express their gratitude to the Editor and referees for their helpful comments, suggestions and careful reading of the paper which have helped to improve the quality of the paper.

References

1. *Boyd, J. P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, New York, Dover Publications, Inc., 2000.
2. *Wazwaz, A.-M. A First Course in Integral Equations*, New Jersey, World Scientific, 1997. DOI: 10.1142/9570.
3. *Kloeden, P. E and Platen, E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Berlin, Springer, 1992.
4. *Milstein, G. N. Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*, Mathematics and its Application, vol. 313, Dordrecht, Kluwer, 1995. DOI: 10.1007/978-94-015-8455-5.
5. *Asgari, M., Hashemizadeh, E., Khodabin, M. and Maleknedjad, K.* Numerical Solution of Nonlinear Stochastic Integral Equation by Stochastic Operational Matrix Based on Bernstein Polynomials, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, 2014, vol. 57 (105), no. 1, pp. 3–12.
6. *Mirazee, F. and Samadyar, N.* Application of Hat Basis Functions for Solving Two-Dimensional Stochastic Fractional Integral Equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, vol. 37, pp. 4899–4916. DOI: 10.1007/s40314-018-0608-4.
7. *Mohammadi, F.* A Wavalet-Based Computational Method for Solving Stochastic Itô–Volterra Integral Equations, *Journal of Computational Physics*, 2015, vol. 298, pp. 254–265. DOI: 10.1016/J.JCP.2015.05.051.
8. *Mahmoudi, Y.* Wavelet Galerkin Method for Numerical Solution of Nonlinear Integral Equation, *Applied Mathematics and Computation*, 2005, vol. 167, no. 2, pp. 1119–1129. DOI: 10.1016/j.amc.2004.08.004.

9. *Maleknejad, K., Mollapourasl, R. and Alizadeh, M.* Numerical Solution of Volterra Type Integral Equation of the First Kind with Wavelet Basis, *Applied Mathematics and Computation*, 2007, vol. 194, no. 2, pp. 400–405. DOI: 10.1016/j.amc.2007.04.031.
10. *Mirzaee, F., Samadyar, N. and Hoseini, S. F.* Euler Polynomial Solutions of Nonlinear Stochastic Itô–Volterra Integral Equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, vol. 330, pp. 574–585. DOI: 10.1016/j.cam.2017.09.005.
11. *Mirazee, F., Alipour, S. and Samadyar, N.* Numerical Solution Based on Hybrid of Block-Pulse and Parabolic Function for Solving a System of Nonlinear Stochastic Itô–Volterra Integral Equations of Fractional Order, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, vol. 349, pp. 157–171. DOI: 10.1016/j.cam.2018.09.040.
12. *Mirazee, F. and Samadyar, N.* On the Numerical Solution of Stochastic Quadratic Integral Equations via Operational Matrix Method, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018, vol. 41, no. 12, pp. 4465–4479. DOI: 10.1002/mma.4907.
13. *Mirazee, F. and Alipour, S.* Approximation Solution of Nonlinear Quadratic Integral Equations of Fractional Order via Piecewise Linear Functions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, vol. 331, pp. 217–227. DOI: 10.1016/j.cam.2017.09.038.
14. *Mirazee, F. and Hamzeh, A.* A Computational Method for Solving Nonlinear Stochastic Volterra Integral Equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2016, vol. 306, pp. 166-0178. DOI: 10.1016/j.cam.2016.04.012.
15. *Mirazee, F. and Samadyar, N.* Numerical Solutions Based on Two-Dimensional Orthonormal Bernstein Polynomials for Solving Some Classes of Two-Dimensional Nonlinear Integral Equations of Fractional Order, *Applied Mathematics and Computation*, 2019, vol. 344, pp. 191–203. DOI: 10.1016/j.amc.2018.10.020.
16. *Mirazee, F. and Samadyar, N.* Using Radial Basis Functions to Solve Two Dimensional Linear Stochastic Integral Equations on Non-Rectangular Domains, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2018, vol. 92, pp. 180–195. DOI: 10.1016/j.enganabound.2017.12.017.
17. *Mirazee, F. and Samadyar, N.* Numerical Solution of Nonlinear Stochastic Itô–Volterra Integral Equations Driven by Fractional Brownian Motion, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018, vol. 41, no. 4, pp. 1410–1423. DOI: 10.1002/mma.4671.
18. *Shang, X. and Han, D.* Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind by Using Linear Legendre Multi-Wavelets, *Applied Mathematics and Computation*, 2007, vol. 191, no. 2, pp. 440–444. DOI: 10.1016/j.amc.2007.02.108.
19. *Yousefi, S. and Razzaghi, M.* Legendre Wavelets Method for the Nonlinear Volterra–Fredholm Integral Equations, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2005, vol. 70, no. 1, pp. 1–8. DOI: 10.1016/j.matcom. 2005. 02. 035.
20. *Yousefi, S. A., Lotfi, A. and Dehghan, M.* He's Variational Iteration Method for Solving Nonlinear Mixed Volterra–Fredholm Integral Equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 2009, vol. 58, no. 11–12, pp. 2172–2176. DOI: 10.1016/j.camwa.2009.03.083.
21. *Maleknejad, K., Khodabin, M. and Rostami, M.* Numerical Method for Solving m-Dimensional Stochastic Itô Volterra Integral Equations by Stochastic Operational Matrix Based on Block-Pulse Functions, *Computers and Mathematics with Applications*, 2012, vol. 63, no. 1, pp. 133–143. DOI: 10.1016/j.camwa.2011.10.079.
22. *Mao, X.* Approximate Solutions for a Class of Stochastic Evolution Equations with Variable Delays. II, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 1994, vol. 15, no. 1–2, pp. 65–76. DOI: 10.1080/01630569408816550.
23. *Mirzaee, F. and Hadadiyan, E.* A Collocation Technique for Solving Nonlinear Stochastic Itô–Volterra Integral Equation, *Applied Mathematics and Computation*, 2014, vo. 247, pp. 1011–1020. DOI: 10.1016/j.amc.2014.09.047.
24. *Heydari, M. H., Mahmoudi, M. R., Shakiba, A. and Avazzadeh, Z.* Chebyshev Cardinal Wavelets and Their Application in Solving Nonlinear Stochastic Differential Equations with Fractional Brownian Motion, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, vol. 64, pp. 98–121. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.04.018.
25. *Heydari, M. H.* A New Direct Method Based on the Chebyshev Cardinal Functions for Variable-Order Fractional Optimal Control Problems, *Journal of the Franklin Institute*, 2018, vol. 355, no. 12, pp. 4970–4995. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2018.05.025.
26. *Heydari, M., Avazzadeh, Z. and Loghmani, G. B.* Chebyshev Cardinal Functions for Solving Volterra–Fredholm Integro-Differential Equations Using Operational Matrices, *Iranian Journal of Science and Technology, A1*, 2012, vol. 36, no. 1, pp. 13–24. DOI: 10.22099/IJSTS.2012.2050.
27. *Funaro, D. Polynomial Approximation of Differential Equations*, New York, Springer-Verlag, 1992.

28. *Canuto, C., Hussaini, M., Quarteroni, A. and Zang, T. Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Berlin, Springer, 1988.
29. *Blyth, W. F., May, R. L. and Widyaningsih, P.* Volterra Integral Equations Solved in Fredholm form Using Walsh Functions, *ANZIAM Journal*, 2004, vol. 45 (E), pp. 269–282. DOI: 10.21914/anziamj.v45i0.887.
30. *Reihani, M. H. and Abadi, Z.* Rationalized Haar Functions Method for Solving Fredholm and Volterra Integral Equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, vol. 200, pp. 12–20. DOI: 10.1016/j.cam.2005.12.026.
31. *Parand, K. and Delkhosh, M.* Operational Matrix to Solve Nonlinear Riccati Differential Equations of Arbitrary Order, *St. Pertersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*, 2007, vol. 3, no. 3, pp. 242–254. DOI: 10.1016/j.spjpm.2017.08.001.
32. *Arató, M.* A Famous Nonlinear Stochastic Equation (Lotka–Volterra Model with Diffusion), *Mathematical and Computer Modelling*, 2003, vol. 38, no. 7–9, pp. 709-726. DOI: 10.1016/S0895-7177(03)90056-2.

Received October 12, 2020

Rebiha Zeghdane
Department of Mathematics, Faculty of Mathematics
and Informatics, University of Bordj-Bou-Arreridj,
El-Anasser 34030, Bordj-Bou-Arreridj, Algeria,
Associate Professor
E-mail: rebihae@yahoo.fr

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 4, С. 68–86

НОВЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ребиха Зегдане[1]

[1] Университет Бордж-Бу-Арреридж,
Алжир, 34030, Бордж-Бу-Арреридж, Эль-Анасе
E-mail: rebihae@yahoo.fr,

Аннотация. Цель статьи — применить кардинальные функции Чебышева к численному решению стохастических интегральных уравнений Вольтерра. Метод основан на разложении искомого приближенного решения по кардинальным функциями Чебышева. Для упомянутых базисных функций выводится новая операционная матрица интегрирования. Точнее, искомое решение разлагается в терминах кардинальных функций Чебышева с неизвестными коэффициентами. Подставляя указанное разложение в исходную задачу, операционная матрица сводит стохастическое интегральное уравнение к системе алгебраических уравнений. Исследованы сходимость и оценка погрешности в пространстве Соболева. Метод подвергнут численной оценке путем решения тестовых задач, взятых из литературы, с помощью которых демонстрируется вычислительная эффективность метода. С вычислительной точки зрения решение, полученное этим методом, отлично согласуется с решениями, полученными в других работах, и его эффективно использовать при решении различных задач.

Ключевые слова: кардинальные функции Чебышева, стохастическая операциональная матрица, броуновское движение, интеграл Ито, метод коллокации, численное решение.

Mathematical Subject Classification (2010): 45G10, 65R20.

Образец цитирования: *Zeghdane, R.* New Numerical Method for Solving Nonlinear Stochastic Integral Equations // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, № 4.—С. 68–86 (in English). DOI: 10.46698/n8076-2608-1378-r.

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 4, С. 87–91

УДК 512.5
DOI 10.46698/h3104-8810-6070-x

О СТРОЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СЕТЕЙ НАД КВАДРАТИЧНЫМИ ПОЛЯМИ

В. А. Койбаев[1, 2]

[1]Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22;
[2]Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, Ватутина, 44
E-mail: `koibaev-k1@yandex.ru`

Посвящается 75-летию профессора С. С. Кутателадзе

Аннотация. Исследуется структура элементарных сетей над квадратичными полями. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца R называется сетью (ковром) над кольцом R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер). Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется неприводимой, если все аддитивные подгруппы σ_{ij} отличны от нуля. Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ — квадратичное поле, D — кольцо целых квадратичного поля K, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая элементарная сеть порядка $n \geqslant 3$ над K, причем σ_{ij} — D-модули. Если целое d принимает одно из следующих значений (22 поля): $-1, -2, -3, -7, -11, -19, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73$, то для некоторого промежуточного подкольца P, $D \subseteq P \subseteq K$, сеть σ сопряжена диагональной матрицей из $D(n, K)$ с элементарной сетью идеалов кольца P.

Ключевые слова: сеть, ковер, элементарная сеть, замкнутая сеть, поле алгебраических чисел, квадратичное поле.

Mathematical Subject Classification (2010): 20G15.

Образец цитирования: *Койбаев В. А.* О строении элементарных сетей над квадратичными полями // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 4.—С. 87–91. DOI: 10.46698/h3104-8810-6070-x.

Исследуется структура элементарных сетей над квадратичными полями. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца R называется сетью (ковром) над полем K порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер). Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется неприводимой, если все аддитивные подгруппы σ_{ij} отличны от нуля. Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ — квадратичное поле, D — кольцо целых поля K, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая элементарная сеть порядка $n \geqslant 3$ над K, причем σ_{ij} — D-модули. Для некоторого класса квадратичных полей $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ (для некоторого класса целых чисел d) доказано, что с точностью до сопряжения (элементарной сети) диагональной матрицей из $D(n, K)$ все σ_{ij} являются идеалами фиксированного промежуточного подкольца P, $D \subseteq P \subseteq K$. В заключение строится недополняемая симметрическая элементарная сеть над квадратичным полем.

1. Квадратичные поля. Кольцо целых квадратичного поля

Квадратичным полем мы называем расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ второй степени. Всякое квадратичное поле имеет вид $\mathbb{Q}\big(\sqrt{d}\,\big)$, где $d \neq 1$ — некоторое целое рациональное число, свободное от квадратов [1, гл. II, § 7, п. 1].

Число a поля алгебраических чисел K (конечное расширение поля рациональных чисел) называется целым алгебраическим числом, если a является корнем унитарного (старший коэффициент многочлена равен 1) многочлена с целыми рациональными коэффициентами. Множество всех целых алгебраических чисел поля K является подкольцом поля K, которое называется кольцом целых поля K (см. [1, алгебраическое дополнение, § 4] и [2, гл. 5]). Кольцо целых D поля алгебраических чисел K совпадает с максимальным порядком поля K [1, гл. II, § 2, теорема 6].

Предложение 1 [1, гл. II, § 7, теорема 1]**.** *Пусть $d \neq 1$ — целое рациональное число, свободное от квадратов. Кольцо целых (максимальный порядок) D квадратичного поля $\mathbb{Q}\big(\sqrt{d}\,\big)$ совпадает с кольцом*

$$D = \mathbb{Z}[\theta] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta = \big\{x + y\theta :\, x, y \in \mathbb{Z}\big\},$$

где $\theta = \sqrt{d}$ при $d \equiv 2, 3 \,(\mathrm{mod}\, 4)$ и $\theta = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ при $d \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)$. Дискриминант поля $\mathbb{Q}\big(\sqrt{d}\,\big)$ равен $4d$ в первом случае и d во втором.

Предложение 2 [1, гл. III, § 2]**.** 1) *Кольцо целых D мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}\big(\sqrt{d}\,\big)$, $d < 0$, является евклидовым тогда и только тогда, когда (5 полей)*

$$d \in \big\{ -1,\ -2,\ -3,\ -7,\ -11\big\}.$$

2) *Кольцо целых D вещественного квадратичного поля $\mathbb{Q}\big(\sqrt{d}\,\big)$, $d > 0$, является евклидовым тогда и только тогда, когда (16 полей)*

$$d \in \big\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 21,\ 29,\ 33,\ 37,\ 41,\ 57,\ 73\big\}.$$

2. Элементарные сети над квадратичными полями

В этом разделе мы дадим описание элементарных сетей над некоторым классом квадратичных полей.

Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца R называется *сетью* (*ковром*) [3, 4] над полем K порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер) [3, 4]. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называется *дополняемой*, если для некоторых аддитивных подгрупп (точнее, подколец) σ_{ii} кольца R таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, является (полной) сетью. Хорошо известно (см., например, [3]), что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ для любых $i \neq j$.

Полную или элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы называем *неприводимой*, если все аддитивные подгруппы σ_{ij} отличны от нуля.

Назовем элементарную сеть σ *замкнутой* (*допустимой*) ([5; 6, вопрос 15.46]), если элементарная группа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций. Замкнутыми являются, например, дополняемые элементарные сети (см., например, [3]).

Дадим в начале описание промежуточных колец, заключенных между областью главных идеалов и его полем частных. Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 1. *Пусть R — область главных идеалов, K — поле частных кольца R. Если S — мультипликативное подмножество, порожденное подмножеством простых кольца R, то $S^{-1}R$ также является кольцом главных идеалов и $R \subseteq S^{-1}R \subseteq K$. С другой стороны, всякое промежуточное подкольцо P, $R \subseteq P \subseteq K$, является кольцом главных идеалов и имеет вид $P = S^{-1}R$ для некоторого мультипликативного подмножества $S \subseteq R$.*

Предложение 3 [7, теорема 2]**.** *Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая элементарная сеть порядка $n \geqslant 3$ над полем частных K кольца главных идеалов R, причем для любых i, j, $i \neq j$, подгруппы σ_{ij} являются R-модулями. Тогда для некоторого промежуточного подкольца P, $R \subseteq P \subseteq K$, сеть σ сопряжена диагональной матрицей из $D(n,K)$ с элементарной сетью $\pi = (\pi_{ij})$ идеалов кольца P, где $\pi_{ij} = q_{ij}P$, для некоторых $q_{ij} \in P$. В частности, элементарная сеть σ является замкнутой.*

Элементарная сеть $\pi = (\pi_{ij})$ из предложения наглядно представляется таблицей

$$\pi = (\pi_{ij}) = \begin{pmatrix} * & q_{12}P & q_{13}P & \dots & q_{1n}P \\ P & * & q_{23}P & \dots & q_{2n}P \\ P & q_{32}P & * & \dots & q_{3n}P \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P & q_{n2}P & q_{n3}P & \dots & * \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть $K = \mathbb{Q}\big(\sqrt{d}\big)$ — квадратичное поле, D — кольцо целых поля K. Пусть, далее, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая элементарная сеть порядка $n \geqslant 3$ над полем K, причем для любых $i \neq j$, подгруппы σ_{ij} являются D-модулями. Если целое d принимает одно из следующих значений* (22 *поля*)*:*

$$-1,\ -2,\ -3,\ -7,\ -11,\ -19,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 21,\ 29,\ 33,\ 37,\ 41,\ 57,\ 73,$$

то для некоторого промежуточного подкольца P, $D \subseteq P \subseteq K$, сеть σ сопряжена диагональной матрицей из $D(n,K)$ с элементарной сетью $\pi = (\pi_{ij})$ идеалов кольца P, где $\pi_{ij} = q_{ij}P$, для некоторых $q_{ij} \in P$ (см. (1))*. В частности, элементарная сеть σ является замкнутой.*

Доказательство теоремы вытекает из предложений 2, 3 и леммы 1 (при этом нужно заметить, что всякая евклидова область является областью главных идеалов).

Замечание. Кольцо целых мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}\big(\sqrt{-19}\big)$ является областью главных идеалов, но не является евклидовым [8].

3. Построение недополняемой элементарной сети над квадратичным полем

Результаты этого параграфа показывают существенное отличие строения элементарных сетей над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ [7] от строения элементарных сетей над квадратичными полями.

Пусть $d \equiv 2,3 \pmod 4$. В поле $\mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\big]$ рассмотрим кольцо целых $D = \mathbb{Z}\big[\sqrt{d}\big]$.

Положим

$$t = m\big(1+\sqrt{d}\big), \quad A = t^4 D, \quad m \in \mathbb{Z},\ m \geqslant 3, \quad B = \mathbb{Z}t + A = \mathbb{Z}t + t^4 D.$$

Заметим, что $A \subseteq B$ и

$$t^2 = m^2\big((1+d) + 2\sqrt{d}\big), \quad t^3 = m^3\big((1+3d) + (3+d)\sqrt{d}\big).$$

Предложение 4. *Таблица*

$$\tau = \begin{pmatrix} * & B & A & \dots & A \\ B & * & A & \dots & A \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ A & A & A & \dots & * \end{pmatrix}$$

является недополняемой элементарной сетью.

$\lhd$ Действитеьно, так как $A = t^4D$ — идеал кольца $D = \mathbb{Z}\big[\sqrt{d}\,\big]$, то $A^2 \subseteq A$, $AB \subseteq A$, а потому таблица τ является элементарной сетью. Для того, чтобы показать, что элементарная сеть τ является недополняемой, нам достаточно показать (см. § 2), что B^3 не содержится в подгруппе B. Покажем, что t^3 не содержится в $B = \mathbb{Z}t + t^4D$. Действительно, если $t^3 \in B$, то $t^2 \in \mathbb{Z} + t^3D$, а потому для некоторых $a \in \mathbb{Z}$ и $x + y\sqrt{d} \in D$ мы имеем (см. выше значение t^2 и t^3)

$$m^2\big((1+d) + 2\sqrt{d}\,\big) = a + m^3\big[(1+3d) + (3+d)\sqrt{d}\,\big]\big(x + y\sqrt{d}\,\big)$$
$$\Longrightarrow 2 = m\big(y(1+3d) + x(3+d)\big) \in m\mathbb{Z}.$$

Однако последнее невозможно так как $m \geqslant 3$. $\rhd$

Литература

1. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел.—М.: Наука, 1985.
2. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру.—М.: Мир, 1972.
3. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. сем. ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
4. *Левчук В. М.* Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 4.—С. 421–434.
5. *Койбаев В. А.* Элементарные сети в линейных группах // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН.—2011.—Т. 17, № 4.—С. 134–141.
6. Коуровская тетрадь: нерешенные вопросы теории групп.—17-е изд.—Новосибирск, 2010.
7. *Дряева Р. Ю., Койбаев В. А., Нужин Я. Н.* Полные и элементарные сети над полем частных кольца главных идеалов // Зап. науч. сем. ПОМИ.—2017.—Т. 455.—С. 42–51.
8. *Wilson J. C.* A principal ideal ring that is not a euclidean ring // Mathematics Magazine.—1973.—Vol. 46, № 1.—P. 34–38. DOI: 10.1080/0025570X.1973.11976270.

Статья поступила 9 августа 2020 г.

Койбаев Владимир Амурханович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22;

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
профессор кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362019, Владикавказ, Ватутина, 44
E-mail: koibaev-k1@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-5142-2612

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 4, P. 87–91

ON THE STRUCTURE OF ELEMENTARY NETS OVER QUADRATIC FIELDS

Koibaev, V. A.[1,2]

[1]Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia;
[2]North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
44 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: `koibaev-k1@yandex.ru`

Abstract. The structure of elementary nets over quadratic fields is studied. A set of additive subgroups $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, of a ring R is called a *net of order n over R* if $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ for all i, r, j. The same system, but without the diagonal, is called *elementary net* (*elementary carpet*). An elementary net $\sigma = (\sigma_{ij})$ is called *irreducible* if all additive subgroups σ_{ij} are different from zero. Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$ be a quadratic field, D a ring of integers of the quadratic field K, $\sigma = (\sigma_{ij})$ an irreducible elementary net of order $n \geqslant 3$ over K, and σ_{ij} a D-modules. If the integer d takes one of the following values (22 fields): -1, -2, -3, -7, -11, -19, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73, then for some intermediate subring P, $D \subseteq P \subseteq K$, the net σ is conjugated by a diagonal matrix of $D(n, K)$ with an elementary net of ideals of the ring P.

Key words: net, carpet, elementary net, closed net, algebraic number field, quadratic field.

Mathematical Subject Classification (2010): 20G15.

For citation: *Koibaev, V. A.* On the Structure of Elementary Nets Over Quadratic Fields, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 87–91 (in Russian). DOI: 10.46698/h3104-8810-6070-x.

References

1. *Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R. Number Theory*, New York–London, Academic Press, 1966.
2. *Atiyah, M. F. and Macdonald, I. G. Introduction to Commutative Algebra*, Addison–Wesley, 1969.
3. *Borevich, Z. I.* Subgroups of Linear Groups Rich in Transvections, *Journal of Soviet Mathematics*, 1987, vol. 37, no. 2, pp. 928–934. DOI: 10.1007/BF01089083.
4. *Levchuk, V. M.* Remark on a Theorem of L. Dickson, *Algebra and Logic*, 1983, vol. 22, no. 4, pp. 306–316. DOI: 10.1007/BF01979677.
5. *Koibaev, V. A.* Elementary Nets in Linear Groups, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 134–141 (in Russian).
6. *Kourovskaya tetrad': nereshennye voprosy teorii grupp* [The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory], Novosibirsk, 2010, issue 17 (in Russian).
7. *Dryaeva, R. Yu., Koibaev, V. A. and Nuzhin, Ya. N.* Full and Elementary Nets Over the Field of Fractions of a Principal Ideal Ring, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 234, no. 2, pp. 141–147. DOI: 10.1007/s10958-018-3990-y.
8. *Wilson, J. C.* A Principal Ideal Ring That is not a Euclidean Ring, *Mathematics Magazine*, 1973, vol. 46, no. 1, pp. 34–38. DOI: 10.1080/0025570X.1973.11976270.

Received August 9, 2020

Vladimir A. Koibaev
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Leading Researcher;

North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
44 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Professor of the Department of Algebra and Geometry
E-mail: `koibaev-k1@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0002-5142-2612

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 4, С. 92–103

УДК 517.98
DOI 10.46698/d4799-1202-6732-b

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫХ ПОЛИНОМОВ В БАНАХОВЫХ РЕШЕТКАХ

З. А. Кусраева[1,2], С. Н. Сиукаев[3]

[1]Региональный научно-образовательный математический центр ЮФУ,
Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Большая садовая, 105/42;
[2]Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22;
[3]Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, Ватутина, 44;
E-mail: `zali13@mail.ru`

Посвящается профессору
Кутателадзе Семену Самсоновичу
по случаю 75-летнего юбилея

Аннотация. Пусть E и F — банаховы решетки, а $\mathscr{P}_o({}^sE,F)$ и $\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ обозначают соответственно пространства непрерывных и регулярных ортогонально аддитивных s-однородных полиномов, действующих между банаховыми решетками E и F. Основные результаты статьи таковы.
Теорема 3.4. *Пусть $s\in\mathbb{N}$ and $(E,\|\cdot\|)$ — порядково σ-полная s-выпуклая банахова решетка. Равносильны следующие утверждения:* (1) *$\mathscr{P}_o({}^sE,F)\equiv\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ для любого AM-пространства F;* (2) *$\mathscr{P}_o({}^sE,c_0)=\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ для любого AM-пространства F;* (3) *$\mathscr{P}_o({}^sE,c_0)=\mathscr{P}_o^r({}^sE,c_0)$;* (4) *$\mathscr{P}_o({}^sE,c_0)\equiv\mathscr{P}_o^r({}^sE,c_0)$;* (5) *$E$ дискретна и порядково непрерывна.*
Теорема 4.3. *Пусть E и F — банаховы решетки, причем E s-выпукла для некоторого натурального $s\in\mathbb{N}$. Тогда равносильны следующие утверждения:* (1) *$\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ — векторная решетка и регулярная норма. $\|\cdot\|_r$ on $\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ на ней порядково непрерывна.* (2) *Каждый положительный s-однородный ортогонально аддитивный полином из E в F является L- и M-слабо компактным.*
Теорема 4.6. *Пусть E и F — банаховы решетки, причем F обладает положительным свойством Шура, а E s-выпукла для некоторого $s\in\mathbb{N}$. Тогда равносильны утверждения:* (1) *$(\mathscr{P}_o^r({}^sE,F),\|\cdot\|_r)$ является KB-пространством.* (2) *Регулярная норма $\|\cdot\|_r$ пространства $\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ порядково непрерывна.* (3) *E не содержит подрешеток, изоморфных l^s.*

Ключевые слова: банахова решетка, AM-пространство, KB-пространство, однородный полином, ортогональная аддитивность, регулярная норма, порядковая непрерывность.

Mathematical Subject Classification (2010): 46A16, 46B42, 46G25, 47H60, 47L22.

Образец цитирования: *Кусраева З. А., Сиукаев С. Н.* Некоторые свойства ортогонально аддитивных полиномов в банаховых решетках // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 4.—С. 92–103. DOI: 10.46698/d4799-1202-6732-b.

1. Введение

В последнее десятилетие значительно возрос интерес к исследованию порядковых свойств полиномов в бесконечномерных функциональных решетках. Это связано с тем, что многие важные свойства полиномов зависят от естественного отношения порядка в пространствах, в которых они действуют. Кроме того классы полиномов между банаховыми решетками, выделяемые комбинированными метрическими и порядковыми свойствами, имеют богатую структуру и интересные взаимосвязи.

В то время как алгебраические и линейно-топологические свойства полиномов, как и взаимосвязи с геометрией банаховых пространств, имеют давнюю историю и хорошо освещены в литетрауре (см., например, [1]), изучение порядковых свойство полиномов в векторных и банаховых решетках начато сравнительно недавно: в качестве двух стартовых точек можно указать работы Сандаресана [2] и Греку и Ряна [3] (см. также первые три диссертации на эту тему [4–6]). Последующее развитие отражено в источниках [7–13]; см. также указанную в них литературу.

Традиционной для теории линейных регулярных операторов в банаховых решетках является проблема: как влияют на строение того или иного класса линейных операторов свойства банаховых решеток, в которых действуют рассматриваемые операторы [14, 15]. В настоящей работе рассмотрены два вопроса в классе ортогонально аддитивных однородных полиномов: при каких условиях каждый ограниченный по норме полином является регулярным и является ли регулярная норма на пространстве всех таких полиномов порядково нерперывной?

Структура работы такова. Для каждой равномерно полной векторной решетки E и фиксированного натурального числа s существует s-однородный *канонический полином*, действующий из E в s-вогнутизацию $E_{(s)}$ решетки E, такой, что широкий класс ортогонально аддитивных полиномов допускает представление в виде композиции канонического полинома с линейным оператором, определенном на $E_{(s)}$. Этот результат вместе с необходимыми для дальнейшего определениями и обозначениями приводится во втором параграфе. В третьем параграфе обсуждается вопрос о том, когда каждый ограниченный по норме ортогонально аддитивный однородный полином является регулярным. Показано, что линеаризация с помощью канонического полинома позволяет переносить на ортогонально аддитивные полиномы реультаты, полученные для линейных операторов. В четвертом параграфе указаны условия, при которых регулярная норма в пространстве регулярных ортогонально аддитивных однородных полиномов является порядково непрерывной.

Банахова решетка E — это банахово простарнство $(E, \|\cdot\|)$, являющееся одновременно векторной решеткой с монотонной нормой, т. е. для $x, y \in E$ неравенство $|x| \leqslant |y|$ влечет $\|x\| \leqslant \|y\|$, где $|x| = x \vee (-x) = \sup\{x, -x\}$. Норму в банаховой решетке E (а также саму банахову решетку) называют *порядково непрерывной*, если для всякой убывающей сети (x_α) в E из $\inf_\alpha x_\alpha = 0$ следует $\lim_\alpha \|x_\alpha\| = 0$. Банахово двойственное пространство E', снабженное двойственной нормой и двойственным порядком, также является банаховой решеткой. Используются стандартные обозначения и терминология теории банаховых решеток из книг Алипрантиса и Бёркиншо [16] и Мейер-Ниберга [17], а также теории полиномов из книги Дайнина [1]. Всюду в тексте := означает «равняется по определению», а $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ обозначают соответственно множества натуральных и действительных чисел.

2. Предварительные сведения

В этом параграфе собраны необходимые для дальнейшего сведения об однородных полиномах и степени банаховой решетки.

Определение 2.1. Возьмем натуральне число $s \in \mathbb{N}$ и векторные пространства E и F. Отображение $P : E \to F$ называют *однородным полиномом степени* s (или s-*однородным полиномом*), если существует s-линейный оператор $\varphi : E^s \to F$ такой, что $P = \varphi \circ \Delta_s$, где $\Delta_s : E \to E^s$ — *дигональное отображение* $\Delta_s : x \mapsto (x, \dots, x) \in E^s$. Существует единственный симметричный s-линейный оператор φ, для которого $P = \varphi \circ \Delta_s$; последний обозначается символом $\check{P}$, так что $P(x) = \check{P}(x, \dots, x)$ для всех $x \in E$. Напомним, что s-линейный оператор $\varphi : E^s \to F$ симметричен, если $\varphi(x_1, \dots, x_s) = \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(s)})$ для любой перестановки σ множества индексов $\{1, \dots, n\}$.

Непрерывность s-однородного полинома P между нормированными пространствами E и F равносильна его ограниченности (на единичном шаре). Норма ограниченного полинома P определяется формулой

$$\|P\| = \sup\big\{\|P(x)\| : \|x\| = 1\big\} = \inf\big\{C > 0 : \|P(x)\| \leqslant C\|x\|^s,\ x \in E\big\}, \tag{1}$$

следовательно, $\|P(x)\| \leqslant \|P\|\|x\|^s$ $(x \in E)$. Векторное пространство всех непрерывных s-однородных полиномов из E в F, снабженное нормой (1), обозначается символом $\mathscr{P}({}^sE, F)$. При $s = 1$ получаем пространство линейных непрерывных операторов $\mathscr{L}(E, F) := \mathscr{P}({}^1E, F)$.

Определение 2.2. Однородный полином P из векторной решетки E в векторное просторанство Y называют *ортогонально аддитивным*, если $|x| \wedge |y| = 0$ влечет $P(x+y) = P(x)+P(y)$ для всех $x, y \in E$. В случае, когда Y — также векторная решетка, P называют *положительным*, если $\check{P}(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0$ для всех $x_1, \dots, x_n \in E_+$, и *орторегулярным*, если P представим в виде разности двух положительных ортогонально аддитивных однородных полиномов.

Обозначим через $\mathscr{P}_o({}^sE, F)$ пространство непрерывных ортогонально аддитивных s-однородных полиномов, действующих между векторными решетками E и F. Пусть $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ — часть $\mathscr{P}_o({}^sE, F)$, состоящая из регулярных полиномов. Отношение порядка в $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ вводится, как обычно, с помощью конуса положительных полиномов: $P \leqslant Q$ тогда и только тогда, когда $0 \leqslant Q - P$. *Регулярная норма* $\|\cdot\|_r$ на $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ вводится формулой

$$\|P\|_r := \inf\big\{\|Q\| : \pm P \leqslant Q \in \mathscr{P}_o^r({}^sE, F)\big\}. \tag{2}$$

Для положительного полинома $Q \in \mathscr{P}^r({}^sE, F)$ имеет место равенство

$$\|Q\|_r = \|Q\| = \sup\big\{\|Q(x)\| : 0 \leqslant x \in E,\ \|x\| \leqslant 1\big\}. \tag{3}$$

Возьмем банахову решетку E и вещественное число $0 < p < \infty$. Используя однородное функциональное исчисление, можно определить новую структуру векторной решетки на E, сохранив тот же порядок и определив новые операции векторного пространства.

Определение 2.3. Введем сложение $\oplus$ и умножение на скаляры $\circledast$ в банаховой решетке E формулами $x \oplus y = (x^p + y^p)^{1/p}$ и $\lambda \circledast x = \lambda^{1/p}x$, где $x, y \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $E_{(p)} := (E, \oplus, \circledast, \leqslant)$ — векторная решетка. Обозначим символом ι_p тождественное отображение на $(E, \leqslant)$, рассматриваемое как оператор из E на $E_{(p)}$. Определим также функцию $\|\cdot\|_{(p)} : E_{(p)} \to \mathbb{R}$ формулой $\|\iota_p(x)\|_{(p)} := \|x\|^p$ $(x \in E)$. Векторную решетку $E_{(p)}$ вместе с квазинормой $\|\cdot\|_{(p)}$ называют p-*вогнутизацией* решетки E (см. книгу Линденштрауса и Цафрири [18]).

Если $s \in \mathbb{N}$, то приняты также обозначения $E^{s\odot} := E_{(s)}$ и $x^{s\odot} := \iota_s(x)$ (см. Булабиар и Буcкес [19]). При этом существует единственное симметричное s-линейное отображение $\odot_s : E^s \to E^{s\odot}$ такое, что $\odot_s(x, \dots, x) = \iota_s(x)$ для всех $x \in E_+$. Соответствующий s-однородный полином из E в $E^{s\odot}$ называют *каноническим полиномом* банаховой решетки E и обозначают символом $\jmath_s$, подробности см. в [20].

В следующем предложении собраны основные факты об операторе ι_p [20].

Предложение 2.1. *Нелинейное отображение $\iota_p : E \to E_{(p)}$ обладает свойствами:*

(1) *ι_p — порядковый изоморфизм и гомеоморфизм между E и $E_{(p)}$;*

(2) *ι_p нечетно и сохраняет модуль: $\iota_p(-x) = -\iota_p(x)$ и $|\iota_p(x)| = \iota_p(|x|)$ для всех $x \in E$;*

(3) *ι_p ортогонально аддитивен и сохраняет дизъюнктность: $\iota_p(x+y) = \iota_p(x) + \iota_p(x)$ и $x \perp y$ влечет $\iota_p(x) \perp \iota_p(x)$ для всех $x, y \in E$;*

(4) *$\iota_p\big((x^p + y^p)^{1/p}\big) = \iota_p(x) \oplus \iota_p(y)$ и $\iota_p(\lambda^{1/p} x) = \lambda \circledast \iota_p(x)$ для всех $x, y \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$;*

(5) *$(E_{(p)})_{(q)} = (E_{(q)})_{(p)} = E_{(qp)}$ и $\iota_p \circ \iota_q = \iota_q \circ \iota_p = \iota_{qp}$, в частности, $\iota_{1/s} = \iota_s^{-1}$;*

(6) *если $p \in \mathbb{N}$, то $\jmath(x) = \iota_p(x^+) + (-1)^p \iota_p(x^-)$ для всех $x \in E$.*

$\lhd$ Все утверждения следуют непосредственно из определения ι_p и конструкции $E_{(p)}$. $\rhd$

Вообще говоря, $\|\cdot\|_{(p)}$ не является нормой, так как вместо неравенства треугольника выполняется $\|x \oplus y\|_{(p)} \leqslant 2^{|1-1/p|}(\|x\|_{(p)} + \|y\|_{(p)})$. Чтобы гарантировать неравенство треугольника, нужно дополнительное предположение о выпуклости E.

Определение 2.4. Банахову решетку E называют *p-выпуклой,* $0 < p < \infty$, если существует постоянная C такая, что

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| \leqslant C \left(\sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4}$$

для любого конечного набора $\{x_1, \dots, x_m\}$ in E [18].

Лемма 2.1. *Пусть $0 < p,\ q < \infty$. Вогнутизация $E_{(p)}$ банаховой решетки E будет q-выпуклой в том и только в том случае, когда E (pq)-выпукла. В частности, $E_{(p)}$ — банахова решетка лишь в том случае, когда E r-выпукла для некоторого $p \leqslant r < \infty$.*

$\lhd$ См. [20, следствие 3.12]. $\rhd$

При довольно общих условиях для s-однородного ортогонально аддитивного полинома $P : E \to F$ существует единственный линейный оператор $T : E^{s\odot} \to Y$ такой, что

$$P(x) = T(x^{s\odot}), \quad x \in E. \tag{5}$$

Теорема 2.1. *Пусть E — банахова решетка, Y — векторное пространство и $P : E \to Y$ — ортогонально аддитивный s-однородный полином. Тогда P допускает представление* (5) *в каждом из следующих случаев:*

(1) *Y — нормированное пространство и P непрерывен по норме;*

(2) *Y — нормированная решетка и P регулярен.*

Более того, отображение $T \mapsto T \circ \jmath_s$ осуществляет соответственно изометрический изоморфизм нормированных пространств $\mathscr{L}(E^{s\odot}, Y)$ и $\mathscr{P}_o({}^sE, Y)$ и порядковый и изометрический изоморфизм упорядоченных нормированных пространств $\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, Y)$ и $\mathscr{P}_o^r({}^sE, Y)$.

$\lhd$ См. теорему 2.10 и следствия 2.11 и 2.12 в [20]. $\rhd$

Замечание 2.1. Теорема 2.1 лежит в основе *метода линеаризации* изучения ортогонально аддитивных полиномов. В наиболее общем виде она предложена в [13] и уточнена в [7]. Примеры применения метода рассмотрены в [4, 20, 21].

3. Характеризация дискретных порядково непрерывных банаховых решеток

Дискретные порядково непрерывные банаховы решетки играют важную роль в различных вопросах теории операторов (см., например, [14] и [15]). Уолш [22, теорема 1] дал внутреннее описание этого класса пространств как класса банаховых решеток с компактными по норме порядковыми интервалами, а Ван Рой [23, теорема 10.2] установил, что банахова решетка E дискретна и поряково непрерывна тогда и только тогда, когда для любой банаховой решетки F упорядоченное пространство регулярных операторов из E в F является векторной решеткой. Внук [24] получил другую характеризацию дискретных порядково непрерывных банаховых решеток, для формулировки которой нужны следующие обозначения. Равенство $\mathscr{P}_o({}^sE,F)=\mathscr{P}^r_o({}^sE,F)$ означает, что каждый непрерывный ортогонально аддтивный s-однородный полином из E в F регулярен. Если же, сверх того, $\|P\|=\|P\|_r$ для всех $P\in\mathscr{P}_o({}^sE,F)$, то будем писать $\mathscr{P}_o({}^sE,F)\equiv\mathscr{P}^r_o({}^sE,F)$. При $s=1$ приняты обозначения: $\mathscr{L}(E,F):=\mathscr{P}_o({}^1E,F)$ и $\mathscr{L}^r(E,F):=\mathscr{P}^r_o({}^1E,F)$.

Теорема 3.1. *Для порядково σ-полной банаховой решетки E равносильны утверждения:*

(1) *E дискретна и порядково непрерывна;*

(2) $\mathscr{L}(E,c_0)=\mathscr{L}^r(E,c_0)$;

(3) $\mathscr{L}(E,c_0)\equiv\mathscr{L}^r(E,c_0)$.

Для того чтобы получить вариант этой теоремы для ортогонально аддитивных полиномов, нам потребуются два вспомогательных результата.

Лемма 3.1. *s-выпуклая банахова решетка E дискретна (порядково непрерывна, обладает свойством Леви или Фату) тогда и только тогда, когда таковой является банахова решетка $E_{(s)}$.*

$\triangleleft$ Доказательство следует непосредственно из определений и леммы 2.1. Нужно лишь заметить, что в силу предложения 2.1 (1) отображения ι_s и ι_s^{-1} сохраняют дискретные элементы, порядково ограниченные множества, точные границы, монотонные последовательности и направленнные сети, а ввиду s-однородности ι_s (предложение 2.1 (4)), сохраняют также и ограниченность по норме. $\triangleright$

Теорема 3.2. *Пусть E — банахова решетка, $\mathrm{at}_1(E)$ — множество дискретных элементов единичной нормы в E, а F — AM-пространство. Если линейная оболочка $\mathrm{at}_1(E)$ плотна в E, то $\mathscr{P}_o({}^sE,F)\equiv\mathscr{P}^r_o({}^sE,F)$.*

$\triangleleft$ Для $s=1$ этот факт установил Хун Юнь Сюн [25, теорема 2.2]. В общем случае работают аналогичные соображения. Пусть $A:=\mathrm{at}_1(E)$ и линейная оболочка $E_0:=\mathrm{Lin}(A)$ плотна в E. Тогда E_0 — подрешетка в E и отображение $P\mapsto P_0:=P|_{E_0}$ представляет собой изометрический решеточный изоморфизмом из $\mathscr{P}_o({}^sE,F)$ на $\mathscr{P}_o({}^sE_0,F)$, так как каждый полином из $\mathscr{P}_o({}^sE_0,F)$ допускает единственное продолжение на все E с сохранением нормы. Заметим, что A — базис Гамеля пространства E_0 и произвольный $x\in E_0$ может быть представлен в виде $x=\sum_{k=1}^n\lambda_ka_k$, где $n\in\mathbb{N}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ и $A(x):=\{a_1,\dots,a_n\}\subset A$. Таким образом, полином $P\in\mathscr{P}_o(E,F)$ однозначно определяется своими значениями на подрешетке E_0, причем для $x\in E_0$ имеем $P_0(x)=\sum_{k=1}^n\lambda_k^sP(a_k)$ в силу ортогональной аддитивности и s-однородности P. Если $x_1,\dots,x_s\in E_0$, то $x_j=\sum_{k=1}^n\lambda_{jk}a_{jk}$ для всех $j=1,\dots,s$, так как, добавляя в сумму нулевые члены, можно считать $A(x_i)=A(x_j)$. Используя ортосимметричность $\check{P}$, выводим

$$\check{P}_0(x_1,\dots,x_s)=\sum_{k=1}^n\lambda_{1k}\cdots\lambda_{sk}P(a_k).$$

Отсюда видно, что $P \geqslant 0$ в том и только в том случае, когда $P_0 \geqslant 0$, в то время как последнее означает, что $P(a) = P_0(a) \geqslant 0$ для всех $a \in A$. Определим полином $Q_0 : E_0 \to F$ формулой $Q_0(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^s |P(a_k)|$. Как видно, Q_0 будет s-однородным полиномом, порождающий s-линейный, полилинейный оператор которого имеет вид $\check{Q}_0(x_1, \dots, x_s) = \sum_{k=1}^n \lambda_{1k} \cdots \lambda_{sk} |P(a_k)|$. Так как различные $a_1, \dots, a_n$ попарно дизъюнктны, то

$$|x| = \sum_{k=1}^n |\lambda_k| a_k = \sum_{k=1}^n \operatorname{sgn}(\lambda_k) \lambda_k a_k = \bigvee_{\varepsilon_k \in \{-1,1\}} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k a_k \right|.$$

Теперь, принимая во внимание, что E является AM-пространством, приходим к оценкам

$$\begin{aligned} \|Q_0(x)\| &\leqslant \left\| \sum_{k=1}^n |\lambda_k^s P(x_k)| \right\| = \left\| \bigvee_{\varepsilon_k \in \{-1,1\}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k^s P(a_k) \right\| \\ &= \bigvee_{\varepsilon_k \in \{-1,1\}} \left\| P\left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k a_k \right) \right\| \leqslant \|P\| \, \|x\|^s. \end{aligned}$$

В силу сказанного выше существует единственный полином $Q \in \mathscr{P}_o({}^sE, F)$ такой, что $Q(x) = Q_0(x)$ для всех $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \in E_0$, причем $Q \geqslant \pm P$, так как $Q(a) \geqslant \pm P(a)$ для всех $a \in A$. Следовательно, $Q \in \mathscr{P}^r({}^sE, F)$ и $\|P\|_r \leqslant \|Q\|$. С другой стороны, $\|Q\| = \|Q_0\| \leqslant \|P\|$, поэтому $\|P\|_r = \|P\|$. $\rhd$

Теорема 3.3. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $(E, \|\cdot\|)$ — порядково σ-полная s-выпуклая банахова решетка. Равносильны следующие утверждения:*

(1) $\mathscr{P}_o({}^sE, F) \equiv \mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ *для любого AM-пространства F;*

(2) $\mathscr{P}_o({}^sE, F) = \mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ *для любого AM-пространства F;*

(3) $\mathscr{P}_o({}^sE, c_0) = \mathscr{P}_o^r({}^sE, c_0)$*;*

(4) $\mathscr{P}_o({}^sE, c_0) \equiv \mathscr{P}_o^r({}^sE, c_0)$*;*

(5) *E дискретна и порядково непрерывна.*

$\lhd$ Импликации (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) очевидны. Заметим, что $E^{s\odot}$ — банахова решетка в силу леммы 2.1. Если $\mathscr{P}_o({}^sE, c_0) = \mathscr{P}_o^r({}^sE, c_0)$, то по теореме 2.1 имеем $\mathscr{L}(E^{s\odot}, c_0) = \mathscr{L}^r(E^{s\odot}, c_0)$, следовательно, $\mathscr{L}(E^{s\odot}, c_0) \equiv \mathscr{L}^r(E^{s\odot}, c_0)$ и, кроме того, $E^{s\odot}$ дискретна и порядкво непрерывна ввиду теоремы 3.1. Повторное применение теоремы 2.1 дает $\mathscr{P}_o({}^sE, c_0) \equiv \mathscr{P}_o^r({}^sE, c_0)$, а на основании леммы 3.1 заключаем, что E дискретна и порядково непрерывна. Таким образом, (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (5). Оставшаяся импликация (5) $\Longrightarrow$ (1) следует из теоремы 3.2. $\rhd$

Замечание 3.1. Импликацию (5) $\Longrightarrow$ (1) в теореме 3.3 можно вывести из теоремы 2.1 не обращаясь к теореме 3.2. Однако, теорема 3.2 имеет самостоятельный интерес, так как она утверждает справедливость этой импилкации при более слабых предположениях. Нам неизвестно, верно ли обращение теоремы 3.2.

Рассмотрим еще два результата о регулярности ограниченных по норме полиномов, хорошо известных в линейном случае. Всякое дискретное AL-пространство изометрически и решеточно изоморфно $l^1(\Gamma)$ для некоторого непустого множества Γ. В то же время, дискретное AL-пространство является единственной с точностью до решеточного изоморфизма банаховой решетки E, для которой выполняется равенство $\mathscr{L}(E, F) = \mathscr{L}^r(E, F)$ [15, теорема 2.4].

Теорема 3.4. *Для банаховой решетки E равносильны следующие утверждения:*

(1) *E решеточно изоморфна $l^s(\Gamma)$ для некоторого непустого множества Γ;*

(2) $\mathscr{P}_o({}^sE,F)=\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ *для любой банаховой решетки* F*;*

(3) $\mathscr{P}_o({}^sE,F)$ *— векторная решетка для любой банаховой решетки* F*.*

$\lhd$ При $s=1$ требуемое — это теорема 2.4 из [15]. Общий случай легко выводится по изложенному образцу с использованием теоремы 2.1. Нужно только заметить, что если E решеточно изоморфна $l^s(\Gamma)$ для некоторого непустого множества Γ, то $E^{s\odot}$ решеточно изоморфна $l^1(\Gamma)$. $\rhd$

Напомним, что AL^s*-пространством* называют банахову решетку $(E,\|\cdot\|)$, норма которой удовлетворяет равенству $\|x+y\|^s=\|x\|^s+\|y\|^s$ для любой пары дизъюнктных элементов $x,y\in E_+$.

Теорема 3.5. *Для банаховой решетки* F *равносильны следующие утрверждения:*

(1) F *обладает свойством Леви;*

(2) $\mathscr{P}_o({}^sE,F)=\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ *для любой банаховой решетки* E*, изоморфной некоторому* AL^s*-пространству;*

(3) $\mathscr{P}_o({}^sE,F)$ *является решеткой для любой банаховой решетки* E*, изоморфной некоторому* AL^s*-пространству.*

$\lhd$ При $s=1$ требуемое — это теорема 2.8 из [15]. Далее работают те же соображения, что и выше. $\rhd$

4. Порядковая непрерывность регулярной нормы

В работе трех авторов Цзы Ли Чен, Ин Фэн и Джин Си Чен [26, теоремы 2 и 4] найдены необходимые и достаточные условия, при которых пространство линейных регулярных операторов между банаховыми решетками является порядково непрерывной решеткой или же KB-пространством. В данном параграфе приводятся аналогичные результаты для пространства регулярных ортогонально аддитивных однородных полиномов. Предварительно введем несколько определений.

Определение 4.1. Полином $P:E\to F$ называют *M-слабо компактынм*, если $\|P(x_n)\|\to 0$ для каждой дизъюнктной последовательноси $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в B_E, и *L-слабо компактным*, если $P(B_E)$ — L-слабо компактное множество в F, т. е. $\|y_n\|\to 0$ для любой дизъюнктной последовательности $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, содержащейся в солидной оболочке множества $P(B_E)$. Здесь B_X обозначает единичный шар банахова пространства X, а солидная оболочка $\mathrm{sol}(A)$ множества A определяется формулой $\mathrm{sol}(A):=\bigcup\{[-|x|,|x|]:x\in A\}$.

Как видно, при $s=1$ получаем определения L- и M-слабо компактных линейных операторов [17, определения 3.6.1 и 3.6.9]. Теперь сформулируем теорему о порядковой непрерывности регулярной нормы в пространстве линейных регуляных операторов.

Теорема 4.1. *Для пары банаховых решеток* E *и* F *равносильны следующие условия:*

(1) $\mathscr{L}^r(E,F)$ *— векторная решетка и регулярная норма* $\|\cdot\|_r$ *на ней порядково непрерывна;*

(2) *каждый положительный оператор из* E *в* F *является* L*- и* M*-слабо компактным.*

$\lhd$ Этот результат установлен в [27, теорема 2]. $\rhd$

Теорема 4.2. *Пусть* E *и* F *— банаховы решетки, причем* E s*-выпукла для некоторого натурального* $s\in\mathbb{N}$*. Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) $\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ *— векторная решетка и регулярная норма* $\|\cdot\|_r$ *на ней порядково непрерывна;*

(2) *каждый положительный* s*-однородный ортогонально аддитивный полином из* E *в* F *является* L*- и* M*-слабо компактным.*

$\lhd$ В силу теоремы 2.1 отображение $T \mapsto P = T \circ \jmath$ осуществляет сохраняющий регулярную норму порядковый изоморфизм упорядоченных нормированных пространств $\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, F)$ и $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$. Следовательно, эти пространства одновременно являются или нет векторными решетками, а также регулярные нормы в них одновременно будут или нет порядково непрерывными. Отсюда видно, что утверждения 4.2 (1) и 4.1 (1) равносильны при условии s-выпуклости E. Далее, последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дизъюнктна и содержится в B_E тогда и только тогда, когда последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где $y_n = \iota_s(x_n)$, дизъюнктна и содержится в $B_{E^{s\odot}}$. Так как при этом $P(x_n) = T(y_n)$, то P и T одновременно будут или нет M-слабо компактными. Аналогичное утверждение относительно L-слабой компактности очевидно, так как $P(B_E) = T(B_{E^{s\odot}})$. Таким образом, утверждения 4.2 (2) и 4.1 (2) равносильны (также при условии s-выпуклости E) и требуемое вытекает из теоремы 4.1. $\rhd$

Теорема 4.3. *Пусть E и F — банаховы решетки, причем E s-выпукла для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) *$\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ является KB-пространством;*

(2) *F — KB-пространство и регулярная норма на $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ порядково непрерывна;*

(3) *F — KB-пространство и каждый положительный s-однородный ортогонально аддитивный полином из E в F является M-слабо компактным.*

$\lhd$ Здесь работают те же соображения, что и при доказательстве теоремы 4.2. Нужно только сослаться на [27, теоремы 4] и принять во внимание, что $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ будет KB-пространством тогда и только тогда, когда таковым является упорядоченное нормированное пространство $\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, F)$. $\rhd$

Определение 4.2. Говорят, что банахова решетка E обладает *положительным свойством Шура*, если любая последовательность положительных элементов в E, слабо сходящаяся к нулю, сходится к нулю по норме.

Теорема 4.4. *Пусть E и F — банаховы решетки, причем F обладает положительным свойством Шура, а E s-выпукла для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Тогда равносильны утверждения:*

(1) *$(\mathscr{P}_o^r({}^sE, F), \|\cdot\|_r)$ является KB-пространством;*

(2) *регулярная норма $\|\cdot\|_r$ пространства $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ порядково непрерывна;*

(3) *E не содержит подрешеток, изоморфных l^s.*

$\lhd$ Импликация (1) $\Longrightarrow$ (2) очевидна. По теореме 2.1 утверждение (2) равносильно порядковой непрерывности регулярной нормы пространства $\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, F)$. Чен установил в [27, теорема 3.3], что последнее равносильно порядковой непрерывности $(E^{s\odot})'$. В то же время, порядковая непрерывность сопряженного пространства $(E^{s\odot})'$ равносильна тому, что $E^{s\odot}$ не содержит подрешеток, решеточно изоморфных l^1 [17, теорема 2.4.14]. Последнее означает, что E не содержит подрешеток, решеточно изоморфных l^s [21]. Таким образом, утверждения (2) и (3) равносильны. Чтобы убедиться в справедливости оставшейся импликации (3) $\Longrightarrow$ (1), достаточно применить к банаховым решеткам $E^{s\odot}$ и F теорему 13 из [26], утверждающую, что если F обладает положительным свойством Шура, то $\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, F)$ будет KB-пространством тогда и только тогда, когда сопряженная банахова решетка $(E^{s\odot})'$ порядково непрерывна. $\rhd$

Определение 4.3. Пусть $1 \leqslant \infty$. Говорят, что норма банаховой решетки E *p-супераддитивна* или *p-субаддитивна*, если, соответственно, $(\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p} \leqslant \|x + y\|$ или $\|x + y\| \leqslant (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}$ для любых дизъюнктных $x, y \in E_+$ (см. [17, p. 138] или [28, определение 7.7]). Точную нижнюю (верхнюю) границу чисел $p \geqslant 1$, для которых E допускает эквивалентную p-супераддитивную (p-субаддитивную) норму, называют соотвественно *верхним индексом* (*нижним индексом*) E и обозначают символом $d(E)$ (символом $t(E)$) [28, определение 8.7].

Известно, что $1 \leqslant d(E) \leqslant t(E) \leqslant \infty$ для любой банаховой решетки E; если $t(E) < \infty$, то E порядково непрерывна, а если $d(E) > 1$, то E' порядково нерпрерывна, см. [28, предложение 8.11], а также [29]. В упомянутой выше работе [26] установлено, что если $d(E) > t(F)$, то $(\mathscr{L}^r(E,F), \|\cdot\|_r)$ является KB-пространством. Чтобы получть аналогичный результат для пространства регулярных ортогонально аддитивных однородных полиномов, необходим следующий вспомогательный факт.

Лемма 4.1. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{R}$. Для произвольной банаховой решетки E выполняются равенства $s \cdot d(E) = d(E^{s\odot})$ и $s \cdot t(E) = t(E^{s\odot})$.*

$\lhd$ Если $1 \leqslant p < \infty$, то для любой пары дизъюнктрых элементов $x, y \in E_+$ равносильны неравенства $\|\iota_s(x) + \iota_s(y)\| \leqslant (\|\iota_s(x)\|^p + \|\iota_s(x)\|^p)^{1/p}$ и $\|x+y\|^s \leqslant (\|x\|^{ps} + \|y\|^{ps})^{1/p}$ ввиду ортогональной аддитивности ι_s и равенства $\|\iota_s(x)\| = \|x\|^s$. Отсюда вытекает $s \cdot t(E) = t(E^{s\odot})$. Аналогично выводится второе равенство. $\rhd$

Теорема 4.5. *Пусть E и F — банаховы решетки, причем E s-выпукла. Если $d(E) > t(F)$, то упорядоченное нормированное пространство $(\mathscr{P}_o^r({}^sE, F), \|\cdot\|_r)$ является KB-пространством.*

$\lhd$ Линейный случай $s = 1$ обоснован в [26, теорема 14]. Общий случай сводится к линейному с помощью теоремы 2.1: если $d(E^{s\odot}) > t(F^{s\odot})$, то $(\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, F), \|\cdot\|_r)$ будет KB-пространством. В частности, при этих условиях F будет KB-пространством (см. доказательство теоремы 14 в [26]). В то же время, неравенства $d(E^{s\odot}) > t(F^{s\odot})$ и $d(E) > t(F)$ равносильны ввиду леммы 4.1. Следовательно, $d(E) > t(F)$ влечет, что банахова решетка $(\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, F), \|\cdot\|_r)$, а также извометрически и порядково изоморфная ей банахова решетка $(\mathscr{P}_o^r({}^sE, F), \|\cdot\|_r)$ является KB-пространством. $\rhd$

Благодарность. Авторы выражают благодарность анонимному рецензенту, замечание и предложения которого позволили устранить ряд неточностей и опечаток.

Литература

1. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.—Berlin: Springer, 1999.
2. *Sundaresan K.* Geometry of spaces of homogeneous polynomials on Banach lattices // Appl. Geometry and Discrete Math. DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.—Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1991.—P. 571–586.
3. *Grecu B. C., Ryan R. A.* Polynomials on Banach spaces with unconditional bases // Proc. Amer. Math. Soc.—2005.—Vol. 133, № 4.—P. 1083–1091. DOI: 10.1090/S0002-9939-04-07738-X.
4. *Kusraeva Z. A.* Orthogonally additive polynomials on vector lattices // Thesis, Sobolev Inst. of Math. of the Sib. Branch of the RAS.—Novosibirsk, 2013.
5. *Linares P.* Orthogonal additive polynomials and applications // Thesis, Departamento de Analisis Matematico. Universidad Complutense de Madrid.—2009.
6. *Loane J.* Polynomials on Riesz spaces // Thesis, Department of Math. Nat. Univ. of Ireland.—Galway, 2007.
7. *Ben Amor F.* Orthogonally additive homogenous polynomials on vector lattices // Commun. Algebra.—2015.—Vol. 43, № 3.—P. 1118–1134. DOI: 10.1080/00927872.2013.865038.
8. *Benyamini Y., Lassalle S., Llavona J. G.* Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices // Bull. London Math. Soc.—2006.—Vol. 38, № 3.—P. 459–469. DOI: 10.1112/s0024609306018364.
9. *Bu Q., Buskes G.* Polynomials on Banach lattices and positive tensor products // J. Math. Anal. Appl.—2012.—Vol. 388, № 2.—P. 845–862. DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.10.001.
10. *Cruickshank J., Loane J., Ryan R. A.* Positive polynomials on Riesz spaces // Positivity.—2017.—Vol. 21, № 3.—P. 885–895. DOI: 10.1007/s11117-016-0439-8.
11. *Ibort A., Linares P., Llavona J. G.* A representation theorem for orthogonally additive polynomials on Riesz spaces // Rev. Mat. Complut.—2012.—Vol. 25.—P. 21–30. DOI: 10.1007/s13163-010-0053-4.

12. *Kusraev A. G., Kusraeva Z. A.* Monomial decomposition of homogeneous polynomials in vector lattices // Adv. Oper. Theory.—2019.—Vol. 4, № 2.—P. 428–446. DOI: 10.15352/aot.1807-1394.
13. *Кусраева З. А.* О представлении ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн.—2011.—Т. 52, № 2.—С. 315–325.
14. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D.* Positive operators // Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Vol. 1 / Eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss.—Elsevier, 2001.—P. 85–122.
15. *Wickstead A. W.* Regular operators between Banach lattices // Positivity, Trends in Mathematics.—Basel: Birkhäuser.—2007.—P. 255–279. DOI: 10.1007/978-3-7643-8478-4_9.
16. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—London etc.: Acad. Press Inc., 1985.—xvi+367 p.
17. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1991.
18. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—243 p.
19. *Boulabiar K., Buskes G.* Vector lattice powers: f-algebras and functional calculus // Comm. Algebra.—2006.—Vol. 34, №4.—P. 1435–1442. DOI: 10.1080/00927870500454885.
20. *Kusraeva Z. A.* Powers of quasi-Banach lattices and orthogonally additive polynomials // J. Math. Anal. Appl.—2018.—Vol. 458, № 1.—P. 767–780. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.09.019.
21. *Кусраева З. А.* О компактной мажорации однородных ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн.—2016.—Т. 57, № 3.—P. 658–665. DOI: 10.17377/smzh.2016.57.313.
22. *Walsh B.* On characterising Kothe sequence spaces as vector lattices // Math. Ann.—1968.—Vol. 175.—P. 253–256. DOI: 10.1007/BF02063211.
23. *Van Rooij A. C. M.* When do the regular operators between two Riesz spaces form a Riesz space? // Technical Report 8410.—Nijmegen: Katholieke Universiteit, 1984.
24. *Wnuk W.* Characterization of discrete Banach lattices with order continuous norms // Proc. Amer. Math. Soc.—1988.—Vol. 104, № 1.—P. 197–200. DOI: 10.1090/S0002-9939-1988-0958066-0.
25. *Hong-Yun Xiong.* On whether or not $\mathscr{L}(E,F) = \mathscr{L}^r(E,F)$ for some classical Banach lattices E and F // Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.—1984.—Vol. 46, № 3.— P. 267–282. DOI: 10.1016/1385-7258(84)90027-1.
26. *Zi li Chen, Ying Feng, Jin Xi Chen.* The Order Continuity of the Regular Norm on Regular Operator Spaces // Abstract and Applied Analysis.—2013.—Vol. 2013, article ID 183786.—6 p. DOI: 10.1155/2013/183786.
27. *Zi li Chen.* On the order continuity of the regular norm // Proceedings Positivity IV — Theory and Applications.—Dresden, 2006.—P. 45–51.
28. *Schwarz H.-V.* Banach Lattices and Operators.—Leipzig: Teubner, 1984.
29. *Dodds P. G., Fremlin D. H.* Compact operators in Banach lattices // Israel J. Math.—1979.—Vol. 34, № 4.—P. 287–320. DOI: 10.1007/BF02760610.

Статья поступила 13 мая 2020 г.

Кусраева Залина Анатольевна
Региональный научно-образовательный математический центр ЮФУ, *ведущий научный сотрудник*
РОССИЯ, 344006, Ростов-на-Дону, Большая садовая, 105/42;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН, *ведущий научный сотрудник*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
E-mail: zali13@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-8817-1888

Сиукаев Сергей Николаевич
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, *доцент*
РОССИЯ, 362019, Владикавказ, Ватутина, 44

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 4, P. 92–103

SOME PROPERTIES OF ORTHOGONALLY ADDITIVE HOMOGENEOUS POLYNOMIALS ON BANACH LATTICES

Kusraeva, Z. A.[1,2] and Siukaev, S. N.[3]

[1]Regional Mathematical Center of Southern Federal University,
105/42 Bolshaya Sadovaya St., Rostov-on-Don 344006, Russia;
[2]Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia;
[3]North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
44 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: zali13@mail.ru

Abstract. Let E and F be Banach lattices and let $\mathscr{P}_o({}^sE,F)$ stand for the space of all norm bounded orthogonally additive s-homogeneous polynomial from E to F. Denote by $\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ the part of $\mathscr{P}_o({}^sE,F)$ consisting of the differences of positive polynomials. The main results of the paper read as follows.
Theorem 3.4. *Let $s\in\mathbb{N}$ and $(E,\|\cdot\|)$ is a σ-Dedekind complete s-convex Banach lattice. The following are equivalent:* (1) $\mathscr{P}_o({}^sE,F)\equiv\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ *for every AM-space F.* (2) $\mathscr{P}_o({}^sE,c_0)=\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ *for every AM-space F.* (3) $\mathscr{P}_o({}^sE,c_0)=\mathscr{P}_o^r({}^sE,c_0)$. (4) $\mathscr{P}_o({}^sE,c_0)\equiv\mathscr{P}_o^r({}^sE,c_0)$. (5) *$E$ is atomic and order continuous.*
Theorem 4.3. *For a pair of Banach lattices E and F the following are equivalent:* (1) *$\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ is a vector lattice and the regular norm $\|\cdot\|_r$ on $\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ is order continuous.* (2) *Each positive orthogonally additive s-homogeneous polynomial from E to F is L- and M-weakly compact.*
Theorem 4.6. *Let E and F be Banach lattices. Assume that F has the positive Schur property and E is s-convex for some $s\in\mathbb{N}$. Then the following are equivalent:* (1) $(\mathscr{P}_o^r({}^sE,F),\|\cdot\|_r)$ *is a KB-space.* (2) *The regular norm $\|\cdot\|_r$ on $\mathscr{P}_o^r({}^sE,F)$ is order continuous.* (3) *E does not contain any sulattice lattice isomorphc to l^s.*

Key words: Banach lattice, AM-space, KB-space, homogeneous polynomial, orthogonal additivity, regular norm, order continuity.

Mathematical Subject Classification (2010): 46A16, 46B42, 46G25, 47H60, 47L22.

For citation: *Kusraeva, Z. A. and Siukaev, S. N.* Some Properties of Orthogonally Additive Homogeneous Polynomials on Banach Lattices, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 92–103 (in Russian). DOI: 10.46698/d4799-1202-6732-b.

References

1. *Dineen, S. Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Berlin, Springer, 1999.
2. *Sundaresan, K.* Geometry of Spaces of Homogeneous Polynomials on Banach Lattices, *Applied Geometry and Discrete Mathematics, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, Providence, R.I., Amer. Math. Soc., 1991, pp. 571–586.
3. *Grecu, B. C. and Ryan, R. A.* Polynomials on Banach Spaces with Unconditional Bases, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2005, vol. 133, no. 4, pp. 1083–1091. DOI: 10.1090/S0002-9939-04-07738-X.
4. *Kusraeva, Z. A.* Orthogonally Additive Polynomials on Vector Lattices, *Thesis, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of RAS*, Novosibirsk, 2013.
5. *Linares, P.* Orthogonal Additive Polynomials and Applications *Thesis, Departamento de Analisis Matematico, Universidad Complutense de Madrid*, 2009.
6. *Loane, J.* Polynomials on Riesz Spaces, *Thesis, Department of Mathematics National Univercity of Ireland*, Galway, 2007.
7. *Ben Amor, F.* Orthogonally Additive Homogenous Polynomials on Vector Lattices, *Communications in Algebra* , 2015, vol. 43, no. 3, pp. 1118–1134. DOI: 10.1080/00927872.2013.865038.
8. *Benyamini, Y., Lassalle, S. and Llavona, J. G.* Homogeneous Orthogonally Additive Polynomials on Banach Lattices, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 2006, vol. 38, no. 3, pp. 459–469. DOI: 10.1112/s0024609306018364.

9. *Bu, Q. and Buskes, G.* Polynomials on Banach Lattices and Positive Tensor Products, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, vol. 388, no. 2, pp. 845–862. DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.10.001.
10. *Cruickshank, J., Loane, J. and Ryan, R. A.* Positive Polynomials on Riesz Spaces, *Positivity*, 2017, vol. 21, no. 3, pp. 885–895. DOI: 10.1007/s11117-016-0439-8.
11. *Ibort, A., Linares, P. and Llavona, J. G.* A Representation Theorem for Orthogonally Additive Polynomials on Riesz Spaces, *Revista Matematica Complutense*, 2012, vol. 25, no. 1, pp. 21–30. DOI: 10.1007/s13163-010-0053-4.
12. *Kusraev, A G. and Kusraeva, Z. A.* Monomial Decomposition of Homogeneous Polynomials in Vector Lattices, *Advances in Operator Theory*, 2019, vol. 4, no. 2, pp. 428–446. DOI: 10.15352/aot.1807-1394.
13. *Kusraeva, Z. A.* Representation of Orthogonally Additive Polynomials, *Siberian Mathematical Journal*, 2011, vol. 52, no. 2, pp. 248–255. DOI: 10.1134/S003744661102008X.
14. *Abramovich, Y. A. and Aliprantis, C. D.* Positive Operators, *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, vol. 1, eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, Elsevier, 2001, pp. 85–122.
15. *Wickstead, A. W.* Regular Operators Between Banach Lattices, *Positivity, Trends in Mathematics*, Basel, Birkhäuser, 2007, pp. 255–279. DOI: 10.1007/978-3-7643-8478-4_9.
16. *Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. Positive Operators*, London etc., Academic Press Inc., 1985, xvi+367 p.
17. *Meyer-Nieberg, P. Banach Lattices*, Berlin etc., Springer-Verlag, 1991.
18. *Lindenstrauss, J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces, vol. 2, Function Spaces*, Berlin etc., Springer-Verlag, 1979, 243 p.
19. *Boulabiar, K. and Buskes, G.* Vector Lattice Powers: f-Algebras and Functional Calculus, *Communications in Algebra* , 2006, vol. 34, no. 4, pp. 1435–1442. DOI: 10.1080/00927870500454885.
20. *Kusraeva, Z. A.* Powers of Quasi-Banach Lattices and Orthogonally Additive Polynomials, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2018, vol. 458, no. 1, pp. 767–780. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.09.019.
21. *Kusraeva, Z. A.* On Compact Domination of Homogeneous Orthogonally Additive Polynomials, *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, no. 3, pp. 519–524. DOI: 10.1134/S0037446616030137.
22. *Walsh, B.* On Characterising Kothe Sequence Spaces as Vector Lattices, *Mathematische Annalen*, 1968, vol. 175, pp. 253–256. DOI: 10.1007/BF02063211.
23. *Van Rooij, A. C. M. When do the Regular Operators Between Two Riesz Spaces Form a Riesz Space? Technical Report 8410*, Nijmegen, Catholic University, 1984.
24. *Wnuk, W.* Characterization of Discrete Banach Lattices with Order Continuous Norms, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1988, vol. 104, no. 1, pp. 197–200. DOI: 10.1090/S0002-9939-1988-0958066-0.
25. *Hong-Yun Xiong.* On Whether or Not $\mathscr{L}(E,F) = \mathscr{L}^r(E,F)$ for Some Classical Banach Lattices E and F, *Indagationes Mathematicae* (*Proceedings*), 1984, vol. 87, no. 3, pp. 267–282. DOI: 10.1016/1385-7258(84)90027-1.
26. *Zi li Chen, Ying Feng and Jin Xi Chen.* The Order Continuity of the Regular Norm on Regular Operator Spaces, *Abstract and Applied Analysis*, 2013, vol. 2013, article ID 183786, 6 p. DOI: 10.1155/2013/183786.
27. *Chen, Z. L.* On the Order Continuity of the Regular Norm, *Proceedings Positivity IV — Theory and Applications*, Dresden, 2006, pp. 45–51.
28. *Schwarz, H.-V. Banach Lattices and Operators*, Leipzig, Teubner, 1984.
29. *Dodds, P. G. and Fremlin, D. H.* Compact Operators in Banach Lattices, *Israel Journal of Mathematics*, 1979, vol. 34, no. 4, pp. 287–320. DOI: 10.1007/BF02760610.

Received May 13, 2020

Zalina A. Kusraeva
Regional Mathematical Center of Southern Federal University,
105/42 Bolshaya Sadovaya St., Rostov-on-Don 344006, Russia,
Leading Researcher
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Leading Researcher
E-mail: `zali13@mail.ru`

Sergei N. Siukaev
North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
44 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia, *University Lecturer*

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 4, P. 104–118

УДК 517.968
DOI 10.46698/c3825-5071-7579-i

GRAND MORREY TYPE SPACES#

S. G. Samko[1,2] and S. M. Umarkhadzhiev[2,3]

[1] University of Algarve, Faro 8005-139, Portugal;
[2] Kh. Ibragimov Complex Institute of the Russian Academy of Sciences,
21 a Staropromyslovskoe Hwy, Grozny 364051, Russia;
[3] Academy of Sciences of Chechen Republic, 13 Esambaev Av., Grosny 364024, Russia

E-mail: ssamko@ualg.pt, umsalaudin@gmail.com

Dedicated to the 75-th anniversary of Professor S. S. Kutateladze

Abstract. The so called grand spaces nowadays are one of the main objects in the theory of function spaces. Grand Lebesgue spaces were introduced by T. Iwaniec and C. Sbordone in the case of sets Ω with finite measure $|\Omega| < \infty$, and by the authors in the case $|\Omega| = \infty$. The latter is based on introduction of the notion of grandizer. The idea of "grandization" was also applied in the context of Morrey spaces. In this paper we develop the idea of grandization to more general Morrey spaces $L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$, known as Morrey type spaces. We introduce grand Morrey type spaces, which include mixed and partial grand versions of such spaces. The mixed grand space is defined by the norm

$$\sup_{\varepsilon,\delta} \varphi(\varepsilon,\delta) \sup_{x\in E} \left(\int_0^\infty w(r)^{q-\delta} b(r)^{\frac{\delta}{q}} \left(\int\limits_{|x-y|<r} \big|f(y)\big|^{p-\varepsilon} a(y)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dy \right)^{\frac{q-\delta}{p-\varepsilon}} \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

with the use of two grandizers a and b. In the case of grand spaces, partial with respect to the exponent q, we study the boundedness of some integral operators. The class of these operators contains, in particular, multidimensional versions of Hardy type and Hilbert operators.

Key words: Morrey type space, grand space, grand Morrey type space, grandizer, partial grandization, mixed grandization, homogeneous kernel, Hardy type operator, Hilbert operator.

Mathematical Subject Classification (2010): 46E30, 42B35.

For citation: *Samko, S. G. and Umarkhadzhiev, S. M.* Grand Morrey Type Spaces, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 104–118. DOI: 10.46698/c3825-5071-7579-i.

1. Introduction

Last decades there were widely investigated the so called grand Lebesgue spaces, introduced in [1]; see for instance, [2–5] and references therein, where such spaces and operators on them were studied in the case of finite measure underlying set. An approach to grand Lebesgue spaces on sets of infinite measure was suggested and developed in [6–10].

#The research of S. Samko was supported by Russian Foundation for Basic Research under the grant 19-01-00223 and TUBITAK and Russian Foundation for Basic research under the grant20-51-46003. The research of S. Umarkhadzhiev was supported by TUBITAK and Russian Foundation for Basic Research under the grant 20-51-46003.

That idea of "grandization" was also applied in the context of Morrey spaces defined by the norm

$$\|f\|_{L^{p,\varphi}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \left\| \left(\frac{1}{\varphi(r)} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L^\infty(0,\,\mathrm{diam}\,\Omega)}, \tag{1}$$

we refer for instance to [11–14], see also references therein.

Our goal is to extend the notion of grandization to the spaces $L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$, with the norm of the type (1), where L^∞-norm is replaced by L^q-norm, $1 \leqslant q < \infty$, see precise definitions in Section 2. Such spaces are usually referred to as Morrey type spaces. These spaces were introduced and studied in [15] and [16]. In the case $w(r) = r^{-\lambda}$, $\lambda > 0$, these space first appeared, though as an episode, in [17, p. 44]. For further studies of operators on $L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$-spaces we refer, for instance, to [18, 19] and references therein, see also the surveying papers [20, 21] and [22].

We study various approaches to the grandization of Morrey type spaces, with respect to the exponents p and q. This includes partial grandization and mixed grandization. To this end, we deal with "grandizers" $a(y)$ and $b(r)$ in the corresponding variables, see Definitions 3.1, 3.2, 3.3.

We find conditions on the grandizers a and b, which ensure embedding of Morrey type spaces into the introduced grand Morrey type spaces.

In the case of partial grandization with respect the exponent q, we study, in grand Morrey type spaces, the boundedness of a certain class of integral operators K with a kernel homogeneous of degree $-n$. This class includes, in particular, multidimensional versions of Hardy type and Hilbert operators. Within the frameworks of generalized Morrey spaces, corresponding to the case $q = \infty$, a more general class of operators with homogeneous kernel was studied in [23].

We first study such operators in Morrey type spaces (not grand ones) and obtain sufficient conditions and also some necessary conditions for their boundedness. In fact, we obtain a result stronger than just boundedness: we estimate the norms $\|Kf\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)}$ via similar one-dimensional norms of spherical means of f. Then we apply the obtained results on the boundedness to grand Morrey type spaces.

In application to the Hardy operators with power weights, the obtained conditions have a form of criterion when $w(r) = r^{-\lambda}$, $\lambda > 0$.

The paper is organized as follows. Section 2 contains necessary definitions. In Section 3.1 we discuss varions ways of grandization of Morrey type spaces $L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$. In Section 3.2 we provide conditions on grandizers ensuring embedding of Morrey type spaces into grand Morrey type spaces. In Section 4.1 we study the operators K in the Morrey type spaces $L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$, and in Section 4.2 in grand Morrey type spaces $L_b^{p,q),w}(\mathbb{R}^n)$, both with application to the Hardy and Hilbert type operators.

2. Preliminaries

Following the known definitions, we introduce the spaces $L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$, defined by the norm

$$\|f\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x\in E} \left(\int\limits_0^\infty w(r)^q \left(\int\limits_{|x-y|<r} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2}$$

where E is an arbitrary set in $\mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $w \in \Omega_q(\mathbb{R}_+)$,

$$\Omega_q(\mathbb{R}_+) := \left\{ w : w \text{ is a weight and } \int\limits_t^\infty \frac{w(r)^q}{r}\, dr < \infty \text{ for some } t > 0 \right\}.$$

In the cases $E = \{0\}$ and $E = \mathbb{R}^n$ we have the *local* and *global* Morrey type spaces, respectively. We do not indicate dependence of the space on the choice of the set E, since it is unessential for our consideration. Only in Section 4 we choose $E = \{0\}$.

In the special case $w(r) = r^{-\lambda}$, $\lambda > 0$, we also use the notation

$$L^{p,q,\lambda}(\mathbb{R}^n) := L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)\big|_{w=r^{-\lambda}}$$

without danger of confusion of notation.

For a function $w(r)$ defined on $\mathbb{R}_+$, we will use the notation

$$w^*(t) := \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \frac{w(tr)}{w(r)} \quad \text{and} \quad w_*(t) := \inf_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{w(tr)}{w(r)}, \quad t > 0.$$

Observe that $w_*\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{w^*(t)}$. Obviously $w^*(r) = w_*(r) = w(r)$, when $w(r) = r^{-\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. However, in the case of piece-wise power function

$$w_{\lambda,\gamma}(r) = r^{-\lambda}(1+r)^{\lambda-\gamma} \sim \begin{cases} r^{-\lambda}, & r < 1, \\ r^{-\gamma}, & r > 1, \end{cases}$$

where $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, we have a gap between w^* and w_*:

$$w^*_{\lambda,\gamma}(r) = \begin{cases} r^{-\max\{\lambda,\gamma\}}, & r < 1, \\ r^{-\min\{\lambda,\gamma\}}, & r > 1, \end{cases} \quad \text{and} \quad (w_{\lambda,\gamma})_*(r) = \begin{cases} r^{-\min\{\lambda,\gamma\}}, & r < 1, \\ r^{-\max\{\lambda,\gamma\}}, & r > 1, \end{cases} \tag{3}$$

see e. g. [24, p. 715].

3. Grand Morrey Type Spaces

3.1. Grandization of Morrey type spaces. Everywhere in the sequel, $a = a(y)$ and $b = b(r)$ are weights on $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}_+$, respectively.

Definition 3.1. Let

$$1 < p < \infty, \quad 1 < q < \infty, \quad w \in \Omega_q(\mathbb{R}_+) \tag{4}$$

and

$$\varphi \in L^\infty(R_{p,q}), \quad \varphi(\varepsilon,\delta) > 0 \text{ for } (\varepsilon,\delta) \in R_{p,q} \quad \text{and} \quad \lim_{(\varepsilon,\delta)\to(0,0)} \varphi(\varepsilon,\delta) = 0,$$

where $R_{p,q} := \{(\varepsilon,\delta) \in \mathbb{R}^2_+ : 0 < \varepsilon < p-1, 0 < \delta < q-1\}$.

We define the mixed grand Morrey type space $L^{p),q),w}_{a,b}(\mathbb{R}^n)$ as the space of functions with the finite norm

$$\|f\|_{L^{p),q),w}_{a,b}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{(\varepsilon,\delta)\in R_{p,q}} \varphi(\varepsilon,\delta) \sup_{x \in E} \left(\int\limits_0^\infty w(r)^{q-\delta} b(r)^{\frac{\delta}{q}} \left(\int\limits_{|x-y|<r} |f(y)|^{p-\varepsilon} a(y)^{\frac{\varepsilon}{p}} dy \right)^{\frac{q-\delta}{p-\varepsilon}} \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q-\delta}}.$$

We also say that $L^{p),q),w}_{a,b}(\mathbb{R}^n)$ is *the mixed gandization* of the space $L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$.

Note that mixed coordinate-wise grandization of mixed Lebesgue spaces was studied in [25].

DEFINITION 3.2. We define partial grandizations $L_a^{p),q,w}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, and $L_b^{p,q),w}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 < q < \infty$, of the space $L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$ as the spaces of functions with the finite norm

$$\|f\|_{L_a^{p),q,w}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varphi(\varepsilon) \sup_{x\in E} \left(\int_0^\infty w(r)^q \left(\int_{|x-y|<r} |f(y)|^{p-\varepsilon} a(y)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dy \right)^{\frac{q}{p-\varepsilon}} \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q}},$$

where $\varphi \in L^\infty(0, p-1)$, $\varphi(\varepsilon) > 0$ and $\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi(\varepsilon) = 0$, and

$$\|f\|_{L_b^{p,q),w}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{0<\delta<q-1} \varphi(\delta) \sup_{x\in E} \left(\int_0^\infty w(r)^{q-\delta} b(r)^{\frac{\delta}{q}} \left(\int_{|x-y|<r} |f(y)|^p\, dy \right)^{\frac{q-\delta}{p}} \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q-\delta}},$$

where $\varphi \in L^\infty(0, q-1)$, $\varphi(\delta) > 0$ and $\lim_{\delta\to 0} \varphi(\delta) = 0$, respectively.

Definitions 3.1 and 3.2 may be generalized in the following direction. Let $U \subseteq R_{p,q}$ be an arbitrary measurable set of points in $R_{p,q}$, such that $(0,0)$ is a limiting point for U.

DEFINITION 3.3. Let $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\varphi \in L^\infty(U)$, $\varphi(\varepsilon,\delta) > 0$ for $(\varepsilon,\delta) \in U$ and $\lim_{U\ni(\varepsilon,\delta)\to(0,0)} \varphi(\varepsilon,\delta) = 0$. We define the U-grandization ${}^U L_{a,b}^{p),q),w}(\mathbb{R}^n)$ of the Morrey type space as the space of functions with finite norm

$$\|f\|_{{}^U L_{a,b}^{p),q),w}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{(\varepsilon,\delta)\in U} \varphi(\varepsilon,\delta) \sup_{x\in E} \left(\int_0^\infty w(r)^{q-\delta} b(r)^{\frac{\delta}{q}} \left(\int_{|x-y|<r} |f(y)|^{p-\varepsilon} a(y)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dy \right)^{\frac{q-\delta}{p-\varepsilon}} \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q-\delta}}.$$

Under the choice $U = R_{p,q}$ we have the mixed grand Morrey type space introduced in Definition 3.1. Partial grandization from Definition 3.2 formally correspond to the case where $U = \{(\varepsilon,\delta) : 0 < \varepsilon < p-1, \delta = 0\}$ and $U = \{(\varepsilon,\delta) : \varepsilon = 0, 0 < \delta < q-1\}$.

In the sequel we use the notation

$$\mathfrak{N}(f;\varepsilon,\delta) := \sup_{x\in E} \left(\int_0^\infty w(r)^{q-\delta} b(r)^{\frac{\delta}{q}} \left(\int_{|x-y|<r} |f(y)|^{p-\varepsilon} a(y)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dy \right)^{\frac{q-\delta}{p-\varepsilon}} \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q-\delta}}$$

for brevity, assuming that p, q, w, a and b are fixed. In case of partial grandization we have $\mathfrak{N}(f;\varepsilon,0)$ and $\mathfrak{N}(f;0,\delta)$ for $b \equiv 1$ and $a \equiv 1$, respectively.

Lemma 3.1. I. *Let* $(\varepsilon_0,\delta_0) \in U_{\varepsilon_0,\delta_0} := \{(\varepsilon,\delta) \in U : 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, 0 < \delta < \delta_0\}$, $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *and* $b \in L^1\big(\mathbb{R}_+, \frac{dr}{r}\big)$, *then*

$$\sup_{(\varepsilon,\delta)\in U} \varphi(\varepsilon,\delta)\, \mathfrak{N}(f;\varepsilon,\delta) \leqslant C \sup_{(\varepsilon,\delta)\in U_{\varepsilon_0,\delta_0}} \varphi(\varepsilon,\delta)\, \mathfrak{N}(f;\varepsilon,\delta),$$

where $C = C\big(\varepsilon_0, \delta_0, \|a\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \|b\|_{L^1(\mathbb{R}_+, \frac{dr}{r})}\big)$.

II. *In the case of partial grandization with respect to the variable* r, *similarly*

$$\sup_{0<\delta<q-1} \varphi(\delta)\, \mathfrak{N}(f;0,\delta) \leqslant C \sup_{0<\delta<\delta_0} \varphi(\delta)\, \mathfrak{N}(f;0,\delta),$$

where $C = C\big(\delta_0, \|b\|_{L^1(\mathbb{R}_+, \frac{dr}{r})}\big)$.

◁ We have to estimate

$$\sup_{(\varepsilon,\delta)\in U\setminus U_{\varepsilon_0,\delta_0}} \varphi(\varepsilon,\delta)\,\mathfrak{N}(f;\varepsilon,\delta) = \max\big\{S_1, S_{12}, S_2\big\},$$

where

$$S_1 := \sup_{(\varepsilon,\delta)\in U_1} \varphi(\varepsilon,\delta)\,\mathfrak{N}(f;\varepsilon,\delta), \quad S_2 := \sup_{(\varepsilon,\delta)\in U_2} \varphi(\varepsilon,\delta)\,\mathfrak{N}(f;\varepsilon,\delta),$$

$$S_{12} := \sup_{(\varepsilon,\delta)\in U_{12}} \varphi(\varepsilon,\delta)\,\mathfrak{N}(f;\varepsilon,\delta), \quad U_1 := \big\{(\varepsilon,\delta)\in U : \varepsilon<\varepsilon_0,\ \delta>\delta_0\big\},$$

$$U_2 := \big\{(\varepsilon,\delta)\in U : \varepsilon>\varepsilon_0,\ \delta<\delta_0\big\}, \quad U_{12} := \big\{(\varepsilon,\delta)\in U : \varepsilon>\varepsilon_0,\ \delta>\delta_0\big\}.$$

For S_{12}, we apply the Hölder inequalities in the variables y and r with the expends $\frac{p-\varepsilon_0}{p-\varepsilon}$ and $\frac{q-\delta_0}{q-\delta}$, respectively and obtain

$$S_{12} \leqslant \sup_{(\varepsilon,\delta)\in U_{12}} \varphi(\varepsilon,\delta)\big\|a\big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p-\varepsilon}-\frac{1}{p-\varepsilon_0}} \big\|b\big\|_{L^1(\mathbb{R}_+,\frac{dr}{r})}^{\frac{1}{q-\delta}-\frac{1}{q-\delta_0}}$$

$$\times\left(\int_0^\infty w(r)^{q-\delta_0} b(r)^{\frac{\delta_0}{q}} \left(\int_{|x-y|<r} \big|f(y)\big|^{p-\varepsilon_0} a(y)^{\frac{\varepsilon_0}{p}}\,dy\right)^{\frac{q-\delta_0}{p-\varepsilon_0}} \frac{dr}{r}\right)^{\frac{1}{q-\delta_0}}$$

$$\leqslant \frac{\sup\limits_{(\varepsilon,\delta)\in U_{12}} \varphi(\varepsilon,\delta)\big\|a\big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p-\varepsilon}-\frac{1}{p-\varepsilon_0}} \big\|b\big\|_{L^1(\mathbb{R}_+,\frac{dr}{r})}^{\frac{1}{q-\delta}-\frac{1}{q-\delta_0}}}{\sup\limits_{(\varepsilon,\delta)\in U_{\varepsilon_0,\delta_0}} \varphi(\varepsilon,\delta)} \sup_{(\varepsilon,\delta)\in U_{\varepsilon_0,\delta_0}} \varphi(\varepsilon,\delta)\,\mathfrak{N}(\varepsilon,\delta).$$

Estimation of S_1 and S_2 is easier via similar use of the Hölder inequality in one variable only. We omit details. ▷

3.2. Embedding of Morrey type spaces into grand Morrey type spaces.

Lemma 3.2. *If*

$$C_0 := \sup_{(\varepsilon,\delta)\in U} \varphi(\varepsilon,\delta) \sup_{x\in E} \int_0^\infty b(r) A(x,r)^{\frac{q}{p}\frac{\frac{q}{\delta}-1}{\frac{p}{\varepsilon}-1}} \frac{dr}{r} < \infty, \tag{5}$$

where $A(x,r) := \int_{|x-y|<r} a(y)dy$, *then*

$$L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow {}^U L_{a,b}^{p),q),w}(\mathbb{R}^n) \quad \text{and} \quad \|f\|_{{}^U L_{a,b}^{p),q),w}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_0 \|f\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)}. \tag{6}$$

◁ It suffices to apply the Hölder inequalities with the exponents $\frac{p}{p-\varepsilon}$ and $\frac{q}{q-\delta}$ in the inner and outer integrals in the definition of the norm in Definition 3.3. ▷

Theorem 3.1. *The conditions* $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *and* $b \in L^1\big(\mathbb{R}_+, \frac{dr}{r}\big)$ *are sufficient for the embedding* (6) *for any choice of the set* U. *The condition* $b \in L^1\big(\mathbb{R}_+, \frac{dr}{r}\big)$ *is sufficient for embedding of* $L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$ *into the partial grand space* $L_b^{p,q),w}(\mathbb{R}^n)$.

◁ It is easy to see that the change of $a(y)$ by $\lambda a(y)$, $\lambda = \text{const} > 0$, keeps the grand space (up to equivalents of norms). Consequently, we may assume that $\|a\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$. Then $A(r) \leqslant 1$ and the statement follows from (5).

The embedding into the partial grand space follows from Lemma 3.1. ▷

REMARK 3.1. Note that the condition (5) does not assume that $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $b \in L^1\big(\mathbb{R}_+, \frac{dr}{r}\big)$. In particular, in the case of "partial" grandization in the direction $\delta = \frac{q}{p}\varepsilon$, the embedding (6) holds, if $b(r)A(r)^{q/p} \in L^1\big(\mathbb{R}_+, \frac{dr}{r}\big)$.

By $AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ we denote the class of functions $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, absolutely continuous on every interval $[0, N]$, $N > 0$.

In Theorem 3.2 we impose the condition

$$\sup_{0<\delta<q-1} \varphi(\delta) \left(\int_0^\infty \frac{b(t)^{\frac{\delta}{q}}}{t}\, dt \right)^{\frac{1}{q-\delta}} < \infty \tag{7}$$

on the grandizer b.

Lemma 3.3. *Let $\varphi(\delta) \leqslant c\delta^{1/q}$. Grandizer b of the form*

$$b(r) = \frac{r^\mu}{(1+r)^\nu}\, \ell_{\tau,\sigma}(r),$$

where

$$\ell_{\tau,\sigma}(r) = \begin{cases} \ln^\tau \dfrac{e}{r}, & r < 1, \\ \ln^\sigma r, & r \geqslant 1, \end{cases}$$

satisfies the condition (7) *if $0 < \mu < \nu < \infty$ and $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$.*

$\lhd$ Let first $\tau = \sigma = 0$. We have

$$\int_0^r \frac{b(r)^{\frac{\delta}{q}}}{r}\, dr = \int_0^\infty \frac{r^{\frac{\mu\delta}{q}-1}}{(1+r)^{\frac{\nu\delta}{q}}}\, dr = \frac{\Gamma\big(\frac{\mu\delta}{q}\big)\,\Gamma\big(\frac{(\nu-\mu)\delta}{q}\big)}{\Gamma\big(\frac{\nu\delta}{q}\big)} \sim \frac{c}{\delta}, \tag{8}$$

so that (7) is satisfied.

In the case of the presence of the logarithmic factor $\ell_{\tau,\sigma}(r)$, it suffices to observe that $\ell_{\tau,\sigma}(r)$ is dominated by $\frac{r^{\eta_1}}{(1+r)^{\eta_2}}$ with arbitrarily small exponents $\eta_1 > \eta_2 > 0$ and the estimate by $\frac{c}{\delta}$ in (8) does not depend on μ and ν, provided $0 < \mu < \nu$. $\rhd$

Theorem 3.2. *Let $1 \leqslant p < \infty$ and $1 < q < \infty$. Let the grandizer b satisfy the condition* (7). *The embedding $L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n) \subset L_b^{p,q),w}(\mathbb{R}^n)$ is strict if $w(r)$ satisfies one of the following assumptions:*

i) *w is decreasing, $\lim_{r\to 0} w(r) = \infty$ and $\frac{1}{w} \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$;*

ii) *there exist numbers ν_1 and ν_2, $0 < \nu_2 < \nu_1 \leqslant \infty$, such that $w(r)r^{\nu_1}$ is almost increasing and $w(r)r^{\nu_2}$ is almost decreasing.*

The corresponding counterexample is $f(x) = f_0(|x|)$, where

$$f_0(r) = \left(r^{\frac{1-n}{p}} \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{w(r)^p}\right]\right)^{\frac{1}{p}}$$

for the case i) *and*

$$f_0(r) = \frac{1}{r^{\frac{n}{p}} w(r)}$$

in the case ii).

◁ *The case i*). For $f = f_0(|x|)$ we have

$$\int\limits_{|y|<r} \left|f_0(|y|)\right|^p dy = C \int\limits_0^r \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{w(\rho)^p}\right] d\rho, \quad C = \left|S^{n-1}\right|.$$

By the absolute continuity of $\frac{1}{w^p}$ we obtain that

$$\left(\int\limits_{|y|<r} \left|f_0(|y|)\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{C^{\frac{1}{p}}}{w(r)}.$$

Therefore,

$$\mathfrak{N}(f;0,\delta) = C^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^\infty \frac{b(r)^{\frac{\delta}{q}}}{r}\, dr\right)^{\frac{1}{q-\delta}}$$

from which it follows that $f \in L_b^{p,q),w}(\mathbb{R}^n)$, but $f \notin L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$.

The case ii). In this case we have

$$\int\limits_{|y|<r} |f(y)|^p\, dy = C \int\limits_0^r \frac{d\rho}{\rho w(\rho)^p}.$$

From the assumptions in *ii*) it is easy to obtain that

$$\frac{c_1}{w(r)^p} \leqslant \int\limits_0^r \frac{d\rho}{\rho w(\rho)^p} \leqslant \frac{c_2}{w(r)^p}. \tag{9}$$

From the equivalence (9) we obtain that

$$\mathfrak{N}(f;0,\delta) \sim \left(\int\limits_0^\infty \frac{b(r)^{\frac{\delta}{q}}}{r}\, dr\right)^{\frac{1}{q-\delta}},$$

which completes the proof. ▷

4. Operators with Homogenous Kernel

In this section we choose $E = \{0\}$ in the definition of the space $L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$.

We consider integral operators

$$Kf(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathscr{K}(|x|,|y|) f(y)\, dy,$$

where the kernel is homogeneous of degree $-n$, i. e.

$$\mathscr{K}(t|x|, t|y|) = t^{-n}\mathscr{K}(|x|,|y|).$$

4.1. Operator K in Morrey type spaces. In the sequel we use the notation

$$\Pi_t f(x) := f(tx), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0.$$

It is not hard to check that

$$\frac{w_*\left(\frac{1}{t}\right)}{t^{\frac{n}{p}}} \|f\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\Pi_t f\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{w^*\left(\frac{1}{t}\right)}{t^{\frac{n}{p}}} \|f\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)}. \tag{10}$$

If $w(r) = r^{-\lambda}$, then $w^*(t) = w_*(t) = t^{-\lambda}$ and $\|\Pi_t\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)} = t^{\lambda - n/p}$.

In the theorem below we also use the notation

$$\varkappa^*(n) := \left|S^{n-1}\right| \int\limits_0^\infty s^{\frac{n}{p'}-1} \left|\mathscr{K}(1,s)\right| w^*\left(\frac{1}{s}\right) ds$$

and

$$\varkappa_*(n) := \left|S^{n-1}\right| \int\limits_0^\infty s^{\frac{n}{p'}-1} \left|\mathscr{K}(1,s)\right| w_*\left(\frac{1}{s}\right) ds,$$

where $|S^{n-1}|$ should be replaced by 1 in the one-dimensional case of $\mathbb{R}_+$.

The following one-dimensional theorem is an immediate consequence of (10).

Theorem 4.1. *Let $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$ and $w \in \Omega_q(\mathbb{R}_+)$. The condition $\varkappa^*(1) < \infty$ is sufficient for the boundedness of the operator*

$$Kf(x) = \int\limits_0^\infty \mathscr{K}(x,y) f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

where $\mathscr{K}(tx,ty) = t^{-1}\mathscr{K}(x,y)$, $t > 0$, in the space $L^{p,q,w}(\mathbb{R}_+)$ and

$$\|Kf\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \varkappa^*(1) \|f\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}_+)}. \tag{11}$$

◁ We have

$$Kf(x) = \int\limits_0^\infty \mathscr{K}(1,y) f(xy)\, dy.$$

Then by the Minkowsky inequality we obtain

$$\|Kf\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \int\limits_0^\infty K(1,y) \|\Pi_y f\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}_+)}\, dy,$$

whence (11) follows by (10). ▷

For the multi-dimensional case, in the next theorem we provide a statement stronger than just the boundedness in the space $L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$. More precisely, we estimate the norm $\|Kf\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)}$ via one-dimensional norms of spherical means of f.

Theorem 4.2. *Let $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$ and $w \in \Omega_q(\mathbb{R}_+)$. If $\varkappa^*(n) < \infty$, $n \geqslant 1$, then*

$$\|Kf\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \left|S^{n-1}\right|^{\frac{1}{p}} \varkappa^*(n) \left(\int\limits_0^\infty \frac{w(r)^q}{r} \left(\int\limits_0^r t^{n-1} |\Phi(t)|^p\, dt\right)^{\frac{q}{p}} dr\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{12}$$

where

$$\Phi(t)=\frac{1}{|S^{n-1}|}\int\limits_{S^{n-1}} f(t\sigma)\,d\sigma.$$

$\lhd$ Note that Kf is a radial function for any f. It is easily seen that for any radial function $g(x)=G(|x|)$ one has

$$\|g\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)}=\left|S^{n-1}\right|^{\frac{1}{p}}\left\|G_p\right\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}_+)}, \tag{13}$$

where $G_p(\rho)=\rho^{(n-1)/p}G(\rho)$.

Furthermore, passing to polar coordinates we have

$$Kf(x)=\left|S^{n-1}\right|\int\limits_0^\infty t^{\frac{n-1}{p'}}\mathscr{K}(|x|,t)\Phi_p(t)\,dt,$$

where

$$\Phi_p(t)=\frac{t^{\frac{n-1}{p}}}{|S^{n-1}|}\int\limits_{S^{n-1}} f(t\sigma)\,d\sigma.$$

Then by (13) we have

$$\|Kf\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)}=\left|S^{n-1}\right|^{1+\frac{1}{p}}\left\|K_1\Phi_p\right\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}_+)},$$

where

$$K_1\Phi_p(\rho)=\int\limits_0^\infty \mathscr{K}_1(\rho,t)\Phi_p(t)\,dt, \quad \mathscr{K}_1(\rho,t)=\rho^{\frac{n-1}{p}}t^{\frac{n-1}{p'}}\mathscr{K}(\rho,t).$$

The kernel $K_1(\rho,t)$ is homogeneous of degree -1, i. e. $K_1(s\rho,st)=s^{-1}K_1(\rho,t)$, $s>0$. Therefore, we can apply Theorem 4.1 and obtain (12) after easy calculation. $\rhd$

Remark 4.1. The estimate (12) is stronger than the boundedness in $L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$. Indeed,

$$\left(\int\limits_0^\infty \frac{w(r)^q}{r}\left(\int\limits_0^r t^{n-1}|\Phi(t)|^p\,dt\right)^{\frac{q}{p}}dr\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left|S^{n-1}\right|^{-\frac{1}{p}}\left\|f\right\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)} \tag{14}$$

by Jensen inequality

$$\left(\frac{1}{|S^{n-1}|}\int\limits_{S^{n-1}} f(\rho\sigma)\,d\sigma\right)^p\leqslant\frac{1}{|S^{n-1}|}\int\limits_{S^{n-1}}|f(\rho\sigma)|^p\,d\sigma.$$

Clearly, the left-hand side in (14) may be finite when the right-hand side is infinite (e. g. when $f(x)=f_1(\rho)f_2(\sigma)$, $x=\rho\sigma$, $|\sigma|=1$, with $f_2\in L^1(S^{n-1})$, but $f_2\notin L^p(S^{n-1})$).

In the necessity part of Theorem 4.3 we shall use the following minimizing sequence

$$f_\varepsilon(x)=\frac{\mu_\varepsilon(|x|)}{|x|^{\frac{n}{p}}w(|x|)}, \quad \text{where } \mu_\varepsilon(r)=\begin{cases} r^\varepsilon, & r<1,\\ r^{-\varepsilon}, & r>1,\end{cases} \quad \varepsilon>0.$$

Lemma 4.1. *Let w satisfy the condition that $r^\delta w(r)$ is almost decreasing for some $\delta > 0$. Then*

$$\int_0^r \frac{\mu_{\varepsilon p}(t)}{tw(t)^p}\,dt \leqslant \frac{c\mu_{\varepsilon p}(r)}{w(r)^p}$$

for all $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, where $0 < \varepsilon_0 < \delta$ and $c = c(\varepsilon_0)$ does not depend on ε.

$\lhd$ The proof is straightforward. $\rhd$

Theorem 4.3. *Let $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$ and $w \in \Omega_q(\mathbb{R}_+)$. If $\varkappa^*(n) < \infty$, then*

$$\|Kf\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varkappa^*(n)\|f\|_{L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)}.$$

If $\mathscr{K}(|x|,|y|) \geqslant 0$ and w satisfies the assumption of Lemma 4.1, then the condition $\varkappa_*(n) < \infty$ is necessary for such a boundedness; in particular, when $w(r) = r^{-\lambda}$, $\lambda > 0$, the operator K is bounded if and only if

$$\int_0^\infty t^{\frac{n}{p'}+\lambda-1}\mathscr{K}(1,t)\,dt < \infty.$$

$\lhd$ Sufficiency of the condition $\varkappa^*(n) < \infty$ follows from Theorem 4.2 by Remark 4.1.

To prove the necessity, we choose $f(x) = f_\varepsilon(x)$. By using Lemma 4.1, it is easy to check that $f_\varepsilon(x) \in L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$ for all $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

We have

$$\begin{aligned} Kf_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{K}(1,|y|)\, f_\varepsilon(|x|y)\,dy = \frac{1}{|x|^{\frac{n}{p}}}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathscr{K}(1,|y|)}{|y|^{\frac{n}{p}}w(|x|\cdot|y|)}\,\mu_\varepsilon(|x|\cdot|y|)\,dy \\ &\geqslant \frac{1}{|x|^{\frac{n}{p}}w(|x|)}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathscr{K}(1,|y|)}{|y|^{\frac{n}{p}}}\,w_*(|y|)\mu_\varepsilon(|x|\cdot|y|)\,dy. \end{aligned}$$

It is easy to check that $\mu_\varepsilon(r\rho) \geqslant \mu_\varepsilon(r)\mu_\varepsilon(\rho)$, so that

$$Kf_\varepsilon(x) \geqslant \varkappa_*(n,\varepsilon)f_\varepsilon(x),$$

where

$$\begin{aligned} \varkappa_*(n,\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathscr{K}(1,|y|)}{|y|^{\frac{n}{p}}}\,w_*(|y|)\mu_\varepsilon(|y|)\,dy \\ &= |S^{n-1}|\left(\int_0^1 \rho^{\frac{n}{p'}+\varepsilon-1}\mathscr{K}(1,\rho)w_*\left(\frac{1}{\rho}\right)d\rho + \int_1^\infty \rho^{\frac{n}{p'}-\varepsilon-1}\mathscr{K}(1,\rho)w_*\left(\frac{1}{\rho}\right)d\rho\right). \end{aligned}$$

Hence

$$\|K\| \geqslant \varkappa_*(n,\varepsilon).$$

It remains to apply Fatou theorem when passin to the limit as $\varepsilon \to 0$. $\rhd$

In the corollary below we consider *the Hardy operators*

$$H^\alpha f(x) = |x|^{\alpha-n}\int_{|y|<|x|}\frac{f(y)}{|y|^\alpha}\,dy \quad \text{and} \quad \mathscr{H}^\beta f(x) = |x|^\beta\int_{|y|>|x|}\frac{f(y)}{|y|^{n+\beta}}\,dy$$

and *the Hilbert type operator*

$$\mathbb{H}f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x|^n + |y|^n}\, dy$$

as examples of the operator K.

Corollary 4.1. *The operators H^α and $\mathscr{H}^\beta$ are bounded in the space $L^{p,q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $\lambda > 0$, if and only if $\alpha < \frac{n}{p'} + \lambda$ and $\beta > \lambda - \frac{n}{p}$, respectively, and $\|H^\alpha\| = \frac{|S^{n-1}|}{\frac{n}{p}+\lambda-\alpha}$ and $\|\mathscr{H}^\beta\| = \frac{|S^{n-1}|}{\frac{n}{p}+\beta-\lambda}$.*

The operator $\mathbb{H}$ is bounded in the space $L^{p,q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant q < \infty$, $\lambda > 0$, if and only if $1 \leqslant p < \frac{n}{\lambda}$ and

$$\|\mathbb{H}\| = \frac{|S^{n-1}|}{n}\, \Gamma\left(\frac{1}{p'} + \frac{\lambda}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p} - \frac{\lambda}{n}\right).$$

$\lhd$ In the case of the operator H^α we have

$$\mathscr{K}(1,t) = \begin{cases} t^\alpha, & t < 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases}$$

so that $\varkappa^*(n) = \varkappa_*(n) = \frac{|S^{n-1}|}{\frac{n}{p}+\lambda-\alpha}$. Arguments for $\mathscr{H}^\beta$ are similar.

For the operator $\mathbb{H}$ we have

$$\varkappa^*(n) = \varkappa_*(n) = \left|S^{n-1}\right| \int\limits_0^\infty \frac{t^{\frac{n}{p'}+\lambda-1}}{1+t^n}\, dt,$$

where it remains to pass the Beta function via the change $\frac{1}{1+t^n} \to t$. $\rhd$

4.2. Operator K in grand Morrey type spaces.

Lemma 4.2. *Let $f_0(x) = \frac{1}{|x|^{n/p} w(|x|)}$ and $K(|x|,|y|) \geqslant 0$. Then*

$$Kf_0(x) \geqslant \varkappa_*(n) f_0(x).$$

$\lhd$ We have

$$Kf_0(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathscr{K}(|x|,|y|) \frac{dy}{|y|^{\frac{n}{p}} w(|y|)} = \frac{|S^{n-1}|}{|x|^{\frac{n}{p}}} \int\limits_0^\infty \rho^{\frac{n}{p'}-1} \mathscr{K}(1,\rho) \frac{d\rho}{w(\rho|x|)}$$

$$\geqslant \frac{|S^{n-1}|}{|x|^{\frac{n}{p}} w(|x|)} \int\limits_0^\infty \rho^{\frac{n}{p'}-1} \mathscr{K}(1,\rho) \inf_{t>0} \frac{w(t)}{w(\rho t)}\, d\rho = \varkappa_*(n) f_0(x). \quad \rhd$$

Theorem 4.4. *Let $1 \leqslant p < \infty$, $1 < q < \infty$ and $w \in \Omega_q(\mathbb{R}_+)$. If*

$$\sup_{0<\delta<\delta_0} \varphi(\delta) \int\limits_0^\infty t^{\frac{n}{p'}-1} \left|\mathscr{K}(1,t)\right| w^*\left(\frac{1}{t}\right) \left[b^*\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{\frac{\delta}{q(q-\delta)}} dt < \infty \tag{15}$$

for some $\delta_0 \in (0, q-1)$, then the operator K is bounded in the grand space $L_b^{p,q),w}(\mathbb{R}^n)$.

$\lhd$ By Lemma 3.1 we take

$$\|f\|_{L_b^{p,q),w}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{0<\delta<\delta_0} \varphi(\delta)\, \|f\|_{L^{p,q-\delta,w_\delta}(\mathbb{R}^n)},$$

where $w_\delta(r) = w(r)[b(r)]^{\delta/q(q-\delta)}$. By using Theorem 4.2 and Remark 4.1, we get

$$\|Kf\|_{L_b^{p,q),w}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \sup_{0<\delta<\delta_0} \varphi(\delta) C(\delta) \|f\|_{L^{p,q-\delta,w_\delta}(\mathbb{R}^n)},$$

where

$$C(\delta) = \left|S^{n-1}\right| \int\limits_0^\infty t^{\frac{n}{p'}-1} \left|\mathscr{K}(1,t)\right| w_\delta^*\left(\frac{1}{t}\right) dt. \quad \rhd$$

Corollary 4.2. *Let assumptions of Theorem 4.4 be satisfied and,* $b(r) = r^\mu (1+r)^{-\nu}$, $0 < \mu < \nu$. *If there exists* $\varepsilon_0 > 0$ *such that*

$$\kappa_{\varepsilon_0} := \int\limits_0^1 t^{\frac{n}{p'}-\varepsilon_0-1} \left|\mathscr{K}(1,t)\right| w^*\left(\frac{1}{t}\right) dt + \int\limits_1^\infty t^{\frac{n}{p'}+\varepsilon_0-1} \left|\mathscr{K}(1,t)\right| w^*\left(\frac{1}{t}\right) dt < \infty, \tag{16}$$

then the operator K *is bounded in the grand space* $L_b^{p,q).w}(\mathbb{R}^n)$ *and*

$$\|Kf\|_{L_b^{p,q),w}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \kappa_{\varepsilon_0} \|f\|_{L_b^{p,q).w}(\mathbb{R}^n)}.$$

$\lhd$ For $b(r) = r^\mu (1+r)^{-\nu}$, by (3) we have

$$b^*\left(\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} t^{-\mu}, & t < 1, \\ t^{\nu-\mu}, & t > 1. \end{cases}$$

Then it is easy to see that (16) implies (15). $\rhd$

Theorem 4.5. *The Hardy operators* H^α *and* $\mathscr{H}^\beta$ *are bounded in the grand space* $L_b^{p,q),\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\lambda > 0$, *with the grandizer* $b(r) = \frac{r^\mu}{(1+r)^\nu}$, $0 < \mu < \nu$, *if* $\alpha < \frac{n}{p'} + \lambda$ *and* $\beta > \lambda - \frac{n}{p}$, *respectively. If* $\varphi(\delta) \leqslant c\delta^{1/q}$, *then these conditions are also necessary for such a boundedness.*

$\lhd$ For the operator H^α we have

$$\kappa_{\varepsilon_0} = \int\limits_0^1 t^{\frac{n}{p'}+\lambda-\alpha-\varepsilon_0-1}\, dt,$$

which is finite under the choice $\varepsilon_0 \in (0, \frac{n}{p'} + \lambda - \alpha)$. This ensures the boundedness of H^α when $\alpha < \frac{n}{p'} + \lambda$.

Similarly, the sufficiency of the condition $\beta > \lambda - \frac{n}{p}$ for the boundedness of $\mathscr{H}^\beta$ is checked.

To prove the necessary, we choose $f = f_0(x) =: \frac{1}{|x|^{n/p-\lambda}}$, so that

$$\int\limits_{|y|<r} |f_0(y)|^p\, dy = c_1 r^{\lambda p}$$

and then

$$\|f_0\|_{L_b^{p,q),\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{0<\delta<q-1} \varphi(\delta) \left(\int_0^\infty t^{\frac{\mu\delta}{q}} (1+t)^{-\frac{\nu\delta}{q}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q-\delta}}$$

$$= \sup_{0<\delta<q-1} \varphi(\delta) \left[B\left(\frac{\mu\delta}{q}, \frac{\nu\delta}{q} - \frac{\mu\delta}{q} \right) \right]^{\frac{1}{q-\delta}} \leqslant c \sup_{0<\delta<q-1} \frac{\varphi(\delta)}{\delta^{\frac{1}{q}}} < \infty.$$

Thus $f_0 \in L_b^{p,q),\lambda}(\mathbb{R}^n)$. On the other hand, direct colculation shows that

$$H^\alpha f_0(x) = c f_0(x), \quad c = |S^{n-1}| \int_0^\infty t^{\frac{n}{p'}+\lambda-\alpha-1}\, dt,$$

which implies that $\int_0^\infty t^{n/p'+\lambda-\alpha-1} dt$ must be finite.

The case of the operator $\mathscr{H}^\beta$ is analogously treated. $\rhd$

References

1. *Iwaniec, T. and Sbordone, C.* On the Integrability of the Jacobian under Minimal Hypotheses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1992, vol. 119, no. 2, pp. 129–143. DOI: 10.1007/BF00375119.
2. *Fiorenza, A., Gupta, B. and Jain, P.* The Maximal Theorem in Weighted Grand Lebesgue Spaces, *Studia Mathematica*, 2008, vol. 188, no. 2, pp. 123–133. DOI: 10.4064/sm188-2-2.
3. *Greco, L., Iwaniec, T., and Sbordone, C.* Inverting the p-Harmonic Operator, *Manuscripta Mathematica*, 1997, vol. 92, no. 1, pp. 249–258. DOI: 10.1007/BF02678192.
4. *Jain, P., Singh, A. P., Singh, M. and Stepanov, V.* Sawyer's Duality Principle for Grand Lebesgue Spaces, *Mathematische Nachrichten*, 2018, vol. 292, no. 4, pp. 841–849. DOI: 10.1002/mana.201700312.
5. *Kokilashvili, V. and Meskhi, A.* A Note on the Boundedness of the Hilbert Transform in Weighted Grand Lebesgue Spaces, *Georgian Mathematical Journal*, 2009, vol. 16, no. 3, pp. 547–551.
6. *Samko, S. G. and Umarkhadzhiev, S. M.* On Iwaniec–Sbordone Spaces on Sets which May Have Infinite Measure, *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 2011, vol. 1, no. 1, pp. 67–84.
7. *Samko, S. G. and Umarkhadzhiev, S. M.* On Iwaniec–Sbordone Spaces on Sets which May Have Infinite Measure: Addendum, *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 2011, vol. 1, no. 2, pp. 143–144, .
8. *Samko, S. G. and Umarkhadzhiev, S. M.* Riesz Fractional Integrals in Grand Lebesgue Spaces on $\mathbb{R}_n$, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2016, vol. 19, no. 3, pp. 608–624. DOI: 10.1515/fca-2016-0033.
9. *Samko, S. G. and Umarkhadzhiev, S. M.* On Grand Lebesgue Spaces on Sets of Infinite Measure, *Mathematische Nachrichten*, 2017, vol. 290, no. 5–6, pp. 913–919. DOI: 10.1002/mana.201600136.
10. *Umarkhadzhiev, S. M.* Generalization of the Notion of Grand Lebesgue Space, *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 4, pp. 35–43. DOI: 10.3103/S1066369X14040057.
11. *Kokilashvili, V., Meskhi, A. and Rafeiro, H.* Riesz Type Potential Operators in Generalized Grand Morrey Spaces, *Georgian Mathematical Journal*, 2013, vol. 20, no. 1, pp. 43–64,. DOI: 10.1515/gmj-2013-0009.
12. *Meskhi, A.* Maximal Functions, Potentials and Singular Integrals in Grand Morrey Spaces, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2011, vol. 56, no. 10–11, pp. 1003–1019. DOI: 10.1080/17476933.2010.534793.
13. *Rafeiro, H.* A Note on Boundedness of Operators in Grand Grand Morrey Spaces, *Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory*, eds. A. Almeida, L. Castro and F.-O. Speck, Basel, Springer, 2013, vol. 229, pp. 349–356. DOI: 10.1007/978-3-0348-0516-2-19.
14. *Umarkhadzhiev, S. M.* The boundedness of the Riesz Potential Operator from Generalized Grand Lebesgue Spaces to Generalized Grand Morrey Spaces, *Operator Theory, Operator Algebras and Applications*, Basel, Birkhäuser–Springer, 2014, pp. 363–373. DOI: 10.1007/978-3-0348-0816-3-22.
15. *Guliyev, V. Integral Operators on Function Spaces on Homogeneous Groups and on Domains in R^n*, PhD Thesis, Doctor's Degree, Moscow, Steklov Math. Inst., 1994, 329 p. (in Russian).
16. *Guliyev, V. Function Spaces, Integral Operators and Two Weighted Inequalities on Homogeneous Groups. Some Applications*, Baku, 1999, 332 p. (in Russian).
17. *Adams, D. R.* Lectures on L^p-Potential Theory, *Umea University Reports*, 1981, no. 2.

18. *Burenkov, V. I. and Guliyev, H.* Necessary and Sufficientconditions for Boundedness of the Maximal Operator in Local Morrey-Type Spaces, *Studia Mathematica*, 2004, vol. 163, no. 2, pp. 157–176. DOI: 10.4064/sm163-2-4.
19. *Gogatishvili, A. and Mustafayev, R.* Dual Spaces of Local Morrey-Type Spaces, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2011, vol. 61, no. 3, pp. 609–622. DOI: 10.1007/s10587-011-0034-x.
20. *Burenkov, V. I.* Recent Progress in Studying the Boundedness of Classical Operators of Real Analysis in General Morrey-Type Spaces. I, *Eurasian Mathematical Journal*, 2012, vol. 3, no. 3, pp. 11–32.
21. *Burenkov, V. I.* Recent Progress in Studying the Boundedness of Classical Operators of Real Analysis in General Morrey-Type Spaces. II, *Eurasian Mathematical Journal*, 2013, vol. 4, no. 1, pp. 21–45.
22. *Rafeiro, H., Samko, N. and Samko, S.* Morrey-Campanato Spaces: an Overview, *Operator Theory, Pseudo-Differential Equations, and Mathematical Physics*, eds. Y. Karlovich, L. Rodino, B. Silbermann, and I. Spitkovsky, 2013, Basel, Springer, vol. 228, pp. 293–323. DOI: 10.1007/978-3-0348-0537-7_15.
23. *Samko, N. G.* Integral Operators Commuting with Dilations and Rotations in Generalized Morrey-Type Spaces, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, vol. 43, no. 16, pp. 9416–9434. DOI: 10.1002/mma.6279.
24. *Umarkhadzhiev, S. M.* Integral Operators with Homogeneous Kernels in Grand Lebesgue Spaces, *Mathematical Notes*, 2017, vol. 102, no. 5–6, pp. 710–721. DOI: 10.1134/S0001434617110104.
25. *Kokilashvili, V. and Meskhi, A.* Weighted Sobolev Inequality in Grand Mixed Norm Lebesgue Spaces, *Positivity*, 2020. DOI: 10.1007/s11117-020-00764-8.

Received July 13, 2020

Stefan G. Samko
University of Algarve,
Faro 8005-139, Portugal,
Professor Jubilado;
Kh. Ibragimov Complex Institute of the Russian Academy of Sciences,
21 a Staropromyslovskoe Hwy, Grozny 364051, Russia,
Principal Researcher
E-mail: ssamko@ualg.pt
https://orcid.org/0000-0002-8022-2863

Salaudin M. Umarkhadzhiev
Kh. Ibragimov Complex Institute of the Russian Academy of Sciences,
21 a Staropromyslovskoe Hwy, Grozny 364051, Russia,
Principal Researcher;
Academy of Sciences of Chechen Republic,
13 Esambaev Av., Grosny 364024, Russia,
Head of the Department of Applied Semiotics
E-mail: umsalaudin@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8283-1515

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 4, С. 104–118

ГРАНД-ПРОСТРАНСТВА ТИПА МОРРИ

Самко С. Г.[1,2], Умархаджиев С. М.[2,3]

[1] Университет Алгарво, Португалия, 8005-139, Фаро;
[2] Комплексный научно-исследовательский институт им. Х. Ибрагимова РАН,
Россия, 364051, Грозный, Старопромысловское шоссе, 21 а;
[3] Академия наук Чеченской Республики, Россия, 364024, Грозный, пр. им. М. Эсамбаева, 13

E-mail: ssamko@ualg.pt, umsalaudin@gmail.com

Аннотация. Так называемые гранд-пространства в настоящее время являются одним из основных объектов в теории функциональных пространств. Гранд-пространства Лебега были введены в работах T. Iwaniec и C. Sbordone в случае множеств Ω конечной меры $|\Omega| < \infty$, и авторами в случае $|\Omega| = \infty$.

Последнее основано на введении понятия грандизатора. Идея «грандизации» была также применена в контексте пространств Морри. В этой статье мы развиваем идею грандизации до более общих пространств Морри $L^{p,q,w}(\mathbb{R}^n)$, известных как пространства типа Морри. Мы вводим гранд-пространства типа Морри, что включает смешанные и частные гранд версии таких пространств. Смешанное гранд-пространство определяется нормой

$$\sup_{\varepsilon,\delta} \varphi(\varepsilon,\delta) \sup_{x\in E} \left(\int_0^\infty w(r)^{q-\delta} b(r)^{\frac{\delta}{q}} \left(\int_{|x-y|<r} \big|f(y)\big|^{p-\varepsilon} a(y)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dy \right)^{\frac{q-\delta}{p-\varepsilon}} \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

с использованием двух грандизаторов a и b. В случае гранд-пространств, частных относительно показателя q, мы изучаем ограниченность некоторых интегральных операторов. Класс этих операторов содержит, в частности, многомерные версии операторов типа Харди и операторов Гильберта.

Ключевые слова: пространство типа Морри, гранд-пространство, гранд-пространство типа Морри, грандизатор, частная грандизация, смешанная грандизация, однородное ядро, оператор типа Харди, оператор Гильберта.

Mathematical Subject Classification (2010): 46E30, 42B35.

Образец цитирования: *Samko, S. G. and Umarkhadzhiev, S. M.* Grand Morrey Type Spaces // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, № 4.—С. 104–118 (in English). DOI: 10.46698/c3825-5071-7579-i.

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 4, С. 119–134

УДК 517.983
DOI 10.46698/t4957-0399-9092-y

О ДРОБНОМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ АДАМАРА И ТИПА АДАМАРА ПО НАПРАВЛЕНИЮ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

М. У. Яхшибоев[1]

[1] Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 100174, Ташкент, Вузгородок, ул. Университетская, 4
E-mail: `m.yakhshiboev@gmail.com`

Посвящается 75-летию со дня рождения
профессора С. С. Кутателадзе

Аннотация. В работе приводятся определения и различные вспомогательные свойства дробных интегралов Адамара и типа Адамара по направлению, дробных производных Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению. Введена модификация дробных интегралов Адамара и типа Адамара по направлению с ядром, улучшенным на бесконечности. В статье рассматриваются операторы «типа свертки», инвариантные относительно растяжения в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой. Доказана ограниченность и полугрупповые свойства дробного интегрирования по Адамару и типа Адамара по направлению в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой. В работе рассмотрены композиции дробного интеграла по Адамару и типа Адамара и дробной производной Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению, также получено интегральное представление усеченных дробных производных Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению. Доказаны теоремы обращения дробных интегралов Адамара и типа Адамара по направлению на функциях из весовых пространств Лебега со смешанной нормой. Доказана теорема о связи между обыкновенными и усеченными дробными производными Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению.

Ключевые слова: дробный интеграл Адамара, дробная производная Адамара, пространство Лебега со смешанной нормой, оператор растяжения, дробная производная Маршо — Адамара по направлению, дробная производная типа Маршо — Адамара по направлению.

Mathematical Subject Classification (2010): 26A33, 41A35, 46E30.

Образец цитирования: *Яхшибоев М. У.* О дробном интегродифференцировании Адамара и типа Адамара по направлению в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 4.—С. 119–134. DOI: 10.46698/t4957-0399-9092-y.

1. Введение

Ж. Адамаром (J. Hadamard [1]) была введена конструкция дробного интегродифференцирования, являющаяся дробной степенью $\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}$, приспособленная к полуоси и инвариантная относительно растяжения.

В данной работе изучены качественные свойства дробных интегралов и производных Адамара, типа Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой.

Пространства Лебега со смешанной нормой были введены и изучены в работе [2]. Изучению ограниченности операторов в пространствах Лебега со смешанной нормой посвящены работы [3, 4]. Ряд свойств смешанных пространств Лебега можно найти в [5].

Частные и смешанные дробные производные Маршо в случае двух переменных содержатся уже в работе A. Marchaud [6]. Дробные интегралы и производные по направлению функций многих переменных впервые введены И. А. Киприяновым [7]. В работах [7, 8] изучены различные свойства дробных производных по направлению. В работе [9] изучены качественные свойства оператора дробного дифференцирования в смысле Киприянова.

В статьях [10–16] были рассмотрены операторы одномерного дробного интегродифференцирования Адамара и типа Адамара. Ряд свойств дробного интегрирования по Адамару можно найти в книге [17].

В данной работе изучены свойства операторов «типа свертки»: инвариантность относительно растяжения в весовых смешанных пространствах Лебега. Исследованы свойства операторов дробного интегрирования и дифференцирования Адамара и типа Адамара по направлению на $\mathbb{R}^n_+$. Даны условия ограниченности оператора дробного интегрирования Адамара и типа Адамара по направлению в весовом пространстве суммируемых функций на $\mathbb{R}^n_+$, рассмотрены композиции дробного интеграла типа Адамара и дробной производной типа Маршо — Адамара по направлению и получено интегральное представление усеченных дробных производных Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению. На оснавании интегральных представлений, доказаны теоремы обращения дробных интегралов Адамара и типа Адамара по направлению в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой. Кроме того, доказаны связи между обыкновенными и усеченными дробными производными типа Маршо — Адамара по направлению.

Теория дробного дифференцирования в смысле Адамара и Маршо — Адамара развивается также в приложениях к решению интегро-дифференциалных уравнений в обыкновенных и частных производных, интегро-дифферецальные операторы которых принимают нецелые вещественные и комплексные значения, зависят от времени или других аргументов (см., например, [18, 19]).

Рассмотрение ведется в рамках пространств $L_{\overline{p},\overline{\gamma}} = L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\left(\mathbb{R}^n_+, \frac{dx}{x}\right)$, определяемых смешанной нормой

$$\|f;\, L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\| := \left\{ \int\limits_0^\infty \left[\ldots \left(\int\limits_0^\infty |f\,(x)|^{p_1}\, x_1^{-\gamma_1} \frac{dx_1}{x_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \ldots \right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} x_n^{-\gamma_n} \frac{dx_n}{x_n} \right\}^{\frac{1}{p_n}}.$$

Работа имеет следующую структуру. В разделах 2 и 3 приводятся определения и различные вспомогательные свойства Адамара, типа Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению, а в разделе 4 — вспомогательные леммы для пространств $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$. В разделах 5, 6 и 7 содержатся доказательства основных результатов: в разделе 5 доказывается ограниченность дробного интегрирования Адамара и типа Адамара по направлению в пространствах со смешанными нормами; в разделе 6 получены интегральные представления усеченных дробных производных Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению в весовых смешанных пространствах Лебега, а в разделе 7 доказываются теоремы обращения дробных интегралов Адамара и типа Адамара по направлению от функций из $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$.

Обозначения. $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел; $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\dot{\mathbb{R}}^n$ — компактификация $\mathbb{R}^n$ с одной бесконечно удаленной точкой, $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in R^n; x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$; E — единичный оператор; $(\Pi_\rho f)(x) = f(x \circ \rho)$, $x, \rho \in \mathbb{R}^n_+$, — оператор растяжения. Введем конечную разность с использованием оператора растяжения

$$\left(\tilde{\Delta}^l_\tau f\right)(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} f\left(x\tau^k\right) = (E - \Pi_\tau)^l f, \quad l \in \mathbb{N}, \ \tau \in \mathbb{R}^1_+, \tag{1}$$

$\binom{l}{k}$ — биномиальные коэффициенты. Условимся, что запись $1 \leqslant \overline{p} < \infty$ и $\overline{p} = \overline{\infty}$, где $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\overline{\infty} = (\infty, \ldots, \infty)$, означает, что $1 \leqslant p_i < \infty$, $p_i = \infty$, $i = 1, \ldots, n$. Основные результаты данной работы не будут касаться смешанных пространств $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\left(\mathbb{R}^n_+, \frac{dx}{x}\right)$, когда одна часть p_i, $i = 1, \ldots, n$, конечна, а другая часть бесконечна, $\frac{dx}{x} = \frac{dx_1}{x_1} \ldots \frac{dx_n}{x_n}$.

$$C_{\overline{\gamma}}\left(\mathbb{R}^n_+\right) = \left\{ f : \|f; C_{\bar{\gamma}}\| = \max_{x \in R^n_+} \left|x^{-\overline{\gamma}} f(x)\right| < \infty, \ \lim_{|x| \to 0} x^{-\overline{\gamma}} f(x) = \lim_{|x| \to \infty} x^{-\overline{\gamma}} f(x) \right\},$$

$\gamma_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$.

$$C\left(\dot{\mathbb{R}}^n_+\right) = \left\{ f : f \in C\left(\mathbb{R}^n_+\right) \left(\exists f(\infty) = \lim_{|x| \to \infty} f(x), \ f(0) = f(\infty) \right) \right\}.$$

Пусть $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, тогда $\rho^\omega = (\rho_1^{\omega_1}, \ldots, \rho_n^{\omega_n})$, $x \circ \rho^\omega = (x_1 \rho_1^{\omega_1}, \ldots, x_n \rho_n^{\omega_n})$, $x \circ t^\omega = (x_1 t^{\omega_1}, \ldots, x_n t^{\omega_n})$, $\rho_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

$$(u)^\alpha_+ = \begin{cases} u^\alpha, & u > 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

$$\gamma_i^* = \begin{cases} \frac{\gamma_i}{p_i}, & 1 \leqslant p_i < \infty, \\ \gamma_i, & p_i = \infty, \ i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Будем использовать $\aleph(\alpha, l) = \int_0^\infty t^{-1-\alpha} \left(1 - e^{-t}\right)^l dt$ — нормировочные постоянные, известные в теории дробного дифференцирования; $C^\infty_{0,0}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ — класс бесконечно-дифференцируемых финитных функций с носителем вне начала координат; $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$, $\alpha, x \in \mathbb{R}$, — неполная гамма-функция,

$$\lim_{x \to 0} \Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha), \quad \lim_{x \to \infty} \Gamma(\alpha, x) = 0. \tag{2}$$

2. Дробные интегралы Адамара и типа Адамара по направлению

Дробными интегралами Адамара и типа Адамара порядка α, $\alpha \in \mathbb{R}^1_+$, по направлению ω, $\omega \in \mathbb{R}^n_+$, называем конструкции

$$(J^\alpha_\omega \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln \xi|^{\alpha-1} \varphi\left(x \circ \xi^{\ln \omega}\right) \frac{d\xi}{\xi}, \tag{3}$$

$$(J^\alpha_{\omega,\mu} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \xi^\mu |\ln \xi|^{\alpha-1} \varphi\left(x \circ \xi^{\ln \omega}\right) \frac{d\xi}{\xi}, \tag{4}$$

где $x \circ \xi^{\ln \omega} = \left(x_1 \xi^{\ln \omega_1}, \ldots, x_n \xi^{\ln \omega_n}\right)$ и вектор $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ подчинен условию $(\ln \omega_1)^2 + \cdots + (\ln \omega_n)^2 = 1$.

Операторы (3), (4) коммутируют с оператором растяжения $\Pi_\rho J_\omega^\alpha = J_\omega^\alpha \Pi_\rho$, $\Pi_\rho J_{\omega,\mu}^\alpha = J_{\omega,\mu}^\alpha \Pi_\rho$ и связаны с оператором Римана — Лиувилля I_v^α равенствами

$$\left(J_\omega^\alpha \varphi\right)(x) = \left(Q^{-1} I_v^\alpha Q\varphi\right)(x), \quad \left(J_{\omega,\mu}^\alpha \varphi\right)(x) = \left(M_{-\mu v} Q^{-1} I_v^\alpha Q M_{\mu v}\varphi\right)(x),$$

где $v = \ln\omega = (\ln\omega_1, \ldots, \ln\omega_n)$, $(Q\varphi)(x) = \varphi(e^x) = \varphi(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})$, $\left(Q^{-1}\varphi\right)(x) = \varphi(\ln x) = \varphi(\ln x_1, \ldots, \ln x_n)$, $(M_{\mu v}\varphi)(x) = x_1^{\mu v_1} \ldots x_n^{\mu v_n} \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $(M_{-\mu v}\varphi)(x) = x_1^{-\mu v_1} \ldots x_n^{-\mu v_n} \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (см. [17, с. 251] и [10, с. 11]).

Операторы $J_{\omega,\mu}^\alpha$ и J_ω^α обладают полугрупповым свойством:

$$J_{\omega,\mu}^\alpha J_{\omega,\mu}^\beta \varphi = J_{\omega,\mu}^{\alpha+\beta} \varphi \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0), \tag{5}$$

$$J_\omega^\alpha J_\omega^\beta \varphi = J_\omega^{\alpha+\beta} \varphi \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0). \tag{6}$$

Введем модификацию дробного интеграла типа Адамара по направлению с ядром, «улучшенным» на бесконечности. Модификация дробного интеграла типа Адамара по направлению ω, $\omega \in \mathbb{R}_+^n$ имеет вид

$$\left(J_{\omega,\tau}^{\alpha,l}\varphi\right)(x) = \int_0^\infty \left(\tilde{\Delta}_{\tau^{-1}}^l k_\alpha^+\right)(t)\, \varphi\left(x \circ t^{\ln\omega}\right) \frac{dt}{t}, \tag{7}$$

$$\left(J_{\omega,\mu;\tau}^{\alpha,l}\varphi\right)(x) = \int_0^\infty \left(\tilde{\Delta}_{\tau^{-1}}^l k_{\mu,\alpha}^+\right)(t)\, \varphi\left(x \circ t^{\ln\omega}\right) \frac{dt}{t}, \tag{8}$$

где $\tau \in \mathbb{R}_+^1$, $\mu \geqslant 0$,

$$\left(\tilde{\Delta}_{\tau^{-1}}^l k_\alpha^+\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^l (-1)^k \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} \left(\ln\frac{\tau^k}{t}\right)_+^{\alpha-1}, \quad \left(\tilde{\Delta}_{\tau^{-1}}^l k_\alpha^+\right)(t) \in L_1\left(\mathbb{R}_+^1\right),$$

$$\left(\tilde{\Delta}_{\tau^{-1}}^l k_{\mu,\alpha}^+\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^l (-1)^k \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{t}{\tau^k}\right)^\mu \left(\ln\frac{\tau^k}{t}\right)_+^{\alpha-1}, \quad \left(\tilde{\Delta}_{\tau^{-1}}^l k_{\mu,\alpha}^+\right)(t) \in L_1\left(\mathbb{R}_+^1\right).$$

Очевидно, что

$$I_{\omega,\tau}^{\alpha,l}\varphi = \tilde{\Delta}_\tau^l I_\omega^\alpha \varphi, \quad I_{\omega,\mu;\tau}^{\alpha,l}\varphi = \tilde{\Delta}_\tau^l I_{\omega,\mu}^\alpha \varphi$$

на достаточно хороших функциях $\varphi(x)$, т. е. операторы (7)–(8) получаются применением определения в (1) разностных операторов $\tilde{\Delta}_\tau^l$ с «мультипликативным» шагом к операторам $J_\omega^\alpha\varphi$ и $J_{\omega,\mu}^\alpha\varphi$. Они имеют то преимущество по сравнению с $J_\omega^\alpha\varphi$, что при $l > \alpha > 0$ и $J_{\omega,\mu}^\alpha\varphi$, они ограничены в пространстве $L_{\bar{p},\bar{\gamma}}\left(\mathbb{R}_+^n, \frac{dx}{x}\right)$ при всех $1 \leqslant p_i < \infty$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ (т. е. включая случай $\gamma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$).

3. Дробное дифференцирование Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению

Дробной производной Маршо — Адамара порядка α ($\alpha \in \mathbb{R}_+^1$) по направлению $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $\omega \in \mathbb{R}_+^n$, назовем следующее выражение:

$$\left(D_\omega^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\aleph(\alpha, l)} \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1-\alpha} \left(\tilde{\Delta}_{t^{\ln\omega}}^l f\right)(x) \frac{dt}{t}, \quad l > \alpha > 0,$$

построенное с помощью конечной разности, взятой вдоль направления.

Дробные производные Маршо — Адамара $D_\omega^\alpha f$ связаны с дробным призводным Маршо $\mathbb{D}_v^\alpha f$ равенствам $D_\omega^\alpha f = Q^{-1}\mathbb{D}_v^\alpha Qf$, где $v = \ln\omega$.

Дробные производные типа Маршо — Адамара $D_{\omega,\mu}^\alpha f$ связаны с оператором Римана — Лиувилля I_v^α равенствам

$$\left(D_{\omega,\mu}^\alpha f\right)(x) = \left(M_{-\mu v}Q^{-1}I_v^{-\alpha}QM_{\mu v}f\right)(x),$$

где $v = \ln\omega = (\ln\omega_1,\dots,\ln\omega_n)$, $(Qf)(x) = f(e^x) = f(e^{x_1},\dots,e^{x_n})$, $\left(Q^{-1}f\right)(x) = f(\ln x) = f(\ln x_1,\dots,\ln x_n)$, $(M_{\mu v}f)(x) = x_1^{\mu v_1}\dots x_n^{\mu v_n}f(x_1,\dots,x_n)$ $(M_{-\mu v}f)(x) = x_1^{-\mu v_1}\dots x_n^{-\mu v_n}f(x_1,\dots,x_n)$, $0<\alpha<1$ (см. [17, с. 251] и [10, с. 11]).

«Усеченной» дробной производной Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара функцией $f(x)$, $x\in\mathbb{R}_+^n$, по направлению ω, $\omega\in\mathbb{R}_+^n$, назовем выражение

$$\left(D_{\omega;1-\rho}^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\aleph(\alpha,l)}\int\limits_0^\rho\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1-\alpha}\left(\tilde{\Delta}_{t^{\ln\omega}}^l f\right)(x)\,\frac{dt}{t},\quad l>\alpha>0,$$

$$\left(D_{\omega,\mu;1-\rho}^\alpha f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^\rho t^\mu\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1-\alpha}\left(\tilde{\Delta}_{t^{\ln\omega}}^1 f\right)(x)\,\frac{dt}{t}+\mu^\alpha f(x),\quad 0<\alpha<1, \tag{9}$$

где $0<\rho<1$. «Усеченной» дробной производной Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению будем понимать предел по норме пространства $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$:

$$D_\omega^\alpha f = \lim_{\rho\to1-0}D_{\omega;1-\rho}^\alpha f,\quad D_{\omega,\mu}^\alpha f = \lim_{\rho\to1}D_{\omega,\mu;1-\rho}^\alpha f. \tag{10}$$

4. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пространства* $C_{0,0}^\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *плотно в* $L_{\overline{p};\overline{\gamma}}\left(\mathbb{R}_+^n,\frac{dx}{x}\right)$, $1\leqslant\overline{p}<\infty$, *и в* $C_{\overline{\gamma},0}\left(\dot{\mathbb{R}}_+^n\right)$,

$$C_{\overline{\gamma},0}\left(\dot{\mathbb{R}}_+^n\right) = \left\{f:\ f(x) = x^{\overline{\gamma}}g(x),\ g(x)\in C\left(\dot{\mathbb{R}}_+^n\right),\ \lim_{|x|\to0}g(x) = \lim_{|x|\to\infty}g(x) = 0\right\},$$

для любых $-\infty<\gamma_i<\infty$, $i=1,\dots,n$.

$\lhd$ Доказательство леммы осуществляется стандартными средствами. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть* $\varphi\in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, $1\leqslant\overline{p}\leqslant\infty$, $\gamma_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$, *то справедливо неравенство:*

$$\left\|\Pi_\rho\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\|\leqslant\psi\left(\rho^{\overline{\gamma}^*}\right)\left\|\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\|, \tag{11}$$

где

$$\psi\left(\rho^{\overline{\gamma}^*}\right) = \prod_{i=1}^n\psi_i\left(\rho_i^{\gamma_i^*}\right),\quad \psi_i\left(\rho_i^{\gamma_i^*}\right) = \begin{cases}\rho_i^{\frac{\gamma_i}{p_i}}, & 1\leqslant p_i<\infty,\\ \rho_i^{\gamma_i}, & p_i=\infty,\ i=1,\dots,n.\end{cases} \tag{12}$$

Кроме того, оператор растяжения аппроксимирует единичный оператор в пространстве $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$*:*

$$\lim_{\rho\to1-0}\left\|\Pi_\rho\varphi-\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\| = 0. \tag{13}$$

$\lhd$ Равенство (11) устанавливается очевидными заменами переменных. Докажем утверждение (13). Имеем

$$\|\Pi_\rho\varphi-\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|=\left\|\Big[1-\big(\psi(\rho^{\overline{\gamma}^*})\big)^{-1}\Big]\Pi_\rho\varphi+\big(\psi(\rho^{\overline{\gamma}^*})\big)^{-1}\Pi_\rho\varphi-\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\|,$$

где $\psi\left(\rho^{\overline{\gamma}^*}\right)$ — функция (12). Используя обобщенное неравенство Минковского (см. [5, с. 22]), получим

$$\|\Pi_\rho\varphi-\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|\leqslant\left\|\Big[1-\big(\psi(\rho^{\overline{\gamma}^*})\big)^{-1}\Big]\Pi_\rho\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\|+\left\|\big(\psi(\rho^{\overline{\gamma}^*})\big)^{-1}\Pi_\rho\varphi-\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\|.$$

В силу (11) имеем

$$\|\Pi_\rho\varphi-\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|\leqslant\left|1-\psi\big(\rho^{\overline{\gamma}^*}\big)\right|\|\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|+\|\Pi_\rho g-g;L_{\overline{p}}\|, \tag{14}$$

где $g(x):=x^{-\overline{\gamma}\cdot\overline{p}}\varphi(x)$, $g(x)\in L_{\overline{p}}\left(\mathbb{R}^n_+,\frac{dx}{x}\right)$ при $1\leqslant\overline{p}<\infty$ и $g(x)\in C\big(\dot{\mathbb{R}}^n_+\big)$ при $\overline{p}=\overline{\infty}$. Утверждение (13) следует из неравенства (14). $\rhd$

Следующие леммы относятся к операторам «типа свертки», инвариантным относительно растяжения в пространствах $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$. Именно, рассмотрим операторы вида

$$(B_\rho\varphi)(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(t)\,\varphi\left(x\circ\rho^t\right)dt,$$

$$(B_\omega\varphi)(x)=\int\limits_{0}^{\infty}a(t)\,\varphi\left(x\circ t^\omega\right)dt. \tag{15}$$

Лемма 3. *Пусть $\varphi\in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\gamma_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$. Если*

$$k(\rho):=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|k(t)|\prod_{i=1}^n\big(\rho_i^{\gamma_i^*}\big)^t dt<\infty,$$

то оператор B_ρ ограничен в пространстве $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, и

$$\|B_\rho\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|\leqslant k(\rho)\,\|\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|. \tag{16}$$

$\lhd$ Так как $(B_\rho\varphi)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}k(t)\,(\Pi_{\rho^t}\varphi)(x)\,dt$, применив обобщенное неравенство Минковского, получим

$$\|B_\rho\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|k(t)|\left\|(\Pi_{\rho^t}\varphi)(x);L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\|dt.$$

В силу равенства (11) получаем (16). $\rhd$

Следствие 1. *Пусть $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, $1\leqslant\overline{p}\leqslant\infty$, $\gamma_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$. Если $d(\omega):=\int_0^\infty|a(t)|\,t^{\overline{\gamma}^*\circ\omega}dt<\infty$, где $\overline{\gamma}^*\circ\omega=\sum_{i=1}^n\gamma_i^*\omega_i$, то оператор B_ω ограничен в пространстве $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, и*

$$\|B_\omega\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|\leqslant d(\omega)\,\|\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|.$$

Следствие 2. *Пусть в (15) $a(t)\equiv0$ при $t\geqslant1$. Тогда оператор (15) ограничен в пространстве $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$ при всех $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\gamma_i\geqslant0$, $\omega_i\geqslant0$, $i=1,\dots,n$, если $\int_0^1|a(t)|\,dt<+\infty$.*

Лемма 4. *Пусть* $k(t) \in L_1(\mathbb{R})$, $k_i(y_i) = 0$ *при* $t < 0$. *Тогда*

$$\|B_\rho \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\| \leqslant \|k; L_1(\mathbb{R})\| \, \|\varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|$$

при $0 < \rho_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство леммы 4 вытекает из леммы 3.

Лемма 5. *Пусть* $k(t) \in L_1(\mathbb{R})$, $k(t) = 0$ *при* $t < 0$ *и* $\int_0^\infty k(t)\,dt = 1$. *Тогда*

$$\lim_{\rho \to 1-0} \|B_\rho \varphi - \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\| = 0 \tag{17}$$

для всех $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $\gamma_i \geqslant 0$, $0 < \rho_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$.

$\lhd$ Прежде всего отметим, что $B_\rho \varphi \in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$ для $\varphi \in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$ при $0 < \rho_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, согласно лемме 4. Заметим, что, так как $\int_0^\infty k(t)\,dt = 1$, то

$$(B_\rho \varphi)(x) - \varphi(x) = \int\limits_0^\infty k(t) \left[(\Pi_{\rho^t} \varphi)(x) - \varphi(x) \right] dt.$$

Используя обобщенное неравенство Минковского, получим оценку

$$\|B_\rho \varphi - \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\| \leqslant \int\limits_0^\infty |k(t)| \left\| (\Pi_{\rho^t} \varphi)(x) - \varphi(x); L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| dt. \tag{18}$$

Поскольку $0 < \rho_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, то в (18) возможен предельный переход под знаком интеграла на основании мажорантной теоремы Лебега. Применение последней обосновано утверждениями (11), (13) леммы 2. $\rhd$

5. Об ограниченности дробного интегрирования по Адамару и типа Адамара в пространстве $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$

Теорема 1. *Пусть* $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $\alpha_i > 0$ *и* $\mu \in \mathbb{C}$. *Если* $\operatorname{Re}\mu + \sum_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i > 0$, *то оператор* $J^\alpha_{\omega,\mu}$ *ограничен в* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$ *и*

$$\left\| J^\alpha_{\omega,\mu} \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| \leqslant Q_\mu \, \|\varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|, \tag{19}$$

где $Q_\mu = \left(\operatorname{Re}\mu + \sum_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i \right)^{-\alpha}$.

$\lhd$ Сначала рассмотрим случай $1 \leqslant \overline{p} < \overline{\infty}$. С помощью обобщенного неравенства Минковского, получаем

$$\left\| J^\alpha_{\omega,\mu} \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \int\limits_0^\infty \left| k^+_{\mu,\alpha}(y) \right| \left\| \varphi\left(x \circ y^{\ln \omega} \right); L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| \frac{dy}{y}.$$

После подстановки $\tau_i = x_i y^{\ln \omega_i}$, $i = 1, \ldots, n$, имеем

$$\begin{gathered} \left\| J^\alpha_{\omega,\mu} \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 y^{\mu + \sum\limits_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{p_i} \ln \omega_i} |\ln y|^{\alpha - 1} \, \|\varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\| \frac{dy}{y} \\ \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty e^{-\left(\mu + \sum\limits_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{p_i} \ln \omega_i \right)\xi} \xi^{\alpha - 1} d\xi \, \|\varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\| \leqslant \left(\mu + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{p_i} \ln \omega_i \right)^{-\alpha} \|\varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|. \end{gathered} \tag{20}$$

В случае $\overline{p} = \overline{\infty}$ в (20) заменим p_i, $i = 1, \ldots, n$ на 1. Тогда получим (19). $\rhd$

Теорема 2. 1) *Пусть* $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Если* $\sum_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i > 0$, *то оператор* J_ω^α *ограничен в* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$ *и*

$$\left\| J_\omega^\alpha \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| \leqslant Q_0 \left\| \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\|,$$

где $Q_0 = \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i\right)^{-\alpha}$.

2) *Пусть* $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $1 \leqslant q_i \leqslant \infty$, $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$. *Оператор* $J_\omega^\alpha \varphi$ *дробного интегрирования ограничен из* $L_{\overline{p}}\left(\mathbb{R}_+^n, \frac{dx}{x}\right)$ *в* $L_{\overline{q}}\left(\mathbb{R}_+^n, \frac{dx}{x}\right)$ *тогда и только тогда, когда* $1 < p_i < \frac{1}{\alpha_i}$, $q_i = \frac{p_i}{1-\alpha_i p_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

$\lhd$ Первое утверждение вытекает из теоремы 1. Далее, оператор $J_\omega^\alpha \varphi$ связан с оператором Римана — Лиувилля $I_v^\alpha \varphi$ равенством

$$J_\omega^\alpha \varphi = Q^{-1} I_v^\alpha Q \varphi, \tag{21}$$

где $(Q\varphi)(x) = \varphi(e^x) = \varphi(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})$, $v = \ln \omega$. В силу (21) второе утверждение теоремы следует из известной теоремы Харди — Литтлвуда для обычного дробного интегрирования по $\mathbb{R}^n$ (см. [17, с. 345]). $\rhd$

Теорема 3. *Операторы* $J_{\omega,\mu,\tau}^{\alpha,l}$ *и* $J_{\omega,\tau}^{\alpha,l}$ *ограничены в пространстве* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$ *при всех* $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\left\| J_{\omega,\mu,\tau}^{\alpha,l} \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| \leqslant c(\tau, \mu) \left\| \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\|,$$

где $0 < c(\tau, \mu) < 1$ *при* $\operatorname{Re} \mu + \sum_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i \geqslant 0$, $0 < \tau \leqslant 1$, $l > \alpha > 0$,

$$\left\| J_{\omega,\tau}^{\alpha,l} \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| \leqslant c_1(\tau) \left\| \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\|,$$

где $0 < c_1(\tau) < 1$ *при* $\sum_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i \geqslant 0$, $0 < \tau \leqslant 1$, $l > \alpha > 0$.

$\lhd$ Доказательство этой теоремы вытекает из следствия 2 леммы 3. $\rhd$

Теорема 4. *Пусть* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *и* $\mu \in \mathbb{C}$.

1) *Если* $\operatorname{Re} \mu > -\sum_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i$, *то оператор* $J_{\omega,\mu}^\alpha$ *обладает полугрупповым свойством* (5) *в пространстве* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$.

2) *Если* $\sum_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i > 0$, *то оператор* J_ω^α *обладает полугрупповым свойством* (6) *в пространстве* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$.

$\lhd$ Сначала равенство (5) докажем для «достаточно хороших» функций φ. Поменяв порядок интегрирования по формуле Дирихле, придем к равенству

$$(J_{\omega,\mu}^\alpha J_{\omega,\mu}^\beta \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \xi^\mu \left|\ln \xi\right|^{\alpha-1} \frac{d\xi}{\xi} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 \tau^\mu \left|\ln \tau\right|^{\beta-1} \varphi\left(x \circ (\xi\tau)^{\ln \omega}\right) \frac{d\tau}{\tau}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 u^\mu \varphi\left(x \circ u^{\ln \omega}\right) \frac{du}{u} \int_u^1 \left|\ln \xi\right|^{\alpha-1} \left|\ln \frac{u}{\xi}\right|^{\beta-1} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Внутренний интеграл легко вычисляется после замены $\ln \xi = \ln u \ln y$:

$$(J_{c,\mu}^\alpha J_{c,\mu}^\beta \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 u^\mu \left|\ln u\right|^{\alpha+\beta-1} \varphi\left(x \circ u^{\ln \omega}\right) \frac{du}{u} \int_1^e \left|\ln y\right|^{\alpha-1} (1 - \ln y)^{\beta-1} \frac{dy}{y}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 u^\mu \left|\ln u\right|^{\alpha+\beta-1} \varphi\left(x \circ u^{\ln \omega}\right) \frac{du}{u} = (J_{c,\mu}^{\alpha+\beta} \varphi)(x).$$

Отсюда получаем равенство (5) для «достаточно хороших» функций φ.

Если $\operatorname{Re}\mu > -\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^*\ln\omega_i$, то в силу теоремы 1 операторы $J^{\alpha}_{\omega,\mu}$, $J^{\beta}_{\omega,\mu}$ и $J^{\alpha+\beta}_{\omega,\mu}$ ограничены в $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, и равенство (5) верно для $\varphi \in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$.

Когда $\mu = 0$, из теоремы 4 и теоремы 2 получаем полугрупповое свойство операторов дробного интегрирования Адамара (3). $\rhd$

6. Интегральное представление усеченных дробных производных Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению

Всюду ниже вектор $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ либо имеет все конечные компоненты p_i ($\overline{p} < \infty$), либо все бесконечные $\overline{p} = \overline{\infty} = (\infty, \ldots, \infty)$.

Лемма 6. *Пусть* $f(x) = \left(J^{\alpha}_{\omega,\mu}\varphi\right)(x)$, $\varphi \in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *где* $0 < \alpha < 1$, $\mu \geqslant 0$, $1 \leqslant p_i < \infty$, $\gamma_i, \ln\omega_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $\mu + \sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{p_i}\ln\omega_i > 0$ *и* $0 < \rho < 1$. *Тогда усеченная дробная производная типа Маршо — Адамара* $D^{\alpha}_{\omega,\mu;1-\rho}f$ *по направлению* ω, *имеет следующее интегральное представление:*

$$D^{\alpha}_{\omega,\mu;1-\rho}f = \int\limits_0^{\infty} K^{+}_{\alpha,\mu}(t,\rho)\,\varphi\left(x \circ \rho^{t\ln\omega}\right)dt, \tag{22}$$

где

$$K^{+}_{\alpha,\mu}(t,\rho) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\rho^{\mu t}}{t}\left[\left(\alpha\Gamma\left(-\alpha, \mu\ln\frac{1}{\rho}\right) + \Gamma(1-\alpha)\right)\left(\mu\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha}(t)^{\alpha}_{+} - (t-1)^{\alpha}_{+}\right]. \tag{23}$$

При этом ядро $K^{+}_{\alpha,\mu}(t,\rho) \in L_1\left(\mathbb{R}^1_+\right)$ *является усредняющим*

$$\int\limits_0^{\infty} K^{+}_{\alpha,\mu}(t,\rho)\,dt = 1, \quad K^{+}_{\alpha,\mu}(t,\rho) > 0, \tag{24}$$

при $t > 0$.

$\lhd$ Из (8) при $0 < t < 1$, $l = 1$ имеем

$$f(x) - f\left(x \circ t^{\ln\omega}\right) = \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\int\limits_0^{\infty} t^{\mu y}y^{\alpha-1}\varphi\left(x \circ t^{y\ln\omega}\right)dy - \int\limits_1^{\infty} t^{\mu(y-1)}(y-1)^{\alpha-1}\varphi\left(x \circ t^{y\ln\omega}\right)dy\right\}.$$

Поэтому

$$f(x) - f(xt) = \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\alpha}\int\limits_0^{\infty} k^{+}_{\alpha,\mu}(y,t)\varphi(x \circ t^{y\ln\omega})\,dy, \tag{25}$$

где $x \circ t^{y\ln\omega} = \left(x_1 t^{y\ln\omega_1}, \ldots, x_n t^{y\ln\omega_n}\right)$,

$$k^{+}_{\alpha,\mu}(y,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases} t^{\mu y}y^{\alpha-1}, & 0 < y < 1,\\ t^{\mu y}y^{\alpha-1} - t^{\mu(y-1)}(y-1)^{\alpha-1}, & y > 1.\end{cases}$$

Известно, что $k^+_{\alpha,\mu}(y,t)\in L_1(\mathbb{R}^1_+)$ и $\int_0^\infty k^+_{\alpha,\mu}(y,t)dy=0$ (см. [12]). Из (25) получаем

$$D^\alpha_{\omega,\mu;1-\rho}f=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^\rho\frac{1}{\ln\frac{1}{t}}\frac{dt}{t^{1-\mu}}\int\limits_0^\infty k^+_{\alpha,\mu}(y,t)\varphi(x\circ t^{y\ln\omega})\,dy+\mu^\alpha f(x).$$

Замены $\ln\frac{1}{t}=\xi$ и $y\xi=\tau$ дают

$$D^\alpha_{\omega,\mu;1-\rho}f=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{\ln\frac{1}{\rho}}^\infty e^{-\mu\xi}\frac{d\xi}{\xi^2}\int\limits_0^\infty k^+_{\alpha,\mu}\left(\frac{\tau}{\xi},e^{-\xi}\right)\varphi(x\circ e^{-\tau\ln\omega})d\tau+\mu^\alpha f\left(x\right). \tag{26}$$

Перестановка порядка интегрирования в правой части в (26) приводит к равенству

$$\begin{aligned}D^\alpha_{\omega,\mu;1-\rho}f&=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^\infty\varphi\Big(x\circ e^{-\tau\ln\omega}\Big)\frac{d\tau}{\tau}\int\limits_0^{\tau/\ln\frac{1}{p}}e^{-\frac{\mu}{s}\tau}k^+_{\alpha,\mu}\left(s,e^{-\frac{\tau}{s}}\right)ds+\mu^\alpha f\left(x\right)\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\Bigg\{\int\limits_0^\infty\varphi\Big(x\circ\rho^{t\ln\omega}\Big)\left[\alpha\Gamma\left(-\alpha,\mu\ln\frac{1}{\rho}\right)+\Gamma(1-\alpha)\right]\\&\qquad\times\left(\mu\ln\frac{1}{\rho}\right)^\alpha\rho^{\mu t}t^{\alpha-1}dt-\int\limits_1^\infty\rho^{\mu t}\left(t-1\right)^\alpha\varphi(x\circ\rho^{t\ln\omega})\,\frac{dt}{t}\Bigg\},\end{aligned} \tag{27}$$

что совпадает с (22).

Утверждения (23)–(24) для функции $K^+_{\alpha,\mu}\left(t,\rho\right)$ известны (см. [12]). Остается обосновать действия в (27). Для $\varphi\in C^\infty_{0,0}(\mathbb{R}^n_+)$ они очевидны и, следовательно, для таких функций тождество (22) доказано. В силу леммы 4 и теоремы 1 оператор $D^\alpha_{\omega,\mu;1-\rho}J^\alpha_{\omega,\mu}$, стоящий в левой части тождества (22), ограничен в $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$ при $\mu+\sum_{i=1}^n\frac{\gamma_i}{p_i}\ln\omega_i>0$. Ограничен и оператор в правой части в силу той же леммы 4. Поэтому на основании леммы 1 тождество (22) распространяется с $C^\infty_{0,0}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ на все функции $\varphi\in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, $1\leqslant p_i<\infty$, $i=1,\dots,n$, $\mu+\sum_{i=1}^n\frac{\gamma_i}{p_i}\ln\omega_i>0$. $\rhd$

Лемма 7. *Пусть* $f(x)=(J^\alpha_\omega\varphi)(x)$, $\varphi\in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *где* $\alpha>0$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\gamma_i,\ln\omega_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$, $\sum_{i=1}^n\gamma_i^*\ln\omega_i>0$ *или* $0<\alpha<1$, $1<p_i<\frac{1}{\alpha}$, $\gamma_i=0$, $i=1,\dots,n$, *и* $0<\rho<1$. *Тогда усеченная дробная производная Маршо — Адамара* $D^\alpha_{\omega,1-\rho}f$ *по направлению* ω *имеет следующее интегральное представление:*

$$\left(D^\alpha_{\omega,1-\rho}f\right)(x)=\int\limits_0^\infty K^+_{l,\alpha}(y)\varphi\big(x\circ\rho^{y\ln\omega}\big)\,dy, \tag{28}$$

где

$$K^+_{l,\alpha}(y)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{l}(-1)^k\begin{pmatrix}l\\k\end{pmatrix}(y-k)^\alpha_+}{\aleph\left(\alpha,l\right)\Gamma(1+\alpha)y}\in L_1\left(\mathbb{R}^1_+\right) \tag{29}$$

и

$$\int\limits_0^\infty K^+_{l,\alpha}(y)dy=1,\quad l>\alpha>0. \tag{30}$$

$\lhd$ Доказательство леммы 7 аналогично доказательству леммы 6. $\rhd$

Замечание. Можно показать, что утверждение леммы справедливо и при $\gamma_i = 0$, $p_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < \alpha < 1$, однако это потребует иного обоснования (см. доказательство леммы 8).

Лемма 8. *Пусть* $f \in L_{\overline{r},\overline{\lambda}}$, $1 \leqslant r_i \leqslant \infty$, $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, *такова, что ее разность* $(\tilde{\Delta}^l_\tau f)(x)$ *порядка* $l, l > \alpha$, *представима модифицированным адамаравским дробным интегралом* (7) *по направлению от функции из* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$:

$$(\tilde{\Delta}^l_\tau f)(x) = J^{\alpha,l}_{\omega,\tau}\varphi = \int\limits_0^\infty \left(\tilde{\Delta}^l_{\tau^{-1}} k^+_\alpha\right)(t)\,\varphi\left(x \circ t^{\ln\omega}\right)\frac{dt}{t}, \tag{31}$$

где $l > \alpha > 0$, $0 < \tau < 1$, $\varphi \in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $\gamma_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$ *и* $0 < \rho < 1$. *Тогда усеченная дробная производная* $D^\alpha_{\omega,1-\rho} f$ *по направлению* ω, *допускает интегральное представление* (28) *при всех* $1 \leqslant p_i < \infty$, $\gamma_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, *и интегральное представление*

$$\left(D^\alpha_{\omega,1-\rho} f\right)(x) = \int\limits_0^\infty K^+_{l,\alpha}(t)\,\varphi\left(x \circ \rho^{t\ln\omega}\right)dt - \varphi(0) \tag{32}$$

при всех $p_i = \infty$, $\gamma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

$\lhd$ Так как при $\gamma_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, утверждения леммы 8 обоснованы при доказательстве леммы 6, то рассматриваем случай $\gamma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, но при любых $\alpha > 0$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = 1, \ldots, n$. Нужно обосновать следующее равенство:

$$\int\limits_{\ln\frac{1}{\rho}}^\infty \frac{d\xi}{\xi^2}\int\limits_0^\infty k^+_{l,\alpha}\left(\frac{\tau}{\xi}\right)\varphi\Big(x \circ e^{-\tau\ln\omega}\Big)\,d\tau = \int\limits_0^\infty \varphi\Big(x \circ e^{-\tau\ln\omega}\Big)\,d\tau \int\limits_{\ln\frac{1}{\rho}}^\infty k^+_{l,\alpha}\left(\frac{\tau}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi^2}.$$

Оно несложно обосновывается теоремой Фубини при $1 \leqslant p_i < \infty$, $\gamma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Действительно, покажем, что при $1 \leqslant p_i < \infty$, $\gamma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$ сходится (почти для всех x) повторный интеграл

$$\int\limits_0^\infty \Big|\varphi\Big(x \circ e^{-\tau\ln\omega}\Big)\Big|\,d\tau \int\limits_{\ln\frac{1}{\rho}}^\infty \left|k^+_{l,\alpha}\left(\frac{\tau}{\xi}\right)\right|\frac{d\xi}{\xi^2}$$

для всех $\varphi \in L_{\overline{p},0}$, $1 \leqslant \overline{p} < \infty$. Отсюда замены $\frac{\tau}{\xi} = s$ и $\tau = t\ln\frac{1}{\rho}$ приводят к необходимости доказать сходимость интеграла

$$J := \int\limits_0^\infty \Big|\varphi\Big(x \circ \rho^{-t\ln\omega}\Big)\Big| K^*(t)\,dt, \tag{33}$$

где $K^*(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \left|k^+_{l,\alpha}(s)\right| ds$. Так как $k^+_{l,\alpha}(s) \in L_1\left(\mathbb{R}^1_+\right)$, то $K^*(t) \leqslant \frac{c}{t}$ при $t \to +\infty$. Далее, очевидно, что $K^*(t) \leqslant ct^{\alpha-1}$при $t \to 0$ и что $K^*(t)$ непрерывна при $0 < t < \infty$. Тогда из (33) имеем

$$J \leqslant c\int\limits_0^1 \Big|\varphi\Big(x \circ \rho^{-t\ln\omega}\Big)\Big| t^{\alpha-1}\,dt + c\int\limits_1^\infty \Big|\varphi\Big(x \circ \rho^{-t\ln\omega}\Big)\Big|\frac{dt}{t}$$

и остается сослаться на теорему Юнга для пространств со смешанной нормой (см. [5, с. 25]).

Остается обосновать случай $p_i = \infty$, $i = 1, \ldots, n$, когда $\varphi \in C\left(\dot{\mathbb{R}}^n_+\right)$. В этом случае, чтобы преодолеть трудности, связанные со вторым слагаемым, т. е. $t > 1$, рассмотрим «двустороннее» усечение дробной производной Маршо — Адамара по направлению ω, т. е.

$$\left(D^\alpha_{\omega,1-\rho,\varepsilon} f\right)(x) = \frac{1}{\aleph(\alpha,l)} \int\limits_{\varepsilon}^{\rho} \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1-\alpha} \left(\tilde{\Delta}^l_{t^{\ln\omega}} f\right)(x)\,\frac{dt}{t}, \quad l > \alpha > 0, \tag{34}$$

где $0 < \varepsilon < \rho < 1$, и затем устремим $\varepsilon \to 0$. Согласно (31) и (34) имеем

$$\left(D^\alpha_{\omega,1-\rho,\varepsilon} f\right)(x) = \frac{1}{\aleph(\alpha,l)} \int\limits_{\varepsilon}^{\rho} \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1} \frac{dt}{t} \int\limits_0^\infty k^+_{l,\alpha}(y)\,\varphi\left(x \circ t^{y\ln\omega}\right) dy.$$

Замены $\ln\frac{1}{\xi} = \xi$ и $y\xi = \tau$ дают

$$\left(D^\alpha_{\omega,1-\rho,\varepsilon} f\right)(x) = \frac{1}{\aleph(\alpha,l)} \int\limits_0^\infty \varphi\Big(x \circ e^{-\tau\ln\omega}\Big)\,d\tau \int\limits_{\ln\frac{1}{\rho}}^{\ln\frac{1}{\varepsilon}} k^+_{l,\alpha}\Big(\frac{\tau}{\xi}\Big)\frac{d\xi}{\xi^2}. \tag{35}$$

Здесь перестановка порядка интегрирования легко обосновывается за счет $\varepsilon > 0$ (с учетом того, что $|\varphi(x)| < c$ и $\int_{\ln\frac{1}{\rho}}^{\ln\frac{1}{\varepsilon}} \frac{d\xi}{\xi^2} \int_0^\infty \left|k^+_{l,\alpha}(\frac{\tau}{\xi})\right| d\tau < \infty$). Из (35) имеем

$$\left(D^\alpha_{\omega,1-\rho,\varepsilon} f\right)(x) = \int\limits_0^\infty \varphi(x \circ e^{-\tau\ln\omega}) \left[-\frac{1}{\ln\rho} K^+_{l,\alpha}\left(-\frac{\tau}{\ln\rho}\right) + \frac{1}{\ln\varepsilon} K^+_{l,\alpha}\left(-\frac{\tau}{\ln\varepsilon}\right)\right] d\tau.$$

Таким образом,

$$\left(D^\alpha_{\omega,1-\rho,\varepsilon} f\right)(x) = \int\limits_0^\infty K^+_{l,\alpha}(t)\,\varphi\Big(x \circ \rho^{t\ln\omega}\Big)\,dt - \int\limits_0^\infty K^+_{l,\alpha}(t)\,\varphi\Big(x \circ \varepsilon^{t\ln\omega}\Big)\,dt. \tag{36}$$

Так как $\varphi \in C\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ и $K^+_{l,\alpha}(t) \in L_1\left(\mathbb{R}^1_+\right)$, то во втором слагаемом возможен предельный переход при $\varepsilon \to 0$ под знаком интеграла. В силу (30) и (36) получаем интегральное представление (32). $\rhd$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} A(\rho) := \int\limits_0^\infty \rho^{-ct} K^+_{\alpha,\mu}(t,\rho)\,dt = \left(\frac{\mu}{\mu-c}\right)^\alpha + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \\ \times \left[\Gamma\Big(-\alpha, \mu\ln\frac{1}{\rho}\Big)\Big(\frac{\mu}{\mu-c}\Big)^\alpha - \Gamma\Big(-\alpha, (\mu-c)\ln\frac{1}{\rho}\Big)\right], \end{aligned} \tag{37}$$

где $K^+_{\alpha,\mu}(t,\rho)$ — функция (23), $0 < \alpha < 1$, $0 < \rho < 1$, $\mu \geqslant 0$, $c := -\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{p_i}\ln\omega_i$, $\gamma_i, \ln\omega_i \in \mathbb{R}$, $\mu > c$.

Лемма 9. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $\mu \geqslant 0$, $c \in R$, $\mu > c$ и $0 < \rho < 1$. Тогда $A(\rho)$-функция обладает следующими свойствами:*

1) *$A(\rho)$-функция монотонно убывает при $c < 0$ и монотонно возрастает при $c > 0$.*

2) *Справедливо равенство* $\lim_{\rho\to 1-0} A(\rho)=1$, $\lim_{\rho\to 0+0} A(\rho)=\left(\frac{\mu}{\mu-c}\right)^{\alpha}$.

3) *Справедливо неравенство* $\left(\frac{\mu}{\mu-c}\right)^{\alpha} < A(\rho) \leqslant 1$, *при* $c<0$, $1\leqslant A(\rho) < \left(\frac{\mu}{\mu-c}\right)^{\alpha}$ *при* $0<c<\mu$.

$\lhd$ Найдем производную

$$A'(\rho)=\frac{\alpha\rho^{\mu}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{(\mu-c)^{-\alpha}}{\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha+1}}(\rho^{-c}-1).$$

Отсюда вытекает утверждение 1), т. е. $A'(\rho)<0$ при $c<0$, $A'(\rho)>0$ при $c>0$.

В силу свойства (2) неполной гамма-функции получим утверждение 2):

$$\lim_{\rho\to 1-0} A(\rho)=\left(\frac{\mu}{\mu-c}\right)^{\alpha}+\frac{\alpha\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\left(\frac{\mu}{\mu-c}\right)^{\alpha}-1\right]=1,\quad \lim_{\rho\to 0+0} A(\rho)=\left(\frac{\mu}{\mu-c}\right)^{\alpha}.$$

Утверждение 3) вытекает из утверждения 2) и в силу свойства (2) неполной гамма-функции. $\rhd$

7. Обращение дробных интегралов по направлению от функций из $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$

Теорема 5. *Пусть* $f=J^{\alpha}_{\omega,\mu}\varphi$, $\varphi\in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *где* $0<\alpha<1$, $\mu\geqslant 0$, $1\leqslant p_i<\infty$, $\gamma_i,\ln\omega_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$, $\mu+\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{p_i}\ln\omega_i>0$ *и* $0<\rho<1$. *Тогда*

$$\left(D^{\alpha}_{\omega,\mu}f\right)(x)=\lim_{\rho\to 1-0}\left(D^{\alpha}_{\omega,\mu;1-\rho}f\right)(x)=\varphi(x), \tag{38}$$

где предел понимается как в $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$.

$\lhd$ Сходимость по норме следует из леммы 6 и леммы 5. $\rhd$

Теорема 6. *Пусть* $f=J^{\alpha}_{\omega}\varphi$, $\varphi\in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *где* $\alpha>0$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\gamma_i,\ln\omega_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$, $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^{*}\ln\omega_i>0$ *или* $0<\alpha<1$, $1<p_i<\frac{1}{\alpha}$, $\gamma_i=0$, $i=1,\ldots,n$, *и* $0<\rho<1$. *Тогда*

$$\left(D^{\alpha}_{\omega}f\right)(x)=\lim_{\rho\to 1}\left(D^{\alpha}_{\omega,1-\rho}f\right)(x)=\varphi(x),$$

где предел понимается как в $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *так и почти всюду.*

$\lhd$ Сходимость по норме следует из леммы 7 и леммы 5. Доказательство сходимости почти всюду получим из [20, теорема 2, с. 77–78]. При этом учитываем равенство (29) и свойство ядра $\left|K^{+}_{l,\alpha}(t)\right|\leqslant\frac{c}{(1+t)^{l+1-\alpha}}$ при $t>1$ (см. [17, с. 379]), так что ядро $K^{+}_{l,\alpha}(t)$ имеет монотонную суммируемую мажоранту. $\rhd$

Теорема 7. *Пусть* $\left(\tilde{\Delta}^{l}_{\tau}f\right)(x)=J^{\alpha,l}_{\omega,\tau}\varphi$, $\varphi\in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *где* $l>\alpha>0$, $0<\tau<1$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\gamma_i,\ln\omega_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$, $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^{*}\ln\omega_i\geqslant 0$ *и* $0<\rho<1$. *Тогда*

$$\left(D^{\alpha}_{\omega}f\right)(x)=\lim_{\rho\to 1}\left(D^{\alpha}_{\omega,1-\rho}f\right)(x)=\varphi(x),$$

где предел понимается как в $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *так и почти всюду.*

$\lhd$ Доказательство теоремы сходимости по норме следует из леммы 8 и леммы 5. Доказательство сходимости почти всюду — как в теореме 6. $\rhd$

Из леммы 6 теоремы 5 вытекает связь между нормами дробных производных по направлению ω (9) и (10) в пространств $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$.

Теорема 8. *Пусть* $f(x) = \big(J^{\alpha}_{\omega,\mu}\varphi\big)(x)$, $\varphi \in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *где* $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant \overline{p} < \infty$, $\mu \geqslant 0$, $c := -\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{p_i} \ln \omega_i$, $c \in \mathbb{R}$, $\mu > c$ *и* $0 < \rho < 1$. *Тогда*

$$\left\|\mathbb{D}^{\alpha}_{\omega,\mu,\ 1-\rho} f; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\| \leqslant M \left\|\mathbb{D}^{\alpha}_{\omega,\mu} f; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\|, \quad M = \begin{cases} 1, & c < 0, \\ \left(\frac{\mu}{\mu - c}\right)^{\alpha}, & c > 0. \end{cases} \tag{39}$$

◁ Используя (22), применяя обобщенное неравенство Минковского и учитывая (38), имеем

$$\left\|\mathbb{D}^{\alpha}_{\omega,1-\rho} f; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\| \leqslant \int\limits_{0}^{\infty} \left|K^{+}_{\alpha,\mu}(t,\rho)\right| \left\|\varphi\left(x \circ \rho^{t \ln \omega}; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right)\right\| dt \leqslant A(\rho) \left\|\mathbb{D}^{\alpha}_{\omega,\mu} f; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\|,$$

где $A(\rho)$ — функция (37). В силу леммы 9 вытекает (39). ▷

Следствие 3. *Пусть* $f(xt) = (J^{\alpha}_{\omega}\varphi)(x)$, $\varphi \in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *где* $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant \overline{p} < \infty$, $c := -\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{p_i} \ln \omega_i$, $c \in \mathbb{R}$, $c < 0$ *и* $0 < \rho < 1$. *Тогда*

$$\left\|\mathbb{D}^{\alpha}_{\omega,\ 1-\rho} f; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\| \leqslant \left\|\mathbb{D}^{\alpha}_{\omega} f; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\|.$$

Благодарность. Автор выражает благодарность С. М. Умархаджиеву за полезное обсуждение результатов работы.

Литература

1. *Hadamard J.* Essai sur l'etude des functions données par leur développment de Taylor // J. Math. Pures et Appl.—1892.—Vol. 8, № 4.—P. 101–186.
2. *Benedek A., Panzone R.* The space L^p, with mixed norm // Duke Math. J.—1961.—Vol. 28, № 3.—P. 301–324. DOI: 10.1215/s0012-7094-61-02828-9.
3. *Antonic N., Ivec I.* On the Hormander–Mihlin theorem for mixed-norm Lebesgue spaces // J. Math. Anal. Appl.—2016.—Vol. 433, № 1.—P. 176–199. DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.07.002.
4. *Stefanov A., Torres R. H.* Calderon–Zygmund operators on mixed Lebesgue spaces and applications to null forms // J. London Math. Soc.—2004.—Vol. 70, № 2.—P. 447–462. DOI: 10.1112/S0024610704005502.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.—М.: Наука, 1975.—480 с.
6. *Marchaud A. P.* Sur les derivees et sur les differences des functions de variables reelles // J. Math. Pure et Appl.—1927.—Vol. 6.—P. 337–426.
7. *Киприянов И. А.* Оператор дробного дифференцирования и степени эллиптических операторов // Докл. АН СССР.—1960.—Т. 131, № 2.—С. 238–241.
8. *Киприянов И. А.* О пространствах дробно-дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1960.—Т. 24, № 6.—С. 865–882.
9. *Кукушкин М. В.* О некоторых качественных свойствах оператора дробного дифференцирования Киприянова // Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер.—2017.—№ 2.—С. 32–43.
10. *Butzer P. L., Kilbas A. A., Trujillo J. J.* Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals // J. Math. Anal. Appl.—2002.—Vol. 269, issue 1.—P. 1–27. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00049-5.
11. *Kilbas A. A.* Hadamard-type fractional calculus // J. Korean Math. Soc.—2001.—Vol. 38, issue 6.—P. 1191–1204.
12. *Килбас А. А., Титюра А. А.* Дробная производная типа Маршо — Адамара и обращение дробных интегралов типа Адамара // Докл. АН Беларуси.—2006.—Т. 50, № 4.—С. 10–15.
13. *Ma L., Li C.* On Hadamard fractional calculus // World Scientific, Fractals.—2017.—Vol. 25, № 3.—P. 1–13. DOI: 10.1142/S0218348X17500335.
14. *Samko S. G., Yakhshiboyev M. U.* A Chen-type modification Of Hadamard fractional integro-differentiation // Operator Theory: Advances and Applications.—2014.—Vol. 242.—P. 325–339.
15. *Wu Y., Yao K., Zhang X.* The Hadamard fractional calculus of a fractal function // World Scientific. Fractals.—2018.—Vol. 26, № 3.—P. 25–36. DOI: 10.1142/s0218348x18500251.

16. *Yakhshiboev M. U.* Hadamard-type fractional integrals and Marchaud-Hadamard-type fractional derivatives in the spaces with power weight // Uzbek Math. J.—2019.—№ 3.—P. 155–174. DOI: 10.29229/uzmj.2019-3-17.
17. *Самко С. Г., Килбас А. А., Марчиев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
18. *Бердышев А. С., Турметов Б. Х., Кадиркулов Б. Ж.* Некоторые свойства и применения интегро-дифференциальных операторов типа Адамара — Маршо в классе гармонических функций // Сиб. мат. журн.—2012.—Т. 53, № 4.—С. 752–764.
19. *Kilbas A. A., Titioura A. A.* Nonlinear differential equation with Marchaud-Hadamard-type fractional derivative in the weighted space of summable functions // Mathematical Modelling and Analysis.—2007.—Vol. 12, № 3.—P. 343–356. DOI: 10.3846/1392-6292.2007.12.343-356.
20. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.—М.: Мир, 1973.—342 с.

Статья поступила 18 мая 2020 г.

Яхшибоев Махмадиёр Умирович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, *доцент*
Узбекистан, 100174, Ташкент, Вузгородок, ул. Университетская, 4
E-mail: m.yakhshiboev@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 4, P. 119–134

ON HADAMARD AND HADAMARD-TYPE DIRECTIONAL FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIATION IN WEIGHTED LEBESGUE SPACES WITH MIXED NORM

Yakhshiboev, M. U.[1]

[1] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
4 University St., Student's campus, Tashkent 100174, Uzbekistan
E-mail: m.yakhshiboev@gmail.com

Abstract. The paper presents definitions and various auxiliary properties of Hadamard and Hadamard-type directional fractional integrals, Marchaud–Hadamard and Marchaud–Hadamard-type directional fractional derivatives. A relation is established between Hadamard and Hadamard-type directional fractional integrals and Marchaud–Hadamard and Marchaud–Hadamard-type directional fractional derivatives with the directional Riemann-Liouville operator. A modification of Hadamard and Hadamard-type directional fractional integrals with the kernel improved at infinity is introduced. The paper deals with a stretch invariant "convolution type" operators in weighted Lebesgue spaces with mixed norm. The boundedness and semigroup properties of Hadamard and Hadamard-type directional fractional integration in weighted Lebesgue spaces with mixed norm are proved. The compositions of Hadamard and Hadamard-type fractional integral and Marchaud–Hadamard and Marchaud–Hadamard-type directional fractional derivative are also considered and integral representation of Marchaud–Hadamard and Marchaud–Hadamard-type truncated directional fractional derivatives is obtained. Inversion theorems are proved for Hadamard and Hadamard-type directional fractional integrals on weighted Lebesgue spaces with mixed norm. A relationship between ordinary and truncated Marchaud–Hadamard and Marchaud–Hadamard-type directional fractional derivatives is also revealed.

Key words: Hadamard fractional integral, Hadamard fractional derivative, Lebesgue space with mixed norm, dilation operator, fractional derivative by direction of the Marshau–Hadamard, fractional derivative by direction of the Marshau–Hadamard type.

Mathematical Subject Classification (2010): 26A33, 41A35, 46E30.

For citation: *Yakhshiboev, M. U.* On Hadamard and Hadamard-Type Directional Fractional Integro-Differentiation in Weighted Lebesgue Spaces with Mixed Norm, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 119–134 (in Russian). DOI: 10.46698/t4957-0399-9092-y.

References

1. *Hadamard, J.* Essai sur l'Etude des Functions Données par Leur Développment de Taylor, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 1892, vol. 8, no. 4, pp. 101–186.
2. *Benedek, A. and Panzone, R.* The Space L^p, with Mixed Norm, *Duke Mathematical Journal*, 1961, vol. 28, no. 3, pp. 301–324. DOI: 10.1215/s0012-7094-61-02828-9.
3. *Antonic, N. and Ivec, I.* On the Hormander–Mihlin Theorem for Mixed-norm Lebesgue Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, vol. 433, no. 1, pp. 176–199. DOI: 10.1112/S0024610704005502.
4. *Stefanov, A. and Torres, R. H.* Calderon–Zygmund Operators on Mixed Lebesgue Spaces and Applications to Null Forms, *Journal of the London Mathematical Society*, 2004, vol. 70, no. 2, pp. 447–462. DOI.org/10.1112/S0024610704005502.
5. *Besov, O. V., Il'in, V. P. and Nikol'skii, S. M. Integral'nye predstavleniya funkcij i teoremy vlozheniya* [Integral Representations of Functions, and Embedding Theorems], Moscow, Nauka, 1975, 480 p. (in Russian).
6. *Marchaud A. P.* Sur les Derivees et sur les Differences des Functions de Variables Reelles, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 1927, vol. 6, pp. 337–426.
7. *Kipriyanov, I. A.* The Operator of Fractional Differentiation and the Powers of Elliptic Operators, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1960, vol. 131, no. 2, pp. 238–241 (in Russian).
8. *Kipriyanov, I. A.* On Spaces of Fractional-Differentiable Functions, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1960, vol. 24, no. 6, pp. 865–882 (in Russian).
9. *Kukushkin, M. V.* On some Qualitative Properties of the Operator of Fractional Differentiation in Kipriyanov Sense, *Vestnik SamU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2017, no. 2, pp. 32–43 (in Russian).
10. *Butzer, P. L., Kilbas, A. A. and Trujillo, J. J.* Fractional Calculus in the Mellin Setting and Hadamard-Type Fractional Integrals, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, vol. 269, no. 1, pp. 1–27. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00049-5.
11. *Kilbas, A. A.* Hadamard-type Fractional Calculus, *Journal of the Korean Mathematical Society*, 2001, vol. 38, no. 6, pp. 1191–1204.
12. *Kilbas, A. A. and Titioura, A. A.* A Marchaud–Hadamard-Type Fractional Derivatives and Inversion of Hadamard-Type Fractional Integrals, *Report of the Academician of Sciences of Belarus*, 2006, vol. 50, no. 4, pp. 10–15 (in Russian).
13. *Ma, L. and Li, C.* On Hadamard Fractional Calculus, *World Scientific, Fractals*, 2017, vol. 25, no. 3, pp. 1–13. DOI: 10.1142/S0218348X17500335.
14. *Samko, S. G. and Yakhshiboyev, M. U.* A Chen-Type Modification of Hadamard Fractional Integro-Differentiation, *Operator Theory: Advances and Applications*, 2014, vol. 242, pp. 325–339.
15. *Wu, Y., Yao, K. and Zhang, X.* The Hadamard Fractional Calculus of a Fractal Function, *World Scientific, Fractals*, 2018, vol. 26, no. 3, pp. 25–36. DOI: 10.1142/s0218348x18500251.
16. *Yakhshiboev, M. U.* Hadamard-Type Fractional Integrals and Marchaud–Hadamard-Type Fractional Derivatives in the Spaces With Power Weight, *Uzbek Mathematical Journal*, 2019, no. 3, pp. 155–174. DOI: 10.29229/uzmj.2019-3-17.
17. *Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya* [Fractional Integrals and Derivatives and some of their Applications], Minsk, Nauka and Tekhnika, 1987, 688 p. (in Russian).
18. *Berdyshev, A. S., Turmetov, B. Kh. and Kadirkulov, B. J.* Some Properties and Applications of the Integrodifferential Operators of Hadamard–Marchaud Type in the Class of Harmonic Functions, *Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, no. 4, pp. 600–612. DOI: 10.1134/S0037446612040039.
19. *Kilbas, A. A. and Titioura, A. A.* Nonlinear Differential Equation with Marchaud–Hadamard-Type Fractional Derivative in the Weighted Space of Summable Functions, *Mathematical Modelling and Analysis*, 2007, vol. 12, no. 3, pp. 343–356. DOI: 10.3846/1392-6292.2007.12.343-356.
20. *Stein, E. M. Singulyarnye integraly i differencial'nye svojstva funkcij* [Singular Integrals and Differentialiability Properties of Functions], Moscow, Mir, 1973, 342 p. (in Russian).

Received May 18, 2020

Makhmadiyor U. Yakhshiboev
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
4 University St., Student's campus, Tashkent 100174, Uzbekistan,
Associate Professor
E-mail: m.yakhshiboev@gmail.com

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Общие положения

1. Периодическое издание «Владикавказский математический журнал» публикует оригинальные научные статьи отечественных и зарубежных авторов, содержащие новые математические результаты по функциональному и комплексному анализу, алгебре, геометрии, дифференциальным уравнениям и математической физике. По заказу редакционной коллегии журнал также публикует обзорные статьи. Журнал предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре выпуска в год. «Владикавказский математический журнал» публикует статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более 2 усл.п.л. (17 страниц формата А4). Работы, превышающие 2 усл.п.л., принимаются к публикации по специальному решению Редколлегии журнала. Срок рассмотрения статей обычно не превышает 8 месяцев. При подготовке статей для ускорения их рассмотрения и публикации следует соблюдать правила для авторов.

2. К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Результаты иных авторов, использованные в статье, следует должным образом отразить в ссылках. Направляя статью в журнал, авторы тем самым подтверждают, что для нее выполнены указанные требования.

3. Направляя статью в журнал, каждый из авторов подтверждает, что статья соответствует наивысшим стандартам публикационной этики для авторов и соавторов, разработанным COPE (Committee on Publication Ethics), см. http://publicationethics.org/about.

4. Все материалы, поступившие для публикации в журнале, подлежат регистрации с указанием даты поступления рукописи в редакцию журнала. Решение о публикации, отказе в публикации или направлении рукописи автору для доработки должно быть принято главным редактором и сообщено автору не позднее 4 месяцев со дня поступления рукописи в редакцию журнала. Подробнее см. в разделе Рецензирование.

5. Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего окончательный макет статьи в формате PDF направляется автору на корректуру.

6. Условием публикации статей, принятых к печати, является подписанием авторами договора о передаче авторских прав. Бланк договора можно скачать по ссылке.

7. Полнотекстовые версии статей, публикуемых в журнале, размещаются в Интернете в свободном доступе на официальном сайте журнала http://www.vlmj.ru, а также на сайтах Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка».

8. Публикации в журнале для авторов бесплатны.

Подготовка и представление рукописи статьи

1. Все материалы предоставляются в редакцию в электронном виде. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая рисунки, таблицы и список литературы, следует пронумеровать.

2. Работа должна быть подготовлена на компьютере в издательской системе LaTeX. Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX, не рассматриваются. Файлы статьи *.tex и *.ps (*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте rio@smath.ru.

3. В тексте статьи указывается индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся аннотации на русском и английском языках (объемом не менее 200 слов, достаточную для понимания содержания статьи), даются списки ключевых слов на русском и английском языках, а также коды согласно Mathematics Subjects Classifications (2010). Далее в файле приводятся полностью Фамилия, Имя, Отчество каждого автора, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты и ORCID.

4. Датой поступления статьи считается дата поступления электронной копии статьи на официальный e-mail журнала. Текст электронного сообщения должен быть оформлен как сопроводительное письмо, из текста которого ясно следует, что авторы направляют свою статью во Владикавказский математический журнал. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

5. В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

6. При подготовке файла статьи особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета LaTeX. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела.

7. Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков. Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова «Рис. » с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отформатированной слева надписью «Таблица» с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

8. Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы печатается в конце текста статьи, оформленные в соответствии с правилами издания, на основании требований, предусмотренных действующими ГОСТами. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

9. Список литературы полностью дублируется на английском языке, приводится полностью отдельным блоком в конце статьи, повторяя список литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются в списке, готовящемся в романском алфавите. Список References используется международными библиографическими базами (Scopus, WoS и др.) для учета цитирования авторов.

Примечание: более подробную информацию можно найти на официальном сайте журнала http://www.vlmj.ru.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 22

Выпуск 4

Зав. редакцией В. В. Бозрова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

Подписано в печать 22.12.2020. Дата выхода в свет 29.12.2020.
Формат бумаги $60\times84^1/_8$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 15,81. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный научный центр «Владикавказский научный центр
Российской академии наук» (ВНЦ РАН)

Издатель:
Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»

Адрес издателя:
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

Индекс 57380