ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

http://www.vlmj.ru

Том 20, выпуск 3 2018

ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

http://www.vlmj.ru

Volume 20, Issue 3 2018

SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru
Зав. редакцией: В. В. КИБИЗОВА

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vlmj.ru**

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций:
свид. ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.;
свид. ЭЛ № ФС77-70171 от 21 июня 2017 г.

Editorial Office: 22 Markusa St., Vladikavkaz 362027,
the Republic of North Ossetia-Alania, Russia
Phone: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru
Managing editor: V. V. KIBIZOVA

The journal was founded in 1999. It is published four times a year.
ELECTRONIC VERSION: **www.vlmj.ru**

Registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom,
Information Technologies and Mass Communications:
ПИ № ФС77-70008 dated May 31, 2017; ЭЛ № ФС77-70171 dated June 21, 2017.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 20, выпуск 3 июль–сентябрь, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Ахмад А.-С., Рустанов А. Р., Харитонова С. В. Свойства интегрируемости обобщенных многообразий Кенмоцу ... 4

Гаджимирзаев Р. М. Аппроксимативные свойства специальных рядов по полиномам Мейкснера ... 21

Gutman A. E., Kononenko L. I. Binary Correspondences and the Inverse Problem of Chemical Kinetics ... 37

Иванова О. А., Мелихов С. Н. Коммутант оператора Поммье в пространстве целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной прямой ... 48

Каримов Ш. Т., Уринов А. К. Решение задачи Коши для четырехмерного гиперболического уравнения с оператором Бесселя ... 57

Кыров В. А. Об одном семействе функциональных уравнений ... 69

Ouadih S. E., Daher R., Lafdal H. S. Some Estimates for the Generalized Fourier Transform Associated with the Cherednik–Opdam Operator on $\mathbb{R}$ ... 78

Субботин В. И. Симметричные многогранники с ромбическими вершинами ... 87

Унучек С. А. Восстановление операторов разделенной разности неточно заданной последовательности по ее преобразованию Фурье ... 94

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Шарапудинов Идрис Идрисович (некролог) ... 105

Джемали Гуриевичу Саникидзе 85 лет ... 106

Владикавказ
2018

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTER
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 20, issue 3 July–September, 2018

CONTENT

Abu-Saleem A., Rustanov A. R., Kharitonova S. V. Integrability Properties of Generalized Kenmotsu Manifolds ... 4

Gadzhimirzaev R. M. Approximation Properties Special Series by Meixner Polynomials ... 21

Gutman A. E., Kononenko L. I. Binary Correspondences and the Inverse Problem of Chemical Kinetics ... 37

Ivanova O. A., Melikhov S. N. The Commutant of the Pommiez Operator in a Space of Entire Functions of Exponential Type and Polynomial Growth on the Real Line ... 48

Karimov Sh. T., Urinoiv A. K. Solution of the Cauchy Problem for the Four-Dimensional Hyperbolic Equation with Bessel Operator ... 57

Kyrov V. A. On One Family of Functional Equations ... 69

Ouadih S. E., Daher R., Lafdal H. S. Some Estimates for the Generalized Fourier Transform Associated with the Cherednik–Opdam Operator on $\mathbb{R}$ ... 78

Subbotin V. I. Symmetric Polyhedra with Rhombic Vertices ... 87

Unuchek S. A. Optimal Recovery of the Operators of the Divided Difference of the Inaccurately Given Sequence by the Fourier Transform ... 94

MATHEMATICAL LIFE

Idris Idrisovich Sharaputdinov (obituary) ... 105

Dzhemal Gurievich Sanikidze (on his 85's anniversary) ... 106

Vladikavkaz
2018

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 4–20

УДК 514.76
DOI 10.23671/VNC.2018.3.17829

СВОЙСТВА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ОБОБЩЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ КЕНМОЦУ

А. Абу-Салеем[1], **А. Р. Рустанов**[2], **С. В. Харитонова**[3]

[1] Университет Аль аль-Байт, Иордания, Аль Джубэйха, 25113, Аль-Мафрака;
[2] НИУ МГСУ, Институт фундаментального образования,
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26;
[3] Оренбургский государственный университет,
Россия, 460000, Оренбург, пр. Победы, 13

E-mail: dr_ahmad57@yahoo.com, aligadzhi@yandex.ru, hcb@yandex.ru

Аннотация. Статья посвящена обобщенным многообразиям Кенмоцу, а именно исследованию их свойств интегрируемости. Исследование ведется методом присоединенных G-структур, поэтому вначале построено пространство присоединенной G-структуры почти контактных метрических многообразий. Далее определяются обобщенные многообразия Кенмоцу (короче GK-многообразия), приводится полная группа структурных уравнений таких многообразий. Определены первое, второе и третье фундаментальные тождества GK-структур. Сформулированы определения специальных обобщенных многообразий Кенмоцу (SGK-многообразий) I и II родов. В работе исследуются GK-многообразия, первое фундаментальное распределение которых вполне интегрируемо. Показано, что почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях максимальной размерности первого распределения GK-многообразия, является приближенно келеровой. Получено локальное строение GK-многообразия с замкнутой контактной формой, приведены выражения первого и второго структурных тензоров. Также в работе вычислены компоненты тензора Нейенхейса GK-многообразия. Поскольку задание тензора Нейенхейса равносильно заданию четырех тензоров $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$, то исследуется геометрический смысл обращения в нуль этих тензоров. Получено локальное строение интегрируемой и нормальной GK-структуры. Доказано, что характеристический вектор GK-структуры не является вектором Киллинга. Основным результатом является
Теорема. *Пусть M — GK-многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны:* 1) *GK-многообразие имеет замкнутую контактную форму;* 2) $F^{ab} = F_{ab} = 0$; 3) $N^{(2)}(X,Y) = 0$; 4) $N^{(3)}(X) = 0$; 5) *M — SGK-многообразие второго рода;* 6) *M — локально канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.*

Ключевые слова: обобщенное многообразие Кенмоцу, многообразие Кенмоцу, нормальное многообразие, тензор Нейенхейса, интегрируемая структура, приближенно келерово многообразие.

Mathematical Subject Classification (2000): 58A05.

1. Введение

В 1972 г. Кенмоцу [1] ввел в рассмотрение новый класс почти контактных метрических структур, характеризуемых тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y\rangle - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \mathscr{X}(M).$$

Структуры Кенмоцу естественно возникают в классификации Танно связных почти контактных метрических многообразий, группа автоморфизмов которых имеет максимальную размерность [2]. Они обладают рядом интересных свойств. Например, структуры Кенмоцу нормальны и интегрируемы, они не являются ни сасакиевыми структурами, ни косимплектическими структурами. Известны примеры структур Кенмоцу на нечетномерных пространствах Лобачевского кривизны (-1). Такие структуры получаются с помощью конструкции косого (*warped*) произведения $\mathbb{R}\times_f\mathbb{C}^n$ в смысле Бишопа и О'Нейла [3] комплексного евклидова пространства и вещественной прямой, где $f(t)=ce^t$. Всякое конформно-плоское многообразие Кенмоцу, а также локально-симметрическое многообразие Кенмоцу локально эквивалентно многообразию Кенмоцу такого типа [1]. Кириченко В. Ф. [4] доказал, что класс многообразий Кенмоцу совпадает с классом почти контактных метрических многообразий, получаемых из косимплектических многообразий каноническим концирκулярным преобразованием косимплектической структуры.

В своей диссертационной работе [5] Умнова С. В. изучала многообразия Кенмоцу и их обобщения. Она выделила класс почти контактных метрических многообразий, являющийся обобщением многообразий Кенмоцу и названный классом обобщенных (короче, GK-многообразия) многообразий Кенмоцу. Умнова С. В. выделяет два подкласса обобщенных многообразий Кенмоцу, названных *специальными обобщенными многообразиями Кенмоцу* (коротко, *SGK-многообразия*) I и II рода. В работе [5] доказано, что обобщенные многообразия Кенмоцу постоянной кривизны являются многообразиями Кенмоцу постоянной кривизны (-1). Кроме того, доказано, что класс SGK-многообразий II рода совпадает с классом почти контактных метрических многообразий, получаемых из точнейших косимплектических многообразий каноническим преобразованием точнейшей косимплектической структуры, а также дано локальное строение этих многообразий постоянной кривизны.

В данной статье мы изучаем свойства интегрируемости обобщенных многообразий Кенмоцу. Работа организована следующим образом. Во введении мы приводим предварительные сведения, необходимые в дальнейшем изложении, строим пространство присоединенной G-структуры. В п. 2 дано определение обобщенных многообразий Кенмоцу, приведена полная группа структурных уравнений GK-многообразий на пространстве присоединенной G-структуры, сформулировано определение SGK-многообразий I и II родов. Исследованы GK-многообразия, первое фундаментальное распределение которых вполне интегрируемо. Показано, что почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных подмногообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения обобщенного многообразия Кенмоцу, является приближенно келеровой структурой. Получено локальное строение GK-многообразия с замкнутой контактной формой, приведены аналитические выражения первого и второго структурных тензоров. В п. 3 исследуются свойства тензора Нейенхейса, получено локальное строение интегрируемой и нормальной GK-структуры. Доказано, что характеристический вектор GK-структуры не является вектором Киллинга. Также исследовано обращение в нуль тензоров $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$. Основные результаты сосредоточены в параграфах 2 и 3.

Пусть M — гладкое многообразие размерности $2n+1$, $\mathscr{X}(M)$ — C^∞-модуль гладких векторных полей на многообразии M. В дальнейшем все многообразия, тензорные поля и т. п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Определение 1.1 [6]. *Почти контактной структурой* на многообразии M называется тройка (η,ξ,Φ) тензорных полей на этом многообразии, где η — дифференциальная 1-форма, называемая *контактной формой структуры*, ξ — векторное поле, называемое *характеристическим*, Φ — эндоморфизм модуля $\mathscr{X}(M)$, называемый *структурным эндоморфизмом.* При этом

$$1)\ \eta(\xi)=1;\quad 2)\ \eta\circ\Phi=0;\quad 3)\ \Phi(\xi)=0;\quad 4)\ \Phi^2=-id+\eta\otimes\xi. \tag{1.1}$$

Если, кроме того, на M фиксирована риманова структура $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ такая, что

$$\langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y),\quad X,Y\in\mathscr{X}(M),$$

то четверка $(\eta,\xi,\Phi,g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется *почти контактной метрической структурой* (короче, *AC-структурой*).

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная (метрическая) структура, называется *почти контактным* (*метрическим* (*короче, AC-*)) *многообразием.*

Кососимметричный тензор $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$, $X,Y\in\mathscr{X}(M)$, называется *фундаментальной формой AC-структуры* [6].

Пусть (η,ξ,Φ,g) — почти контактная метрическая структура на многообразии M^{2n+1}. В модуле $\mathscr{X}(M)$ внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $m=\eta\otimes\xi$ и $l=id-m=-\Phi^2$ [5, 6]. Таким образом, $\mathscr{X}(M)=\mathtt{L}\oplus\mathtt{M}$, где $\mathtt{L}=\operatorname{Im}(\Phi)=\ker\eta$ — так называемое *контактное распределение*, $\dim\mathtt{L}=2n$, $\mathtt{M}=\operatorname{Im}m=\ker(\Phi)=L(\xi)$ — линейная оболочка характеристического вектора (причем l и m являются проекторами на подмодули $\mathtt{L}$ и $\mathtt{M}$ соответственно).

Очевидно, распределения $\mathtt{L}$ и $\mathtt{M}$ инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны. Очевидно также, что $\tilde\Phi^2=-id$, $\langle\tilde\Phi X,\tilde\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle$, $X,Y\in\mathscr{X}(M)$, где $\tilde\Phi=\Phi|\mathtt{L}$. Следовательно, $\{\tilde\Phi_p,g_p|\mathtt{L}\}$ — эрмитова структура на пространстве $\mathtt{L}_p$.

Комплексификация $\mathscr{X}(M)^C$ модуля $\mathscr{X}(M)$ распадается в прямую сумму $\mathscr{X}(M)^C=D_\Phi^{\sqrt{-1}}\oplus D_\Phi^{-\sqrt{-1}}\oplus D_\Phi^0$ собственных подпространств структурного эндоморфизма Φ, отвечающих собственным значениям $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ и 0 соответственно. Причем проекторами на слагаемые этой прямой суммы будут, соответственно, эндоморфизмы [6]

$$\pi=\sigma\circ l=-\frac{1}{2}(\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi),\quad \bar\pi=\bar\sigma\circ l=-\frac{1}{2}(-\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi),$$

$$m=id+\Phi^2,\quad \sigma=\frac{1}{2}(id-\sqrt{-1}\Phi),\quad \bar\sigma=\frac{1}{2}(id+\sqrt{-1}\Phi).$$

Отображения $\sigma_p:\mathtt{L}_p\to D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ и $\bar\sigma_p:\mathtt{L}_p\to D_\Phi^{-\sqrt{-1}}$ являются соответственно изоморфизмом и антиизоморфизмом эрмитовых пространств. Поэтому к каждой точке $p\in M^{2n+1}$ можно присоединить семейство реперов пространства $T_p(M)^C$ вида $(p,\epsilon_0,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n,\epsilon_{\hat 1},\ldots,\epsilon_{\hat n})$, где $\epsilon_a=\sqrt2\sigma_p(e_a)$, $\epsilon_{\hat a}=\sqrt2\bar\sigma_p(e_a)$; $\epsilon_0=\xi_p$, где $\{e_a\}$ — ортонормированный базис эрмитова пространства L_p. Такой репер называется *A-репером* [6]. Легко видеть, что матрицы компонент тензоров Φ_p и g_p в A-репере имеют вид

$$(\Phi_i^j)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\sqrt{-1}\,I_n&0\\0&0&-\sqrt{-1}\,I_n\end{pmatrix},\quad (g_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&I_n\\0&I_n&0\end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Хорошо известно [6, 7], что совокупность таких реперов определяет G-структуру на M со структурной группой $\{1\}\times U(n)$, представленной матрицами вида $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&A&0\\0&0&A\end{pmatrix}$, где $A\in U(n)$. Эта G-структура называется *присоединенной* [6, 7].

Подчеркнем, что пространство присоединенной G-структуры состоит из комплексных реперов, т. е. реперов комплексификации соответствующих касательных пространств. Поэтому, даже имея дело с вещественными тензорами, мы, говоря об их компонентах на пространстве присоединенной G-структуры, подразумеваем компоненты комплексных расширений этих тензоров. В свою очередь, комплексный тензор является комплексным расширением вещественного тензора тогда и только тогда, когда он инвариантен относительно оператора комплексного сопряжения. Следуя общепринятой традиции, будем называть такой тензор вещественным. В частности, сумма чистого комплексного тензора и комплексно сопряженного ему тензора является вещественным тензором.

На протяжении всей работы будем подразумевать, что индексы $i, j, k, \dots$ пробегают значения от 0 до $2n$, индексы $a, d, c, d, f, g, \dots$ — значения от 1 до n, и положим $\hat{a} = a + n$, $\hat{\hat{a}} = a$, $\hat{0} = 0$. Поскольку Φ и g — тензоры типов $(1, 1)$ и $(2, 0)$ соответственно, их компоненты на пространстве расслоения всех реперов над M удовлетворяют уравнениям

$$d\Phi^i_j + \Phi^k_j\theta^i_k - \Phi^i_k\theta^k_j = \Phi^i_{j,k}\omega^k, \quad dg_{ij} - g_{kj}\theta^k_i - g_{ik}\theta^k_j = g_{ij,k}\theta^k, \tag{1.3}$$

где $\{\omega^i\}$, $\{\theta^i_j\}$ — компоненты форм смещения и форм римановой связности ∇ соответственно, $\Phi^i_{j,k}$, $g_{ij,k}$ — компоненты ковариантного дифференциала Φ и g в этой связности соответственно. Более того, в силу определения римановой связности $\nabla g = 0$ и, значит,

$$g_{ij,k} = 0. \tag{1.4}$$

С учетом (1.2) и (1.4) соотношения (1.3) на пространстве присоединенной G-структуры перепишутся в форме [6]

$$\Phi^a_{b,i} = 0, \quad \Phi^{\hat{a}}_{\hat{b},i} = 0, \quad \Phi^0_{0,i} = 0, \quad \theta^0_a = -\sqrt{-1}\,\Phi^0_{a,i}\omega^i, \quad \theta^0_{\hat{a}} = \sqrt{-1}\,\Phi^0_{\hat{a},i}\omega^i,$$
$$\theta^a_0 = \sqrt{-1}\,\Phi^a_{0,i}\omega^i, \quad \theta^{\hat{a}}_0 = -\sqrt{-1}\,\Phi^{\hat{a}}_{0,i}\omega^i,$$
$$\theta^a_{\hat{b}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\,\Phi^a_{\hat{b},i}\omega^i, \quad \theta^{\hat{a}}_b = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\,\Phi^a_{b,i}\omega^i, \quad \theta^0_0 = 0, \quad \theta^i_j + \theta^{\hat{j}}_{\hat{i}} = 0.$$

Кроме того, заметим, что в силу вещественности соответствующих форм и тензоров $\overline{\omega^i} = \omega^{\hat{i}}$, $\overline{\theta^i_j} = \theta^{\hat{i}}_{\hat{j}}$, $\overline{\Phi^i_{j,k}} = \Phi^{\hat{i}}_{\hat{j},\hat{k}}$, где $t \to \bar{t}$ — оператор комплексного сопряжения.

С учетом этих соотношений первая группа структурных уравнений римановой связности $d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j$ почти контактного метрического многообразия на пространстве присоединенной G-структуры запишется в следующей форме [6]:

$$1)\ d\omega = C_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + C^{ab}\omega_a \wedge \omega_b + C^b_a\omega^a \wedge \omega_b + C_a\omega \wedge \omega^a + C^a\omega \wedge \omega_a;$$
$$2)\ d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^a{}_b\omega \wedge \omega^b + B^{ab}\omega \wedge \omega_b;$$
$$3)\ d\omega_a = \theta^b_a \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_a{}^b\omega \wedge \omega_b + B_{ab}\omega \wedge \omega^b,$$

где $\omega = \pi^*(\eta)$, π — естественная проекция пространства присоединенной G-структуры на многообразие M,

$$B^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},c}; \quad B^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; \quad B^a{}_b = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,b};$$
$$B^{ab} = \sqrt{-1}\left(\Phi^a_{0,\hat{b}} - \frac{1}{2}\Phi^a_{\hat{b},0}\right); \quad B_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}; \quad B_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{[b,c]};$$
$$B_a{}^b = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}}; \quad B_{ab} = -\sqrt{-1}\left(\Phi^{\hat{a}}_{0,b} - \frac{1}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0}\right);$$

$$C_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{[a,b]};\quad C^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^0_{[\hat{a},\hat{b}]};$$

$$C^a_b = -\sqrt{-1}\big(\Phi^0_{\hat{a},b} + \Phi^0_{b,\hat{a}}\big) = B^a{}_b - B_b{}^a;\quad C_a = \sqrt{-1}\Phi^0_{a,0};\quad C^a = -\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},0}.$$

При этом

$$\overline{B^{abc}} = B_{abc},\quad \overline{B^{ab}} = B_{ab},\quad \overline{\theta^b_a} = -\theta^a_b.$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}};\quad C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,c}; \\ F^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},\hat{b}};\quad F_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,b}. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Для тензорных компонент формы римановой связности имеют место следующие соотношения на пространстве присоединенной G-структуры [6]:

$$\begin{array}{lll} 1)\ \theta^a_{\hat{b}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},i}\omega^i; & 2)\ \theta^{\hat{a}}_b = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{b,i}\omega^i; & 3)\ \theta^a_0 = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,i}\omega^i; \\ 4)\theta^{\hat{a}}_0 = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,i}\omega^i; & 5)\ \theta^0_a = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,i}\omega^i; & 6)\ \theta^0_{\hat{a}} = \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},i}\omega^i; \\ 7)\ \theta^0_0 = 0; & 8)\ \theta^i_j + \theta^{\hat{j}}_{\hat{i}} = 0; & 9)\ \theta^0_{0,i} = \theta^a_{b,i} = \theta^{\hat{a}}_{\hat{b},i} = 0. \end{array} \tag{1.6}$$

2. Обобщенные многообразия Кенмоцу

Пусть $(M^{2n+1}, \Phi, \xi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — почти контактное метрическое многообразие.

Определение 2.1 [1]. Почти контактная метрическая структура, характеризуемая тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y = -\eta(Y)\Phi X - \langle X, \Phi Y\rangle\,,\quad X, Y \in \mathscr{X}(M),$$

называется *структурой Кенмоцу.*

Многообразие, снабженное структурой Кенмоцу, называется *многообразием Кенмоцу.*

Положим в этом тождестве $Y = X$. Тогда получим

$$\nabla_X(\Phi)X = -\eta(X)\Phi X,\quad X \in \mathscr{X}(M).$$

В полученном тождестве сделаем замену $X \to X + Y$ (поляризация по X), тогда получим

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\eta(Y)\Phi X - \eta(X)\Phi Y,\quad X, Y \in \mathscr{X}(M). \tag{2.1}$$

Определение 2.2 [5]. Класс почти контактных метрических многообразий, характеризуемых тождеством (2.1), называется *обобщенными многообразиями Кенмоцу* (короче, GK-многообразиями).

Расписав тождество (2.1) на пространстве присоединенной G-структуры, получим следующее.

Предложение 2.1. *Компоненты ковариантного дифференциала структурного эндоморфизма на пространстве присоединенной G-структуры удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\begin{array}{lll} 1)\ \Phi^0_{0,i} = \Phi^a_{b,0} = \Phi^{\hat{a}}_{\hat{b},0} = 0; & 2)\ \Phi^0_{i,0} = \Phi^i_{0,0} = 0; & 3)\ \Phi^b_{0,a} = -\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} = -\sqrt{-1}\delta^b_a; \\ 4)\ \Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}} = \Phi^a_{\hat{b},c} = 0; & 5)\ \Phi^{\hat{a}}_{0,b} + \Phi^{\hat{a}}_{b,0} = 0; & 6)\ \Phi^a_{0,\hat{b}} + \Phi^a_{\hat{b},0} = 0; \\ 7)\ \Phi^0_{a,b} + \Phi^0_{b,a} = 0; & 8)\ \Phi^0_{\hat{a},\hat{b}} + \Phi^0_{\hat{b},\hat{a}} = 0; & 9)\ \Phi^0_{a,\hat{b}} + \Phi^0_{\hat{b},a} = 0; \\ 10)\ \Phi^{\hat{c}}_{a,b} + \Phi^{\hat{c}}_{b,a} = 0; & 11)\ \Phi^{\hat{c}}_{\hat{a},\hat{b}} + \Phi^{\hat{c}}_{\hat{b},\hat{a}} = 0. & \end{array} \tag{2.2}$$

С учетом предложения 2.1 первая группа структурных уравнений GK-многообразий примет вид [8]

$$\begin{aligned}
&1)\ d\omega = F_{ab}\omega^a\wedge\omega^b + F^{ab}\omega_a\wedge\omega_b;\\
&2)\ d\omega^a = -\theta^a_b\wedge\omega^b + C^{abc}\omega_b\wedge\omega_c - \frac{3}{2}F^{ab}\omega\wedge\omega_b + \delta^a_b\omega\wedge\omega^b;\\
&3)\ d\omega_a = \theta^b_a\wedge\omega_b + C_{abc}\omega^b\wedge\omega^c - \frac{3}{2}F_{ab}\omega\wedge\omega^b + \delta^b_a\omega\wedge\omega_b,
\end{aligned}\tag{2.3}$$

где

$$\begin{gathered}
C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}};\quad C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,c};\quad C^{[abc]} = C^{abc};\quad C_{[abc]} = C_{abc};\\
\overline{C^{abc}} = C_{abc};\quad F^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},\hat{b}};\quad F_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,b};\\
F^{ab}+F^{ba}=0;\quad F_{ab}+F_{ba}=0;\quad \overline{F^{ab}} = F_{ab}.
\end{gathered}\tag{2.4}$$

Из (2.3) следует

Предложение 2.2 [5]. *Если $C^{abc} = C_{abc} = 0$ и $F^{ab} = F_{ab} = 0$, то GK-многообразие является многообразием Кенмоцу.*

Предложение 2.2 дает примеры GK-многообразий.

Стандартная процедура дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений GK-многообразий позволяет получить следующую теорему.

Теорема 2.1. *Полная группа структурных уравнений GK-многообразий на пространстве присоединенной G-структуры имеет вид*

$$\begin{aligned}
&1)\ d\omega = F_{ab}\omega^a\wedge\omega^b + F^{ab}\omega_a\wedge\omega_b;\\
&2)\ d\omega^a = -\theta^a_b\wedge\omega^b + C^{abc}\omega_b\wedge\omega_c - \frac{3}{2}F^{ab}\omega\wedge\omega_b + \delta^a_b\omega\wedge\omega^b;\\
&3)\ d\omega_a = \theta^b_a\wedge\omega_b + C_{abc}\omega^b\wedge\omega^c - \frac{3}{2}F_{ab}\omega\wedge\omega^b + \delta^b_a\omega\wedge\omega_b;\\
&4)\ d\theta^a_b = -\theta^a_c\wedge\theta^c_b + \left(A^{ad}_{bc} - 2C^{adh}C_{hbc} - \frac{3}{2}F^{ad}F_{bc}\right)\omega^c\wedge\omega_d\\
&+\left(-\frac{1}{3}\delta^a_bF_{cd}+\frac{2}{3}\delta^a_cF_{db}+\frac{2}{3}\delta^a_dF_{bc}\right)\omega^c\wedge\omega^d+\left(\frac{1}{3}\delta^a_bF^{cd}-\frac{2}{3}\delta^c_bF^{da}-\frac{2}{3}\delta^d_bF^{ac}\right)\omega_c\wedge\omega_d;\\
&5)\ dC^{abc} + C^{dbc}\theta^a_d + C^{adc}\theta^b_d + C^{abd}\theta^c_d = C^{abcd}\omega_d - 2\delta^{[a}_dF^{bc]}\omega^d - C^{abc}\omega;\\
&6)\ dC_{abc} - C_{dbc}\theta^d_a - C_{adc}\theta^d_b - C_{abd}\theta^d_c = C_{abcd}\omega^d - 2\delta^d_{[a}F_{bc]}\omega_d - C_{abc}\omega;\\
&7)\ dF^{ab} + F^{cb}\theta^a_c + F^{ac}\theta^b_c = -2F^{ab}\omega;\\
&8)\ dF_{ab} - F_{cb}\theta^c_a - F_{ac}\theta^c_b = -2F_{ab}\omega.
\end{aligned}\tag{2.5}$$

При этом

$$A^{ad}_{[bc]} = A^{[ad]}_{bc} = 0;\quad C^{a[bcd]} = \frac{3}{2}F^{a[b}F^{cd]};\quad F_{ad}C^{dbc} = 0;$$

и формулы комплексно сопряженные.

Продифференцировав внешним образом уравнения (2.5), получаем

$$\begin{aligned}
&1)\ dA^{ad}_{bc} + A^{hd}_{bc}\theta^a_h + A^{ah}_{bc}\theta^d_h - A^{ad}_{hc}\theta^h_b - A^{ad}_{bh}\theta^h_c = A^{ad}_{bch}\omega^h + A^{adh}_{bc}\omega_h + A^{ad}_{bc0}\omega;\\
&2)\ dC^{abcd} + C^{hbcd}\theta^a_h + C^{ahcd}\theta^b_h + C^{abhd}\theta^c_h + C^{abch}\theta^d_h = C^{abcdh}\omega_h + C^{abcd0}\omega;\\
&3)\ dC_{abcd} - C_{hbcd}\theta^h_a - C_{ahcd}\theta^h_b - C_{abhd}\theta^h_c - C_{abch}\theta^h_d = C_{abcdh}\omega^h + C_{abcd0}\omega.
\end{aligned}$$

При этом справедливы следующие тождества:

$$1)\ A^{ad}_{b[ch]} = 0; \quad 2)\ A^{a[dh]}_{bc} = 0;$$

$$3)\ A^{ad}_{bc0} = -2A^{ad}_{bc} - 4C^{adh}C_{hbc} + F^{ad}F_{bc} - 2\delta^a_b F^{dh}F_{hc} - 2\delta^a_c F^{dh}F_{hb} - 2\delta^d_b F^{ah}F_{hc};$$

$$4)\ \big(A^{ag}_{b[c} - 2C^{agf}C_{fb[c}\big)C_{|g|dh]} = 0;$$

$$5)\ \left(A^{ah}_{b[c} - \frac{3}{2}F^{ah}F_{b[c}\right)F_{|h|d]} = 0;$$

$$6)\ C^{abcg}C_{gdh} = 0; \quad 7)\ C^{abch}F_{hd} = 0;$$

$$8)\ 2F^{ab}F_{cd} = \big(\delta^a_d F_{ch} - \delta^a_c F_{dh}\big)F^{hb} + \big(\delta^b_c F_{dh} - \delta^b_d F_{ch}\big)F^{ha};$$

$$9)\ 2F^{ab}F^{cd} = F^{ac}F^{db} + F^{ad}F^{bc}$$

и формулы комплексно сопряженные.

Тождество $F^{ad}C_{dbc} = 0$ назовем *первым фундаментальным тождеством GK-структуры*; тождество $A^{ad}_{b[c}C_{gf]d} = 2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d}$ — *вторым фундаментальным тождеством*; тождество $A^{ad}_{b[c}F_{|d|g]} = \frac{3}{2}F^{ad}F_{b[c}F_{|d|g]}$ — *третьим фундаментальным тождеством*.

Определение 2.3 [5]. GK-структура называется: *специальной обобщенной структурой Кенмоцу* I *рода* (коротко, SGK-структурой I рода), если $C^{dbc} = C_{dbc} = 0$; *специальной обобщенной структурой Кенмоцу* II *рода* (коротко, SGK-структурой II рода), если $F_{ad} = F^{ad} = 0$.

Заметим, что из вида уравнения (2.5(1)) вытекает тождество

$$d\eta(X,Y) + d\eta(\Phi X, \Phi Y) = 0,$$

а также равносильное ему тождество $d\eta(\Phi X, Y) = d\eta(X, \Phi Y)$ для любых $X, Y \in \mathscr{X}(M)$.

В самом деле,

$$\begin{aligned}
&(d\eta)_{ab} = d\eta(\epsilon_a, \epsilon_b) = -d\eta(\Phi\epsilon_a, \Phi\epsilon_b) = F_{ab}, && (d\eta)_{\hat{a}b} = d\eta(\epsilon_{\hat{a}}, \epsilon_b) = d\eta(\Phi\epsilon_{\hat{a}}, \Phi\epsilon_b) = 0,\\
&(d\eta)_{a\hat{b}} = d\eta(\epsilon_a, \epsilon_{\hat{b}}) = d\eta(\Phi\epsilon_a, \Phi\epsilon_{\hat{b}}) = 0, && (d\eta)_{\hat{a}\hat{b}} = d\eta(\epsilon_{\hat{a}}, \epsilon_{\hat{b}}) = -d\eta(\Phi\epsilon_{\hat{a}}, \Phi\epsilon_{\hat{b}}) = F^{ab},\\
&(d\eta)_{a0} = d\eta(\epsilon_a, \xi) = -d\eta(\Phi\epsilon_a, \Phi\xi) = 0, && (d\eta)_{\hat{a}0} = d\eta(\epsilon_{\hat{a}}, \xi) = -d\eta(\Phi\epsilon_{\hat{a}}, \Phi\xi) = 0,\\
&(d\eta)_{0a} = d\eta(\xi, \epsilon_a) = -d\eta(\Phi\xi, \Phi\epsilon_a) = 0, && (d\eta)_(0\hat{a}) = d\eta(\xi, \epsilon_{\hat{a}}) = -d\eta(\Phi\xi, \Phi\epsilon_{\hat{a}}) = 0,\\
&(d\eta)_{00} = d\eta(\xi, \xi) = -d\eta(\Phi\xi, \Phi\xi) = 0.
\end{aligned}$$

Обратно, очевидно, что выполнение этих соотношений влечет справедливость тождества $d\eta(X,Y) + d\eta(\Phi X, \Phi Y) = 0$ для любых $X, Y \in \mathscr{X}(M)$.

Пусть M — GK-многообразие, первое фундаментальное распределение которого вполне интегрируемо. Дифференциальная 1-форма $\omega = \eta \circ \pi_*$, π — естественная проекция в главном расслоении реперов над многообразием M, а π_* — порожденное ей увлечение π-связных векторных полей на многообразии M, является формой Пфаффа первого фундаментального распределения, т. е. кобазисом кораспределения ассоциированного с первым фундаментальным распределением L. По классической теореме Фробениуса вполне интегрируемость первого фундаментального распределения равносильна существованию формы θ, что $d\omega = \theta \wedge \omega$.

Теорема 2.2. *GK-многообразие, первое фундаментальное распределение которого вполне интегрируемо, является SGK-многообразием* II *рода.*

$\lhd$ Почти контактная метрическая структура является вполне интегрируемой, если $d\eta \wedge \eta = 0$. Так как $\omega = \pi^*(\eta)$, π — естественная проекция пространства присоединенной G-структуры на многообразии M, из (2.5(1)) следует, что для того чтобы первое фундаментальное распределение было вполне интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы слагаемые $F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega$ и $F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega$ были равны нулю. Значит, необходимо, чтобы $F_{ab} = F^{ab} = 0$. Согласно определению 2.3 GK-структура является SGK-структурой II рода. $\rhd$

Поскольку всякое SGK-многообразие II рода локально канонически конциркулярно точнейше косимплектическому многообразию [5], а точнейше косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую [6], то предыдущую теорему можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 2.3. *GK-многообразие, первое фундаментальное распределение которого вполне интегрируемо, локально канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.*

Пусть M — GK-многообразие, первое фундаментальное распределение которого вполне интегрируемо. Тогда первая группа структурных уравнений такого многообразия имеет вид

$$\begin{aligned}
&1)\ d\omega = 0;\\
&2)\ d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + \delta^a_b \omega \wedge \omega^b;\\
&3)\ d\omega_a = \theta^b_a \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + \delta^b_a \omega \wedge \omega_b.
\end{aligned}$$

Пусть $N \subset M$ — интегральное многообразие максимальной размерности первого фундаментального распределения GK-многообразия M. Тогда на нем естественным образом индуцируется почти эрмитова структура $(J, \tilde{g})$, где $J = \Phi|_{\mathrm{L}}$, $\tilde{g} = g|_{\mathrm{L}}$. Так как форма ω является формой Пфаффа первого фундаментального распределения, то первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры на N имеет вид

$$\begin{aligned}
&1)\ d\omega = 0;\\
&2)\ d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c;\\
&3)\ d\omega_a = \theta^b_a \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c.
\end{aligned}$$

Используя таблицу «Обобщенные классы Грея — Хервеллы» [6], получаем, что почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных подмногообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения GK-многообразия M, является приближенно келеровой структурой.

Теорема 2.4. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных подмногообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения GK-многообразия M, является приближенно келеровой структурой.*

Теорема 2.5. *GK-многообразие с замкнутой контактной формой является SGK-многообразием II рода, т. е. многообразием локально канонически конциркулярным произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.*

$\lhd$ Поскольку $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$, где π — естественная проекция пространства присоединенной G-структуры на многообразии M, то из (2.5(1)) следует, что контактная форма GK-многообразия замкнута тогда и только тогда, когда $F_{ab} = F^{ab} = 0$, т. е. согласно определению 2.3, тогда и только тогда, когда многообразие является SGK-многообразием II рода. А значит, локально канонически конциркулярным произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. $\rhd$

Рассмотрим системы функций на пространстве присоединенной G-структуры: 1) $C = \{C^i{}_{jk}\}$, положив $C^a{}_{\hat{b}\hat{c}} = C^{abc}$, $C^{\hat{a}}{}_{bc} = C_{abc}$, все остальные компоненты — нулевые; 2) $F = \{F^i{}_j\}$, положив $F^a{}_{\hat{b}} = F^{ab}$, $F^{\hat{a}}{}_b = F_{ab}$, все остальные компоненты F — нулевые.

По Основной теореме тензорного анализа с учетом (2.5(5))–(2.5(8)) семейства функций C и F определяют вещественные тензорные поля типа $(2,1)$ и $(1,1)$ на многообразии M, которые мы обозначим теми же символами. Назовем эти тензоры *первым* и *вторым структурными тензорами GK-структуры*.

Теорема 2.6. *Структурные тензоры GK-структуры имеют следующие выражения:*

$$1)\ C(X,Y) = -\frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X = -\frac{1}{2}\Phi^2\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X;$$

$$\begin{aligned}2)\ (X) &= \Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\Phi\circ\nabla_X(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\nabla_X\xi - \Phi^2 X\\ &= -\Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\Phi\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X \quad (\forall\, X, Y \in \mathscr{X}(M)).\end{aligned}$$

$\lhd$ В [8] получено аналитическое выражение первого структурного тензора

$$\begin{aligned}C(X,Y) &= \frac{1}{4}\left\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi^2 X - \Phi^2\circ\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi X\right\}\\ &= -\frac{1}{4}\left\{\Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X + \Phi^2\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X\right\} \quad (\forall\, X, Y \in \mathscr{X}(M)).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Продифференцировав ковариантно равенство $\Phi^2 = -id + \eta\otimes\xi$, получим $\nabla_Y(\Phi)\Phi X + \Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)X = \xi\nabla_Y(\eta)X + \eta(X)\nabla_Y\xi$. В последнем равенстве сначала сделаем замену $X\to\Phi X$, а затем на полученное тождество подействуем оператором Φ^2. Тогда получим $\Phi\circ\nabla_Y(\Phi)\Phi X = \Phi^2\circ\nabla_Y(\Phi)\Phi^2 X$. В полученном тождестве сделаем замену $Y\to\Phi Y$. Тогда

$$\Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X = \Phi^2\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X \quad (\forall\, X, Y \in \mathscr{X}(M)). \tag{2.7}$$

С учетом (2.7) равенство (2.6) запишется в виде

$$C(X,Y) = -\frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X = -\frac{1}{2}\Phi^2\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X \quad (\forall\, X, Y \in \mathscr{X}(M)).$$

Напомним [6, 9], что третий, четвертый и пятый структурные тензоры почти контактной метрической структуры имеют следующие аналитические выражения:

$$\begin{aligned}&1)\ D(X) = -\frac{1}{2}\left\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 X + \frac{1}{2}\Phi^2\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi X\right\};\\ &2)\ E(X) = -\frac{1}{2}\left\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi\right\};\\ &3)\ F(X) = \frac{1}{2}\left\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi\right\} \quad (\forall\, X \in \mathscr{X}(M)).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Применив процедуру восстановления тождества [6, 7] к равенству $\Phi^b_{0,a} = -\sqrt{-1}\delta^b_a$, получим $\Phi^2\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi = -2\Phi X$ для любого $X\in\mathscr{X}(M)$. Подействуем оператором Φ на обе части последнего равенства. Тогда $\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi = 2\Phi^2 X$ для любого $X\in\mathscr{X}(M)$.

Поскольку третий и пятый структурные тензоры для любого $X\in\mathscr{X}(M)$ связаны соотношением $D(X) = -\frac{3}{2}F(X)$, то

$$\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi + \Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 X - \Phi^2\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi X = 0 \quad (\forall\, X \in \mathscr{X}(M)).$$

В (2.1) положим $Y=\xi$. Тогда получим $\nabla_X(\Phi)\xi+\nabla_\xi(\Phi)X=-\Phi X$ $(\forall X\in\mathscr{X}(M))$.

В последнем тождестве подставим сначала $X\to\Phi X$, а затем $X\to\Phi^2X$. Тогда получим

$$\begin{aligned}&1)\ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi+\nabla_\xi(\Phi)\Phi X=-\Phi^2X;\\&2)\ \nabla_{\Phi^2X}(\Phi)\xi+\nabla_\xi(\Phi)\Phi^2X=\Phi X\quad(\forall X\in\mathscr{X}(M)).\end{aligned}\tag{2.9}$$

На обе части равенства (2.9 (1)) подействуем оператором Φ^2, а на обе части равенства (2.9 (2)) подействуем оператором Φ. Тогда получим

$$\begin{aligned}&1)\ \Phi^2\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi+\Phi^2\nabla_\xi(\Phi)\Phi X=\Phi^2X;\\&2)\ \Phi\nabla_{\Phi^2X}(\Phi)\xi+\Phi\nabla_\xi(\Phi)\Phi^2X=\Phi^2X\quad(\forall X\in\mathscr{X}(M)).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Продифференцировав ковариантно равенство $\eta\circ\Phi=0$, получаем

$$\nabla_X(\eta)(\Phi Y)+\eta\circ\nabla_X(\Phi)Y=0\quad(\forall X,Y\in\mathscr{X}(M)).\tag{2.11}$$

В частности, если в последнем равенстве положить $Y=\xi$, то $\eta\{\nabla_X(\Phi)\xi\}=0$ для любого $X\in\mathscr{X}(M)$.

Продифференцировав ковариантно равенство $\Phi^2=-id+\eta\otimes\xi$, получаем

$$\nabla_X(\Phi)\Phi Y+\Phi\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)Y=\xi\nabla_X(\eta)Y+\eta(Y)\nabla_X\xi.$$

В полученном равенстве сделаем замену $Y=\xi$. Тогда с учетом тождества $\nabla_X(\eta)\xi=0$ для любого $X\in\mathscr{X}(M)$, получим тождество

$$\Phi\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)Y=\nabla_X\xi\quad(\forall X\in\mathscr{X}(M)).\tag{2.12}$$

С учетом (2.10) и (2.12) для (2.8(3)) имеем

$$\begin{aligned}F(X)&=\frac12\left\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2X}(\Phi)\xi-\Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi\right\}=\frac12\left\{\nabla_{\Phi^2X}\xi-\Phi\circ\nabla_{\Phi X}\xi\right\}\\&=\Phi\circ\nabla_{\Phi^2X}(\Phi)\xi-\Phi^2X=-\Phi\circ\nabla_X(\Phi)\xi-\Phi^2X=-\nabla_X\xi-\Phi^2X\\&=-\Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi-\Phi^2X=-\Phi\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi-\Phi^2X\quad(\forall X\in\mathscr{X}(M)).\ \triangleright\end{aligned}$$

3. Свойства интегрируемости GK-многообразий

Напомним [6], что компоненты тензора Нейенхейса

$$N_\Phi(X,Y)=\frac14\{\Phi^2[X,Y]+[\Phi X,\Phi Y]-\Phi[\Phi X,Y]-\Phi[X,\Phi Y]\}$$

на пространстве присоединенной G-структуры имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}1)\ N^0_{ab}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^0_{[a,b]};\quad 2)\ N^0_{\hat a b}=-N^0_{b\hat a}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^0_{(\hat a,b)};\quad 3)\ N^0_{\hat a\hat b}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^0_{[\hat a,\hat b]};\\ 4)\ N^a_{\hat b0}=-N^a_{0\hat b}=\frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi^a_{\hat b,0}-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{0,\hat b};\quad 5)\ N^a_{\hat b\hat c}=\sqrt{-1}\Phi^a_{[\hat b,\hat c]};\\ 6)\ N^{\hat a}_{b0}=-N^{\hat a}_{0b}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat a}_{0,b}-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat a}_{b,0};\quad 7)\ N^{\hat a}_{bc}=-\sqrt{-1}\Phi^{\hat a}_{[b,c]}.\end{gathered}$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно равны нулю.

С учетом (2.2) компоненты тензора Нейенхейса $N_\Phi(X,Y)$ GK-структуры на пространстве присоединенной G-структуры примут следующий вид:

$$\begin{array}{lll} 1)\ N^0_{ab}=\frac{1}{2}F_{ab}; & 2)\ N^0_{\hat{a}\hat{b}}=\frac{1}{2}F^{ab}; & 3)\ N^a_{\hat{b}0}=-N^a_{0\hat{b}}=\frac{3}{4}F^{ab};\\ 4)\ N^a_{\hat{b}\hat{c}}=2C^{abc}; & 5)\ N^{\hat{a}}_{b0}=-N^{\hat{a}}_{0b}=\frac{3}{4}F_{ab}; & 6)\ N^{\hat{a}}_{bc}=2C_{abc}. \end{array} \tag{3.1}$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно равны нулю.

Теорема 3.1. *Тензор Нейенхейса оператора Φ GK-структуры обладает свойствами:*

$$1)\ N_\Phi\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)+N_\Phi(\Phi X,\Phi Y)=0;$$

$$2)\ N_\Phi\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)-N_\Phi\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)=0;$$

$$3)\ N_\Phi(X,\xi)=-\frac{1}{4}\left\{\Phi\nabla_{\Phi X}\xi+2\nabla_X\xi+\Phi^2X\right\}\quad(\forall\, X,Y\in\mathscr{X}(M)).$$

$\lhd$ 1): Применяя процедуру восстановления тождества [4, 7] к равенствам $N^0_{a\hat{b}}=N^c_{a\hat{b}}=N^{\hat{c}}_{a\hat{b}}=0$, получим тождество $N_\Phi(\Phi^2X,\Phi^2Y)+N_\Phi(\Phi X,\Phi Y)=0$ для любых $X,Y\in\mathscr{X}(M)$.

2): Сделав в последнем тождестве замену $Y\to\Phi Y$, для любых $X,Y\in\mathscr{X}(M)$ получаем тождество $N_\Phi(\Phi^2X,\Phi Y)-N_\Phi(\Phi X,\Phi^2Y)=0$.

3): Вид тензора Нейенхейса

$$N_\Phi(X,Y)=\frac{1}{4}\left\{\Phi^2[X,Y]+[\Phi X,\Phi Y]-\Phi[\Phi X,Y]-\Phi[X,\Phi Y]\right\}$$

с учетом формулы $[X,Y]=\nabla_XY-\nabla_YX$, выражающей отсутствие кручения связности, примет вид

$$N_\Phi(X,Y)=\frac{1}{4}\{\nabla_{\Phi X}(\Phi)Y-\nabla_{\Phi Y}(\Phi)X+\Phi\nabla_Y(\Phi)X-\Phi\nabla_X(\Phi)Y\}\quad(\forall\, X,Y\in\mathscr{X}(M)).$$

Отсюда

$$N_\Phi(X,\xi)=\frac{1}{4}\{\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi+\Phi\nabla_\xi(\Phi)X-\Phi\nabla_X(\Phi)\xi\}\quad(\forall\, X\in\mathscr{X}(M)). \tag{3.2}$$

Положим в (2.1) $Y=\xi$. Тогда $\nabla_X(\Phi)\xi+\nabla_\xi(\Phi)X=-\Phi X$ для любого $X\in\mathscr{X}(M)$. С учетом полученного равенства соотношение (3.2) примет вид

$$N_\Phi(X,\xi)=-\frac{1}{4}\left\{\Phi\nabla_{\Phi X}\xi+2\nabla_X\xi+\Phi^2X\right\}\quad(\forall\, X\in\mathscr{X}(M)).\ \rhd$$

Определение 3.1 [6]. Почти контактная метрическая структура называется *интегрируемой*, если $N_\Phi=0$.

Теорема 3.2. *Интегрируемая GK-структура является структурой Кенмоцу.*

$\lhd$ Пусть GK-структура является интегрируемой. Тогда, согласно определению 3.1, $N_\Phi=0$. Последнее равенство с учетом (3.1) равносильно соотношениям $F^{ab}=F_{ab}=0$; $C^{abc}=C_{abc}=0$. И согласно предложению 2.2 структура является структурой Кенмоцу. $\rhd$

Известно [10], что задание тензора Нейенхейса равносильно заданию четырех тензоров $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$, а именно:

$$N^{(1)}(X,Y)=N_\Phi(X,Y)+2\,d\eta(X,Y)\xi;\quad N^{(2)}(X,Y)=(\mathscr{L}_{\Phi X}\eta)(Y)-(\mathscr{L}_{\Phi Y}\eta)(X);$$
$$N^{(3)}(X)=(\mathscr{L}_\xi\Phi)(X);\quad N^{(4)}(X)=(\mathscr{L}_\xi\eta)(X)\quad(\forall\, X,Y\in\mathscr{X}(M)),$$

где $\mathscr{L}_X$ — производная Ли в направлении векторного поля X.

Вычислим компоненты этих тензоров на пространстве присоединенной G-структуры.

Учитывая, что $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$, где π — естественная проекция пространства присоединенной G-структуры на многообразие M, а также то обстоятельство, что на пространстве присоединенной G-структуры $\xi^a = \xi_a = 0$, $\xi^0 = 1$, согласно (1.1(1)) находим, что на этом пространстве

$$\begin{array}{ll} 1)\ (d\eta \otimes \xi)^a_{ij} = (d\eta \otimes \xi)^{\hat{a}}_{ij} = 0; & 2)\ (d\eta \otimes \xi)^0_{ab} = F_{ab}; \\ 3)\ (d\eta \otimes \xi)^0_{\hat{a}\hat{b}} = F^{ab}; & 4)\ (d\eta \otimes \xi)^0_{\hat{a}b} = (d\eta \otimes \xi)^0_{a\hat{b}} = 0; \\ 5)\ (d\eta \otimes \xi)^0_{0a} = (d\eta \otimes \xi)^0_{a0} = 0; & 6)\ (d\eta \otimes \xi)^0_{0\hat{a}} = (d\eta \otimes \xi)^0_{\hat{a}0} = 0; \\ 7)\ (d\eta \otimes \xi)^0_{00} = 0. & \end{array} \tag{3.3}$$

С учетом соотношений (3.1) и (3.3) получаем, что на пространстве присоединенной G-структуры, тензор $N^{(1)}(X,Y) = N_\Phi(X,Y) + 2\,d\eta(X,Y)\xi$ имеет следующие компоненты:

$$\begin{array}{ll} 1)\ (N^{(1)})^0_{ab} = \frac{5}{2}F_{ab}; & 2)\ (N^{(1)})^0_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{5}{2}F^{ab}; \\ 3)\ (N^{(1)})^a_{\hat{b}0} = -(N^{(1)})^a_{0\hat{b}} = \frac{3}{4}F^{ab}; & 4)\ (N^{(1)})^{\hat{a}}_{b0} = -(N^{(1)})^{\hat{a}}_{0b} = \frac{3}{4}F_{ab}; \\ 5)\ (N^{(1)})^a_{\hat{b}\hat{c}} = 2C^{abc}; & 6)\ (N^{(1)})^{\hat{a}}_{bc} = 2C_{abc}, \end{array} \tag{3.4}$$

а остальные компоненты нулевые.

Определение 3.2 [6, 10]. Почти контактная метрическая структура называется *нормальной*, если $N_\Phi(X,Y) + 2\,d\eta(X,Y)\xi = 0$.

Понятие нормальности было введено Сасаки и Хатакеямой [11] и является одним из наиболее фундаментальных понятий контактной геометрии, тесно связанным с понятием интегрируемости структуры.

Теорема 3.3. *Нормальная GK-структура является структурой Кенмоцу, а значит, локально канонически конциркулярна косимплектической структуре.*

$\lhd$ Из определения 3.2 и (3.4) следует, что GK-структура является нормальной тогда и только тогда, когда $F^{ab} = F_{ab} = 0$, $C^{abc} = C_{abc} = 0$. Согласно предложению 2.2 GK-структура является Кенмоцу структурой. Поскольку структура Кенмоцу получается из косимплектической каноническим конциркулярным преобразованием, то нормальная GK-структура локально канонически конциркулярна косимплектической структуре. $\rhd$

Из теорем 3.2 и 3.3 следует

Теорема 3.4. *Пусть $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — AC-структура. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — *интегрируемая GK-структура;*

2) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — *нормальная GK-структура;*

3) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — *структура Кенмоцу.*

Теперь вычислим компоненты тензора $N^{(2)}(X,Y) = (\mathscr{L}_{\Phi X}\eta)(Y) - (\mathscr{L}_{\Phi Y}\eta)(X)$, где $\mathscr{L}_X$ — производная Ли в направлении векторного поля X.

Определение 3.3 [6]. Пусть M — гладкое многообразие, X — векторное поле на M, $\{F_t\}$ — соответствующая ему локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия, T — тензорное поле типа (r,s) на M. *Производной Ли тензорного поля T в направлении векторного поля X* называется тензорное поле $\mathscr{L}_X T$ на M, в каждой точке $p \in M$ определяемое формулой

$$(\mathscr{L}_X T)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((F_{-t})_* T_{F_t(p)} - T_p\right).$$

Оператор $\mathscr{L}_X : T(M) \to T(M)$, сопоставляющий тензорному полю $T \in T(M)$ тензорное поле $\mathscr{L}_X T$, называется *оператором дифференцирования Ли в направлении векторного поля X*.

Оператор дифференцирования Ли обладает следующими свойствами [6]:

1) оператор $\mathscr{L}_X$ является дифференцированием тензорной алгебры $T(M)$ многообразия, сохраняющим тип тензоров и перестановочным с операторами свертки;

2) $\mathscr{L}_X f = X(f)$, $\forall\, f \in C^\infty(M)$;

3) $\mathscr{L}_X Y = [X,Y]$, $\forall\, X, Y \in \mathscr{X}(M)$.

Замечательным обстоятельством является то, что перечисленные свойства оператора дифференцирования Ли однозначно определяют этот оператор.

Замечание 3.1 [6]. Пусть t — произвольный тензор типа (r,s) на M. Выражение $\mathscr{L}_X(t)(X_1,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s)$, будучи линейным по аргументам $X_1,\dots,X_r$, $u^1,\dots,u^s$, не является линейным по аргументу X.

С учетом перечисленных свойств имеем

$$\mathscr{L}_{\Phi X}(\eta(Y)) = \mathscr{L}_{\Phi X}\left(C^{(1)}_{(1)}\eta\otimes Y\right) = C^{(1)}_{(1)}\mathscr{L}_{\Phi X}(\eta\otimes Y)$$
$$= C^{(1)}_{(1)}\mathscr{L}_{\Phi X}(\eta)\otimes Y + C^{(1)}_{(1)}\eta\otimes\mathscr{L}\Phi X(Y) = \mathscr{L}_{\Phi X}(\eta)\otimes Y + \eta\otimes\mathscr{L}_{\Phi X}(Y),$$

т. е. $\mathscr{L}_{\Phi X}(\eta(Y)) = \mathscr{L}_{\Phi X}(\eta)\otimes Y + \eta\otimes\mathscr{L}_{\Phi X}(Y)$.

С учетом тождества $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ и свойств оператора дифференцирования Ли из полученного равенства имеем

$$\mathscr{L}_{\Phi X}(\eta)(Y) = \mathscr{L}_{\Phi X}(\eta(Y)) - \eta(\mathscr{L}_{\Phi X}Y) = (\Phi X)(\eta(Y)) - \eta([\Phi X, Y])$$
$$= (\Phi X)(\eta(Y)) - \eta(\nabla_{\Phi X}Y) + \eta(\nabla_Y(\Phi X)) = \{(\Phi X)(\eta(Y)) - \eta(\nabla_{\Phi X}Y)\}$$
$$+\eta\{\nabla_Y(\Phi)X + \Phi\nabla_Y X\} = \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\} + \eta\{\Phi\nabla_Y X\}$$
$$= \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\},$$

т. е.

$$\mathscr{L}_{\Phi X}(\eta)(Y) = \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\} \quad (\forall\, X, Y \in \mathscr{X}(M)). \tag{3.5}$$

Рассмотрим характеристический вектор GK-многообразия. Поскольку ξ является тензором типа $(0,1)$, то его компоненты $\{\xi^i\}$ на главном расслоении $B(M)$ реперов над M удовлетворяют дифференциальным уравнениям [6]

$$d\xi^i - \xi^k\theta^i_k = \xi^i{}_{,j}\theta^j, \tag{3.6}$$

где $\{\xi^i{}_{,j}\}$ — система функций, служащая компонентами ковариантного дифференциала вектора ξ в связности ∇. Расписывая (3.6) на пространстве присоединенной G-структуры, с учетом соотношений $\xi^a = \xi^{\hat a} = 0$, $\xi^0 = 1$, и вида тензорных компонент формы римановой связности [3]:

$$1)\ \theta^a_{\hat b} = \frac{1}{2}F^{ab}\omega + C^{abc}\omega_c;\quad 2)\ \theta^{\hat a}_b = \frac{1}{2}F_{ab}\omega + C_{abc}\omega^c;$$

$$3)\ \theta^a_0=\delta^a_b\omega^b-F^{ab}\omega_b;\quad 4)\ \theta^{\hat a}_0=\delta^b_a\omega_b-F_{ab}\omega^b;\quad 5)\ \theta^0_a=F_{ab}\omega^b-\delta^b_a\omega_b;$$
$$6)\ \theta^0_{\hat a}=F^{ab}\omega_b-\delta^a_b\omega^b;\quad 7)\ \theta^0_0=0;\quad 8)\ \theta^i_j+\theta^{\hat i}_{\hat j}=0,$$

получим

$$1)\ \xi^a_{,\hat b}=-F^{ab};\quad 2)\ \xi^{\hat a}_{,b}=-F_{ab};\quad 3)\ \xi^a_{,b}=\delta^a_b;\quad 4)\ \xi^{\hat a}_{,\hat b}=\delta^b_a,$$

а остальные компоненты нулевые.

Теорема 3.5. *Характеристический вектор ξ GK-структуры не является вектором Киллинга.*

$\lhd$ Поскольку $\delta^a_b+\delta^a_b=\xi^a_{,b}+\xi^{\hat b}_{,\hat a}=\xi_{\hat a,b}+\xi_{b,\hat a}\neq 0$, т. е. $\langle\nabla_X\xi,Y\rangle+\langle X,\nabla_Y\xi\rangle\neq 0$ для любых $X,Y\in\mathscr{X}(M)$, то ξ не является вектором Киллинга. $\rhd$

Аналогично для контактной формы GK-многообразия:

$$1)\ \eta_{a,b}=-F_{ab};\quad 2)\ \eta_{\hat a,\hat b}=-F^{ab};\quad 3)\ \eta_{a,\hat b}=\delta^b_a;\quad 4)\ \eta_{\hat a,b}=\delta^a_b,\tag{3.7}$$

а остальные компоненты нулевые.

Теорема 3.6. *Контактная форма GK-структуры не является формой Киллинга.*

Согласно соотношению (3.5) $N^{(2)}(X,Y)$ примет следующий вид:

$$N^{(2)}(X,Y)=\nabla_{\Phi X}(\eta)(Y)+\eta\{\nabla_Y(\Phi)X\}-\nabla_{\Phi Y}(\eta)(X)-\eta\{\nabla_X(\Phi)Y\},\tag{3.8}$$

для любых $X,Y\in\mathscr{X}(M)$.

Из (3.7) следует, что $N^{(2)}(X,Y)=-N^{(2)}(Y,X)$, значит тензор $N^{(2)}(X,Y)$ кососимметричен, т. е. является 2-формой.

На пространстве присоединенной G-структуры тождество (3.8) примет вид

$$N^{(2)}_{ij}=\eta_{j,k}\Phi^k_i-\eta_{i,k}\Phi^k_j+\eta_k\Phi^k_{i,j}-\eta_k\Phi^k_{j,i}.\tag{3.9}$$

С учетом соотношений $\eta_{\hat a}=\eta_a=0$, $\eta_0=1$ и вида матрицы Φ на пространстве присоединенной G-структуры (1.2), из (3.9) имеем

$$1)\ N^{(2)}_{ab}=4\sqrt{-1}F_{ab};\quad 2)\ N^{(2)}_{\hat a\hat b}=-4\sqrt{-1}F^{ab},\tag{3.10}$$

остальные компоненты нулевые.

Из (3.10) непосредственно следует следующая

Теорема 3.7. *На GK-многообразии $N^{(2)}(X,Y)=0$ тогда и только тогда, когда $F^{ab}=F_{ab}=0$.*

Из определения 2.2 и теоремы 3.7 следует

Теорема 3.8. *GK-многообразие с $N^{(2)}(X,Y)=0$ является SGK-многообразием II рода.*

Используя локальное строение SGK-многообразия II рода [5], теорему 3.8 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.9. *GK-многообразие с $N^{(2)}(X,Y)=0$ локально канонически конциркулярно точнейше косимплектическому многообразию.*

Поскольку точнейше косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую [5], то предыдущую теорему можно сформулировать так:

Теорема 3.10. *GK-многообразие с $N^{(2)}(X,Y)=0$ локально канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.*

Рассмотрим теперь тензор

$$
\begin{aligned}
N^{(3)}(X) &= \mathscr{L}_\xi(\Phi)(X) = \mathscr{L}_\xi(\Phi X) - \Phi\mathscr{L}_\xi X = [\xi,\Phi X] - \Phi[\xi,X] \\
&= \nabla_\xi(\Phi X) - \nabla_{\Phi X}\xi - \Phi(\nabla_\xi X - \nabla_X\xi) = \nabla_\xi(\Phi)X + \Phi\nabla_\xi X \\
&\quad - \nabla_{\Phi X}\xi - \Phi\nabla_\xi X + \Phi\nabla_X\xi = \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_{\Phi X}\xi + \Phi\nabla_X\xi.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Таким образом, на GK-многообразии

$$
N^{(3)}(X) = \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_{\Phi X}\xi + \Phi\nabla_X\xi \quad (\forall\, X\in\mathscr{X}(M)). \tag{3.12}
$$

На пространстве присоединенной G-структуры тождество (3.12) равносильно соотношениям

$$
1)\ \bigl(N^{(3)}\bigr)^a_{\hat b} = -3\sqrt{-1}F^{ab};\quad 2)\ \bigl(N^{(3)}\bigr)^{\hat a}_b = 3\sqrt{-1}F_{ab}, \tag{3.13}
$$

остальные компоненты нулевые.

Из (3.13) и определения 2.3 следует

Теорема 3.11. *На GK-многообразии $N^{(3)}(X)=0$ тогда и только тогда, когда $F^{ab}=F_{ab}=0$, т. е. когда многообразие является SGK-многообразием* II *рода.*

Используя локальное строение SGK-многообразия II рода [5], теорему 3.11 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.12. *GK-многообразие с $N^{(3)}(X)=0$ локально канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.*

И, наконец, рассмотрим тензор $N^{(4)}(X)=(\mathscr{L}_\xi\eta)(X)$ для любого $X\in X$. Имеем

$$
\begin{aligned}
N^{(4)}(X) &= (\mathscr{L}_\xi\eta)(X) = \mathscr{L}_\xi(\eta(X)) - \eta(\mathscr{L}_\xi X) = \xi(\eta(X)) - \eta([\xi,X]) \\
&= \nabla_\xi(\eta(X)) - \eta(\nabla_\eta X) + \eta(\nabla_X\xi) = \nabla_\xi(\eta)(X) + \eta(\nabla_\xi X) - \eta(\nabla_\xi X) \\
&\quad + \eta(\nabla_X\xi) = \nabla_\xi(\eta)(X) + \eta(\nabla_X\xi) = \nabla_\xi(\eta)(X),
\end{aligned}
$$

т. е.

$$
N^{(4)}(X) = \nabla_\xi(\eta)(X) \quad (\forall\, X\in X). \tag{3.14}
$$

С учетом (3.7) тождество (3.14) на пространстве присоединенной G-структуры равносильно соотношениям $(N^{(4)})_i=0$, т. е. $N^{(4)}(X)=0$.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 3.13. *На GK-многообразии $N^{(4)}(X)=0$.*

Результаты теорем 2.5, 3.9–3.12 можно сформулировать в виде следующей основной теоремы.

Основная теорема. *Пусть M — GK-многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *GK-многообразие имеет замкнутую контактную форму;*

2) $F^{ab}=F_{ab}=0$;

3) $N^{(2)}(X, Y) = 0$;

4) $N^{(3)}(X) = 0$;

5) M — SGK-*многообразие* II *рода*;

6) M — *локально канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.*

Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.

Литература

1. *Kenmotsy K.* A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J.—1972.—Vol. 24, № 1.—P. 93–103. DOI: 10.2748/tmj/1178241594.
2. *Tanno S.* The automorphisms groups of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J.—1969.—Vol. 21, № 1.—P. 21–38. DOI: 10.2748/tmj/1178243031.
3. *Bishop R. L., O'Neil B.* Manifolds of negative curvature // Trans. Amer. Math. Soc.—1965.—Vol. 145.—P. 1–50. DOI: 10.1090/s0002-9947-1969-0251664-4.
4. *Кириченко В. Ф.* О геометрии многообразий Кенмоцу // Докл. РАН.—2001.—Т. 380, № 5.—С. 585–587.
5. *Умнова С. В.* Геометрия многообразий Кенмоцу и их обобщений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—М.: МПГУ, 2002.—88 с.
6. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. 2-е изд., доп.—Одесса: Печатный дом, 2013.—458 с.
7. *Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р.* Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Мат. сб.—2002.—Т. 193, № 8.—С. 71–100.
8. *Abu-Saleem A., Rustanov A. R.* Curvature identities special generalized manifolds Kenmotsu second kind // Malaysian J. Math. Sci.—2015.—Vol. 9, № 2.—P. 187–207.
9. *Кириченко В. Ф., Дондукова Н. Н.* Контактно геодезические преобразования почти контактных метрических структур // Мат. заметки.—2006.—Т. 80, № 2.—С. 209–219.
10. *Blair D. E.* Contact Manifolds in Riemannian Geometry.—Berlin: Springer-Verlag, 1976.—148 p.—(Lecture Notes in Mathematics; Book 509.)
11. *Sasaki S., Hatakeyama J.* On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. II // Tohoku Math. J.—1961.—Vol. 13, № 2.—P. 281–294. DOI: 10.2748/tmj/1178244304.

Статья поступила 11 июля 2017 г.

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 4–20

INTEGRABILITY PROPERTIES OF GENERALIZED KENMOTSU MANIFOLDS

Abu-Saleem A.[1], Rustanov A. R.[2], Kharitonova S. V.[3]

[1] Al al-Bayt University, P.O.Box 130040, Mafraq 25113, Jordan;
[2] National Research University (MGSU),
26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow 129337, Russia;
[3] Orenburg State University, 13 Pobedy av., Orenburg 460000, Russia

E-mail: dr_ahmad57@yahoo.com, aligadzhi@yandex.ru, hcb@yandex.ru

Abstract. The article is devoted to generalized Kenmotsu manofolds, namely the study of their integrability properties. The study is carried out by the method of associated G-structures; therefore, the space of the associated G-structure of almost contact metric manifolds is constructed first. Next, we define the generalized Kenmotsu manifolds (in short, the GK-manifolds) and give the complete group of structural equations of such manifolds. The first, second, and third fundamental identities of GK-structures are defined. Definitions of special generalized Kenmotsu manifolds (SGK-manifolds) of the I and II kinds are given. We consider GK-manifolds the first fundamental distribution of which is completely integrable. It is shown that the almost Hermitian structure induced on integral manifolds of maximal dimension of the first distribution of a GK-manifold is nearly Kahler. The local structure of a GK-manifold with a closed contact form is obtained, and the expressions of the first and second structural tensors are given. We also compute the components of the Nijenhuis tensor of a GK-manifold. Since the setting of the Nijenhuis tensor is equivalent to the specification of four tensors $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$, the geometric meaning of the vanishing of these tensors is investigated. The local structure of the integrable and normal GK-structure is obtained. It is proved that the characteristic vector of a GK-structure is not a Killing vector. The main result is **Theorem**: *Let M be a GK-manifold. Then the following statements are equivalent:* 1) *GK-manifold has a closed contact form;* 2) $F^{ab} = F_{ab} = 0$; 3) $N^{(2)}(X, Y) = 0$; 4) $N^{(3)}(X) = 0$; 5) *M — is a second-kind SGK manifold;* 6) *M is locally canonically concircular with the product of a nearly Kahler manifold and a real line.*

Key words: generalized Kenmotsu manifold, Kenmotsu manifold, normal manifold, Nijenhuis tensor, integrable structure, nearly Kahler manifold.

Mathematical Subject Classification (2000): 58A05.

References

1. *Kenmotsy K.* A Class of Almost Contact Riemannian Manifolds, *Tohoku Math. J.*, 1972, vol. 24, no. 1, pp. 93–103. DOI: 10.2748/tmj/1178241594.
2. *Tanno S.* The Automorphisms Groups of Almost Contact Riemannian Manifolds, *Tohoku Math. J.*, 1969, vol. 21, no. 1, pp. 21–38. DOI: 10.2748/tmj/1178243031.
3. *Bishop R. L., O'Neil B.* Manifolds of Negative Curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1965, vol. 145, pp. 1–50. DOI: 10.1090/s0002-9947-1969-0251664-4.
4. *Kirichenko V. F.* On the Geometry of Kenmotsu Manifolds, *Doklady RAN* [Reports of the RAS], 2001, vol. 380, no. 5, pp. 585–587 (in Russian).
5. *Umnova S. V. Geometriya mnogoobrazij Kenmocu i ih obobshenij: Dis. . . . kand. fiz.-mat. nauk* [Geometry Kenmotsu Manifolds and their Generalizations: Dis.... Cand. Sci. Sciences], Moscow, Moscow State Pedagogical University, 2002, 88 p. (in Russian).
6. *Kirichenko V. F. Differencial'no-geometricheskie struktury na mnogoobrazijah. 2-e izd., dop.* [Differential-Geometric Structures on Manifolds. Second edition, expanded], Odessa, Printing House, 2013, 458 p. (in Russian).
7. *Kirichenko V. F., Rustanov A. R.* Differential Geometry of Quasi-Sasakian Manifolds, *Sbornik: Mathematics*, 2002, vol. 193, no. 8, pp. 1173–1201. DOI: 10.1070/SM2002v193n08ABEH000675.
8. *Abu-Saleem A., Rustanov A. R.* Curvature Identities Special Generalized Manifolds Kenmotsu Second Kind, *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 2, pp. 187–207.
9. *Kirichenko V. F., Dondukova N. N.* Contactly Geodesic Transformations of Almost-Contact Metric Structures, *Mathematical Notes*, 2006, vol. 80, no. 1–2, pp. 204–213. DOI: 10.1007/s11006-006-0129-0.
10. *Blair D. E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Series: Lecture Notes in Mathematics; book* 509, Berlin, Springer-Verlag, 1976, 148 p.
11. *Sasaki S., Hatakeyama Y.* On Differentiable Manifolds with Certain Structures which are Closely Related to Almost Contact Structure. II, *Tohoku Math. J.*, 1961, vol. 13, no. 2, pp. 281–294. DOI: 10.2748/tmj/1178244304.

Received July 11, 2017

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 21–36

УДК 517.521
DOI 10.23671/VNC.2018.3.17961

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ РЯДОВ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА

Р. М. Гаджимирзаев[1]
[1] Дагестанский научный центр РАН,
Россия, 367032 Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45
E-mail: ramis3004@gmail.com

Аннотация. Построены новые специальные ряды по модифицированным полиномам Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(Nx)$. Эти полиномы при $\alpha > -1$ образуют ортогональную с весом $\rho(Nx)$ систему на равномерной сетке $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, где $\delta = 1/N$, $N > 0$. Упомянутые специальные ряды по полиномам $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ появились как естественный и альтернативный рядам Фурье — Мейкснера аппарат одновременного приближения дискретной функции f, заданной на равномерной сетке Ω_δ, и ее конечных разностей $\Delta_\delta^{\nu} f$. Основное внимание в настоящей статье уделено исследованию аппроксимативных свойств частичных сумм указанных рядов. В частности, получена поточечная оценка для функции Лебега частичных сумм специального ряда. Следует отметить, что новые специальные ряды, в отличие от рядов Фурье — Мейкснера, обладают тем свойством, что их частичные суммы совпадают со значениями исходной функции в точках $0, \delta, \ldots, (r-1)\delta$.

Ключевые слова: полиномы Мейкснера, аппроксимативные свойства, ряд Фурье, специальные ряды, функция Лебега.
Mathematical Subject Classification (2000): 41A10.

1. Введение

В настоящей работе рассмотрены новые специальные ряды по модифицированным полиномам Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(Nx)$ с $\alpha > -1$, ортогональным на равномерной сетке $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, где $\delta = \frac{1}{N}$, $N > 0$, и исследованы аппроксимативные свойства их частичных сумм. В частности, получена оценка сверху для функции Лебега частичных сумм специального ряда по полиномам Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x)$. Специальные ряды по полиномам Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ обладают значительно лучшими аппроксимативными свойствами, чем ряды Фурье по указанным полиномам. Например, новые специальные ряды, соответствующие заданному $r \in \mathbb{N}$, обладают тем свойством, что частичные суммы этих рядов интерполируют исходную функцию в точках $0, \delta, \ldots, (r-1)\delta$.

При исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм специального ряда нам понадобятся некоторые свойства полиномов Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x)$, которые мы приведем в следующем пункте.

2. Некоторые сведения о полиномах Мейкснера

Для $q \neq 0$ и произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ классические полиномы Мейкснера [1–3] можно определить с помощью равенства

$$M_n^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(x, q) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{[k]} x^{[k]}}{(\alpha+1)_k k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k,$$

где $x^{[k]}=x(x-1)\dots(x-k+1)$, $(a)_k=a(a+1)\dots(a+k-1)$. При $\alpha>-1$ и $0<q<1$ полиномы Мейкснера $M_n^\alpha(x)$ образуют ортогональную систему на сетке $\{0,1,\dots\}$ с весом $\rho(x)=\rho(x,\alpha,q)=q^x\frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}(1-q)^{\alpha+1}$, а, более точно, имеет место следующее равенство:

$$\sum_{x=0}^{\infty}m_n^\alpha(x)m_k^\alpha(x)\rho(x)=\delta_{nk},\quad 0<q<1,\ \alpha>-1,$$

где $m_n^\alpha(x)=m_n^\alpha(x,q)=\{h_n^\alpha(q)\}^{-\frac12}M_n^\alpha(x)$, $h_n^\alpha(q)=\binom{n+\alpha}{n}q^{-n}\Gamma(\alpha+1)$.

Пусть $N>0$, $\delta=\frac1N$, $q=e^{-\delta}$, $\Omega_\delta=\{0,\delta,2\delta,\dots\}$. Многочлены $M_{n,N}^\alpha(x)=M_n^\alpha(Nx,e^{-\delta})$ и $m_{n,N}^\alpha(x)=m_n^\alpha(Nx,e^{-\delta})=\left\{h_n^\alpha(e^{-\delta})\right\}^{-\frac12}M_{n,N}^\alpha(x)$ в случае $\alpha>-1$ образуют ортогональную и ортонормированную на Ω_δ системы с весом $\rho(Nx)=\rho(Nx;\alpha,e^{-\delta})$.

В дальнейшем, при оценке функции Лебега, важную роль играет следующая формула Кристоффеля — Дарбу:

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_{n,N}^\alpha(t,x)&=\sum_{k=0}^{n}m_{k,N}^\alpha(t)m_{k,N}^\alpha(x)\\&=\frac{\delta\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}}{(e^{\delta/2}-e^{-\delta/2})(x-t)}\left[m_{n+1,N}^\alpha(t)m_{n,N}^\alpha(x)-m_{n,N}^\alpha(t)m_{n+1,N}^\alpha(x)\right].\end{aligned}\tag{1}$$

которую можно записать [4] так:

$$\begin{gathered}\mathscr{K}_{n,N}^\alpha(t,x)=\frac{\alpha_n}{(\alpha_n+\alpha_{n-1})}m_{n,N}^\alpha(t)m_{n,N}^\alpha(x)+\frac{\alpha_n\alpha_{n-1}}{(\alpha_n+\alpha_{n-1})}\frac{\delta}{\left(e^{\frac\delta2}-e^{-\frac\delta2}\right)}\frac{1}{(x-t)}\\ \times\left[m_{n,N}^\alpha(x)\left(m_{n+1,N}^\alpha(t)-m_{n-1,N}^\alpha(t)\right)-m_{n,N}^\alpha(t)\left(m_{n+1,N}^\alpha(x)-m_{n-1,N}^\alpha(x)\right)\right],\end{gathered}\tag{2}$$

где $\alpha_n=\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}$. Для $0<\delta\leqslant1$, $N=\frac1\delta$, $\lambda>0$, $1\leqslant n\leqslant\lambda N$, $\alpha>-1$, $0\leqslant x<\infty$, $s\geqslant0$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$ справедливы [2, 5] следующие оценки:

$$\begin{gathered}e^{-\frac x2}\left|m_{n,N}^\alpha(x\pm s\delta)\right|\leqslant c(\alpha,\lambda,s)\theta_n^{-\frac\alpha2}A_n^\alpha(x),\\ A_n^\alpha(x)=\begin{cases}\theta_n^\alpha, & 0\leqslant x\leqslant\frac1{\theta_n},\\ \theta_n^{\frac\alpha2-\frac14}x^{-\frac\alpha2-\frac14}, & \frac1{\theta_n}<x\leqslant\frac{\theta_n}2,\\ \left[\theta_n\left(\theta_n^{\frac13}+|x-\theta_n|\right)\right]^{-\frac14}, & \frac{\theta_n}2<x\leqslant\frac{3\theta_n}2,\\ e^{-\frac x4}, & \frac{3\theta_n}2<x<\infty,\end{cases}\end{gathered}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}&e^{-\frac x2}\left|m_{n+1,N}^\alpha(x\pm s\delta)-m_{n-1,N}^\alpha(x\pm s\delta)\right|\\&\qquad\leqslant c(\alpha,\lambda,s)\begin{cases}\theta_n^{\frac\alpha2-1}, & 0\leqslant x\leqslant\frac1{\theta_n},\\ \theta_n^{-\frac34}x^{-\frac\alpha2+\frac14}, & \frac1{\theta_n}<x\leqslant\frac{\theta_n}2,\\ x^{-\frac\alpha2}\theta_n^{-\frac34}\left(\theta_n^{\frac13}+|x-\theta_n|\right)^{\frac14}, & \frac{\theta_n}2<x\leqslant\frac{3\theta_n}2,\\ e^{-\frac x4}, & \frac{3\theta_n}2<x<\infty.\end{cases}\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь и далее c, $c(\alpha)$, $c(\alpha,\dots,\lambda)$ — положительные числа, зависящие только от указанных параметров, причем различные в разных местах.

3. Неравенство Лебега для частичных сумм специального ряда по полиномам Мейкснера

В работе [6] были введены специальные ряды по классическим полиномам Лагерра и исследованы аппроксимативные свойства их частичных сумм. В настоящей работе мы рассмотрим специальные ряды по полиномам Мейкснера, которые являются дискретным аналогом вышеупомянутых специальных рядов по полиномам Лагерра. Нам понадобятся некоторые обозначения. Пусть Ω — дискретное множество, состоящее из бесконечного числа различных точек действительной оси, $\mu = \mu(x)$ — неотрицательная функция, определенная на этом множестве. Через $l_{2,\mu}(\Omega)$ обозначим пространство функций f, заданных на Ω и таких, что $\sum_{x\in\Omega} f^2(x)\mu(x) < \infty$. Мы рассмотрим случай, когда $\Omega = \Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, $\delta = \frac{1}{N}$, $\mu(x) = \rho(Nx) = \rho(Nx; \alpha, e^{-\delta})$. Пусть $d(x) \in l_{2,\rho}(\Omega_\delta)$, тогда при $x \in \Omega_{r,\delta} = \{r\delta, (r+1)\delta, \ldots\}$ мы можем определить дискретный аналог полинома Тейлора следующего вида:

$$P_{r-1,N}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{\Delta_\delta^\nu d(0)}{\nu!}(Nx)^{[\nu]}, \quad \Delta_\delta^0 d(x) = d(x),$$

$\Delta_\delta^1 d(x) = d(x+\delta) - d(x)$, $\Delta_\delta^\nu d(x) = \Delta_\delta(\Delta_\delta^{\nu-1} d(x))$. Легко проверить, что функция $d_r(x) = \frac{d(x) - P_{r-1,N}(x)}{N^{-r}(Nx)^{[r]}}$ принадлежит пространству $l_{2,\rho_{N,r}}(\Omega_{r,\delta})$, где $\rho_{N,r}(x) = \rho(N(x - r\delta))$, а модифицированные полиномы Мейкснера $m_{k,N,r}^\alpha(x) = m_{k,N}^\alpha(x - r\delta)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ при $\alpha > -1$ образуют ортонормированный базис в $l_{2,\rho_{N,r}}(\Omega_{r,\delta})$ с весом $\rho_{N,r}(x)$. Поэтому мы можем определить коэффициенты Фурье — Мейкснера

$$\hat{d}_{r,k}^\alpha = \sum_{t\in\Omega_{r,\delta}} d_r(t)\rho_{N,r}(t) m_{k,N,r}^\alpha(t) = \sum_{t\in\Omega_{r,\delta}} \frac{d(t) - P_{r-1,N}(t)}{N^{-r}(Nt)^{[r]}} \rho_{N,r}(t) m_{k,N,r}^\alpha(t)$$

и ряд Фурье — Мейкснера

$$d_r(x) = \sum_{k=0}^\infty \hat{d}_{r,k}^\alpha m_{k,N,r}^\alpha(x),$$

который в силу базисности в $l_{2,\rho_{N,r}}(\Omega_{r,\delta})$ системы полиномов Мейкснера $m_{k,N,r}^\alpha(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ сходится равномерно относительно $x \in \Omega_{r,\delta}$. Отсюда следует, что

$$d(x) = P_{r-1,N}(x) + N^{-r}(Nx)^{[r]} \sum_{k=0}^\infty \hat{d}_{r,k}^\alpha m_{k,N,r}^\alpha(x), \quad x \in \Omega_\delta. \tag{5}$$

Следуя [7, 8], мы будем называть (5) специальным рядом по полиномам Мейкснера для функции $d(x)$. Частичную сумму ряда (5) обозначим через

$$S_{n+r,N}^\alpha(d,x) = P_{r-1,N}(x) + N^{-r}(Nx)^{[r]} \sum_{k=0}^n \hat{d}_{r,k}^\alpha m_{k,N,r}^\alpha(x).$$

Если $d(x) = p_{n+r}(x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+r$, то, очевидно, $\hat{d}_{r,k}^\alpha = 0$ при $k \geqslant n+1$ и поэтому из (5) следует $S_{n+r,N}^\alpha(p_{n+r}, x) \equiv p_{n+r}(x)$, т. е. $S_{n+r,N}^\alpha(d,x)$ является проектором на подпространство алгебраических полиномов $p_{n+r}(x)$ степени не выше $n+r$. Обозначим через $q_{n+r}(x)$ алгебраический полином степени $n+r$, для которого $\Delta^i d(0) = \Delta^i q_{n+r}(0)$ $(i = 0, \ldots, r-1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \left|d(x) - S_{n+r,N}^\alpha(d,x)\right| &= \left|d(x) - q_{n+r}(x) + q_{n+r}(x) - S_{n+r,N}^\alpha(d,x)\right| \\ &\leqslant |d(x) - q_{n+r}(x)| + \left|S_{n+r,N}^\alpha(q_{n+r} - d, x)\right|. \end{aligned}$$

Отсюда для $x \in \Omega_{r,\delta}$

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left|d(x) - S_{n+r,N}^{\alpha}(d,x)\right| \leqslant e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left|d(x) - q_{n+r}(x)\right| + e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left|S_{n+r,N}^{\alpha}(q_{n+r}-d,x)\right|. \quad (6)$$

Так как $P_{r-1,N}(q_{n+r}-d,x) = 0$, то

$$\begin{aligned} &e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left|S_{n+r,N}^{\alpha}(q_{n+r}-d,x)\right| \\ &= e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} N^{-r} (Nx)^{[r]} \left|\sum_{k=0}^{n} (\widehat{q_{n+r}-d})_{r,k}^{\alpha} m_{k,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right| \\ &\leqslant e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} (Nx)^{[r]} \sum_{t\in\Omega_{r,\delta}} \frac{|q_{n+r}(t)-d(t)|}{(Nt)^{[r]}} \rho_{N,r}(t) \left|\sum_{k=0}^{n} m_{k,N}^{\alpha}(t-r\delta) m_{k,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right| \\ &= e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} (Nx)^{[r]} \sum_{t\in\Omega_{r,\delta}} \frac{|q_{n+r}(t)-d(t)|}{(Nt)^{[r]}} \rho_{N,r}(t) \left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta, x-r\delta)\right|. \end{aligned} \quad (7)$$

Положим

$$E_k^r(d,\delta) = \inf_{q_k} \sup_{x\in\Omega_{r,\delta}} e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left|d(x) - q_k(x)\right|, \quad (8)$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $q_k(x)$ степени k, для которых $\Delta^i d(0) = \Delta^i q_k(0)$ $(i = 0, \ldots, r-1)$. Тогда из (6) и (7), учитывая (8), получаем

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left|d(x) - S_{n+r,N}^{\alpha}(d,x)\right| \leqslant E_{n+r}^r(d,\delta)\left(1 + l_{n,r}^{\alpha,N}(x)\right), \quad (9)$$

где

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} (Nx)^{[r]} \sum_{t\in\Omega_{r,\delta}} \frac{e^{-\frac{t}{2}+r\delta} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{(Nt)^{[r]} \Gamma(Nt-r+1)} \times \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1} \left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta, x-r\delta)\right|.$$

В связи с неравенством (9) возникает задача об оценке функции Лебега $l_{n,r}^{\alpha,N}(x)$ при $n \leqslant \lambda N$, $\lambda \geqslant 1$. В настоящей работе мы ограничимся исследованием величины $l_{n,r}^{\alpha,N}(x)$ на множествах $G_1 = \left[r\delta, \frac{3\lambda}{\theta_n}\right]$ и $G_2 = \left[\frac{3\lambda}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}\right]$. А оценка функции $l_{n,r}^{\alpha,N}(x)$ на промежутке $\left(\frac{\theta_n}{2}, \infty\right)$ является объектом исследования другой нашей работы. При доказательстве следующей теоремы мы воспользуемся техникой доказательства теоремы 4 из работы [6].

Теорема 1. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $r - \frac{1}{2} < \alpha < r + \frac{1}{2}$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$, $\lambda \geqslant 1$, $0 < \delta \leqslant 1$, $\delta = 1/N$, $n \leqslant \lambda N$. *Тогда имеют место следующие оценки:*

1) *если* $x \in G_1 = \left[r\delta, \frac{3\lambda}{\theta_n}\right]$, *то*

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x) \leqslant c(\alpha,\lambda,r) \begin{cases} \ln(n+1), & \alpha = r, \\ 1 + n^{\alpha-r}, & \alpha \neq r; \end{cases} \quad (10)$$

2) *если* $x \in G_2 = \left[\frac{3\lambda}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}\right]$, *то*

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x) \leqslant c(\alpha,\lambda,r) \left[\ln(1+nx) + \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right]. \quad (11)$$

$\lhd$ Пусть $x \in G_1 = \left[r\delta, \frac{3\lambda}{\theta_n}\right]$. Тогда

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x) = S_1 + S_2, \tag{12}$$

где

$$S_1 \leqslant c(r) e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} (Nx)^r \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ r\delta\leqslant t\leqslant\frac{4}{\theta_n}}} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} (Nt)^{\alpha-r} \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1} \left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta, x-r\delta)\right|,$$

$$S_2 \leqslant c(r) e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} (Nx)^r$$
$$\times \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}} \frac{e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)} \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1} \left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta, x-r\delta)\right|.$$

Оценим S_1. Из (1) и (3) получаем

$$S_1 \leqslant c(\alpha,r) x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ r\delta\leqslant t\leqslant\frac{4}{\theta_n}}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \sum_{k=0}^{n} \left|e^{-\frac{x}{2}} m_{k,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right| \left|e^{-\frac{t}{2}} m_{k,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\delta x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ r\delta\leqslant t\leqslant\frac{4}{\theta_n}}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \sum_{k=0}^{n} \theta_k^{\alpha} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\delta x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ r\delta\leqslant t\leqslant\frac{4}{\theta_n}}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \theta_n^{\alpha+1} \tag{13}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\alpha-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}} \int_0^{\frac{4}{\theta_n}+\delta} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\,dt \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\alpha-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}} \left.\frac{t^{\alpha-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}}{\alpha-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}\right|_0^{\frac{4}{\theta_n}+\delta} = c(\alpha,\lambda,r).$$

Перейдем к оценке величины S_2. Для этого представим ее в виде $S_2 \leqslant S_{21}+S_{22}+S_{23}$, где

$$S_{21} = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} N^r \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}} \frac{e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)}$$
$$\times \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1} \left|m_{n,N}^{\alpha}(x-r\delta) m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|,$$

$$S_{22} = \frac{\alpha_n\alpha_{n-1}}{\alpha_n+\alpha_{n-1}} \frac{\delta}{e^{\frac{\delta}{2}}-e^{-\frac{\delta}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} N^r \left|m_{n+1,N}^{\alpha}(x-r\delta) - m_{n-1,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right|$$
$$\times \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}} \frac{e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)(t-x)} \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1} \left|m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|,$$

$$S_{23} = \frac{\alpha_n\alpha_{n-1}}{\alpha_n+\alpha_{n-1}} \frac{\delta}{e^{\frac{\delta}{2}}-e^{-\frac{\delta}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} N^r \left|m_{n,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right|$$
$$\times \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}} \frac{e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)(t-x)} \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1} \left|m_{n+1,N}^{\alpha}(t-r\delta) - m_{n-1,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|.$$

Оценим величину S_{21}. Из (3) имеем

$$S_{21} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}\frac{\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{t^r\Gamma(Nt-r+1)} \times \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1}\left|m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|. \qquad (14)$$

Пусть

$$W=\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}} \frac{e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt-r+1)}\left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1}\left|m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right| = W_1+W_2,$$

где

$$W_1=\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \frac{e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt-r+1)}\left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1}\left|m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|,$$

$$W_2=\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} \frac{e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt-r+1)}\left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1}\left|m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|.$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского к величине W_1, получаем

$$W_1 \leqslant \left(\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1}t^{-r-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt-r+1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1}\frac{e^{-t}\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{\Gamma(Nt-r+1)}\left(m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (15)$$

$$\leqslant c(\alpha)\left(\int_0^{\frac{3\theta_n}{2}} t^{\alpha-r-\frac{1}{2}}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant c(\alpha,r)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{4}}.$$

$$W_2 \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}\delta\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} e^{-\frac{t}{4}}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}e^{-n}. \qquad (16)$$

Из оценок (15) и (16) находим

$$W\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{4}}.$$

Из последнего неравенства и (14) имеем

$$S_{21}\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\alpha-r}. \qquad (17)$$

Перейдем к оценке величины S_{22}. В силу (4) и (3)

$$S_{22}\leqslant c(\alpha,\lambda,r)nx^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-1}\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}\delta\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}}\frac{t^{\frac{r}{2}-\frac14}t^{\alpha-r}A_n^\alpha(t)}{t-x}=S_{22}^1+S_{22}^2+S_{22}^3,$$

где

$$S_{22}^i=c(\alpha,\lambda,r)nx^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{-1}\delta\sum_{t\in B_i}\frac{t^{\frac{r}{2}-\frac14}t^{\alpha-r}A_n^\alpha(t)}{t-x},\quad i=1,2,3,$$

$$B_1=\left(\frac{4}{\theta_n},\frac{\theta_n}{2}\right]\cap\Omega_{r,\delta},\quad B_2=\left(\frac{\theta_n}{2},\frac{3\theta_n}{2}\right]\cap\Omega_{r,\delta},\quad B_3=\left(\frac{3\theta_n}{2},\infty\right)\cap\Omega_{r,\delta}.$$

Из (3) получаем

$$\begin{aligned}S_{22}^1&\leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}\delta\sum_{t\in B_1}\frac{t^{\frac{r}{2}-\frac14}t^{\alpha-r}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}}{t-x}\\&\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac12}\left(\delta\left(\frac{4}{\theta_n}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac32}+\int\limits_{\frac{4}{\theta_n}}^{\frac{\theta_n}{2}}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac32}\,dt\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant\frac{c(\alpha,\lambda,r)}{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac12}\,\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac12}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac12}\Big|_{\frac{4}{\theta_n}}^{\frac{\theta_n}{2}}\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac12}\left(\frac{4}{\theta_n}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-\frac12}=c(\alpha,\lambda,r),\tag{18}$$

$$\begin{gathered}S_{22}^2\leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{-\frac14}\delta\sum_{t\in B_2}\frac{t^{\frac{r}{2}-\frac14}t^{\alpha-r}\left[\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|\right]^{-\frac14}}{t-x}\\ \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\alpha-r-\frac74}\int\limits_{\frac{\theta_n}{2}}^{\frac{3\theta_n}{2}}\left[\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|\right]^{-\frac14}dt\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\alpha-r-\frac74}\theta_n^{\frac34}\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\alpha-r-1},\end{gathered}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}S_{22}^3&\leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r}{2}+\frac14}\delta\sum_{t\in B_3}\frac{t^{\frac{r}{2}-\frac14}t^{\alpha-r}e^{-\frac{t}{4}}}{t-x}\\&\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{-\frac{r}{2}-\frac14}\int\limits_{\frac{3\theta_n}{2}-\delta}^{\infty}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac54}e^{-\frac{t}{4}}\,dt\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-n}.\end{aligned}\tag{20}$$

Собирая оценки (18)–(20), находим

$$S_{22}\leqslant c(\alpha,\lambda,r)(1+\theta_n^{\alpha-r-1}).\tag{21}$$

Оценим S_{23}:

$$\begin{aligned}S_{23}\leqslant c(\alpha,\lambda,r)n\theta_n^{\frac{\alpha}{2}}x^{\frac{r}{2}+\frac14}\delta&\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{4}{\theta_n}<t<\infty}}\frac{t^{\frac{r}{2}-\frac14}t^{\alpha-r}}{(t-x)}\\&\times e^{-\frac{t}{2}}\left|m_{n+1,N}^\alpha(t-r\delta)-m_{n-1,N}^\alpha(t-r\delta)\right|\leqslant S_{23}^1+S_{23}^2+S_{23}^3,\end{aligned}$$

где

$$S_{23}^{i}=c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}+1}x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\delta\sum_{t\in B_i}\frac{t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{(t-x)}\,e^{-\frac{t}{2}}\left|m_{n+1,N}^{\alpha}(t-r\delta)-m_{n-1,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|.$$

В силу (4) получаем

$$\begin{aligned} S_{23}^{1}&\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}\delta\sum_{t\in B_1}\frac{\theta_n^{-\frac{3}{4}}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}{t-x}\\ &\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}}\left(\delta\left(\frac{4}{\theta_n}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-1}+\int\limits_{\frac{4}{\theta_n}}^{\frac{\theta_n}{2}}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}-1}\,dt\right)\\ &\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\begin{cases}2\ln\theta_n-3\ln 2, & \alpha=r,\\ \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}}\left[\left(\frac{\theta_n}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}}-\left(\frac{4}{\theta_n}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}}\right], & \alpha\neq r,\end{cases} \end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{gathered} S_{23}^{2}\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}\delta\sum_{t\in B_2}\frac{\theta_n^{-\frac{3}{4}}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right]^{\frac{1}{4}}}{t-x}\\ \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\alpha-r-\frac{5}{4}}\int\limits_{\frac{\theta_n}{2}-\delta}^{\frac{3\theta_n}{2}+\delta}[\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|]^{\frac{1}{4}}\,dt\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\alpha-r-\frac{5}{4}}\theta_n^{\frac{5}{4}}=c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\alpha-r}, \end{gathered}\tag{23}$$

$$\begin{aligned} S_{23}^{3}&\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}\delta\sum_{t\in B_3}\frac{t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{4}}}{t-x}\\ &\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}\int\limits_{\frac{3\theta_n}{2}-\delta}^{\infty}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}}e^{-\frac{t}{4}}\,dt\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}e^{-n}. \end{aligned}\tag{24}$$

Из оценок (22)–(24) выводим

$$S_{23}\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\begin{cases}2\ln\theta_n-3\ln 2, & \alpha=r,\\ \theta_n^{\alpha-r}, & \alpha\neq r.\end{cases}\tag{25}$$

Собирая оценки (17), (21) и (25), находим

$$S_2\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\begin{cases}\ln(n+1), & \alpha=r,\\ 1+n^{\alpha-r}, & \alpha\neq r.\end{cases}\tag{26}$$

Из (12), (13) и (26) имеем

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x)\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\begin{cases}\ln(n+1), & \alpha=r,\\ 1+n^{\alpha-r}, & \alpha\neq r.\end{cases}$$

Тем самым оценка (10) доказана.

Перейдем к доказательству оценки (11). Пусть $x \in G_2 = \left[\frac{3\lambda}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}\right]$. Введем обозначения

$$D_1 = \left[r\delta, x - \sqrt{\frac{x}{\theta_n}}\,\right] \cap \Omega_{r,\delta},$$
$$D_2 = \left(x - \sqrt{\frac{x}{\theta_n}}, x + \sqrt{\frac{x}{\theta_n}}\,\right] \cap \Omega_{r,\delta},$$
$$D_3 = \left(x + \sqrt{\frac{x}{\theta_n}}, \infty\right) \cap \Omega_{r,\delta}.$$

Тогда $l_{n,r}^{\alpha,N}(x) = J_1 + J_2 + J_3$, где

$$J_i \leqslant c(\alpha, r) e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \delta \sum_{t \in D_i} e^{-\frac{t}{2}} t^{\alpha - \frac{r}{2} - \frac{1}{4}} \left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta, x - r\delta)\right|, \quad i = 1, 2, 3.$$

Оценим J_2. Для этого заметим, что в силу неравенства Коши — Буняковского

$$\left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta, x - r\delta)\right| \leqslant \left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta, t - r\delta)\right|^{\frac{1}{2}} \left|\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(x - r\delta, x - r\delta)\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, если $\frac{3\lambda}{\theta_n} \leqslant x \leqslant \frac{\theta_n}{2}$, то $x - \sqrt{\frac{x}{\theta_n}} \geqslant \frac{\lambda}{\theta_n}$, кроме того, для $t \in D_2$, имеем $c_1 x \leqslant t \leqslant c_2 x$. Тогда

$$J_2 \leqslant c(\alpha, r) x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left|e^{-x} \mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(x - r\delta, x - r\delta)\right|^{\frac{1}{2}} \delta \sum_{t \in D_2} t^{\alpha - \frac{r}{2} - \frac{1}{4}} \left|e^{-t} \mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta, t - r\delta)\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Отдельно оценим величину $|e^{-t}\mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta, t - r\delta)|$. Используя (1), (3) и (4), почти дословно повторяя рассуждения доказательства леммы 7.1 из работы [6], в которой получена оценка ядра Кристоффеля — Дарбу для полиномов Лагерра, можно доказать следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\alpha > -1$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$, $\lambda \geqslant 1$, $t \geqslant \frac{3}{\theta_n}$. Тогда равномерно относительно n и N таких, что $1 \leqslant n \leqslant \lambda N$, имеет место оценка*

$$\left|e^{-t} \mathscr{K}_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta, t - r\delta)\right| \leqslant c(\alpha, \lambda, r) t^{-\alpha - \frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}.$$

Вернемся к оценке величины J_2. В силу леммы 1 мы можем записать

$$\begin{aligned} J_2 &\leqslant c(\alpha, \lambda, r) x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{4}} \delta \sum_{t \in D_2} t^{\alpha - \frac{r}{2} - \frac{1}{4}} t^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} n^{\frac{1}{4}} \\ &\leqslant c(\alpha, \lambda, r) x^{\frac{r}{2} - \frac{\alpha}{2}} n^{\frac{1}{2}} \delta \sum_{t \in D_2} t^{\frac{\alpha}{2} - \frac{r}{2} - \frac{1}{2}} \leqslant c(\alpha, \lambda, r) x^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \sum_{t \in D_2} \delta \leqslant c(\alpha, \lambda, r). \end{aligned} \tag{27}$$

Перейдем к оценке величины J_1. С этой целью представим ее в виде $J_1 \leqslant J_{11} + J_{12} + J_{13}$, где

$$J_{11} \leqslant c(\alpha, r) e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \delta \sum_{t \in D_1} e^{-\frac{t}{2}} t^{\alpha - \frac{r}{2} - \frac{1}{4}} \left|m_{n,N}^{\alpha}(x - r\delta) m_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta)\right|,$$

$$J_{12} \leqslant c(\alpha, r) n e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left|m_{n+1,N}^{\alpha}(x - r\delta) - m_{n-1,N}^{\alpha}(x - r\delta)\right| \delta \sum_{t \in D_1} \frac{e^{-\frac{t}{2}} t^{\alpha - \frac{r}{2} - \frac{1}{4}}}{|t - x|} \left|m_{n,N}^{\alpha}(t - r\delta)\right|,$$

$$J_{13} \leqslant c(\alpha,r)ne^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{r}{2}+\frac14}\left|m_{n,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right|\delta \times \sum_{t\in D_1}\frac{e^{-\frac{t}{2}}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}}{|t-x|}\left|m_{n+1,N}^{\alpha}(t-r\delta)-m_{n-1,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|.$$

Оценим величину J_{11}. Для этого запишем ее в следующем виде:

$$J_{11} \leqslant c(\alpha,r)\left(J_{11}^1+J_{11}^2\right), \tag{28}$$

где (будем считать, что $J_{11}^1=0$, если $r\delta > \frac{\lambda}{\theta_n}$)

$$J_{11}^1 \leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\delta\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ r\delta\leqslant t\leqslant\frac{\lambda}{\theta_n}}}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}\int\limits_0^{\frac{\lambda}{\theta_n}+\delta}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}\,dt$$

$$\leqslant \frac{c(\alpha,\lambda,r)}{\alpha-\frac{r}{2}+\frac34}x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}\theta_n^{\frac{r}{2}-\alpha-\frac34} = c(\alpha,\lambda,r)(x\theta_n)^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}}\theta_n^{-1} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{-\frac12}, \tag{29}$$

$$J_{11}^2 \leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}}\theta_n^{-\frac12}\delta\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{\lambda}{\theta_n}<t\leqslant x-\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}}}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac12}\theta_n^{-\frac12}. \tag{30}$$

Из неравенств (28), (29) и (30) имеем

$$J_{11} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\left(\frac{x}{\theta_n}\right)^{\frac12}+\theta_n^{-\frac12}\right]. \tag{31}$$

Чтобы оценить величину J_{12}, представим ее в виде

$$J_{12} = J_{12}^1+J_{12}^2, \tag{32}$$

в котором

$$J_{12}^1 \leqslant c(\alpha,\lambda,r)nx^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{-\frac34}x^{-\frac{\alpha}{2}+\frac14}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}}\,\delta\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ r\delta\leqslant t\leqslant\frac{\lambda}{\theta_n}}}\frac{t^{\frac{r}{2}-\frac14}t^{\alpha-r}}{x-t} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}+\frac14}x^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}$$

$$\times\frac1x\,\delta\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ r\delta\leqslant t\leqslant\frac{\lambda}{\theta_n}}}t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14} \leqslant \frac{c(\alpha,\lambda,r)}{\alpha-\frac{r}{2}+\frac34}\,\theta_n^{\frac{\alpha}{2}+\frac14}x^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac12}\theta_n^{-\alpha+\frac{r}{2}-\frac34} = c(\alpha,\lambda,r)\,(x\theta_n)^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac12}, \tag{33}$$

$$J_{12}^2 \leqslant c(\alpha,\lambda,r)nx^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}\theta_n^{-\frac34}\theta_n^{-\frac14}\delta\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{\lambda}{\theta_n}<t\leqslant x-\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}}}\frac{t^{\frac{r}{2}-\frac14}t^{\frac{\alpha}{2}}-r-\frac14}{x-t} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}$$

$$\times\left(\delta\frac{\left(\frac{\lambda}{\theta_n}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}}{x-\left(\frac{\lambda}{\theta_n}\right)}+\int\limits_{\frac{\lambda}{\theta_n}}^{x-\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}+\delta}\frac{t^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}}{x-t}\,dt\right) \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\int\limits_{\frac{\lambda}{x\theta_n}}^{1-\sqrt{\frac{1}{x\theta_n}}+\frac{\delta}{x}}\frac{y^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}}{1-y}\,dy$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\int\limits_{\frac{\lambda}{x\theta_n}}^{\frac{1}{3}} y^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}\,dy + c(\alpha,\lambda,r)\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1-\sqrt{\frac{1}{x\theta_n}}+\frac{\delta}{x}} \frac{1}{1-y}\,dy \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(1+\ln\sqrt{x\theta_n}\right). \quad (34)$$

Из (32)–(34) получаем

$$J_{12}\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(1+\ln\sqrt{x\theta_n}\right). \quad (35)$$

Повторяя рассуждения, которые привели нас к оценкам (33)–(35), можно показать, что

$$J_{13}\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(1+\ln\sqrt{x\theta_n}\right). \quad (36)$$

Из (31), (35) и (36) имеем

$$J_{1}\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(1+\ln\sqrt{x\theta_n}\right). \quad (37)$$

Оценим величину J_3. Для этого воспользуемся формулой (2). Тогда

$$J_3\leqslant c(\alpha,r)(J_{31}+J_{32}+J_{33}), \quad (38)$$

где

$$J_{31}=e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^r\left|m_{n,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right|\sum_{t\in D_3}e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(Nt)^{\alpha-r}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}\left|m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|,$$

$$J_{32}=ne^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^r\left|m_{n+1,N}^{\alpha}(x-r\delta)-m_{n-1,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right| \times\sum_{t\in D_3}\frac{e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(Nt)^{\alpha-r}}{t-x}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}\left|m_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|,$$

$$J_{33}=ne^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^r\left|m_{n,N}^{\alpha}(x-r\delta)\right|\sum_{t\in D_3}\frac{e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(Nt)^{\alpha-r}}{t-x} \times(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}\left|m_{n+1,N}^{\alpha}(t-r\delta)-m_{n-1,N}^{\alpha}(t-r\delta)\right|.$$

Величину J_{31} представим в виде $J_{31}=J_{31}^1+J_{31}^2+J_{31}^3$. Обращаясь к неравенству (3), получаем

$$\begin{aligned} J_{31}^1 &\leqslant c(\alpha,\lambda)x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\delta\sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}<t\leqslant\frac{\theta_n}{2}}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}t^{\alpha-r} \\ &\leqslant c(\alpha,\lambda)x^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{-\frac{1}{2}}\left(\delta\left(x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}+\int\limits_{x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}}^{\frac{\theta_n}{2}}t^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}dt\right) \\ &\leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{\theta_n}{2}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{2}}-\left(x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{2}}\right] \\ &\leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{-\frac{1}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{2}}\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$J_{31}^2 \leqslant c(\alpha,\lambda) x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \theta_n^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{\theta_n}{2}<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \frac{t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} t^{\alpha-r} \theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}}{\left[\theta_n\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right)\right]^{\frac{1}{4}}}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda)\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}} n^{-\frac{3}{4}} \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{\theta_n}{2}<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \frac{\delta}{\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda)\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}} n^{-\frac{3}{4}} \int\limits_{\frac{\theta_n}{2}}^{\frac{3\theta_n}{2}} \frac{dt}{\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right)^{\frac{1}{4}}} \leqslant c(\alpha,\lambda)\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}}, \tag{40}$$

$$J_{31}^3 \leqslant c(\alpha,\lambda) x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}} \theta_n^{-\frac{1}{4}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} t^{\alpha-r} \theta_n^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t}{4}}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda) n^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}} x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{4}}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda) n^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}} x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}} \int\limits_{\frac{3\theta_n}{2}-\delta}^{\infty} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{4}}\, dt \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}}. \tag{41}$$

Из (39)–(41) выводим

$$J_{31} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{2}}. \tag{42}$$

Перейдем к оценке величины J_{32}, для этого представим ее в виде

$$J_{32} \leqslant J_{32}^1 + J_{32}^2 + J_{32}^3,$$

в котором

$$J_{32}^1 \leqslant c(\alpha,\lambda) n x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \theta_n^{-\frac{3}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}<t\leqslant\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}}} \frac{t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \theta_n^{-\frac{1}{4}} t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{t-x}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda) x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}} \int\limits_{x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-\delta}^{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}} \frac{t^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}}{t-x}\, dt \tag{43}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda) \int\limits_{x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-\delta}^{2x} \frac{dt}{t-x} + c(\alpha,\lambda) x^{\frac{r}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}} \int\limits_{2x}^{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}} t^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{3}{2}}\, dt \leqslant c(\alpha,\lambda,r) \ln\sqrt{\frac{\theta_n}{x}},$$

$$J_{32}^2 \leqslant c(\alpha,\lambda) n x^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}} \theta_n^{-\frac{3}{4}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta}, \\ \frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \frac{t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}}{t-x}\left[\theta_n\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right)\right]^{-\frac{1}{4}}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda) x^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}} \theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{4}} \int\limits_{\frac{\theta_n}{r2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-\delta}^{\frac{3\theta_n}{2}} \left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{dt}{t-x} = c(\alpha,\lambda) x^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}} \theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{4}}$$

$$\times\left[\int\limits_{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-\delta}^{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}} \left(\theta_n^{\frac{1}{3}}-t+\theta_n\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{dt}{t-x} + \int\limits_{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}}^{\frac{3\theta_n}{2}} \left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{dt}{t-x}\right] \tag{44}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda)\left(\frac{\theta_n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\left(\frac{x}{\theta_n}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\frac{\theta_n-x}{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-x},$$

$$J_{32}^3 \leqslant c(\alpha,\lambda) n x^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}} \theta_n^{-\frac{3}{4}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta}, \\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} \frac{e^{-\frac{t}{4}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}}{t-x}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda) x^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}} \theta_n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta}, \\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} e^{-\frac{t}{4}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}} \leqslant c(\alpha,\lambda,r) e^{-\frac{3n}{2}}. \tag{45}$$

Из (43)–(45) получаем оценку

$$J_{32} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln\sqrt{\frac{\theta_n}{x}} + \left(\frac{\theta_n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}} \left(\frac{x}{\theta_n}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\frac{\theta_n-x}{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-x}\right]. \tag{46}$$

Аналогично оценим величину J_{33}. С этой целью представим ее в виде $J_{33} \leqslant J_{33}^1 + J_{33}^2 + J_{33}^3$, где

$$J_{33}^1 \leqslant c(\alpha,\lambda,r) n x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \theta_n^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta}, \\ x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}<t\leqslant\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}}} \frac{t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \theta_n^{-\frac{3}{4}} t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} t^{\alpha-r}}{t-x}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda,r) x^{\frac{r-\alpha}{2}} \delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta}, \\ x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}<t\leqslant\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}}} \frac{t^{\frac{\alpha-r}{2}}}{t-x} \leqslant c(\alpha,\lambda,r) \int\limits_{x+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-\delta}^{2x} \frac{dt}{t-x} \tag{47}$$

$$+ c(\alpha,\lambda,r) x^{\frac{r-\alpha}{2}} \int\limits_{2x-\delta}^{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}} t^{\frac{\alpha-r}{2}-1}\, dt \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln\sqrt{x\theta_n} + \left(\frac{\theta_n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right],$$

$$J_{33}^2 \leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r-\alpha}{2}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \frac{t^{\frac{r}{2}-\frac14}t^{-\frac{\alpha}{2}}t^{\alpha-r}\left(\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|\right)^{\frac14}}{t-x}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}<t\leqslant\theta_n}} \left(\frac{\theta_n^{\frac13}+\theta_n-t}{t}\right)^{\frac14}\frac{1}{t-x}$$

$$+\ c(\alpha,\lambda,r)x^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \theta_n<t\leqslant\frac{3\theta_n}{2}}} \frac{\left(\theta_n^{\frac13}+t-\theta_n\right)^{\frac14}}{t^{\frac54}}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left(\frac{\theta_n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\left(1+\ln\frac{\theta_n-x}{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-x}\right). \qquad (48)$$

$$J_{33}^3 \leqslant c(\alpha,\lambda,r)nx^{\frac{r}{2}+\frac14}\theta_n^{-\frac14}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} \frac{t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{t}{4}}}{t-x}$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda,r)n^{\frac34}x^{\frac{r-\alpha}{2}}\delta \sum_{\substack{t\in\Omega_{r,\delta},\\ \frac{3\theta_n}{2}<t<\infty}} t^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac54}e^{-\frac{t}{4}} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)e^{-\frac{3n}{2}}. \qquad (49)$$

Из (47)–(49) получаем

$$J_{33} \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln\sqrt{x\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\left(1+\ln\frac{\theta_n-x}{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-x}\right)\right]. \qquad (50)$$

В свою очередь из (38), (42), (46) и (50) выводим оценку

$$J_3 \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln\sqrt{x\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\left(1+\ln\frac{\theta_n-x}{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}-x}\right)\right]$$

$$\leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln(1+nx)+\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right]. \qquad (51)$$

Собирая оценки (27), (37) и (51), мы получаем следующее неравенство:

$$l_{n,r}^{\alpha,N}(x) \leqslant c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln(1+nx)+\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right].$$

Тем самым оценка (11) доказана. ▷

Литература

1. *Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б.* Классические ортогональные многочлены дискретной переменной.—М.: Наука, 1985. 216 с.
2. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на сетках.—Махачкала: Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997.—255 с.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2.—М.: Наука, 1966.—297 с.

4. *Гаджиева З. Д.* Смешанные ряды по полиномам Мейкснера: Дисс. ... к.ф.-м.н.—Саратов: Саратовский гос. ун-т, 2004.
5. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам // Дагестанские электронные мат. изв.—2015.—Вып. 3.—С. 1–254.
6. *Шарапудинов И. И.* Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные мат. изв.—2015.—Вып. 4.—С. 32–74.
7. *Гаджимирзаев Р. М.* Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2016.—Т. 16, вып. 4.—С. 388–395.
8. *Гаджимирзаев Р. М.* Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 18-й международной Саратовской Зимней школы.—2016.—С. 102–104.

Статья поступила 17 января 2017 г.

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 21–36

APPROXIMATION PROPERTIES SPECIAL SERIES BY MEIXNER POLYNOMIALS

Gadzhimirzaev R. M.[1]

[1] Daghestan Scientific Centre of RAS,
45 M. Gadjieva st., Makhachkala 367025, Russia
E-mail: `ramis3004@gmail.com`

Abstract. In this article the new special series in the modified Meixner polynomials $M_{n,N}^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(Nx)$ are constructed. For $\alpha > -1$, these polynomials constitute an orthogonal system with a weight-function $\rho(Nx)$ on a uniform grid $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, where $\delta = 1/N$, $N > 0$. Special series in Meixner polynomials $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ appeared as a natural (and alternative to Fourier–Meixner series) apparatus for the simultaneous approximation of a discrete function f given on a uniform grid Ω_δ and its finite differences $\Delta_\delta^{\nu} f$. The main attention is paid to the study of the approximative properties of the partial sums of the series under consideration. In particular, a pointwise estimate for the Lebesgue function of mentioned partial sums is obtained. It should also be noted that new special series, unlike Fourier–Meixner series, have the property that their partial sums coincide with the values of the original function in the points $0, \delta, \ldots, (r-1)\delta$.

Key words: Meixner polynomials, approximative properties, Fourier series, special series, Lebesgue function.

Mathematical Subject Classification (2000): 41A10.

References

1. *Nikiforov A. F., Suslov S. K., Uvarov V. B. Klassicheskie ortogonalnye mnogochleny diskretnoj peremennoj* [Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable], Moscow, Nauka, 1985, 216 p. (in Russian).
2. *Sharapudinov I. I. Mnogochleny, ortogonalnye na setkah* [Polynomials Orthogonal on Grids], Mahachkala, Izd-vo DGPU, 1997, 255 p. (in Russian).
3. *Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions*, Vol. 2, N. Y.–Toronto–London, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1953.
4. *Gadzhieva Z. D. Mixed Series by Meixner Polynomials. PhD thesis*, Saratov, Saratov State. Univ., 2004 (in Russian).
5. *Sharapudinov I. I.* Mixed Series by Classical Orthogonal Polynomials, *Dagestanskie ehlektronnye matematicheskie izvestiya* [Dagestan Electronic Mathematical Reports], 2015, no. 3, pp. 1–254 (in Russian). DOI: 10.31029/demr.3.1.

6. *Sharapudinov I. I.* Some Special Series by General Laguerre Polynomials and Fourier Series by Laguerre Polynomials, Orthogonal in Sobolev Sense, *Dagestanskie ehlektronnye matematicheskie izvestiya* [Dagestan Electronic Mathematical Reports], 2015, no. 4, pp. 32–74 (in Russian). DOI: 10.31029/demr.4.4.
7. *Gadzhimirzaev R. M.* The Fourier Series of the Meixner Polynomials Orthogonal with Respect to the Sobolev-Type Inner Product, *Izv. Sarat. Un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.], 2016, Vol. 16, no. 4, pp. 388–395 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-388-395.
8. *Gadzhimirzaev R. M.* The Fourier Series of the Meixner Polynomials Orthogonal with Respect to the Sobolev-Type Inner Product, *Sovremennye problemy teorii funkcij i ih prilozheniya: Materialy 18-j mezhdunarodnoj Saratovskoj Zimnej Shkoly* [XVIII International Saratov Winter School «Modern Problems of Function Theory and Their Applications»], 2016, p. 102–104 (in Russian).

Received January 17, 2017

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 37–47

УДК 517.9+541.124+541.126
DOI 10.23671/VNC.2018.3.17981

BINARY CORRESPONDENCES AND THE INVERSE PROBLEM OF CHEMICAL KINETICS♯

A. E. Gutman[1,2], L. I. Kononenko[1,2]

[1] Sobolev Institute of Mathematics,
4 Academician Koptyug av., Novosibirsk 630090, Russia;
[2] Novosibirsk State University,
1 Pirogova st., Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: gutman@math.nsc.ru; larakon2@gmail.ru, larak@math.nsc.ru

Abstract. We show how binary correspondences can be used for simple formalization of the notion of problem, definition of the basic components of problems, their properties, and constructions. In particular, formalization of the following notions is presented: condition, data, unknowns, and solutions of a problem, solvability and unique solvability, inverse problem, composition and restriction of problems, isomorphism between problems. We also consider topological problems and the related notions of stability and correctness. A connection is indicated between the stability and continuity of a uniquely solvable topological problem. The definition of parametrized set is given. The notions are introduced of parametrized problem, the problem of reconstruction of an object by the values of parameters, as well as the notions of locally free set of parameters and stability with respect to a set of parameters.
As an illustration, we consider a singularly perturbed system of ordinary differential equations which describe a process in chemical kinetics and burning. Direct and inverse problems are stated for such a system. We extend the class of problems under study by considering polynomials of arbitrary degree as the right-hand sides of the differential equations. It is shown how the inverse problem of chemical kinetics can be corrected and made more practical by means of the composition with a simple auxiliary problem which represents the relation between functions and finite sets of numerical characteristics being measured. For the corrected inverse problem, formulas for the solution are presented and the conditions of unique solvability are indicated. Within the study of solvability, a criterion is established for linear independence of functions in terms of finite sets of their values. With the help of the criterion, realizability is clarified of the condition for unique solvability of the inverse problem of chemical kinetics.

Key words: binary correspondence, inverse problem, solvability, composition, stability, correctness, differential equation, chemical kinetics, linear independence.
Mathematical Subject Classification (2000): 34A55.

We continue the study started in [1, 2] which is devoted to formalization of the notion of problem and solution of the inverse problem of chemical kinetics. In particular, we extend the class of problems under study by considering polynomials of arbitrary degree as the right-hand sides of the differential equations.

1. Formalization of the notion of problem

In this section, we employ binary correspondences for formalizing the notion of problem, basic components of problems, their properties, and constructions: the condition of a problem, data and unknowns, solvability and unique solvability, inverse problem, composition and rest-

♯ The work was supported by the program of fundamental scientific researches of the SB RAS № I.1.2., projects № 0314-2016-0005 and № 0314-2016-0007, and by the Russian Foundation for Basic Research, project № 18-01-00057.

riction of problems. We also consider topological problems, the related notions of stability and correctness, and problems with parameters.

1.1. By a *problem* we mean an arbitrary correspondence between the elements of two sets, i. e., a triple $P = (A, B, C)$, where A and B are any sets and $C \subseteq A \times B$. The sets A, B, and C (i. e., the set of departure, the set of destination, and the graph of the correspondence P) are denoted by $\operatorname{Dom} P$, $\operatorname{Im} P$, and $\operatorname{Gr} P$ and called the *domain of data*, the *domain of unknowns*, and the *condition* of the problem P. The containment $(a, b) \in \operatorname{Gr} P$ is written as $P(a, b)$ and is treated as the condition expressing the fact that the unknown b corresponds to the data a. Therefore, the problem P assumes the following informal interpretation:

Given data $a \in \operatorname{Dom} P$, find unknowns $b \in \operatorname{Im} P$ which meet the condition $P(a, b)$.

The *image* $P[X]$ and *preimage* $P^{-1}[Y]$ of subsets $X \subseteq \operatorname{Dom} P$ and $Y \subseteq \operatorname{Im} P$ with respect to the correspondence P are defined by the traditional formulas

$$P[X] = \{b \in \operatorname{Im} P : \ (\exists\, x \in X) \ P(x, b)\},$$
$$P^{-1}[Y] = \{a \in \operatorname{Dom} P : \ (\exists\, y \in Y) \ P(a, y)\}.$$

1.2. A *solution* to a problem P for a data instance $a \in \operatorname{Dom} P$ is an arbitrary unknown $b \in \operatorname{Im} P$ which meets the condition $P(a, b)$. The set of solutions to P for a is denoted by $P[a]$. Therefore,

$$P[a] = P[\{a\}] = \{b \in \operatorname{Im} P : \ P(a, b)\}, \quad a \in \operatorname{Dom} P.$$

A problem P is *solvable* for $a \in \operatorname{Dom} P$ whenever $P[a] \neq \varnothing$, i. e., given a, the problem P has at least one solution. The domain of definition of the correspondence P

$$\operatorname{dom} P := \{a \in \operatorname{Dom} P : \ P[a] \neq \varnothing\}$$

is called the *domain of solvability* of the problem P. If $\operatorname{dom} P = \operatorname{Dom} P$, the problem P is called *solvable* or, more precisely, *everywhere solvable.*

1.3. A problem P is said to be *uniquely solvable for* $a \in \operatorname{Dom} P$ if, given a, the problem P has a unique solution, i. e., $P[a] = \{b\}$ for some $b \in \operatorname{Im} P$. The corresponding solution b is denoted by $P^{\mathrm{s}}(a)$. Therefore, if P is uniquely solvable for a then

$$P[a] = \{P^{\mathrm{s}}(a)\}.$$

The set

$$\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}} := \{a \in \operatorname{Dom} P : \ P \text{ is uniquely solvable for } a\}$$

is called the *domain of unique solvability* of the problem P, and the function

$$P^{\mathrm{s}} \colon \operatorname{dom} P^{\mathrm{s}} \to \operatorname{Im} P, \quad a \mapsto P^{\mathrm{s}}(a)$$

is called the *solution function* of the problem P. Obviously, $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}} \subseteq \operatorname{dom} P \subseteq \operatorname{Dom} P$. The problem P is *uniquely solvable on a set* $D \subseteq \operatorname{Dom} P$ if $D \subseteq \operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$. The problem P is called *uniquely solvable* or, more precisely, *everywhere uniquely solvable* if it is uniquely solvable on $\operatorname{Dom} P$, i. e., $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}} = \operatorname{Dom} P$. In this case, the correspondence P is an everywhere defined function and thus coincides with P^{s}.

1.4. Given a problem $P = (\operatorname{Dom} P, \operatorname{Im} P, \operatorname{Gr} P)$, the *inverse problem* is the inverse correspondence

$$P^{-1} := \bigl(\operatorname{Im} P, \operatorname{Dom} P, (\operatorname{Gr} P)^{-1}\bigr), \quad \text{where } (\operatorname{Gr} P)^{-1} = \{(b, a) : \ (a, b) \in \operatorname{Gr} P\}.$$

Remark. If a problem P models a real physical process, consideration of the inverse problem P^{-1} is motivated by the search of a relatively simple formal law which describes the process with adequate accuracy. The data of the inverse problem are experimentally measurable characteristics of the process, while the unknowns are, for instance, the coefficients of a differential equation describing the process under observation.

In the case when the problem P is based on a functional equation, the formal data of the inverse problem P^{-1} are functions of the corresponding class, while, in practice, the role of data of the inverse problem is not played by the functions themselves but rather by some of their characteristics which can be measured, i. e., by certain finite sets of numbers.

The inverse problem can be suitably corrected by means of the composition (see 1.5) of the problem P^{-1} and a simple auxiliary problem which represents the relation between functions and their characteristics being measured. (An example of such correction is presented in 2.3.)

1.5. The *composition* of problems P and Q is the composition of the correspondences, which is the problem

$$Q \circ P := (\operatorname{Dom} P,\ \operatorname{Im} Q,\ \operatorname{Gr} Q \circ \operatorname{Gr} P)$$

with condition

$$\operatorname{Gr} Q \circ \operatorname{Gr} P = \big\{(a,c) \in \operatorname{Dom} P \times \operatorname{Im} Q :\ (\exists\, b \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Dom} Q)\ P(a,b)\ \&\ Q(b,c)\big\}.$$

The composition $Q \circ P$ is usually considered in the case when $\operatorname{Im} P = \operatorname{Dom} Q$.

1.6. The *restriction* of a problem P onto subsets $A \subseteq \operatorname{Dom} P$ and $B \subseteq \operatorname{Im} P$ is the problem

$$P\big|_A^B := \big(A,\ B,\ \operatorname{Gr} P \cap (A \times B)\big).$$

The restrictions $P|_A := P\big|_A^{\operatorname{Im} P}$ and $P|^B := P\big|_{\operatorname{Dom} P}^B$ are particular cases.

The restriction of a problem can be defined by means of composition with the corresponding embedding problems. Given arbitrary sets X and Y, consider the problem $\operatorname{Id}_X^Y := (X, Y, I_X^Y)$, where

$$I_X^Y = \{(z,z) :\ z \in X \cap Y\} = \{(x,y) \in X \times Y :\ x = y\}.$$

Then, for every problem P and any subsets $A \subseteq \operatorname{Dom} P$ and $B \subseteq \operatorname{Im} P$, the following hold:

$$P|_A = P \circ \operatorname{Id}_A^{\operatorname{Dom} P}, \quad P|^B = \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} P}^B \circ P, \quad P\big|_A^B = \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} P}^B \circ P \circ \operatorname{Id}_A^{\operatorname{Dom} P}.$$

1.7. An *isomorphism* between problems P and Q is a pair (f,g) of bijective mappings $f\colon \operatorname{Dom} P \to \operatorname{Dom} Q$, $g\colon \operatorname{Im} P \to \operatorname{Im} Q$ such that

$$\operatorname{Gr} Q = \big\{\big(f(a), g(b)\big) : (a,b) \in \operatorname{Gr} P\big\}.$$

Two problems are called *isomorphic* if there is an isomorphism between them.

1.8. Call P a *topological problem* if the domain of data $\operatorname{Dom} P$ and the domain of unknowns $\operatorname{Im} P$ are endowed with any topologies, i. e., the domains are topological spaces. An isomorphism (f,g) between topological problems is a *topological isomorphism* if each of the mappings f and g is a topological isomorphism (i. e., a homeomorphism).

All the notions introduced here, which are related to topologies or continuity, admit natural analogs for the case of uniformities and uniform continuity. (Metric and, in particular, normed spaces are examples of uniform spaces.) We will not present the corresponding clarified definitions, which are rather obvious.

1.9. A topological problem P is called *stable at a point* $a \in \operatorname{dom} P$ if the correspondence P is upper semi-continuous at the point, i. e., for every neighborhood V of the set $P[a]$ in $\operatorname{Im} P$, the preimage $P^{-1}[V]$ is a neighborhood of the point a in $\operatorname{dom} P$. The problem P is *stable on a set* $D \subseteq \operatorname{dom} P$ if P is stable at each point $a \in D$. The problem P is called *stable* or, more precisely, *everywhere stable* if P is stable on $\operatorname{dom} P$.

In the case when a is an interior point of $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$ relative to $\operatorname{dom} P$ (i. e., there exists an open set $G \subseteq \operatorname{Dom} P$ such that $a \in G \cap \operatorname{dom} P \subseteq \operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$), the stability of the problem P at a is equivalent to the continuity of the function P^{s} at a. Analogously, if a set D is included in the interior of $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$ relative to $\operatorname{dom} P$ (i. e., there exists an open set $G \subseteq \operatorname{Dom} P$ such that $D \subseteq G \cap \operatorname{dom} P \subseteq \operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$), then the stability of the problem P on D is equivalent to the continuity of the function P^{s} on D. In particular, the stability of a uniquely solvable problem is equivalent to its continuity.

1.10. A topological problem P is called *correct* (or, more precisely, *locally correct*) *at a point* $a \in \operatorname{Dom} P$ if a is an interior point of $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$ and the problem P is stable at a. In other words, a problem is correct at a if, for data sufficiently close to a, the problem has a unique solution, and the solution continuously depends on the data as it tends to a. A problem P is said to be *correct* (or, more precisely, *conditionally correct*) *on a set* $D \subseteq \operatorname{Dom} P$ if P is correct at each point $a \in D$. A problem P is called *correct* if P is correct on $\operatorname{Dom} P$. Therefore, the correctness of a problem means its unique solvability and stability (or, which is the same, continuity).

1.11. By a family $(v_i)_{i\in I}$ we traditionally mean a function defined on I, and the term v_i denotes the value of the function at a point $i \in I$. Given an arbitrary family $(V_i)_{i\in I}$, the symbol $\prod_{i\in I} V_i$ stands for the corresponding Cartesian product, which is the set of families $(v_i)_{i\in I}$ such that $v_i \in V_i$ for all $i \in I$. If $\pi\colon X \to \prod_{i\in I} V_i$, $i \in I$, and $J \subseteq I$, the functions

$$\pi_i\colon X \to V_i, \quad \pi_J\colon X \to \prod_{j\in J} V_j$$

are defined by the formulas

$$\pi_i(x) := \pi(x)_i \in V_i, \quad \pi_J(x) := \pi(x)|_J \in \prod_{j\in J} V_j, \quad x \in X.$$

1.12. A *parametrization* of a set X is an arbitrary injective mapping π defined on $\operatorname{Dom}\pi := \operatorname{dom}\pi = X$ and acting into the Cartesian product $\operatorname{Im}\pi := \prod_{i\in I} V_i$ of some family $(V_i)_{i\in I}$. In this case, I is called the *set of parameters* and denoted by $\operatorname{Par}\pi$, the elements $i \in \operatorname{Par}\pi$ are called *parameters*, the set $\operatorname{Im}\pi_i := V_i$ is called the *range of the parameter* i, and $\pi_i(x) \in \operatorname{Im}\pi_i$ is the *value of the parameter* i for an object $x \in X$. The product $\prod_{j\in J} V_j$ is called the *range of the set of parameters* $J \subseteq \operatorname{Par}\pi$ and denoted by $\operatorname{Im}\pi_J$.

Note that the range $\operatorname{Im}\pi_i$ of a parameter i need not coincide with the set $\operatorname{im}\pi_i = \pi_i[X]$ of the values of the parameter, i. e., the inclusion $\operatorname{im}\pi_i \subseteq \operatorname{Im}\pi_i$ can be strict. In the case of equality $\operatorname{im}\pi_i = \operatorname{Im}\pi_i$, the range of the parameter i is called *exact*.

A set endowed with a parametrization is called a *parametrized set*. By default, the parametrization of X is denoted by π or, more explicitely, by π^X.

1.13. When considering a parametrization π of a topological space X, it is natural to endow the set $\operatorname{Im}\pi_J$, where $J \subseteq \operatorname{Par}\pi$, with the image of the topology of X with respect to π_J, i. e., to assume open those subsets $U \subseteq \operatorname{Im}\pi_J$ whose preimage $\pi_J^{-1}[U]$ is open in X. In this case, π occurs a continuous mapping from X into $\operatorname{Im}\pi$ and a topological isomorphism between X and $\operatorname{im}\pi$.

The ranges $\operatorname{Im}\pi_i$ of the parameters $i \in \operatorname{Par}\pi$ usually have their own natural topologies which make the mappings π_i continuous. Otherwise, $\operatorname{Im}\pi_i$ can be endowed with the image of the topology of X with respect to π_i or with the topology induced from $\operatorname{Im}\pi$ in which the open subsets of $\operatorname{Im}\pi_i$ are the sets of the form $\{u_i : u \in U\}$, where U is open in $\operatorname{Im}\pi$.

The ranges of parameters are often Banach spaces. In this case, parametrized topological spaces are close analogs of Banach bundles (see, for instance, [3]), where the domain I of a bundle V plays the role of the set of parameters, and the stalks $V(i)$ are the ranges of parameters $i \in I$.

1.14. A problem P is called *parametrized* (or a problem *with parameters*) if its domain of data $\operatorname{Dom}P$ and domain of unknowns $\operatorname{Im}P$ are parametrized sets. Every problem can be regarded parametrized if we assume that non-parametrized domains X are endowed with trivial parametrizations having single parameter: $\pi_1(x) = x$ for all $x \in X$.

As is easily seen, the pair (π^A, π^B) is an isomorphism between a parametrized problem (A, B, C) and the problem (A', B', C'), where $A' = \operatorname{im}\pi^A$, $B' = \operatorname{im}\pi^B$, and $C' = \{(\pi^A(a), \pi^B(b)) : (a, b) \in C\}$. Furthermore, if the problem (A, B, C) is topological then so are the problem (A', B', C') and the isomorphism (π^A, π^B).

1.15. Let π be a parametrization of a set A, $a \in A$, $J \subseteq \operatorname{Par}\pi$, $J' := \operatorname{Par}\pi \backslash J$. Denote by $\operatorname{Res}^a_J(A)$ the problem $(\operatorname{Im}\pi_J, A, R^a_J)$, where

$$R^a_J = \{(v, b) :\ v \in \operatorname{Im}\pi_J,\ b \in A,\ \pi_J(b) = v,\ \pi_{J'}(b) = \pi_{J'}(a)\},$$

which is the problem of reconstruction of an element of A by the values of the parameters J on assuming fixed the values of the rest parameters. In the case $J = \{i\}$, we write $\operatorname{Res}^a_i(A)$ instead of $\operatorname{Res}^a_{\{i\}}(A)$.

Since π is injective, the problem $\operatorname{Res}^a_J(A)$ is uniquely solvable on the set

$$\operatorname{dom}\operatorname{Res}^a_J(A) = \{\pi_{J'}(b) : b \in A,\ \pi_{J'}(b) = \pi_{J'}(a)\}$$

and its solution for every $v \in \operatorname{dom}\operatorname{Res}^a_J(A)$ is determined by the formula

$$\operatorname{Res}^a_J(A)^{\mathrm{s}}(v) = \pi^{-1}\left(v \otimes \pi_{J'}(a)\right), \quad \text{where} \quad (v \otimes w)_i = \begin{cases} v_i, & \text{if } i \in J; \\ w_i, & \text{if } i \notin J. \end{cases}$$

1.16. Let π be a parametrization of a topological space A, $a \in A$, $J \subseteq \operatorname{Par}\pi$. A set of parameters J is *locally free* at the point a, if the domain of solvability $\operatorname{dom}\operatorname{Res}^a_J(A)$ of the problem $\operatorname{Res}^a_J(A)$ is a neighborhood of the point $\pi_J(a)$ in the topological space $\operatorname{Im}\pi_J$. Therefore, a locally free set of parameters realizes all sufficiently small changes of values with the values of the rest parameters fixed. A parameter i is *locally free* at a if so is the set $\{i\}$.

1.17. Let P be a parametrized topological problem, $a \in \operatorname{dom} P$, and let $J \subseteq \operatorname{Par} \pi$, where $\pi := \pi^{\operatorname{dom} P}$. The problem P is *stable at the point a with respect to J*, if the problem $P \circ \operatorname{Res}^a_J(\operatorname{dom} P)$ is stable at the point $\pi_J(a)$. Stability of a problem at a with respect to J is usually considered in the case when the set of parameters J is locally free at the point a.

The problem P is *stable on a set $D \subseteq \operatorname{dom} P$ with respect to J*, if P is stable at each point $a \in D$ with respect to J. The problem P is *stable with respect to J* if P is stable on $\operatorname{dom} P$ with respect to J. In the case $J = \{i\}$, the term *stability with respect to the parameter i* is used.

If the natural topology on $\operatorname{im} \pi_J$ is considered and a is an interior point of $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$ relative to $\operatorname{dom} P$, the stability of a uniquely solvable problem P at the point a with respect to J is equivalent to the continuity at a of the function

$$v \in \pi_J[\operatorname{dom} R] \ \mapsto \ P^{\mathrm{s}}\left(R^{\mathrm{s}}(v)\right), \quad \text{where} \quad R := \operatorname{Res}^a_J(\operatorname{Dom} P).$$

The latter, in its turn, means that the solution $P^{\mathrm{s}}(b)$ continuously depends on the values $\pi_J(b)$ of the parameters J as $\pi_J(b)$ tend to $\pi_J(a)$ with the equality $\pi_{J'}(b) = \pi_{J'}(a)$ preserved.

1.18. Let P be a parametrized topological problem, $i \in \operatorname{Par} \pi$. The problem P is called a “problem with small parameter i” if $\operatorname{Im} \pi_i \subseteq \mathbb{R}$, the number 0 is a limit point of $\operatorname{Im} \pi_i$, and a question is under consideration about any asymptotic behavior of P for the values of i close to 0, for instance, about the stability of P with respect to i at a point a with $\pi_i(a) = 0$.

2. The inverse problem of chemical kinetics

As an illustration, we consider a singularly perturbed system of ordinary differential equations which arises in modeling certain processes of chemical kinetics and burning (see, for instance, [4, 5]). Within the study of the corresponding inverse problem, a criterion will be established for linear independence of functions in terms of finite sets of their values (see 2.5).

2.1. Suppose that $m, n \in \mathbb{N}$, $X := \mathbb{R}^m$, Y is a domain in $\mathbb{R}^n$, $T := \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$. Put $E := \{\varepsilon \in \mathbb{R} : \ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$, $F := C(X \times Y \times T \times E, \mathbb{R}^m)$, $G := C(X \times Y \times T \times E, \mathbb{R}^n)$.

Consider the problem P with domain of data $\operatorname{Dom} P = F \times G \times E$, domain of unknowns $\operatorname{Im} P = C^1(T, X) \times C^1(T, Y)$, and condition

$$P((f, g, \varepsilon), (x, y)) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t), t, \varepsilon), \\ \varepsilon\, \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), t, \varepsilon) \end{cases} \quad \text{for all} \ \ t \in T,$$

where $f \in F$, $g \in G$, $\varepsilon \in E$, $x \in C^1(T, X)$, $y \in C^1(T, Y)$.

Solution of the problem P is based on the method of integral manifolds (see [6–8]), a convenient tool for studying multidimensional singularly perturbed systems of differential equations which makes it possible to lower the dimension of the system under study.

In the problem P, the number ε plays the role of “small parameter” thus splitting the system into “slow” and “fast” subsystems:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t), t, \varepsilon) \quad \text{and} \quad \varepsilon\, \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), t, \varepsilon).$$

Solution of P in a sense reduces to solving the so called *degenerate system* which is obtained from the initial system by putting the parameter ε equal to zero. This is justified by the results of A. N. Tikhonov (see, for instance, [9]) on passing to a solution to the degenerate problem as a small parameter tends to zero.

2.2. The inverse problem to P consists in finding the unknown functions on the right-hand side of the system, given some data on the solution to the direct problem P. The close connection of the initial problem with the degenerate system motivates the study of the case $\varepsilon = 0$. We additionally assume that the "slow surface" defined by the equation

$$g\big(x, y, t, 0\big) = 0$$

consists of a single sheet (with respect to the dependence of y on x) and that the function $g \in G$ meets the condition of the implicit function theorem, which fact allows us to replace the equation

$$g(x(t), y(t), t, 0) = 0$$

by the equivalent equation of the form

$$y(t) = h(x(t), t).$$

We also assume that the right-hand side f of the main differential equation is a polynomial (which is natural for problems of chemical kinetics).

So, consider the partial case of the problem P in which $m = n = 1$, $E = \{0\}$, and the functions $f \in F$ are polynomials in two variables of degree at most $p \in \mathbb{N}$:

$$f(x, y, t, \varepsilon) = \sum_{(i,j)\in K(p)} \gamma_{ij}\, x^i y^j,$$

where $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$, $(i, j) \in K(p)$,

$$K(p) := \{(i, j) :\ 0 \leqslant i, j \in \mathbb{Z},\ i + j \leqslant p\}\,.$$

Introduce the notation

$$\kappa(p) := \frac{(p + 1)(p + 2)}{2}$$

for the number of elements of the set $K(p)$ and fix an arbitrary enumeration

$$K(p) = \big\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, \big(i_{\kappa(p)}, j_{\kappa(p)}\big)\big\}\,.$$

Therefore, the expression $\sum_{k=1}^{\kappa(p)} \gamma_k\, x^{i_k} y^{j_k}$ is the general form of a polynomial in two variables x, y of degree at most p.

As a result of the above agreements, we arrive at the problem Q with domain of data $\operatorname{Dom} Q = \mathbb{R}^{\kappa(p)}$, domain of unknowns $\operatorname{Im} Q = C^1(\mathbb{R})^2$, and condition

$$Q\big(\gamma, (x, y)\big) \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \dot{x}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\kappa(p)} \gamma_k\, x(t)^{i_k}\, y(t)^{j_k}, \\ y(t) = h(x(t), t) \end{cases} \qquad \text{for all} \ \ t \in \mathbb{R},$$

where $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\kappa(p)} \in \mathbb{R}$, $x, y \in C^1(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

2.3. The formal inverse problem Q^{-1}, which has pairs of functions $(x, y) \in C^1(\mathbb{R})^2$ as data, is very simple and impractical. For representing the domain of data, finite collections of the values of functions or their derivatives are more adequate than everywhere defined functions. The corresponding correction of the inverse problem is realized by composition of the problem Q^{-1} and the auxiliary problem R with domain of data $\operatorname{Dom} R = (\mathbb{R}^{\kappa(p)})^3$, domain of unknowns $\operatorname{Im} R = C^1(\mathbb{R})^2$, and condition

$$R\left((\tau,\alpha,\beta),(x,y)\right) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x(\tau_1)=\alpha_1,\; x(\tau_2)=\alpha_2,\;\dots,\; x(\tau_{\kappa(p)})=\alpha_{\kappa(p)},\\ \dot x(\tau_1)=\beta_1,\; \dot x(\tau_2)=\beta_2,\;\dots,\; \dot x(\tau_{\kappa(p)})=\beta_{\kappa(p)}, \end{cases}$$

where $\tau,\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{\kappa(p)}$, $x,y\in C^1(\mathbb{R})$.

As compared to the formal inverse Q^{-1}, the composition $Q^{-1}\circ R$ is more practical and amounts to the following problem: Given $\tau,\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{\kappa(p)}$, find the coefficients $\gamma\in\mathbb{R}^{\kappa(p)}$ for which there exist functions $x,y\in C^1(\mathbb{R})$ subject to the condition

$$\begin{cases} x(\tau_1)=\alpha_1,\; x(\tau_2)=\alpha_2,\;\dots,\; x(\tau_{\kappa(p)})=\alpha_{\kappa(p)},\\ \dot x(\tau_1)=\beta_1,\; \dot x(\tau_2)=\beta_2,\;\dots,\; \dot x(\tau_{\kappa(p)})=\beta_{\kappa(p)},\\ \dot x(t)=\sum\limits_{k=1}^{\kappa(p)}\gamma_k\, x(t)^{i_k}\, y(t)^{j_k} \text{ for all } t\in\mathbb{R},\\ y(t)=h\bigl(x(t),t\bigr) \text{ for all } t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

2.4. The following assertion can be proven for arbitrary $p\in\mathbb{N}$ in the same way as the case $p=1$ which is considered in [10, 11].

Theorem. *If $\tau,\alpha\in\mathbb{R}^{\kappa(p)}$ meet the condition*

$$\Delta(\tau,\alpha) := \begin{vmatrix} \alpha_1^{i_1}\, h(\alpha_1,\tau_1)^{j_1} & \alpha_1^{i_2}\, h(\alpha_1,\tau_1)^{j_2} & \dots & \alpha_1^{i_{\kappa(p)}}\, h(\alpha_1,\tau_1)^{j_{\kappa(p)}}\\ \alpha_2^{i_1}\, h(\alpha_2,\tau_2)^{j_1} & \alpha_2^{i_2}\, h(\alpha_2,\tau_2)^{j_2} & \dots & \alpha_2^{i_{\kappa(p)}}\, h(\alpha_2,\tau_2)^{j_{\kappa(p)}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{\kappa(p)}^{i_1}\, h(\alpha_{\kappa(p)},\tau_{\kappa(p)})^{j_1} & \alpha_{\kappa(p)}^{i_2}\, h(\alpha_{\kappa(p)},\tau_{\kappa(p)})^{j_2} & \dots & \alpha_{\kappa(p)}^{i_{\kappa(p)}}\, h(\alpha_{\kappa(p)},\tau_{\kappa(p)})^{j_{\kappa(p)}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

then, given arbitrary $\beta\in\mathbb{R}^{\kappa(p)}$, the problem $Q^{-1}\circ R$ is uniquely solvable for the data (τ,α,β), and its solution $(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{\kappa(p)}) = (Q^{-1}\circ R)^{\mathrm{s}}(\tau,\alpha,\beta)$ can be calculated by Cramer's formulas

$$\gamma_k = \frac{\Delta_k(\tau,\alpha,\beta)}{\Delta(\tau,\alpha)}, \quad k=1,2,\dots,\kappa(p),$$

where $\Delta_k(\tau,\alpha,\beta)$ is the determinant of the matrix formed from the above matrix by replacing the kth column $\bigl(\alpha_1^{i_k}\, h(\alpha_1,\tau_1)^{j_k},\, \alpha_2^{i_k}\, h(\alpha_2,\tau_2)^{j_k},\,\dots,\, \alpha_{\kappa(p)}^{i_k}\, h(\alpha_{\kappa(p)},\tau_{\kappa(p)})^{j_k}\bigr)$ with the column $\beta=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{\kappa(p)})$.

2.5. The following criterion clarifies the case in which there exist numbers $\tau_1,\dots,\tau_{\kappa(p)}$ satisfying the hypothesis of Theorem 2.4.

Theorem. *Let $n\in\mathbb{N}$, let T be an arbitrary set, and let $\varphi_i\colon T\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$. The family of functions $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ is linearly independent in the vector space $\mathbb{R}^T$ if and only if there are points $t_1,\dots,t_n\in T$ satisfying the condition*

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_n(t_1)\\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots & \varphi_n(t_2)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_1(t_n) & \varphi_2(t_n) & \dots & \varphi_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0\,. \tag{1}$$

$\lhd$ For convenience, introduce a notation for the matrix in (1):

$$M_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n;\, t_1, \dots, t_n) := \begin{pmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_n(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots & \varphi_n(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(t_n) & \varphi_2(t_n) & \dots & \varphi_n(t_n) \end{pmatrix}.$$

The case $n = 1$ is trivial: if $\{\varphi_1\}$ is linearly independent then $\varphi_1 \neq 0$ and, hence, for some point $t_1 \in T$ we have $\varphi_1(t_1) \neq 0$, i. e., $|M_1(\varphi_1;\, t_1)| \neq 0$.

Let $n \in \mathbb{N}$ and assume that for every linearly independent family $\varphi_1, \dots, \varphi_n \colon T \to \mathbb{R}$ there exist points $t_1, \dots, t_n \in T$ satisfying (1). Now consider a linearly independent family $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1} \colon T \to \mathbb{R}$. By the induction hypothesis, there are points $t_1, \dots, t_n \in T$ such that the matrix

$$M := M_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n;\, t_1, \dots, t_n)$$

is invertible. We are to find a point $t \in T$ which ensures invertibility of the matrix

$$\overline{M}(t) := M_{n+1}(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1};\, t_1, \dots, t_n, t).$$

Assume to the contrary that $|\overline{M}(t)| = 0$ for all $t \in T$. Then, for each $t \in T$, there is a tuple $0 \neq \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n+1}(t)\big) \in \mathbb{R}^{n+1}$ satisfying the condition

$$\overline{M}(t)\big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n+1}(t)\big) = 0$$

or, which is the same,

$$\begin{cases} \varphi_1(t_1)\,\alpha_1(t) + \dots + \varphi_n(t_1)\,\alpha_n(t) + \varphi_{n+1}(t_1)\,\alpha_{n+1}(t) = 0, \\ \varphi_1(t_2)\,\alpha_1(t) + \dots + \varphi_n(t_2)\,\alpha_n(t) + \varphi_{n+1}(t_2)\,\alpha_{n+1}(t) = 0, \\ \dots, \\ \varphi_1(t_n)\,\alpha_1(t) + \dots + \varphi_n(t_n)\,\alpha_n(t) + \varphi_{n+1}(t_n)\,\alpha_{n+1}(t) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\varphi_1(t)\,\alpha_1(t) \ + \dots + \varphi_n(t)\,\alpha_n(t) \ + \varphi_{n+1}(t)\,\alpha_{n+1}(t) \ = 0. \tag{3}$$

The subsystem (2) is equivalent to the equality

$$M(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) + \alpha_{n+1}(t)(\varphi_{n+1}(t_1), \dots, \varphi_{n+1}(t_n)) = 0$$

which implies

$$(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) = -\alpha_{n+1}(t)\, M^{-1}\left(\varphi_{n+1}(t_1), \dots, \varphi_{n+1}(t_n)\right). \tag{4}$$

Due to (4), in the case $\alpha_{n+1}(t) = 0$ we would have $\alpha_1(t) = \dots = \alpha_{n+1}(t) = 0$, which contradicts the condition $(\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n+1}(t)) \neq 0$. Consequently, $\alpha_{n+1}(t) \neq 0$ and

$$\left(\frac{\alpha_1(t)}{\alpha_{n+1}(t)}, \dots, \frac{\alpha_n(t)}{\alpha_{n+1}(t)}\right) = -M^{-1}\left(\varphi_{n+1}(t_1), \dots, \varphi_{n+1}(t_n)\right). \tag{5}$$

According to (5), the numbers $\beta_1 := \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_{n+1}(t)}, \dots, \beta_n := \frac{\alpha_n(t)}{\alpha_{n+1}(t)}$ do not depend on t. It remains to observe that (3) implies

$$\beta_1\varphi_1(t) + \dots + \beta_n\varphi_n(t) + \varphi_{n+1}(t) = 0 \quad \text{for all} \quad t \in T$$

contrary to the linear independence of the family $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$. $\rhd$

2.6. Theorems 2.4 and 2.5 directly imply the following condition for unique solvability of the "corrected inverse problem" $Q^{-1} \circ R$.

Theorem. *Let $x \in C^1(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. If the family of functions*

$$t \mapsto x(t)^{i_k}\, h(x(t), t)^{j_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \kappa(p),$$

is linearly independent in the vector space $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ then there exist $\tau_1, \dots, \tau_{\kappa(p)} \in \mathbb{R}$ such that, for all $\beta_1, \dots, \beta_{\kappa(p)} \in \mathbb{R}$, the problem $Q^{-1} \circ R$ is uniquely solvable for the data $\tau_1, \dots, \tau_{\kappa(p)}$, $x(\tau_1), \dots, x(\tau_{\kappa(p)})$, $\beta_1, \dots, \beta_{\kappa(p)}$.

References

1. *Gutman A. E., Kononenko L. I.* Formalization of Inverse Problems and its Applications, *Sibirskij zhurnal chistoj i prikladnoj matematiki* [Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics], 2017, vol. 17, no. 4, pp. 49–56 (in Russian). DOI: 10.17377/PAM.2017.17.5.
2. *Gutman A. E., Kononenko L. I.* The Inverse Problem of Chemical Kinetics as a Composition of Binary Correspondences. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2018, vol. 15, pp. 48–53 (in Russian). DOI: 10.17377/semi.2018.15.006.
3. *Gutman A. E., Koptev A. V.* Finite Dimensionality and Separability of the Stalks of Banach Bundles, *Siberian Mathematical Journal*, 2014, vol. 55, no. 2, pp. 246–253. DOI: 10.1134/s0037446614020074.
4. *Kononenko L. I.* Qualitative Analysis of Singularly Perturbed Systems with One or Two Slow and Fast Variables, *Sibirskij zhurnal industrialnoj matematiki* [Siberian Journal of Industrial Mathematics], 2002, vol. 5, no. 4, pp. 55–62 (in Russian).
5. *Kononenko L. I.* Relaxations in Singularly Perturbed Planar Systems, *Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser.: Matematika, Mehanika, Informatika* [Bulletin of the Novosibirsk State University. Series: Mathematics, Mechanics, Informatics], 2009, vol. 9, no. 4, pp. 45–50 (in Russian).
6. *Mitropolsky Yu. A., Lykova O. B. Integral'nye mnogoobraziya v nelinejnoj mekhanike* [Integral Manifolds in Nonlinear Mechanics], Moscow, Nauka, 1963 (in Russian).
7. *Vasil'eva A. V., Butuzov V. F. Singulyarno vozmuschennye uravneniya v kriticheskikh sluchayakh* [Singularly Perturbed Equations in Critical Cases], Moscow, Moscow State University, 1978 (in Russian).
8. *Goldstein V. M., Sobolev V. A. Kachestvennyj analiz singulyarno vozmuschennykh sistem* [Qualitative Analysis of Singularly Perturbed Systems], Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics, 1988 (in Russian).
9. *Tikhonov A. N.* On Independence of Solutions to Differential Equations on a Small Parameter, *Matematicheskij Sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1948, vol. 22 (64), no. 2, pp. 193–204 (in Russian).
10. *Kononenko L. I.* Direct and Inverse Problems for a Singular System with Slow and Fast Variables in Chemical Kinetics, *Vladikavkaz Math. J.*, 2015, vol. 17, no. 1, pp. 39–46 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2015.1.7291.
11. *Kononenko L. I.* Identification Problem for Singular Systems with Small Parameter in Chemical Kinetics, *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2016, vol. 13, pp. 175–180 (in Russian). DOI: 10.17377/semi.2016.13.015.

Received July 3, 2018

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 37–47

БИНАРНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Гутман А. Е.[1,2], Кононенко Л. И.[1,2]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4;
[2] Новосибирский государственный университет,
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1

E-mail: `gutman@math.nsc.ru`; `larakon2@gmail.ru`, `larak@math.nsc.ru`

Аннотация. Показано, как бинарные соответствия могут быть использованы для простой формализации понятия задачи, определения основных компонентов задач, их свойств и конструкций. В частности, предложена формализация следующих понятий: условие, данные, искомые и решения задачи, разрешимость и однозначная разрешимость, обратная задача, композиция и ограничение задач, изоморфизм между задачами. Рассмотрены топологические задачи и связанные с ними понятия устойчивости и корректности. Указана связь между устойчивостью и непрерывностью однозначно разрешимой топологической задачи. Дано определение параметризации множества. Введены понятия параметризованной задачи, задачи восстановления объекта по значениям параметров, а также понятия локально свободного набора параметров и устойчивости относительно набора параметров.

В качестве иллюстрации рассмотрена сингулярно возмущенная система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая процесс химической кинетики и горения. Для такой системы сформулированы прямая и обратная задача. Изучаемый класс задач расширен за счет рассмотрения многочленов произвольной степени в качестве правых частей дифференциальных уравнений. Показано, как обратная задача химической кинетики может быть скорректирована и приближена к практике посредством композиции с простой вспомогательной задачей, реализующей связь между функциями и конечными наборами измеряемых числовых характеристик. Приведены формулы решения и указаны условия однозначной разрешимости скорректированной обратной задачи. В рамках исследования разрешимости получен критерий линейной независимости вещественных функций в терминах конечных наборов их значений. С помощью установленного критерия уточнена реализуемость условия однозначной разрешимости обратной задачи химической кинетики.

Ключевые слова: бинарное соответствие, обратная задача, разрешимость, композиция, устойчивость, корректность, дифференциальное уравнение, химическая кинетика, линейная независимость.

Mathematical Subject Classification (2000): 34A55.

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 48–56

УДК 517.9
DOI 10.23671/VNC.2018.3.17988

КОММУТАНТ ОПЕРАТОРА ПОММЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ

О. А. Иванова[1]**, С. Н. Мелихов**[1,2]

[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: `neo_ivolga@mail.ru`, `melih@math.rsu.ru`

Аннотация. В пространстве целых функций экспоненциального типа, реализующем сильное сопряженное к пространству Фреше функций, бесконечно дифференцируемых на вещественном интервале, содержащем начало координат, исследованы линейные непрерывные операторы, перестановочные с оператором Поммье. Они задаются линейным непрерывным функционалом на упомянутом пространстве целых функций, а значит, с точностью до сопряженного к преобразованию Фурье — Лапласа, бесконечно дифференцируемой функцией на исходном интервале. Дана полная характеризация функционалов, определяющих указанным образом изоморфизмы. Доказано, что изоморфизм задается функциями, не равными 0 в начале координат (и только ими). Существенную роль в доказательстве соответствующего критерия играет метод, использующий теорию компактных операторов в банаховых пространствах. Выделен класс тех бесконечно дифференцируемых на исходном интервале функций, которые задают операторы из упомянутого коммутанта, близкие к изоморфизму. Такие операторы имеют конечномерное ядро. Для интервала, отличного от вещественной прямой, мы определяем также класс операторов из коммутанта оператора Поммье, не являющихся сюръективными. Сопряженный к линейному непрерывному оператору, перестановочному с оператором Поммье, реализуется в пространстве бесконечно дифференцируемых функций как оператор, полученный фиксированием одного сомножителя в произведении Дюамеля. Существенное отличие рассмотренной ситуации от исследовавшихся ранее состоит в отсутствии циклических векторов у оператора Поммье в исходном пространстве целых функций.

Ключевые слова: оператор Поммье, целая функция экспоненциального типа, пространство бесконечно дифференцируемых функций, коммутант, изоморфизм.

Mathematical Subject Classification (2000): 46E10, 30D15, 47L10, 26E10.

Введение

В настоящей работе изучаются свойства коммутанта оператора Поммье D_0 в пространстве H_Ω целых функций экспоненциального типа, изоморфного сильному сопряженному к пространству Фреше $\mathscr{E}(\Omega)$ функций, бесконечно дифференцируемых на интервале $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Ранее оператор D_0 и его одномерное возмущение D_{0,g_0} изучались в [1–4] в счетном индуктивном пределе E весовых пространств Фреше целых функций (если $g_0 \equiv 1$, то $D_0 = D_{0,g_0}$). В. А. Ткаченко [5, 6] использовал оператор D_{0,g_0} в случае $g_0 = e^P$, где P — некоторый многочлен (см. [1]). В [5, 6] он действует в (LB)-пространстве целых функций, рост которых определяется ρ-тригонометрически выпуклой ($\rho > 0$) функцией со значениями в $(-\infty, +\infty]$. Сопряженный к нему назван в [5] оператором обобщенного интегрирования. Конструкции подобного рода в (LB)-пространстве целых функций экспоненциального типа использовались И. Ф. Красичковым-Терновским [7]. В [1] был исследован коммутант D_{0,g_0} в кольце всех линейных непрерывных операторов в E. Свойства алгебры, образованной сопряженным E' к E с умножением, определяемым оператором сдвига для D_{0,g_0}, изучены в [2], циклические векторы и собственные замкнутые инвариантные подпространства D_{0,g_0} в E описаны в [3, 4]. Существенным отличием рассматриваемой здесь ситуации от изученных ранее конкретных случаев является неквазианалитичность пространства $\mathscr{E}(\Omega)$, изоморфного сопряженному к H_Ω (в [3, 4] сопряженное к E реализуется как некоторое пространство аналитических функций). Следствием этого является отсутствие циклических векторов у оператора Поммье в H_Ω. В ситуациях, исследованных в [3, 4], циклическими векторами D_0 являются все функции из E, отличные от многочлена (т. е. их «больше», чем функций, не являющихся циклическими).

Основной целью данной работы является описание линейных непрерывных в H_Ω операторов, перестановочных в H_Ω с D_0 и являющихся изоморфизмом H_Ω или близких к нему. Всякий оператор B из коммутанта $\mathscr{K}(D_0)$ оператора D_0 задается некоторым линейным непрерывным функционалом φ на H_Ω. С учетом рефлексивности $\mathscr{E}(\Omega)$ и теоремы Пэли — Винера — Шварца сопряженное к H_Ω можно отождествить с $\mathscr{E}(\Omega)$, и тогда элементы $\mathscr{K}(D_0)$ определяются (однозначно) функциями из $\mathscr{E}(\Omega)$. Показано, что изоморфизм задается той и только той функцией, которая не равна 0 в начале координат. При этом существенную роль играет метод, использующий теорию компактных операторов в банаховых пространствах. Ранее в аналогичных вопросах он применялся В. А. Ткаченко [6]. В другом крайнем случае, когда бесконечно дифференцируемая в Ω функция обращается тождественно в 0 в некоторой односторонней окрестности начала координат (и интервал Ω с соответствующей стороны ограничен), она задает несюръективный оператор. Как показано в [1], с помощью оператора сдвига для оператора Поммье в сопряженном H'_Ω к пространству H_Ω можно ввести ассоциативное и коммутативное умножение. Его естественной реализацией в $\mathscr{E}(\Omega)$ является произведение Дюамеля, играющее важную роль в различных вопросах анализа (см., например, работы М. Т. Караева [8, 9]). Это произведение тоже существенно используется в доказательствах.

1. Вспомогательные сведения

Пусть Ω — интервал в $\mathbb{R}$, содержащий 0; $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — исчерпывающая Ω последовательность отрезков: $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. При этом для множества $M \subset \mathbb{R}$ символ $\operatorname{int} M$ обозначает внутренность M в $\mathbb{R}$. Будем считать, что $0 \in K_1$. Пусть $H_M(x) := \sup_{y\in M}(xy)$, $x \in \mathbb{R}$, — опорная функция множества $M \subset \mathbb{R}$; $A(\mathbb{C})$ — пространство целых в $\mathbb{C}$ функций.

Далее для $n \in \mathbb{N}$

$$H_{\Omega,n} := \left\{ f \in A(\mathbb{C}) : \|f\|_n := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{(1+|z|)^n \exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} z))} < +\infty \right\};$$

$H_{\Omega,n}$ является банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_n$. При этом $H_{\Omega,n} \subset H_{\Omega,n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, и эти вложения непрерывны. Положим $H_\Omega := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_{\Omega,n}$ и снабдим H_Ω топологией индуктивного предела пространств $H_{\Omega,n}$, $n \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в H_Ω.

Положим $e_\lambda(x) := e^{-i\lambda x}$, $x, \lambda \in \mathbb{C}$. Для локально выпуклого пространства X символ X' обозначает топологическое сопряженное к X. Пусть $\mathscr{E}(\Omega)$ — пространство Фреше всех бесконечно дифференцируемых в Ω функций. По теореме Пэли — Винера — Шварца [10, теорема 7.3.1] преобразование Фурье — Лапласа $\mathscr{F}(\varphi)(\lambda) := \varphi(e_\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)'$, устанавливает топологический изоморфизм сильного сопряженного к $\mathscr{E}(\Omega)$ на H_Ω. Отметим, что $\mathscr{E}(\Omega)$ рефлексивно.

Пусть $\mathscr{L}(H_\Omega)$ — пространство всех линейных непрерывных операторов в H_Ω. Оператор Поммье D_z, $z \in \mathbb{C}$, определяется равенством

$$D_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t)-f(z)}{t-z}, & t \neq z, \\ f'(z), & t = z, \end{cases}$$

$f \in H_\Omega$. По [1] $D_z \in \mathscr{L}(H_\Omega)$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

Следуя [11, 12], введем сдвиги T_z, $z \in \mathbb{C}$, для D_0, линейно и непрерывно действующие в H_Ω: для $f \in H_\Omega$

$$T_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{tf(t)-zf(z)}{t-z}, & t \neq z, \\ f(z) + zf'(z), & t = z. \end{cases}$$

Пусть $\mathscr{K}(D_0)$ — множество всех линейных непрерывных операторов в H_Ω, перестановочных с D_0 в H_Ω, т. е. коммутант D_0 в кольце $\mathscr{L}(H_\Omega)$.

Теорема 1. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) $B \in \mathscr{K}(D_0)$.

(ii) *Существует функционал* $\varphi \in H'_\Omega$ *такой, что* $B(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}$, $f \in H_\Omega$.

$\lhd$ Из [1, теорема 15] следует справедливость теоремы. $\rhd$

Для $\varphi \in H'_\Omega$ положим $B_\varphi(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}$, $f \in H_\Omega$.

Определим бинарную операцию $\otimes$ в $H_\Omega :$ $(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f))$, $\varphi, \psi \in H'_\Omega$, $f \in H_\Omega$. По [1, § 3] произведение $\varphi \otimes \psi$ корректно определено; оно ассоциативно и коммутативно. Кроме того [1, следствие 18], отображение $\kappa(\varphi) := B_\varphi$ является изоморфизмом алгебр $(H'_\Omega, \otimes)$ и $\mathscr{K}(D_0)$ (в последней вводится обычное операторное умножение).

2. Основной результат

Как обычно, $D(\mathbb{R})$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}$ функций с компактным носителем. Для обобщенной функции $u \in D'(\mathbb{R})$ символ $\operatorname{supp}(u)$ обозначает носитель u. Отметим свойство равномерной ограниченности носителей обобщенных функций $\mathscr{F}^{-1}(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}$, для фиксированной функции $f \in H_\Omega$.

Лемма 1. *Для любых* $m \in \mathbb{N}$ $f \in H_{\Omega,m}$, $z \in \mathbb{C}$, *носители* $\mathscr{F}^{-1}(D_0(f))$ *и* $\mathscr{F}^{-1}(T_z(f))$ *содержатся в* K_m.

$\lhd$ Применяя принцип максимума модуля, получаем, что $\|D_0(f)\|_m < +\infty$ и

$$\sup_{t \in \mathbb{C}} \frac{|T_z(f)(t)|}{(1+|t|)^{m+1} \exp(H_{K_m}(\operatorname{Im} t))} < +\infty.$$

По теореме Пэли — Винера — Шварца $\operatorname{supp}(\mathscr{F}^{-1}(D_0(f))) \subset K_m$ и $\operatorname{supp}(\mathscr{F}^{-1}(T_z(f))) \subset K_m$. $\rhd$

Для локально выпуклого пространства X, линейного непрерывного оператора $A : X \to X$ элемент $x \in X$ называется *циклическим вектором* A в X, если система $\{A^n(x) : n \geqslant 0\}$ полна в X, т. е. ее линейная оболочка плотна в X.

Следствие 1. *Оператор D_0 не имеет в H_Ω ни одного циклического вектора.*

$\lhd$ Зафиксируем $f \in H_{\Omega,m}$. По лемме 1 носитель каждой обобщенной функции $\mathscr{F}^{-1}(D_0^n(f))$, $n \geqslant 0$, содержится в K_m. Возьмем ненулевую функцию $h \in D(\mathbb{R})$ такую, что $(\mathrm{supp}(h)) \cap K_m = \varnothing$ и $\mathrm{supp}(h) \subset \Omega$. Тогда $\mathscr{F}^{-1}(D_0^n(f))(h) = 0$ для любого $n \geqslant 0$. Значит, множество $\{\mathscr{F}^{-1}(D_0^n(f)) : n \geqslant 0\}$ не является полным в сильном сопряженном к $\mathscr{E}(\Omega)$, следовательно, множество $\{D_0^n(f) : n \geqslant 0\}$ не является полным в H_Ω. $\rhd$

Этот факт принципиально отличает рассматриваемую здесь ситуацию от изученных ранее. Он влечет также, что семейство собственных замкнутых D_0-инвариантных подпространств H_Ω очень широкое.

Пусть $S(\mathbb{R})$ — пространство Шварца всех бесконечно дифференцируемых функций $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ таких, что $\lim_{t\to\infty}(|t|^k|f^{(k)}(t)|) = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Символом $\mathscr{F}_S$ обозначим преобразование Фурье, действующее в пространстве $S'(\mathbb{R})$ обобщенных функций медленного роста на $\mathbb{R}$.

Для $h \in S(\mathbb{R})$ введем функцию $k(h)(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(t)}{t-z}\,dt$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Лемма 2. *Пусть $h \in S(\mathbb{R})$ и $A := \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt$. Тогда $\lim_{\substack{z\to\infty,\\ z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}}}(zk(h)(z)) = -A$.*

Это утверждение содержится в [13, гл. 4, § 71]. Поскольку функции h и $h_1(t) := th(t)$ принадлежат $S(\mathbb{R})$, то найдется $C > 0$ такое, что для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, для которых $|t_1|, |t_2| \geqslant 1$, выполняются неравенства $|h(t_1) - h(t_2)| \leqslant C\left|\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right|$ и $|h_1(t_1) - h_1(t_2)| \leqslant C\left|\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right|$ (т. е. в терминологии [13] h и h_1 удовлетворяют условию H вблизи ∞). Кроме того, существуют пределы $\lim_{\substack{z\to\infty,\\ \operatorname{Im} z>0}} k(h_1)(z)$ и $\lim_{\substack{z\to\infty,\\ \operatorname{Im} z<0}} k(h_1)(z)$, равные 0. Поэтому $\lim_{\substack{z\to\infty,\\ z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}}}(zk(h)(z)) = -A$ по [13, с. 260].

Замечание 1. (i) Преобразование $\widetilde{\mathscr{F}} : \varphi \mapsto (\varphi(e_\lambda), \lambda \in \Omega)$ является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к H_Ω на $\mathscr{E}(\Omega)$. При этом $\widetilde{\mathscr{F}}$ — отображение, сопряженное к $\mathscr{F} : \mathscr{E}(\Omega)' \to H_\Omega$ относительно дуальных пар $(\mathscr{E}(\Omega)', \mathscr{E}(\Omega))$ и (H_Ω, H'_Ω).

Полагаем $\widehat{\varphi} := \widetilde{\mathscr{F}}(\varphi)$, $\varphi \in H'_\Omega$. Для любых $\varphi \in H'_\Omega$, $n \geqslant 0$, справедливо равенство $\widehat{\varphi}^{(n)}(0) = \varphi_t(t^n)$.

(ii) Операция $\otimes$ посредством $\widetilde{\mathscr{F}} : H'_\Omega \to \mathscr{E}(\Omega)$ индуцирует в $\mathscr{E}(\Omega)$ произведение Дюамеля, т. е. $\widehat{\varphi \otimes \psi} = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$, где

$$(g * h)(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-\tau)h(\tau)\,d\tau\right) = g(0)h(t) + \int_0^t g'(t-\tau)h(\tau)\,d\tau, \quad g, h \in \mathscr{E}(\Omega).$$

(iii) Билинейная форма $\langle f, h\rangle := \widetilde{\mathscr{F}}^{-1}(h)(f)$, $f \in H_\Omega$, $h \in \mathscr{E}(\Omega)$, задает двойственность между H_Ω и $\mathscr{E}(\Omega)$. При этом $\langle f, h\rangle = \mathscr{F}^{-1}(f)(h)$.

Сопряженным к оператору $B_\varphi : H_\Omega \to H_\Omega$, $\varphi \in H'_\Omega$, относительно этой двойственности является оператор $A_{\widehat{\varphi}} : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathscr{E}(\Omega)$, $A_{\widehat{\varphi}}(h) = \widehat{\varphi} * h$.

Выясним далее, при каких условиях B_φ является изоморфизмом H_Ω. Вначале охарактеризуем инъективные операторы B_φ.

Лемма 3. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) *B_φ инъективен в H_Ω.*

(ii) *$\widehat{\varphi}(0) \neq 0$.*

$\lhd$ (i)$\Rightarrow$(ii): Если $\widehat{\varphi}(0) = 0$, то $B_\varphi(1) = 0$ (стоящая в скобках функция тождественно равна 1). Поэтому оператор B_φ не является инъективным.

(ii)$\Rightarrow$(i): Пусть $f \in \operatorname{Ker} B_\varphi$. Тогда $\varphi(T_z(f)) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Следовательно, $\widetilde{\mathscr{F}}^{-1}(\widehat{\varphi})(T_z(f)) = 0$ и $\mathscr{F}^{-1}(T_z(f))(\widehat{\varphi}) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$. По лемме 1 существует $m \in \mathbb{N}$, для которого носители всех обобщенных функций $\mathscr{F}^{-1}(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}$, содержатся в K_m. Возьмем функцию $\chi \in D(\mathbb{R})$ такую, что χ равна 1 в K_{m+1} и $\operatorname{supp}(\chi) \subset \Omega$. Тогда $\mathscr{F}^{-1}(T_z(f))\,(\chi\widehat{\varphi}) = 0$, $z \in \mathbb{C}$. Таким образом,

$$\mathscr{F}_S^{-1}\,(\chi\widehat{\varphi})\,(T_z(f)\,|_{\mathbb{R}}) = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Функция $g := \mathscr{F}_S^{-1}(\chi\widehat{\varphi})$ принадлежит $S(\mathbb{R})$ (при этом $S(\mathbb{R})$ отождествляется стандартным образом с подпространством $S'(\mathbb{R})$). Значит,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{tf(t)g(t)}{t-z}\,dt = zf(z)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t)}{t-z}\,dt, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Положим

$$\alpha(z) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{tf(t)g(t)}{t-z}\,dt, \quad \beta(z) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t)}{t-z}\,dt, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

По лемме 2

$$\lim_{z\to\infty, z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}}(z\beta(z)) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = -\chi(0)\widehat{\varphi}(0) \neq 0$$

(функция $tf(t)g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит $S(\mathbb{R})$). Поскольку $\lim_{\substack{z\to\infty,\\ z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}}} \alpha(z) = 0$, то $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ и, следовательно, $f = 0$. Значит, $\operatorname{Ker} B_\varphi = \{0\}$. $\rhd$

Введем функционалы $\delta_{0,n} \in H'_\Omega$, $n \geqslant 0$: $\delta_{0,n}(f) := \frac{i^n}{n!}f^{(n)}(0)$, $f \in H_\Omega$. Заметим, что $\widehat{\delta}_{0,n}(x) = \frac{1}{n!}x^n$, $x \in \Omega$, и $\kappa(\delta_{0,n}) = B_{\delta_{0,n}} = D_0^n$ [1, лемма 7] (отображение $\kappa : H'_\Omega \to \mathscr{K}(D_0)$ введено в § 1).

Лемма 4. *Пусть $\varphi \in H'_\Omega$ и $\widehat{\varphi}^{(j)}(0) = 0$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\psi \in H'_\Omega$ такое, что $\varphi = \delta_{0,n} \otimes \psi$. Если $\widehat{\varphi}^{(n)}(0) \neq 0$, то $\widehat{\psi}(0) \neq 0$.*

$\lhd$ Положим $\psi := \widetilde{\mathscr{F}}^{-1}(\widehat{\varphi}^{(n)})$ и $h := \widehat{\varphi}$. Тогда

$$h(t) = \frac{1}{n!}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t (t-\tau)^n h^{(n)}(\tau)\,d\xi\right), \quad t \in \Omega,$$

т. е. $\widehat{\delta}_{0,n} * h^{(n)} = h$. Отсюда следует равенство $\varphi = \delta_{0,n} \otimes \widetilde{\mathscr{F}}^{-1}(h^{(n)})$. $\rhd$

Введем дуальные преднормы в H'_Ω: $\|\varphi\|_n^* := \sup_{\substack{f\in H_\Omega,\\ \|f\|_n\leqslant 1}} |\varphi(f)|$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in H'_\Omega$.

Теорема 2. *Следующие утверждения равносильны:*
(i) $B_\varphi \in \mathscr{K}(D_{0,g_0})$ *— изоморфизм* H_Ω.
(ii) $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$.

$\lhd$ (ii)$\Rightarrow$(i): Используем метод доказательства В. А. Ткаченко [6, теорема 2]. Поскольку для $f \in H_\Omega$, $t \neq z$

$$\frac{tf(t) - zf(z)}{t-z} = f(z) + t\frac{f(t)-f(z)}{t-z},$$

то

$$B_\varphi(f) = \widehat{\varphi}(0)f + B(f), \quad B(f)(z) := \varphi_t(tD_z(f)(t)), \quad z \in \mathbb{C},\ f \in H_\Omega. \tag{1}$$

Покажем, что B — линейный непрерывный оператор в H_Ω такой, что для любого $n \in \mathbb{N}$ сужение B на $H_{\Omega,n}$ — компактный оператор в $H_{\Omega,n}$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Положим $S_n = \{f \in H_{\Omega,n} : \|f\|_n \leqslant 1\}$. Для любой функции $f \in S_n$

$$|\varphi_t(tD_z(f)(t))| \leqslant \|\varphi\|^*_{n+1} \sup_{t\in\mathbb{C}} \frac{|t||D_z(f)(t)|}{(1+|t|)^{n+1}\exp(H_{K_{n+1}}(\operatorname{Im} t))}. \tag{2}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Если $z \in \mathbb{C}$, $|t-z| \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, то для любой функции $f \in S_n$

$$\begin{gathered}\frac{|t||D_z(f)(t)|}{(1+|t|)^{n+1}\exp(H_{K_{n+1}}(\operatorname{Im} t))} = \frac{|t||f(t)-f(z)|}{|t-z|(1+|t|)^{n+1}\exp(H_{K_{n+1}}(\operatorname{Im} t))} \\ \leqslant \varepsilon\left(\frac{|t|}{1+|t|} + (1+|z|)^n\exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} z))\right) \leqslant 2\varepsilon(1+|z|)^n\exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} z)).\end{gathered} \tag{3}$$

Если же $|t-z| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$ для $z \in \mathbb{C}$, то для любой функции $f \in S_n$ по принципу максимума модуля найдется $w \in \mathbb{C}$ такое, что $|w-z| = \frac{1}{\varepsilon}$ и выполняются следующие неравенства:

$$\begin{gathered}\frac{|t||D_z(f)(t)|}{(1+|t|)^{n+1}\exp(H_{K_{n+1}}(\operatorname{Im} t))} \leqslant \varepsilon\frac{1}{(1+|t|)^n\exp(H_{K_{n+1}}(\operatorname{Im} t))} \\ \times((1+|w|)^n\exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} w)) + (1+|z|)^n\exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} z))) \\ \leqslant \varepsilon\left(\left(\frac{1+(2/\varepsilon)+|t|}{1+|t|}\right)^n \exp\left(\frac{2C_n}{\varepsilon}\right) + (1+|z|)^n\exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} z))\right) \\ \leqslant \varepsilon\left(\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \exp\left(\frac{2C_n}{\varepsilon}\right) + (1+|z|)^n\exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} z))\right),\end{gathered} \tag{4}$$

где $C_n := \max_{|\xi|=1} H_{K_n}(\operatorname{Im}\xi) < +\infty$. Из (2)–(4) следует, что

$$\lim_{z\to\infty}\sup_{f\in S_n}\frac{|B(f)(z)|}{(1+|z|)^n\exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} z))} = 0.$$

Последнее влечет относительную компактность $B(S_n)$ в $H_{\Omega,n}$. По лемме 3 оператор B_φ инъективен. Поскольку $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$, то вследствие (1) он является изоморфизмом каждого пространства $H_{\Omega,n}$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что B_φ — изоморфизм H_Ω.

(i)$\Rightarrow$(ii): Если $\widehat{\varphi}(0) = 0$, то по лемме 3 B_φ не является инъективным. $\rhd$

Следствие 2. *Пусть $\varphi \in H'_\Omega$ и $\widehat{\varphi}^{(j)}(0) = 0$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, $\widehat{\varphi}^{(n)}(0) \neq 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\psi \in H'_\Omega$, для которого $B_\varphi = D_0^n B_\psi$ и B_ψ — топологический изоморфизм H_Ω. Кроме того, $B_\varphi : H_\Omega \to H_\Omega$ имеет линейный непрерывный правый обратный.*

$\lhd$ По лемме 4 существует $\psi \in H'_\Omega$ такое, что $\varphi = \delta_{0,n} \otimes \psi$ и $\widehat{\psi}^{(n)}(0) \neq 0$. Тогда $B_\varphi = B_{\delta_{0,n}} B_\psi = D_0^n B_\psi = B_\psi D_0^n$. По теореме 2 B_ψ — изоморфизм H_Ω. Поскольку оператор $D_0^n : H_\Omega \to H_\Omega$ сюръективен, ядро $\operatorname{Ker} B_\varphi = \operatorname{Ker} D_0^n$ n-мерно (а значит, топологически дополнимо в H_Ω), то $B_\varphi : H_\Omega \to H_\Omega$ имеет линейный непрерывный правый обратный. $\rhd$

Обратимся теперь к другой крайней ситуации, когда функция $\widehat{\varphi}$ является «очень» плоской в начале координат, т. е. она равна 0 в некоторой односторонней окрестности начала координат.

Замечание 2. Рассмотрим случай, когда интервал Ω отличен от прямой $\mathbb{R}$. Тогда $\Omega = (\omega^-, \omega^+)$, где хотя бы одно из ω^-, ω^+ конечно. Пусть, например, $\omega^+ \in (0, +\infty)$.

Предположим, что $\widehat{\varphi} = 0$ в некоторой правосторонней окрестности начала координат. Тогда найдется ненулевая функция $h \in \mathscr{E}(\Omega)$ такая, что $h = 0$ в $(\omega^+, \omega_0]$ для некоторого $\omega_0 \in (0, \omega^+)$ и $\int_0^t \widehat{\varphi}(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = 0$ для любого $t \in \Omega$. Значит, $A_{\widehat{\varphi}}(h) = \widehat{\varphi} * h = 0$. Оператор $A_{\widehat{\varphi}} : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathscr{E}(\Omega)$ является сопряженным к $B_\varphi : H_\Omega \to H_\Omega$ (относительно дуальной пары $(H_\Omega, \mathscr{E}(\Omega))$). Так как $A_{\widehat{\varphi}}$ неинъективен, то по [14, гл. 8, § 8.6] $\operatorname{Im} B_\varphi$ не является плотным в H_Ω и, тем более, $B_\varphi : H_\Omega \to H_\Omega$ несюръективен.

Аналогично, если ω^- конечно и $\widehat{\varphi} = 0$ в некоторой левосторонней окрестности начала, то оператор $B_\varphi : H_\Omega \to H_\Omega$ несюръективен, причем его образ даже не плотен в H_Ω.

Приведенные рассуждения имеют непосредственное отношение к теореме Титчмарша о свертке [15]. Ее доказательство с использованием только теории функций вещественного переменного дано в [16, гл. II], в [17] оно проведено методами функционального анализа. О делителях нуля свертки Дюамеля речь идет в монографии И. Димовского [18, § 1.1].

Литература

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2016.—Т. 28, № 2.—С. 114–137.
2. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об алгебре аналитических функционалов, связанной с оператором Поммье // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 4.—С. 34–40.
3. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об инвариантных подпространствах оператора Поммье в пространствах целых функций экспоненциального типа // Комплексный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.—Вып. 142.—М.: ВИНИТИ РАН, 2017.—С. 111–120.
4. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* On the completeness of orbits of a Pommiez operator in weighted (LF)-spaces of entire functions // Complex Analysis and Operator Theory.—2017.—Vol. 11.—P. 1407–1424.
5. *Ткаченко В. А.* Инвариантные подпространства и одноклеточность операторов обобщенного интегрирования в пространствах аналитических функционалов // Мат. заметки.—1977.—Т. 22, вып. 2.—С. 613–618.
6. *Ткаченко В. А.* Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов // Мат. заметки.—1979.—Т. 25, вып. 2.—С. 271–282.
7. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза // Матем. сб.—1972.—Т. 88 (130), № 3 (7).—С. 331–352.
8. *Karaev M. T.* Invariant subspaces, cyclic vectors, commutant and extended eigenvectors of some convolution operators // Methods Funct. Anal. Topology.—2005.—Vol. 11, №1.—P. 48–59.
9. *Караев М. Т.* Алгебры Дюамеля и их приложения // Функц. анализ и его прил.—2018.—Т. 52, вып. 1.—С. 3–12. DOI: doi.org/10.4213/faa3481.
10. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье.—М.: Мир, 1986.—464 с.
11. *Binderman Z.* Functional shifts induced by right invertible operators // Math. Nachr.—1992.—Vol. 157.—P. 211–224. DOI: 10.1002/mana.19921570117.
12. *Dimovski I. N., Hristov V. Z.* Commutants of the Pommiez operator // Int. J. Math. and Math. Science.—2005.—№ 8.—P. 1239–1251.
13. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.—М.: ГРФМЛ, 1966.—708 с.
14. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
15. *Titchmarsh E. C.* The zeros of certain integral function // Proc. London Math. Soc.—1926.—Vol. 25.—P. 283–302.
16. *Микусинский Я.* Операторное исчисление.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956.—367 с.
17. *Kalish G. K.* A Functional Analysis Proof of Titchmarsh's Theorem on Convolution // J. Math. Anal. Appl.—1962.—Vol. 5.—P. 176–183.
18. *Dimovski I.* Convolutional Calculus.—London: Kluwer, 1990.—184 p.

Статья поступила 24 апреля 2018 г.

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 48–56

THE COMMUTANT OF THE POMMIEZ OPERATOR IN A SPACE OF ENTIRE FUNCTIONS OF EXPONENTIAL TYPE AND POLYNOMIAL GROWTH ON THE REAL LINE

Ivanova O. A.[1], Melikhov S. N.[1,2]

[1] Southern Federal University,
8 a Mil'chakova st., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus st., Vladikavkaz 362027, Russia

E-mail: neo_ivolga@mail.ru, melih@math.rsu.ru

Abstract. In the space of entire functions of exponential type representing a strong dual to a Frechet space of infinitely differentiable functions on a real interval containing the origin, linear continuous operators commuting with the Pommiez operator are investigated. They are given by a continuous linear functional on this space of entire functions and hence, up to the adjoint of the Fourier–Laplace transform, by an infinite differentiable function on the initial interval. A complete characterization of linear continuous functionals defining isomorphisms by virtue of the indicated correspondence is given. It is proved that isomorphisms are determined by functions that do not vanish at the origin (and only by them). An essential role in proving the corresponding criterion is played by a method exploiting the theory of compact operators in Banach spaces. The class of those functions infinitely differentiable on the considered interval that define the operators from the mentioned commutant close to isomorphisms is distinguished. Such operators have finite-dimensional kernels. For an interval other than a straight real line, we also define the class of operators from the commutant of the Pommiez operator that are not surjective. The adjoint of a continuous linear operator that commutes with Pommiez operators is realized in the space of infinitely differentiable functions as an operator obtained by fixing one factor in the Duhamel product. The essential difference of the situation under consideration from the previously studied one is the absence of cyclic vectors of the Pommiez operator in the considered space of entire functions.

Key words: Pommiez operator, entire function of exponential type, space of infinitely differentiable functions, commutant, isomorphism.

Mathematical Subject Classification (2000): 46E10, 30D15, 47L10, 26E10.

References

1. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* On Operators Commuting with a Pommiez type Operator in Weighted Spaces of Entire Functions, *St. Petersburg Math. J.*, 2017, vol. 28, no. 2, pp. 209–224. DOI: 10.1090/spmj/1447.
2. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* On an Algebra of Analytic Functionals Connected with a Pommiez Operator, *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [Vladikavkaz Math. J.], 2016, vol. 18, no. 4, pp. 34–40 (in Russian). DOI 10.23671/VNC.2016.4.5989.
3. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* On Invarint Subspaces of the Pommiez Operator in Spaces of Entire Functions of Exponential Type, *Complex Analysis, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, vol. 142, Moscow, VINITI, 2017, pp. 111–120 (in Russian).
4. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* On the Completeness of Orbits of a Pommiez Operator in Weighted (LF)-Spaces of Entire Functions, *Complex Analysis and Operator Theory*, 2017, vol. 11, pp. 1407–1424. DOI: 10.1007/s11785-016-0617-5.
5. *Tkachenko V. A.* Invariant Subspaces and Unicellularity of Operators of Generalized Integration in Spaces of Analytic Functionals, *Math. Notes*, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 613–618. DOI: 10.1007/BF01142725.
6. *Tkachenko V. A.* Operators that Commute with Generalized Integration in Spaces of Analytic Functionals, *Math. Notes*, 1979, vol. 25, no. 2, pp. 141–146. DOI: 10.1007/BF01780970.

7. *Krasichkov-Ternovskii I. F.* Invariant Subspaces of Analytic Functions. III. On the Extension of Spectral Synthesis, *Math. USSR-Sbornik*, 1972, vol. 17, pp. 327–348. DOI: 10.1070/SM1972v017n03ABEH001508.
8. *Karaev M. T.* Invariant Subspaces, Cyclic Vectors, Commutant and Extended Eigenvectors of Some Convolution Operators. *Methods Funct. Anal. Topology*, 2005, vol. 11, no. 1, pp. 48–59.
9. *Karaev M. T.* Duhamel Algebras and Applications, *Functional Analysis and its Applications*, 2018, vol. 52, no. 1, pp. 1–8. DOI: doi.org/10.4213/faa3481.
10. *Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Vol. I: Distribution Theory and Fourier Analysis*, Springer, 1983, 391 p.
11. *Binderman Z.* Functional Shifts Induced by Right Invertible Operators, *Math. Nachr.*, 1992, vol. 157, pp. 211–224. DOI: 10.1002/mana.19921570117.
12. *Dimovski I. N., Hristov V. Z.* Commutants of the Pommiez Operator, *Int. J. Math. and Math. Science*, 2005, no. 8, pp. 1239–1251.
13. *Muskheleshvili N. I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* [Some Basic Problems of the Mathematical Elasticity Theory], Moscow, GRFML, 1966, 708 p. (in Russian).
14. *Edvards R. E. Functional Analysis. Theory and Applications.* N. Y., Holt, Rinehart and Winston, 1965, 791 p.
15. *Titchmarsh E. C.* The Zeros of Certain Integral Function, *Proc. London Math. Soc.*, 1926, vol. 25, pp. 283–302.
16. *Mikusiński J. Operational Calculus*, N. Y., Pergamon Press, 1959, 495 p.
17. *Kalish G. K.* A Functional Analysis Proof of Titchmarsh's Theorem on Convolution, *J. Math Anal. Appl.*, 1962, vol. 5, pp. 176–183.
18. *Dimovski I. Convolutional Calculus*, London, Kluwer, 1990, 184 p.

Received April 24, 2018

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 57–68

УДК 517.955
DOI 10.23671/VNC.2018.3.17991

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Ш. Т. Каримов[1]**, А. К. Уринов**[1]

[1] Ферганский государственный университет,
Узбекистан, 150100, Фергана, ул. Мураббийлар, 19

E-mail:shaxkarimov@gmail.com, urinovak@mail.ru

Аннотация. Исследована видоизмененная задача Коши для четырехмерного уравнения второго порядка гиперболического типа со спектральным параметром и с оператором Бесселя. В уравнении по всем переменным участвует сингулярный дифференциальный оператор Бесселя. Для решения сформулированной задачи, применен обобщенный оператор Эрдейи — Кобера дробного порядка. Доказана формула вычисления производных высокого порядка от обобщенного оператора Эрдейи — Кобера, которая применяется при исследовании сформулированной задачи. Рассматривается также конфлюэнтная гипергеометрическая функция четырех переменных обобщающая функцию Гумберта и доказывается некоторые ее свойства. Принимая во внимание доказанные свойства оператора Эрдейи — Кобера и конфлюэнтной гипергеометрической функции, решение видоизмененной задачи Коши представлено в компактной интегральной форме, которая обобщает формулу Кирхгофа. Полученная формула позволяет непосредственно усмотреть характер зависимости решения от начальных функций и в частности, установить условия гладкости классического решения. В работе также содержится краткое историческое вступление в дифференциальные уравнения с операторами Бесселя.

Ключевые слова: задача Коши, дифференциальный оператор Бесселя, обобщенный оператор Эрдейи — Кобера дробного порядка.

Mathematical Subject Classification (2000): 35L15.

1. Введение. Постановка задачи

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — точка n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$; $\Omega = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, x_k > t > 0, k = 1,\dots,n\}$, $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k > 0, k = 1,\dots,n\}$. Рассмотрим видоизмененную задачу Коши для уравнения

$$L^{\lambda}_{\alpha,\beta}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\beta}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{2\alpha_k}{x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \lambda^2 u = 0, \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = f(x), \quad \lim_{t\to+0} t^{2\beta} u_t(x,t) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — заданные непрерывные функции, а $\alpha_k, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, причем $0 < \alpha_k < 1$, $k = 1,\dots,n$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

Уравнение (1) при различных значениях n, β, λ и α_k, $k = 1, \ldots, n$, возникает во многих классических задачах геометрии, прикладной математики и физики, которые изучаются в течение более чем двух столетий со времен Эйлера. Дифференциальное уравнение с сингулярными коэффициентами при младших членах впервые рассмотрено Эйлером в работе [1] в связи с изучением движения воздуха в трубах разного сечения и колебаний струн переменной толщины, которое заменой переменных сводится к уравнению (1) при $n = 1$, $\beta \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$, $\lambda = 0$. Общее решение аналогичного уравнения, рассмотренное Эйлером, при $n = 1$, $\alpha_1 = \beta$, $\lambda = 0$ нашел Б. Риман [2], построивший решение задачи Коши с помощью вспомогательной функции и методом, который впоследствии был назван его именем. Уравнение (1) при $n = 1$, $\beta \neq 0$, $\alpha_1 = 0$, $\lambda = 0$ позже рассматривал Пуассон [3], найдя для него гиперболический аналог представления решений, называемый представлением Пуассона. В этой работе он также рассмотрел уравнение (1) при $n = 3$, $\beta = 1$, $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, 3$, $\lambda = 0$. Значительно позже уравнение (1) при $n = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\lambda = 0$ и $0 < \beta < 1/2$ встречалось при исследовании вопросов кривизны поверхностей в монографии Г. Дарбу [4], где оно названо уравнением Эйлера — Пуассона. Поэтому впоследствии многие авторы стали называть уравнения вида (1) и их эллиптические аналоги уравнениями Эйлера — Пуассона — Дарбу.

Важный частный случай уравнения (1) при $n = 1$, $\beta = 1/6$, $\alpha_1 = 0$, $\lambda = 0$ является основным объектом исследования работы [5]. Полученные здесь результаты сыграли ключевую роль при изучении краевой задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа $yu_{xx} + u_{yy} = 0$, названного впоследствии уравнением Трикоми. В связи с этим исследованию разных задач для уравнения (1) при $n = 1$ посвящено очень много работ. Кроме того, теория уравнений, по одной из переменных которой действует сингулярный оператор Бесселя

$$B_\eta^{(x)} = x^{-2\eta-1} \frac{d}{dx} x^{2\eta+1} \frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\eta+1}{x} \frac{d}{dx}, \tag{3}$$

тесно связана с теорией вырождающихся уравнений. Значительные результаты по исследованию вырождающихся дифференциальных уравнений и уравнений смешанного типа получены в работах Ф. Трикоми, С. Геллерстедта, Ф. И. Франкля, М. В. Келдыша, К. И. Бабенко, А. В. Бицадзе, О. А. Олейника, В. А. Ильина, Е. И. Моисеева, И. А. Киприянова, М. М. Смирнова, А. М. Нахушева, В. И. Жегалова, С. П. Пулькина, В. Ф. Волкодавова, К. Б. Сабитова, А. И. Кожанова, Т. Ш. Кальменова, М. С. Салохитдинова, Т. Д. Джураева, Н. Р. Раджабова и их учеников и последователей. Более подробную информацию об этом направлении можно найти в монографиях А. В. Бицадзе [6], М. М. Смирнова [7], А. М. Нахушева [8], Р. Кэррола и Р. Шоуолтера [9], М. С. Салохитдинова и М. Мирсабурова [10] и др.

Уравнение (1) в случае, когда сингулярный оператор Бесселя (3) действует по временной переменной ($n > 1$, $\beta \neq 0$, $\alpha_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, $\lambda = 0$), исследовано к настоящему времени достаточно полно. Сюда также следует отнести все работы, связанные с изучением принципа Гюйгенса для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу. Обзор этих исследований можно найти в работах А. Вейнштейна [11], Юнга [12], И. А. Киприянова и Л. А. Иванова [13], С. А. Терсенова [14], С. А. Алдашева [15] и др.

Задача Коши для уравнения (1) в случае, когда сингулярный оператор Бесселя (3) действует по нескольким или всем переменным, исследована мало. Имеется ряд результатов, связанных в основном с изучением наличия принципа Гюйгенса (см. [16–18]).

В данной работе для решения поставленной задачи применен обобщенный оператор интегрирования дробного порядка Эрдейи — Кобера [19]. Применение этого оператора позволяет сводить уравнения со спектральным параметром и с сингулярным оператором Бесселя, который действует по одной или нескольким переменным, к несингулярным уравнениям без спектрального параметра.

В работе [20] при $n > 2$, $\lambda \neq 0$, $\alpha_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, и различных значениях параметра β получены явные формулы решения видоизмененной задачи Коши с применением одномерного обобщенного оператора Эрдейи — Кобера дробного порядка. В работах [21, 22] при $n = 1, 2$, $0 < \beta < 1/2$, $\lambda \neq 0$ и $\alpha_k \neq 0$, $k = 1, 2$, построены явные формулы решения задачи Коши (1), (2) с применением многомерного оператора Эрдейи — Кобера, которые введены и исследованы в работе [23]. Здесь также исследована задача Коши (1), (2) при $n = 3$, $\alpha_k \neq 0$, $k = 1, 2, 3$, $\beta = 0$, $\lambda = 0$. В настоящей работе при $n = 3$, используя обобщенный оператор дробного интегрирования Эрдейи — Кобера, построено в явном виде решение задачи Коши (1), (2), когда в уравнении (1) по всем переменным действует сингулярный оператор Бесселя, т. е. при $\alpha_k \neq 0$, $k = 1, 2, 3$, $\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$.

2. Обобщенный оператор Эрдейи — Кобера и его свойства

В работе [19] был введен и исследован обобщенный оператор Эрдейи — Кобера

$$J_\lambda(\eta, \alpha) f(x) = 2^\alpha \lambda^{1-\alpha} x^{-2\alpha-2\eta} \int\limits_0^x t^{2\eta+1} \left(x^2 - t^2\right)^{(\alpha-1)/2} J_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2 - t^2}\right) f(t)\, dt, \tag{4}$$

где $\eta, \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, причем $\alpha > 0$, $\eta \geqslant -(1/2)$; $J_\nu(z)$ — функция Бесселя порядка ν.

Основные свойства оператора (4), можно найти в работах [19, 24]. Приведем некоторые из этих свойств.

1. Очевидно, что в пределе при $\lambda \to 0$, оператор (4) совпадает с обычным оператором Эрдейи — Кобера

$$I_{\eta,\alpha} f(x) = \frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{\alpha-1} t^{2\eta+1} f(t)\, dt,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

2. Справедливы следующие равенства:

$$J_{i\lambda}(\eta + \alpha, \beta) J_{i\lambda}(\eta, \alpha) = J_\lambda(\eta + \alpha, \beta) J_{i\lambda}(\eta, \alpha) = I_{\eta, \alpha+\beta},$$

где i — мнимая единица, а $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$.

3. Из последнего равенства, воспользовавшись свойством $J_0(\eta, 0) = E$, где E — единичный оператор, можно доопределить оператор $J_\lambda(\eta, \alpha)$ при $\alpha < 0$, следующим образом:

$$J_\lambda(\eta, \alpha) f(x) = x^{-2(\eta+\alpha)} \left(\frac{d}{2x dx}\right)^m x^{2(\eta+\alpha+m)} J_\lambda(\eta, \alpha + m) f(x),$$

где $-m < \alpha < 0$, $m = 1, 2, \dots$

4. Из свойств 2 и 3 вытекают следующие соотношения для обратного оператора:

$$J_{i\lambda}^{-1}(\eta, \alpha) = J_\lambda(\eta + \alpha - \alpha), \quad J_\lambda^{-1}(\eta, \alpha) = J_{i\lambda}(\eta + \alpha - \alpha).$$

Лемма 1 [25]. *Пусть $\alpha > 0$, $f(x) \in C^2(0, b)$, $b > 0$, функция $x^{2\eta+1} f(x)$ интегрируема в окрестности нуля и $x^{2\eta+1} f'(x) \to 0$ при $n \to 0$. Тогда справедливо равенство*

$$\left(B_{\eta+\alpha}^{(x)} + \lambda^2\right) J_\lambda(\eta, \alpha) f(x) = J_\lambda(\eta, \alpha) B_\eta^{(x)} f(x). \tag{5}$$

В дальнейшем нам понадобится следующий вид оператора (4):

$$J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x t^{2\eta+1}\bigl(x^2-t^2\bigr)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)f(t)\,dt, \tag{6}$$

где $\bar{J}_v(z)$ — функция Бесселя — Клиффорда [23]:

$$\bar{J}_v(z)=\Gamma(v+1)(z/2)^{-v}J_v(z)={}_0F_1(\nu+1;-z^2/4)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^2/4)^k}{(\nu+1)_k k!}. \tag{7}$$

Теперь, докажем одно свойство оператора (4), необходимое для дальнейшего исследования. Пусть $D_\eta^0=E$,

$$D_\eta=x^{-2\eta}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)x^{2\eta},\quad D_\eta^m=D_\eta^{m-1}D_\eta,\quad D_\eta^m=x^{-2\eta}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m x^{2\eta}.$$

Теорема 1. *Если $\alpha>0$, $\eta\geqslant-(1/2)$, $f(x)\in C^m(0,b)$, $b>0$, функции $x^{2\eta+1}D_\eta^{k+1}f(x)$ интегрируемы в нуле и $\lim_{x\to0}x^{2\eta}D_\eta^k f(x)=0$, $k=0,\dots,m-1$, то верно равенство*

$$D_{\eta+\alpha}^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)D_\eta^m f(x). \tag{8}$$

$\lhd$ Теорему докажем методом математической индукции по m.

Покажем, что равенство (8) справедливо при $m=1$, т. е., что

$$D_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)D_\eta f(x). \tag{9}$$

Рассмотрим функцию

$$D_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{\varepsilon\to0}F_\varepsilon(x),$$

где ε — достаточно малое положительное действительное число, а

$$F_\varepsilon(x)=\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\int\limits_0^{x-\varepsilon}\bigl(x^2-t^2\bigr)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)t^{2\eta+1}f(t)\,dt.$$

Применяя правило дифференцирования интеграла, получаем

$$\begin{aligned}F_\varepsilon(x)&=\frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{x}(2x-\varepsilon)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\bigl(\lambda\sqrt{\varepsilon(2x-\varepsilon)}\,\bigr)(x-\varepsilon)^{2\eta+1}f(x-\varepsilon)\\&\quad+\int\limits_0^{x-\varepsilon}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left[\bigl(x^2-t^2\bigr)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\right]t^{2\eta+1}f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Далее, учитывая легко проверяемое равенство

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left[\bigl(x^2-t^2\bigr)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\right]=-\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)\left[\bigl(x^2-t^2\bigr)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\right],$$

имеем

$$F_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{x}\,(2x-\varepsilon)^{\alpha-1}\bar J_{\alpha-1}\big(\lambda\sqrt{\varepsilon(2x-\varepsilon)}\,\big)(x-\varepsilon)^{2\eta+1}f(x-\varepsilon)$$
$$-\int\limits_0^{x-\varepsilon}\left(\frac{d}{dt}\right)\left[\left(x^2-t^2\right)^{\alpha-1}\bar J_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\right]t^{2\eta}f(t)\,dt.$$

Применяя к последнему интегралу правило интегрирования по частям и принимая во внимание условие теоремы 1, после приведения подобных членов, получаем

$$F_\varepsilon(x)=\frac{-\varepsilon^{\alpha}}{x(x-\varepsilon)}\,(2x-\varepsilon)^{\alpha-1}\bar J_{\alpha-1}\big(\lambda\sqrt{\varepsilon(2x-\varepsilon)}\,\big)(x-\varepsilon)^{2\eta+1}f(x-\varepsilon)$$
$$+\int\limits_0^{x-\varepsilon}\left[\left(x^2-t^2\right)^{\alpha-1}\bar J_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\right]t^{2\eta+1}D_\eta f(t)\,dt.$$

Отсюда в силу $\alpha>0$ при $\varepsilon\to0$ получим равенство (9).

Предположим, что равенство (8) справедливо при $m=k$. Докажем, что оно верно и при $m=k+1$. С этой целью рассмотрим левую часть равенства (8) при $m=k+1$:

$$D^{k+1}_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=D_{\eta+\alpha}D^{k}_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x).$$

По предположению индукции при выполнении условий теоремы 1

$$D_{\eta+\alpha}D^{k}_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=D_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)D^{k}_{\eta}f(x).$$

В правой части последнего равенства, применяя формулу (9) к функциям $D^k_\eta f(x)$, получим

$$D^{k+1}_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)D^{k+1}_{\eta}f(x).\ \triangleright$$

Следствие 1. *Пусть $\eta=0$, $\alpha>0$, $f(x)\in C^m(0,b)$, $b>0$, функции $\frac{d}{dx}\big(\frac1x\frac{d}{dx}\big)^kf(x)$ интегрируемы в нуле и $\lim_{x\to0}\big(\frac1x\frac{d}{dx}\big)^kf(x)=0$, $k=0,\dots,m-1$. Тогда*

$$\left(\frac1x\,\frac{d}{dx}\right)^m\int\limits_0^x\left(x^2-t^2\right)^{\alpha-1}\bar J_{\alpha-1}\big(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\,\big)f(t)t\,dt$$
$$=\int\limits_0^x\left(x^2-t^2\right)^{\alpha-1}\bar J_{\alpha-1}\big(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\,\big)\left[\left(\frac1t\,\frac{d}{dt}\right)^m f(t)\right]t\,dt. \qquad (10)$$

3. Приложение оператора Эрдейи — Кобера к решению задачи (1), (2)

Пусть $n=3$. Сначала рассмотрим задачу нахождения классического решения уравнения

$$L^\lambda_{\alpha,\beta}(u)\equiv\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{2\beta}{t}\,\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}+\frac{2\alpha_k}{x_k}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\lambda^2u=0,\quad (x,t)\in\Omega, \qquad (1')$$

удовлетворяющего полуоднородным начальным условиям

$$u_1(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0)=0, \quad x\in\mathbb{R}^3_+. \tag{11}$$

Предположим, что решение этой задачи существует. Это решение ищем в виде

$$u_1(x,t)=J_\lambda^{(t)}(-1/2,\beta)\,U(x,t), \tag{12}$$

где $U(x,t)$ — неизвестная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, верхний индекс t в операторе означает переменную, по которой действует этот оператор.

Подставим (12) в уравнение ($1'$) и начальные условия (11), а затем, используя лемму 1, получим задачу нахождения решения $U(x,t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2}+\frac{2\alpha_k}{x_k}\frac{\partial U}{\partial x_k}\right)=0, \tag{13}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$U(x,0)=k_0 f(x), \quad x\in\mathbb{R}^3_+, \qquad U_t(x,0)=0, \quad x\in\mathbb{R}^3_+, \tag{14}$$

где $k_0=\Gamma[\beta+(1/2)]/\sqrt{\pi}$.

Решение задачи (13), (14) имеет вид [23]

$$U(x,t)=\frac{k_0 t}{4\pi}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 U_0(x,t), \tag{15}$$

где

$$U_0(x,t)=\iiint\limits_{|\xi-x|<t} f(\xi)R(\xi;x,t;\alpha)\,d\xi, \tag{16}$$

$$R(\xi;x,t;\alpha)=\prod_{k=1}^{3}\left(\frac{\xi_k}{x_k}\right)^{\alpha_k} F_B^{(3)}(\alpha_1,\alpha_2,a_3;1-\alpha_1,1-\alpha_2,1-a_3;1;\omega_1,\omega_2,\omega_3), \tag{17}$$

$F_B^{(3)}(\alpha_1,\alpha_2,a_3;1-\alpha_1,1-\alpha_2,1-a_3;1;\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ — гипергеометрическая функция Лауричеллы трех переменных [26] $\omega_k=[t^2-r^2]/(4\xi_k x_k)$, $r^2=|\xi-x|^2=\sum_{k=1}^{3}(\xi_k-x_k)^2$, причем $0\leqslant\omega_k<(1/2)$, $k=1,2,3$.

Переходя в равенстве (16) к сферическим координатам $\xi=x+\rho z$, где $\xi_k=x_k+\rho z_k$, $k=1,2,3$, $z_1=\sin\theta\cos\varphi$, $z_2=\sin\theta\sin\varphi$, $z_3=\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0<\rho<t$, можно показать, что

$$U_0(x,0)=0, \quad \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)U_0(x,t)=0. \tag{18}$$

Действительно, в сферических координатах равенство (16) примет вид

$$U_0(x,t)=\int_0^t \rho^2 F(x,t;\rho)\,d\rho=t^3\int_0^1 \mu^2 F(x,t;\mu t)\,d\mu, \tag{19}$$

где

$$F(x,t;\rho)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+\rho z)R(x+\rho z;x,t;\alpha)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

функция $R(\xi;x,t;\alpha)$ определяется равенством (17), в котором $\xi=x+\rho z$.

Учитывая, что при $t \to 0$, также $\rho \to 0$ и $R(x;x,0;\alpha) = 1$, $F(x,0;0) = 4\pi f(x)$, из (19) имеем $U_0(x,0) = 0$. Аналогично, учитывая

$$\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right) F(x,t,\mu t)\Big|_{t=0} = 4\pi f(x)\sum_{k=1}^{3}\frac{\alpha_k(1-\alpha_k)}{2x_k^2},$$

$$\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right) U_0(x,t) = 3t\int_0^1 \mu^2 F(x,t,\mu t)\,d\mu + t^2\int_0^1 \mu^2\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right) F(x,t,\mu t)\,d\mu,$$

при $t \to 0$ имеем $\lim_{t\to 0}(\partial/(t\partial t))U_0(x,t) = 0$.

Подставив (15) в (12), получим

$$u_1(x,t) = \frac{k_0 t^{1-2\beta}}{2\pi\,\Gamma(\beta)}\int_0^t \frac{\bar{J}_{\beta-1}\big(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\,\big)}{(t^2-s^2)^{1-\beta}}\left[\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 U_0(x,s)\right] s\,ds. \tag{20}$$

В силу (18) функция $U_0(x,t)$ удовлетворяет условиям следствия 1. Тогда, применяя формулу (10) к равенству (20), получаем

$$u_1(x,t) = \frac{k_0 t^{1-2\beta}}{2\pi\Gamma(\beta)}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\int_0^t \frac{\bar{J}_{\beta-1}\big(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\,\big)}{(t^2-s^2)^{1-\beta}}\,U_0(x,s)s\,ds. \tag{21}$$

Подставляя значение функции $U_0(x,s)$ из (16) в равенство (21) и меняя порядок интегрирования, имеем

$$u_1(x,t)=\frac{k_0 t^{1-2\beta}}{2\pi\Gamma(\beta)}\prod_{k=1}^{3}\left[x_k^{-\alpha_k}\right]\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\int_{x_1-t}^{x_1+t}\xi_1^{\alpha_1}\,d\xi_1\int_{x_1-r_1}^{x_1+r_1}\xi_2^{\alpha_2}\,d\xi_2\int_{x_1-r_2}^{x_1+r_2}\xi_3^{\alpha_3}f(\xi)q(x,t;\xi)\,d\xi_3, \tag{22}$$

где

$$r_1 = \sqrt{t^2-(\xi_1-x_1)^2},\quad r_2 = \sqrt{t^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2},$$

$$q(x,t;\xi) = \int_r^t \frac{\bar{J}_{\beta-1}\big(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\,\big)}{(t^2-s^2)^{1-\beta}}\,F_B^{(3)}(\alpha_1,\alpha_2,a_3;1-\alpha_1,1-\alpha_2,1-a_3;1;\omega_1,\omega_2,\omega_3)s\,ds, \tag{23}$$

$$r = |\xi - x|\,,\quad \omega_k = \frac{s^2-r^2}{4\xi_k x_k},\quad k=1,2,3.$$

Для вычисления интеграла (23) выполним замену переменных по формуле $z = (s^2-r^2)/(t^2-r^2)$. Затем, принимая во внимание разложение функции Бесселя — Клиффорда в ряд (7) и учитывая равномерную сходимость данного ряда при любых значениях аргумента, меняем порядок интегрирования и суммирования:

$$q(x,t;\xi) = \frac{1}{2}\left(t^2-r^2\right)^{\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma_4^k}{(\beta)_k k!}$$
$$\times\int_0^1 (1-z)^{\beta+k-1}F_B^{(3)}(\alpha_1,\alpha_2,a_3;1-\alpha_1,1-\alpha_2,1-a_3;1;\sigma_1 z,\sigma_2 z,\sigma_3 z)\,dz, \tag{24}$$

где $\sigma_k = [t^2-r^2]/(4\xi_k x_k)$, $0 \leqslant \sigma_k < (1/2)$, $k=1,2,3$, $\sigma_4 = (-\lambda^2/4)[t^2-r^2]$.

Лемма 2. *Пусть $c > d > 0$, $|x_k| < 1$, $k = 1, \dots, n$. Тогда справедливо равенство*

$$\int_0^1 z^{d-1}(1-z)^{c-d-1} F_B^{(n)}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; d; x_1 z, \dots, x_n z)\, dz$$
$$= \frac{\Gamma(d)\Gamma(c-d)}{\Gamma(c)} F_B^{(n)}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; c; x_1, \dots, x_n),$$

где $F_B^{(n)}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; c; x_1, \dots, x_n)$ — гипергеометрическая функция Лауричеллы n переменных [26].

Эту лемму можно доказать, пользуясь разложением гипергеометрической функции Лауричеллы n переменных в ряд и определением гамма- и бета-функций Эйлера.

Применяя к (24) лемму 2 при $n = 3$, получаем

$$q(x, t; \xi) = \frac{1}{2\beta} \left(t^2 - r^2\right)^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_4^k}{(\beta+1)_k k!}$$
$$\times F_B^{(3)}(\alpha_1, \alpha_2, a_3; 1-\alpha_1, 1-\alpha_2, 1-a_3; \beta+k+1; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \tag{25}$$

При $n > 1$ введем обозначение

$$\Xi_2^{(n)}(a_1, \dots, a_{n-1}; b_1, \dots, b_{n-1}; c; z_1, z_2, \dots, z_n)$$
$$= \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{z_n^{k_n}}{(c)_{k_n} k_n!} F_B^{(n-1)}(a_1, \dots, a_{n-1}; b_1, \dots, b_{n-1}; c+k_n; z_1, \dots, z_{n-1})$$
$$= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{k_1} \dots (a_{n-1})_{k_{n-1}} (b_1)_{k_1} \dots (b_{n-1})_{k_{n-1}}}{(c)_{k_1+k_2+\dots+k_n} k_1! k_2! \dots k_n!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}. \tag{26}$$

Рассматриваемый гипергеометрический ряд сходится при $|z_k| < 1$, $k = 1, \dots, n-1$, $|z_n| < \infty$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$, и при $n = 2$ он совпадает с функцией Горна [26] $\Xi_2(a_1, b_1; c; z_1, z_2) = \Xi_2^{(2)}(a_1, b_1; c; z_1, z_2)$, а при $n = 3$ — с вырожденной гипергеометрической функцией трех переменных [27] ${}_3\Phi_B^{(5)}(a_1, a_2, b_1, b_2, c; z_1, z_2, z_3) = \Xi_2^{(3)}(a_1, a_2; b_1, b_2; c; z_1, z_2, z_3)$.

Учитывая введенное обозначение и полагая $\Xi_2^{(4)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; 1-\alpha_1, 1-\alpha_2, 1-\alpha_3; 1+\beta; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = \Xi_2^{(4)}(\alpha; 1-\alpha; 1+\beta; \sigma)$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $1-\alpha = (1-\alpha_1, 1-\alpha_2, 1-\alpha_3)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ из (23), получаем

$$q(x, t; \xi) = \frac{1}{2\beta} \left(t^2 - r^2\right)^\beta \Xi_2^{(4)}(\alpha; 1-\alpha; 1+\beta; \sigma). \tag{27}$$

Подставляя (27) в (22), имеем

$$u_1(x, t) = \frac{k_0 t^{1-2\beta} x^{-\alpha}}{4\pi\beta\Gamma(\beta)} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \iiint\limits_{|\xi - x| < t} \xi^\alpha f(\xi) \left(t^2 - r^2\right)^\beta \Xi_2^{(4)}(\alpha; 1-\alpha; 1+\beta; \sigma)\, d\xi, \tag{28}$$

где $x^{-\alpha} = x_1^{-\alpha_1} x_2^{-\alpha_2} x_3^{-\alpha_3}$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \xi_3^{\alpha_3}$, $\sigma_k = [t^2 - |\xi - x|^2]/(4\xi_k, x_k)$, $\sigma_4 = -(\lambda^2/4)[t^2 - |\xi - x|^2]$, причем $0 \leqslant \sigma_k < (1/2)$, $k = 1, 2, 3$.

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Если функции* z_k, $k=1,\dots,n$, *не зависят от* x *и* $|z_k x|<1$, $k=1,\dots,n-1$, $c\neq 1,0,-1,-2,\dots$, *то имеет место равенство*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^{c-1}\,\Xi_2^{(n)}(a_1,\dots,a_{n-1};b_1,\dots,b_{n-1};c;z_1x,z_2x,\dots,z_nx)\right]$$
$$=(c-1)x^{c-2}\,\Xi_2^{(n)}(a_1,\dots,a_{n-1};b_1,\dots,b_{n-1};c-1;z_1x,z_2x,\dots,z_nx).$$

$\lhd$ Лемма 3 легко доказывается с применением следующих формул:

$$\Xi_2^{(n)}(a_1,\dots,a_{n-1};b_1,\dots,b_{n-1};c;z_1,z_2,\dots,z_n)$$
$$=\sum_{k_1,k_2,\dots,k_{n-1}=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{k_1}\dots(a_{n-1})_{k_{n-1}}(b_1)_{k_1}\dots(b_{n-1})_{k_{n-1}}}{(c)_{k_1+k_2+\dots+k_{n-1}}k_1!k_2!\dots k_{n-1}!}$$
$$\times z_1^{k_1}z_2^{k_2}\dots z_{n-1}^{k_{n-1}}\bar{I}_{c+k_1+k_2+\dots+k_{n-1}-1}(2\sqrt{z_n}\,),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{c+p-1}\bar{I}_{c+p-1}(2\sqrt{z_nx}\,)\right]=(c+p-1)x^{c+p-2}\bar{I}_{c+p-2}(2\sqrt{z_nx}\,),\qquad \frac{c+p-1}{(c)_p}=\frac{c-1}{(c-1)_p},$$

где $p=k_1+k_2+\dots+k_{n-1}$, $\bar{I}_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}I_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесслея. $\rhd$

Переходя к сферическим координатам в равенстве (28) и вычислив производную с учетом леммы 3, получаем окончательный вид решения $u_1(x,t)$:

$$u_1(x,t)=\gamma_1 t^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\iiint\limits_{|\xi-x|<t}f(\xi)R_\lambda(\xi,x,t;\alpha,\beta)\,d\xi,\tag{29}$$

где

$$\gamma_1=2^{2-2\beta}\frac{\Gamma(2\beta)}{4\pi\Gamma^2(\beta)},\qquad R_\lambda(\xi,x,t;\alpha,\beta)=\left(\frac{\xi}{x}\right)^{\alpha}\left(t^2-r^2\right)^{\beta-1}\Xi_2^{(4)}(\alpha;1-\alpha;\beta;\sigma).$$

Теперь рассмотрим задачу нахождения классического решения уравнения (1′), удовлетворяющего полуоднородным начальным условиям

$$u(x,0)=0,\qquad \lim_{t\to+0}t^{2\beta}u_t(x,t)=g(x),\qquad x\in\mathbb{R}^3_+.\tag{30}$$

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что если $u_1=u_1(x,t,1-\beta)$ есть решение уравнения $L^\lambda_{\alpha,1-\beta}(u_1)=0$, удовлетворяющее условиям (11), то функция $u_2(x,t)=t^{1-2\beta}u_1(x,t,1-\beta)$ при $0<\beta<(1/2)$ будет решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям $u_2(x,0)=0$, $\lim_{t\to+0}t^{2\beta}u_{2t}(x,t)=(1-2\beta)f(x)$, $x\in\mathbb{R}^3_+$.

Учитывая это свойство и заменяя $(1-2\beta)f(x)$ на $g(x)$, из равенства (29) получаем

$$u_2(x,t)=\gamma_2\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\iiint\limits_{|\xi-x|<t}g(\xi)R_\lambda(\xi,x,t;\alpha,1-\beta)\,d\xi,\tag{31}$$

где $\gamma_2=2^{2\beta}\Gamma(2-2\beta)/[4\pi\Gamma^2(1-\beta)]$.

Таким образом, в силу формул (28), (31) и принципа линейной суперпозиции решение задачи (1), (2) при $n = 3$ имеет вид

$$u(x,t) = \gamma_1 t^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right) \iiint\limits_{|\xi - x| < t} f(\xi) R_\lambda(\xi, x, t; \alpha, \beta)\, d\xi + \gamma_2 \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right) \iiint\limits_{|\xi - x| < t} g(\xi) R_\lambda(\xi, x, t; \alpha, 1-\beta)\, d\xi. \tag{32}$$

Установленная формула (32) позволяет указать точную степень гладкости начальных функций, при этом справедлива

Теорема 2. *Пусть* $f(x), g(x) \in C^3(\mathbb{R}^3_+)$. *Тогда формула* (32) *определяет классическое решение задачи* (1), (2) *при* $n = 3$.

Литература

1. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление.—М.: ГИФМЛ, 1958.—Т. 3.—447 с.
2. *Reimann B.* Vercuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentiation // Ges. Math. Werke.—Leipzing: Teubner, 1876.—P. 331–334.
3. *Poisson S. D.* Memoire sur L'integration des equations lineaires aux differences partielles // J. l'Ecole Rog. Politechn.—1823.—№ 12.—P. 215–248.
4. *Darboux G.* Lecons sur la Theorie Generale des Surfaces et les Applications Geometriques du Calcul Infinitesimal. Vol. 2.—Paris: Gauthier-Villars, 1915.
5. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях смешанного типа.—М.–Л.: Гостезиздат, 1947.—192 с.
6. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных.—М.: Наука, 1981.—448 с.
7. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения.—М.: Наука, 1966.—292 с.
8. *Нахушев А. М.* Задачи со смещеним для уравнений в частных производных.—М.: Наука, 2007.—287 с.
9. *Carroll R. W., Showalter R. E.* Singular and Degenerate Cauchy Problems.—N. Y.: Academic Press, 1976.—333 p.
10. *Салохитдинов М. С., Мирсабурова М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.—Ташкент: Университет, 2005.—224 с.
11. *Weinstein A.* On the wave equation and the equation of Euler-Poisson // Wave Motion and Vibration Theory. Proc. Sympos. Appl. Math.—N. Y. : McGraw-Hill, 1954.—Vol. 5.—P. 137–147.
12. *Young E. C.* On a generalized Euler–Poisson–Darboux equation // J. Math. Mech.—1969.—Vol. 18, № 12.—P. 1167–1175.
13. *Киприянов И. А., Иванов. Л. А.* Задача Коши для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу в симметрическом пространстве // Мат. сб.—1984.—Т. 124 (166), № 1 (5).—С. 45–55.
14. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе.—Новосибирск, 1973.—144 с.
15. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений.—Алматы: Изд-во «Гылым», 1994.—168 с.
16. *Ибрагимов Н. Х., Оганесян А. О.* Иерархия гюйгенсовых уравнений в пространствах с нетривиальной конформной группой // Успехи мат. наук.—1991.—Т. 36, вып. 3 (279).—С. 111–146.
17. *Fox D. W.* The solution and Huygens' principle for a singular Cauchy problem // J. Math. Mech.—1959.—Vol. 8.—P. 197–220.
18. *Ляхов Л. Н., Половинкин И. П., Шишкина Э. Л.* Формулы решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения с оператором Бесселя по времени // Д окл. РАН.—2014.—Т. 459, № 5.—С. 533–538.
19. *Lowndes J. S.* A generalization of the Erdélyi–Kober operators // Proc. Edinb. Math. Soc.—1970.—Vol. 17, № 2.—P. 139–148.
20. *Urinov A. K., Karimov S. T.* Solution of the cauchy problem for generalized Euler–Poisson–Darboux equation by the method of fractional integrals // Progress in Partial Differential Equations.—Springer Intern. Publ., 2013.—P. 321–337. DOI: 10.1007/978-3-319-00125-8_15.

21. *Каримов Ш. Т.* Об одном методе решения задачи Коши для обобщенного уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу // Узб. мат. журн.—2013.—№ 3.—С. 57–69.
22. *Каримов Ш. Т.* Решение задачи Коши для многомерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами методом дробных интегралов // Докл. АН РУз.—2013.—№ 1.—С. 11–13.
23. *Karimov Sh. T.* Multidimensional generalized Erdélyi–Kober operator and its application to solving Cauchy problems for differential equations with singular coefficients // Fract. Calc. Appl. Anal.—2015.—Vol. 18, № 4.—P. 845–861.
24. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—702 с.
25. *Lowndes J. S.* An application of some fractional integrals // Glasgow Math. J.—1979.—Vol. 20.—P. 35–41.
26. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды: Специальные функции.—М.: Наука, 1988.—752 с.
27. *Jain R. N.* The confluent hypergeometric functions of three variables // Proc. Nat. Acad. Sci. India.—1966.—Vol. A36, № 2.—P. 395–408.

Статья поступила 12 февраля 2017 г.

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 57–68

SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE FOUR-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION WITH BESSEL OPERATOR

Karimov Sh. T.[1], Urinoiv A. K.[1]

[1] Fergana State University, 19 Murabbiylar st., Fergana 150100, Uzbekistan
E-mail: shaxkarimov@gmail.com, urinovak@mail.ru

Abstract. The modified Cauchy problem is investigated for a four-dimensional second order equation of hyperbolic type with spectral parameter and with the Bessel operator. The equation contains a singular differential Bessel operator on all variables. To solve the formulated problem, a generalized Erdélyi–Kober fractional order operator is applied. To solve the problem, a generalized Erdélyi–Kober fractional order operator is applied. A formula is obtained for calculating the high order derivatives of the generalized operator Erdélyi–Kober, that is then used in the study of the problem. We also consider the confluent hypergeometric function of four variables, which generalizes the Humbert function; some properties of this function are proved. Taking into account the proven properties of the Erdélyi–Kober operator and the confluent hypergeometric function, the solution of the modified Cauchy problem is presented in a compact integral form that generalizes the Kirchhoff formula. The obtained formula allows us to see directly the nature of the dependence of the solution on the initial functions and, in particular, to establish the smoothness conditions for the classical solution. The paper also contains a brief historical introduction to differential equations with Bessel operators.

Key words: Cauchy problem, Bessel differential operator, generalized Erdélyi–Kober operator of fractional order.

Mathematical Subject Classification (2000): 35L15.

References

1. *Eejler L. Integral'noe ischislenie* [Integral Calculus], Moscow, GIFML, 1958, vol. 3, 447 p.
2. *Reimann B.* Vercuch Einer Allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation, *Gessammelte Mathematische Werke*, Leipzing, Teubner, 1876, pp. 331–334.
3. *Poisson S. D.* Memoire sur L'integration des equations Lineaires aux Differences Partielles, *J. l'Ecole Rog. Politechn.*, 1823, no. 12, pp. 215–248.
4. *Darboux G.* Lecons sur la Theorie Generale des Surfaces et les Applications Geometriques du Calcul Infinitesimal, vol. 2, Paris, Gauthier-Villars, 1915.

5. *Trikomi F. O linejnyh uravnenijah smeshannogo tipa* [On Linear Equations of Mixed Type], Moscow–Leningrad, Gostezizdat, 1947, 192 p.
6. *Bitcadze A. V. Nekotorye klassy uravnenij v chastnyh proizvodnyh* [Some Classes of Partial Differential Equations], Moscow, Nauka, 1981, 448 p.
7. *Smirnov M. M. Vyrozhdajushhiesja jellipticheskie i giperbolicheskie uravnenija* [Degenerate Elliptic and Hyperbolic Equations], Moscow, Nauka, 1966, 292 p.
8. *Nahushev A. M.* Zadachi so smeshhenim dlja uravnenij v chastnyh proizvodnyh [*Displacement Problems for Partial Differential Equations*], Moscow, Nauka, 2007, 287 p.
9. *Carroll R. W., Showalter R. E. Singular and Degenerate Cauchy Problems*, New York, Academic Press, 1976, 333 p.
10. *Salohitdinov M. S., Mirsaburov M. Nelokal'nie zadachi dlja uravnenij smeshannogo tipa s singuljarnymi kojefficientami* [Nonlocal Problems for Mixed-Type Equations with Singular Coefficients], Toshkent, Universitet, 2005, 224 p.
11. *Weinstein A.* On the wave equation and the equation of Euler-Poisson, *Wave motion and vibration theory. Proc. Sympos. Appl. Math.*, New York, McGraw-Hill, 1954, vol. 5, pp. 137–147.
12. *Young E. C.* On a Generalized Euler–Poisson–Darboux Equation, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1969, vol. 18, no. 12, pp. 1167–1175.
13. *Kipriyanov I. A., Ivanov L. A.* The Cauchy Problem for the Euler–Poisson–Darboux Equation in a Symmetric Space, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1985, vol. 52, no. 1, pp. 41–51.
14. *Tersenov S. A. Vvedenie v teoriju uravnenij, vyrozhdajushhihsja na granice* [Introduction to the Theory of Equations Degenerating at the Boundary], Novosibirsk, 1973, 144 p.
15. *Aldashev S. A. Kraevye zadachi dlja mnogomernyh giperbolicheskih i smeshannyh uravnenij* [Boundary Value Problems for Multidimensional Hyperbolic and Mixed Equations], Almaty, Izd-vo «Gylym», 1994, 168 p.
16. *Ibragimov N. Kh., Oganesyan A. O.* The hierarchy of Huygens Equations in Spaces with a Non-Trivial Conformal Group, *Russian Math. Surveys*, 1991, vol. 46, no. 3, pp. 137–176.
17. *Fox D. W.* The Solution and Huygens' Principle for a Singular Cauchy Problem, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1959, vol. 8, pp. 197–220.
18. *Lyakhov L. N., Polovinkin I. P., Shishkina E. L.* Formulas for the Solution of the Cauchy Problem for a Singular Wave Equation with Bessel Time Operator, *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 90, no. 3, pp. 737–742.
19. *Lowndes J. S.* A Generalization of the Erdélyi–Kober Operators, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1970, vol. 17, no. 2, pp. 139–148.
20. *Urinov A. K., Karimov S. T.* Solution of the Cauchy Problem for Generalized Euler-Poisson-Darboux Equation by the Method of Fractional Integrals, *Progress in Partial Differential Equations*, Springer, Heidelberg, 2013, vol. 44, pp. 321–337. DOI: 10.1007/978-3-319-00125-8_15.
21. *Karimov Sh. T.* Ob odnom metode reshenija zadachi Koshi dlja obobshhennogo uravnenija Jejlera–Puassona–Darbu, *Uzbekskij matematicheskij zhurnal*, 2013, no. 3, pp. 57–69 (in Russian).
22. *Karimov Sh. T.* Reshenie zadachi Koshi dlja mnogomernogo giperbolicheskogo uravnenija s singuljarnymi kojefficientami metodom drobnyh integralov, *Doklady AN RUz*, 2013, no. 1, pp. 11–13.
23. *Karimov Sh. T.* Multidimensional Generalized Erdélyi–Kober Operator and its Application to Solving Cauchy Problems for Differential Equations with Singular Coefficients, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2015, vol. 18, no. 4, pp. 845–861. DOI: 10.1515/fca-2015-0051.
24. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo porjadka i ih prilozhenija* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Their Applications], Minsk, Nauka i tehnika, 1987, 702 p. (in Russian).
25. *Lowndes J. S.* An Application of Some Fractional Integrals, *Glasgow Mathematical Journal*, 1979, vol. 20, pp. 35–41.
26. *Prudnikov A. P., Brychkov Ju. A., Marichev O. I. Integraly i rjady: Special'nye funkcii* [Integrals and series: Special functions], Moscow, Nauka, 1988, 752 p.
27. *Jain R. N.* The confluent hypergeometric functions of three variables, *Proceedings of the National Academy of Sciences India*, 1966, vol. A36, no. 2, pp. 395–408.

Received February 12, 2017

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 69–77

УДК 517.977
DOI 10.23671/VNC.2018.3.17992

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. А. Кыров[1]

[1] Горно-Алтайский государственный университет,
Россия, 649000, Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1

E-mail: kyrovVA@yandex.ru

Аннотация. $(n+1)$-мерная геометрия локальной максимальной подвижности задается некоторой невырожденной и дифференцируемой функцией пары точек f на многообразии M, являющимся инвариантом группы движений размерности $(n+1)(n+2)/2$. Полной классификации таких геометрий размерности $n+1$ пока нет, но хорошо известны отдельные примеры: гоеметрия евклида, симплектическая геометрия, геометрии постоянной кривизны. В последнее время методом вложения были найдены некоторые ранее неизвестные геометрии локальной максимальной подвижности. Метод вложения дает возможность нахождения функций f, задающих $(n+1)$-мерные геометрии локальной максимальной подвижности, по функциям θ известных n-мерных геометрией локальной максимальной подвижности. Эта задача сводится к решению функциональных уравнений специального вида, являющихся следствием инвариантности функции пары точек f относительно группы движений. Такие уравнения решаются в данной работе. Дифференцированием они сводятся сначала к функционально-дифференциальным уравнениям, от которых разделением переменных переходим к дифференциальным уравнениям. Затем решения последних уравнений подставляем в исходные функциональные уравнения, после чего получаем окончательный результат.

Ключевые слова: функциональное уравнение, функционально-дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение.

Mathematical Subject Classification (2000): 39b62.

Введение

На примере хорошо известного функционального уравнения Коши проиллюстрируем метод решения:

$$g(u+v) = g(u) + g(v),$$

где g — функция класса C^1, u и v — независимые переменные. Это уравнение сначала дифференцируем по переменным u и v: $g'(u+v) = g'(u)$, $g'(u+v) = g'(v)$. Далее вычитаем из первого уравнения второе и разделяем переменные: $g'(u) = g'(v) = a = \mathrm{const}$. Затем интегрируем и результат подставляем в исходное уравнение, после чего записываем ответ: $g(u) = au$. Таким способом в данной работе решаются функциональные уравнения, появляющиеся при классификации геометрий локальной максимальной подвижности методом вложения [1–3].

Под $(n+1)$-мерной геометрией локальной максимальной подвижности понимается геометрия многообразия M, задаваемая некоторой невырожденной и достаточно дифференцируемой функцией $f : M \times M \to \mathbb{R}$ (не обязательно метрикой), являющаяся инвариантом группы движений размерности $(n+1)(n+2)/2$. Суть метода вложения состоит в поиске функций f, задающих $(n+1)$-мерные геометрии локальной максимальной подвижности, по функциям θ ранее известных n-мерных геометрией локальной максимальной подвижности, причем функция f ищется в виде

$$f(x,y) = \psi\bigl(\theta(x,y), x^{n+1}, y^{n+1}\bigr), \tag{0.1}$$

где $\theta(x,y) = \theta(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^n)$, а $(x^1,\dots,x^n,x^{n+1})$ и $(y^1,\dots,y^n,y^{n+1})$ — координаты точек x и y соответственно. Записывая условие локальной инвариантности функции f относительно группы движений [4], получаем функциональное уравнение

$$\sum_{k=1}^{n}\left(X_k(x)\frac{\partial\theta}{\partial x^k} + X_k(y)\frac{\partial\theta}{\partial y^k}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + X_{n+1}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x^{n+1}} + X_{n+1}(y)\frac{\partial\psi}{\partial y^{n+1}} = 0. \tag{0.2}$$

В данной работе рассматриваются наиболее важные частные случаи, когда последние аргументы в функции (0.1) представляются в виде комбинаций $w = x^{n+1} - y^{n+1}$ и $z = x^{n+1} + y^{n+1}$. Тогда уравнение (0.2) сводится к (1.8) и (1.9), от которых приходим к (1.10) и (1.11). Результаты, получаемые в этой статье, будут использоваться при нахождении геометрий локальной максимальной подвижности методом вложения.

Выше сформулированная задача решалась в работах [1–3]:

$$\theta(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\bigl(x^k - y^k\bigr)^2, \quad \varepsilon_k = \pm 1,$$

$$\theta(x,y) = x^1y^2 - x^2y^1 \quad (\text{см. в [2]}),$$

$$\theta(x,y) = \bigl[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\bigr]\, e^{2\,\gamma\,\mathrm{arctg}\frac{x_2-y_2}{x_1-y_1}},$$

$$\theta(x,y) = \bigl[(x_1-y_1)^2 - (x_2-y_2)^2\bigr]\, e^{2\,\beta \mathrm{Ar(c)\,th}\frac{x_2-y_2}{x_1-y_1}},$$

$$\theta(x,y) = (x_1-y_1)^2\, e^{2\,\frac{x_2-y_2}{x_1-y_1}} \quad (\text{см. в [3]}).$$

Уравнения (1.10) и (1.11) также решались в работе [5], в которой

$$\theta(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x^k y^k, \quad \varepsilon_k = \pm 1.$$

Заметим, что задачу вложения можно также решать и аналитически, т. е. искать решение уравнения (0.2) в виде рядов Тейлора [6, 7].

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим дифференцируемую класса C^4 функцию $f : S_f \to \mathbb{R}$, где $S_f \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ — открытая и плотная область определения. Пусть $U_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — некоторая координатная окрестность, $x, y \in U_0$, причем $\langle x,y\rangle \in S_f$. Рассмотрим окрестности точек x и y: $U(x) \subset U_0$ и $U(y) \subset U_0$, причем $\langle x',y'\rangle \in S_f$ для любых x', y', $x' \in U(x)$, $y' \in U(y)$. Обозначим через $U(\langle x,y\rangle) \subset \mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}$ некоторую окрестность пары $\langle x,y\rangle$: $U(\langle x,y\rangle) \subset U(x)\times U(y)$, в которой функция f имеет один из следующих видов:

$$f(x,y) = \sigma\left(\theta(x,y), w\right), \tag{1.1}$$

$$f(x,y) = \varkappa\left(\theta(x,y), z\right), \tag{1.2}$$

где θ, σ, $\varkappa$ — функции класса C^4 в этой окрестности, $\theta(x,y) = \theta(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^n)$, $(x^1,\dots,x^n,x^{n+1})$, $(y^1,\dots,y^n,y^{n+1})$ — координаты точек x и y соответственно, $w = x^{n+1} - y^{n+1}$, $z = x^{n+1} + y^{n+1}$. Дополнительно потребуем, чтобы в произвольной системе координат в U_0 и в любой точке из $U(\langle x,y\rangle)$ выполнялись неравенства [5]:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x^i} \neq 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y^i} \neq 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} \neq 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial w} \neq 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta} \neq 0, \quad \frac{\partial\varkappa}{\partial z} \neq 0. \tag{1.5}$$

Эти требования являются необходимыми при определении геометрии локальной максимальной подвижности. Если они не выполняются, то задача вложения для геометрии локальной максимальной подвижности, о которой кратко говорилось во введении, не имеет решения.

Также будем предполагать, что функция f — двухточечный инвариант действия некоторой группы Ли в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ [6]. Множество таких действий задает группу Ли преобразований пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Произвольный оператор алгебры Ли этой группы преобразований в окрестности $U(x)$ имеет вид [8]

$$X = X_1\partial_{x^1} + \dots + X_n\partial_{x^n} + X_{n+1}\partial_{x^{n+1}}, \tag{1.6}$$

где $X_s = X_s(x^1,\dots,x^n,x^{n+1})$ — функции класса C^3 в окрестности $U(x) \subset U_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $s = 1,\dots,n+1$. Через операторы записывается критерий локальной инвариантности [4]:

$$X(x)f(x,y) + X(y)f(x,y) = 0. \tag{1.7}$$

Равенство (1.7) расписываем для функций (1.1) и (1.2), после простых преобразований получаем

$$[X] = (X_{n+1}(x) - X_{n+1}(y))\varphi(\theta,w), \tag{1.8}$$

$$[X] = (X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y))\lambda(\theta,z), \tag{1.9}$$

где введено сокращающее обозначение:

$$[X] = \sum_{k=1}^{n}\left(X_k(x)\frac{\partial\theta}{\partial x^k} + X_k(y)\frac{\partial\theta}{\partial y^k}\right),$$

причем $\varphi(\theta,w) = -\frac{\partial\sigma}{\partial w}/\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}$ и $\lambda(\theta,z) = -\frac{\partial\varkappa}{\partial z}/\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta}$ — функции класса C^3 в $U(\langle x,y\rangle)$, а также $\varphi \neq 0$, $\lambda \neq 0$, поскольку иное противоречит неравенствам (1.4) и (1.5). Уравнения (1.8) и (1.9) являются функционально-дифференциальными относительно неизвестных компонент оператора (1.6), а также функций σ и $\varkappa$, и выполняются тождественно по координатам точек x и y в окрестности $U(\langle x,y\rangle)$.

Дифференцируя уравнения (1.8) и (1.9) по переменным x^{n+1} и y^{n+1}, а также вводя сокращающее обозначение $Y = X_{n+1}$, получаем новые функционально-дифференциальные уравнения в окрестности $U(\langle x,y\rangle)$:

$$\left((Y(x))'_{x^{n+1}} + (Y(y))'_{y^{n+1}}\right)\varphi'_w + (Y(x) - Y(y))\varphi''_{ww} = 0, \tag{1.10}$$

$$\left((Y(x))'_{x^{n+1}} + (Y(y))'_{y^{n+1}}\right)\lambda'_z + (Y(x) + Y(y))\lambda''_{zz} = 0. \tag{1.11}$$

Основным содержанием данной работы является доказательство следующих теорем.

Теорема 1. *В окрестности $U(\langle x,y\rangle)$ функционально-дифференциальное уравнение* (1.10)*, где $w = x^{n+1} - y^{n+1}$, $Y \neq \mathrm{const}$, $\varphi'_w \neq 0$, имеет решения*

$$Y = C\big(x^1, \dots, x^n\big), \quad \varphi = a(\theta)w + b(\theta); \tag{1.12}$$

$$Y = rx^{n+1} + c, \quad \varphi = a(\theta)\frac{1}{w} + b(\theta); \tag{1.13}$$

$$Y = r\big(x^{n+1}\big)^2 + c, \quad \varphi = a(\theta)\frac{1}{w} + b(\theta); \tag{1.14}$$

$$Y = r\cos\big(\omega x^{n+1} + \alpha\big) + c, \quad \varphi = a(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\omega w}{2} + b(\theta); \tag{1.15}$$

$$Y = re^{\omega x^{n+1}} + c, \quad \varphi = a(\theta)\frac{e^{\omega w}}{e^{\omega w} - 1} + b(\theta); \tag{1.16}$$

$$Y = r\operatorname{ch}\big(\omega x^{n+1} + \alpha\big) + c, \quad \varphi = a(\theta)\operatorname{cth}\frac{\omega w}{2} + b(\theta); \tag{1.17}$$

$$Y = r\operatorname{sh}\big(\omega x^{n+1} + \alpha\big) + c, \quad \varphi = a(\theta)\operatorname{th}\frac{\omega w}{2} + b(\theta), \tag{1.18}$$

где $r, c, \alpha = \mathrm{const}$, $C(x^1, \dots, x^n) \neq \mathrm{const}$, $a(\theta)$, $b(\theta)$ — функции класса C^3, $a(\theta) \neq 0$.

Теорема 2. *В окрестности $U(\langle x,y\rangle)$ функционально-дифференциальное уравнение* (1.11)*, где $z = x^{n+1} + y^{n+1}$, $Y \neq 0$, $\lambda'_z \neq 0$, имеет решения:*

$$Y = C\big(x^1, \dots, x^n\big), \quad \lambda(\theta, z) = a(\theta)z + b(\theta); \tag{1.19}$$

$$Y = rx^{n+1} + c, \quad \lambda = a(\theta)\frac{1}{rz + 2c} + b(\theta); \tag{1.20}$$

$$Y = r\cos\big(\omega x^{n+1} + \alpha\big), \quad \lambda = a(\theta)\operatorname{tg}\frac{\omega z + 2\alpha}{2} + b(\theta); \tag{1.21}$$

$$Y = re^{\omega x^{n+1}}, \quad \lambda = a(\theta)e^{-\omega z} + b(\theta); \tag{1.22}$$

$$Y = r\operatorname{ch}\big(\omega x^{n+1} + \alpha\big), \quad \lambda = a(\theta)\operatorname{th}\frac{\omega z + 2\alpha}{2} + b(\theta); \tag{1.23}$$

$$Y = r\operatorname{sh}\big(\omega x^{n+1} + \alpha\big), \quad \lambda = a(\theta)\operatorname{cth}\frac{\omega z + 2\alpha}{2} + b(\theta), \tag{1.24}$$

где $r, c, \alpha = \mathrm{const}$, $C(x^1, \dots, x^n) \neq \mathrm{const}$, $a(\theta)$, $b(\theta)$ — функции класса C^3, $a(\theta) \neq 0$.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *В окрестности $U(\langle x,y\rangle)$ функциональное уравнение*

$$C(x) - C(y) = \xi(\theta(x,y), w), \tag{2.1}$$

где $C(x) = C(x^1, \dots, x^n)$ — функция класса C^3, ξ — функция класса C^1, имеет решение

$$C(x) = c = \mathrm{const}. \tag{2.2}$$

$\lhd$ Продифференцируем уравнение (2.1) по координате x^{n+1}, получим $\xi'_w = 0$. Значит, $\xi(\theta(x,y), w) = \xi(\theta(x,y))$. Тогда уравнение (2.1) примет вид

$$C(x) - C(y) = \xi(\theta(x,y)). \tag{2.3}$$

Далее выделяются два случая: $\xi'_\theta = 0$ и $\xi'_\theta \neq 0$.

1. Если в (2.3) $\xi'_\theta = 0$, то $C(x) - C(y) = \mathrm{const}$. Разделяя переменные, получаем (2.2).

2. Если же в (2.3) $\xi'_\theta \neq 0$ в $U(\langle x, y\rangle)$, то для некоторой координаты x^i

$$\frac{\partial C(x)}{\partial x^i} = \xi'_\theta \frac{\partial \theta(x,y)}{\partial x^i} \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Далее от координат x^i переходим к новым координатам x'^i по формулам $x'^1 = x'^1, \ldots, x'^{i-1} = x'^{i-1}$, $x'^i = C(x^1, \ldots, x^n)$, $x'^{i+1} = x'^{i+1}, \ldots, x'^n = x'^n$. Несложно доказать, что якобиан в данной замене координат равен $\frac{\partial C(x)}{\partial x^i}$ и поэтому отличен от нуля. Тогда в новых координатах уравнение (2.3) примет вид $x'^i - y'^i = \xi(\theta(x,y))$, следовательно, по теореме о неявной функции, в $U(\langle x, y\rangle)$ будем иметь $\theta = \eta(x'^i - y'^i)$, где η — некоторая функция класса C^1. Поэтому $\frac{\partial \theta}{\partial x'^j} = 0$, $j \neq i$, что противоречит неравенству из (1.3). Таким образом, справедлива формула (2.2). $\rhd$

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *В окрестности $U(\langle x, y\rangle)$ функциональное уравнение*

$$C(x) + C(y) = \xi(\theta(x,y), z),$$

где $C(x) = C(x^1, \ldots, x^n)$ — функция класса C^4, ξ — функция класса C^1, имеет решение

$$C(x) = c = \mathrm{const}.$$

3. Доказательство теоремы 1

В этом параграфе «по умолчанию» все уравнения решаются в окрестности $U(\langle x, y\rangle)$. Вначале заметим, что $Y = \mathrm{const}$ тогда и только тогда, когда $Y(x) - Y(y) = 0$. Прямое утверждение очевидно. Для доказательства обратного утверждения применяем разделение переменных: $Y(x) = Y(y) = \mathrm{const}$. По условию теоремы $Y \neq \mathrm{const}$, следовательно, $Y(x) - Y(y) \neq 0$. Тогда от уравнения (1.10) приходим к новому

$$\frac{(Y(x))'_{x^{n+1}} + (Y(y))'_{y^{n+1}}}{Y(x) - Y(y)} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}. \tag{3.1}$$

Дифференцируя это уравнение сначала по x^{n+1}, а затем по y^{n+1}, после чего первый результат складываем со вторым, получаем равенство

$$((Y(x))''_{x^{n+1}} + (Y(y))''_{y^{n+1}})(Y(x) - Y(y)) - ((Y(x))'_{x^{n+1}})^2 + ((Y(y))'_{y^{n+1}})^2 = 0. \tag{3.2}$$

Это равенство является функционально-дифференциальным уравнением, которое выполняется тождественно в окрестности $U(\langle x, y\rangle)$.

Возможны два случая: $(Y(x))'_{x^{n+1}} = 0$ и $(Y(x))'_{x^{n+1}} \neq 0$.

В первом случае из уравнения (1.10) получаем $\varphi''_{ww} = 0$, следовательно, справедливо решение (1.12).

Во втором случае тождество (3.2) дифференцируем по переменным x^{n+1} и y^{n+1}, после чего делим на ненулевое произведение $(Y(x))'_{x^{n+1}}(Y(y))'_{y^{n+1}} \neq 0$ и разделяем переменные, затем получаем дифференциальное уравнение

$$(Y(x))'''_{x^{n+1}} + \mu (Y(x))'_{x^{n+1}} = 0, \quad \mu = \mathrm{const}. \tag{3.3}$$

Это уравнение имеет следующие решения:
при $\mu = 0$

$$Y = A\big(x^1,\ldots,x^n\big)\big(x^{n+1}\big)^2 + B\big(x^1,\ldots,x^n\big)x^{n+1} + C\big(x^1,\ldots,x^n\big);$$

при $\mu > 0$

$$Y = A\big(x^1,\ldots,x^n\big)\cos\omega x^{n+1} + B\big(x^1,\ldots,x^n\big)\sin\omega x^{n+1} + C\big(x^1,\ldots,x^n\big), \quad \omega = \sqrt{\mu};$$

при $\mu < 0$

$$Y = A\big(x^1,\ldots,x^n\big)e^{\omega x^{n+1}} + B\big(x^1,\ldots,x^n\big)e^{-\omega x^{n+1}} + C\big(x^1,\ldots,x^n\big), \quad \omega = \sqrt{-\mu}.$$

Затем найденное подставляем в (3.2) и получаем:
при $\mu = 0$

$$Y = rx^{n+1} + C\big(x^1,\ldots,x^n\big); \tag{3.4}$$

$$Y = r\big(x^{n+1}\big)^2 + c; \tag{3.5}$$

при $\mu > 0$

$$Y = r\cos\big(\omega x^{n+1} + p(x^1,\ldots,x^n)\big) + c, \quad \omega = \sqrt{\mu}; \tag{3.6}$$

при $\mu < 0$

$$Y = A\big(x^1,\ldots,x^n\big)e^{\omega x^{n+1}} + c, \quad \omega = \pm\sqrt{-\mu}; \tag{3.7}$$

$$Y = r\,\mathrm{ch}\,\big(\omega x^{n+1} + p\big(x^1,\ldots,x^n\big)\big) + c, \quad \omega = \sqrt{-\mu}; \tag{3.8}$$

$$Y = r\,\mathrm{sh}\,\big(\omega x^{n+1} + p\big(x^1,\ldots,x^n\big)\big) + c, \quad \omega = \sqrt{-\mu}; \tag{3.9}$$

причем $r, c = \mathrm{const}$, $r \neq 0$.

Далее функцию (3.4) подставляем в уравнение (3.1):

$$\frac{2r}{rw + C(x^1,\ldots,x^n) - C(y^1,\ldots,y^n)} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}. \tag{3.10}$$

К уравнению (3.10) применяем лемму 1, получаем $C(x^1,\ldots,x^n) = c = \mathrm{const}$. Значит, уравнение (3.10) принимает более простой вид:

$$\frac{2}{w} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}.$$

Интегрируя последнее, получаем $\varphi = a(\theta)\frac{1}{w} + b(\theta)$. Объединяя найденное с (3.4), получаем (1.13).

Функцию (3.5) подставляем в уравнение (3.1), в результате, как и выше, получаем $\varphi = a(\theta)\frac{1}{w} + b(\theta)$. Объединяя найденное с (3.5), получаем (1.14).

Теперь функцию (3.6) подставляем в уравнение (3.1) и применяем тригонометрические формулы:

$$-\omega\,\frac{\sin(\omega x^{n+1} + p(x)) + \sin(\omega y^{n+1} + p(y))}{\cos(\omega x^{n+1} + p(x)) - \cos(\omega y^{n+1} + p(y))}$$

$$= \omega\,\frac{\sin\frac{\omega z + p(x) + p(y)}{2}\,\cos\frac{\omega w + p(x) - p(y)}{2}}{\sin\frac{\omega z + p(x) + p(y)}{2}\,\sin\frac{\omega w + p(x) - p(y)}{2}} = \omega\,\mathrm{ctg}\,\frac{\omega w + p(x) - p(y)}{2} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w},$$

где, например, $p(x) = p(x^1, \ldots, x^n)$, следовательно,

$$p(x) - p(y) = -2\omega w - 2\mathrm{arcctg}\frac{\varphi''_{ww}}{\omega\varphi'_w}.$$

Применяя к этому равенству лемму 1, получаем $p(x^1, \ldots, x^n) = \alpha = \mathrm{const}$. В результате имеем уравнение

$$\omega\,\mathrm{ctg}\,\frac{\omega w}{2} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w},$$

интегрируя которое, получаем $\varphi = a(\theta)\mathrm{ctg}\frac{\omega w}{2} + b(\theta)$. В итоге приходим к (1.15).

(3.7) подставляем в (3.1):

$$\omega\,\frac{A(x)e^{\omega x^{n+1}} + A(y)e^{\omega y^{n+1}}}{A(x)e^{\omega x^{n+1}} - A(y)e^{\omega y^{n+1}}} = \omega\frac{A(x)/A(y) + e^{-\omega w}}{A(x)/A(y) - e^{-\omega w}} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w},$$

где, например, $A(x) = A(x^1, \ldots, x^n)$, следовательно

$$A(x)/A(y) = e^{-\omega w}\frac{\varphi''_{ww} - \omega\varphi'_w}{\varphi''_{ww} + \omega\varphi'_w}.$$

Логарифмируя последнее выражение и применяя лемму 1, получаем $A(x^1, \ldots, x^n) = r = \mathrm{const}$. Тогда будем иметь дифференциальное уравнение

$$\omega\,\frac{1 + e^{-\omega w}}{1 - e^{-\omega w}} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w},$$

интегрируя которое, получаем $\varphi = a(\theta)\frac{1}{1-e^{-\omega w}} + b(\theta)$. Объединяя найденное с (3.1), получаем (1.16).

И, наконец, функции (3.8) и (3.9) подставляем в уравнение (3.1) и применяем свойства гиперболических функций, потом, как и выше, с тригонометрическими функциями, устанавливаем, что $p(x^1, \ldots, x^n) = \alpha = \mathrm{const}$. В итоге приходим к уравнениям

$$\omega\,\mathrm{cth}\,\frac{\omega w}{2} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}, \quad \omega\,\mathrm{th}\,\frac{\omega w}{2} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}.$$

Интегрируя последние уравнения, получаем $\varphi = a(\theta)(\mathrm{c})\mathrm{th}\frac{\omega w}{2} + b(\theta)$. Объединяя найденное с (3.8) и (3.9), имеем (1.17) и (1.18).

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Эта теорема доказывается как и теорема 1, поэтому некоторые рассуждения будем опускать. Как и выше «по умолчанию» все уравнения решаются в $U(\langle x, y\rangle)$. Вначале заметим, что $Y = 0$ тогда и только тогда, когда $Y(x) + Y(y) = 0$. В прямую сторону это очевидно. В обратную сторону применяем разделение переменных: $Y(x) = -Y(y) = \mathrm{const} = 0$. По условию теоремы $Y \neq 0$, следовательно $Y(x) + Y(y) \neq 0$. Тогда от уравнения (1.11) приходим к новому:

$$\frac{(Y(x))'_{x^{n+1}} + (Y(y))'_{y^{n+1}}}{Y(x) + Y(y)} = -\frac{\lambda''_{zz}}{\lambda'_z}. \tag{4.1}$$

Дифференцируем это уравнение сначала по x^{n+1}, затем по y^{n+1}, после чего из первого равенства вычитаем второе:

$$((Y(x))''_{x^{n+1}} - (Y(y))''_{y^{n+1}})(Y(x) + Y(y)) - ((Y(x))'_{x^{n+1}})^2 + ((Y(y))'_{y^{n+1}})^2 = 0. \tag{4.2}$$

Возможны два случая: $(Y(x))'_{x^{n+1}} = 0$ и $(Y(x))'_{x^{n+1}} \neq 0$.

В первом случае уравнение (1.11) имеет решение (1.19).

Во втором случае тождество (4.2) дифференцируем по переменным x^{n+1} и y^{n+1}, после чего делим на ненулевое произведение $(Y(x))'_{x^{n+1}}(Y(y))'_{y^{n+1}} \neq 0$ и разделяем переменные, затем получаем дифференциальное уравнение (3.3). Решения этого уравнения, найденные в теореме 1, подставляем в (4.2):

при $\mu = 0$

$$Y = rx^{n+1} + C\big(x^1, \ldots, x^n\big); \tag{4.3}$$

при $\mu > 0$

$$Y = r\cos\big(\omega x^{n+1} + p(x^1, \ldots, x^n)\big), \quad \omega = \sqrt{\mu}; \tag{4.4}$$

при $\mu < 0$

$$Y = A\big(x^1, \ldots, x^n\big)e^{\omega x^{n+1}}, \quad \omega = \pm\sqrt{-\mu}; \tag{4.5}$$

$$Y = r\,\mathrm{ch}\,\big(\omega x^{n+1} + p\big(x^1, \ldots, x^n\big)\big), \quad \omega = \sqrt{-\mu}; \tag{4.6}$$

$$Y = r\,\mathrm{sh}\,\big(\omega x^{n+1} + p\big(x^1, \ldots, x^n\big)\big), \quad \omega = \sqrt{-\mu}; \tag{4.7}$$

причем $r, c = \mathrm{const}$, $r \neq 0$.

Далее, поступаем как и при доказательстве теоремы 1, т. е. функции (4.3)–(4.7) подставляем в уравнение (4.1) и применяем лемму 2, а затем решаем. В итоге получаем (1.20)–(1.24).

5. Заключение

Условия (1.3) дают существенные ограничения на выбор функции θ. Так, на плоскости $\mathbb{R}^2$ функцию θ можно брать в виде:

$$\theta(x,y) = x^1y^1 + x^2y^2, \quad \theta(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2, \quad \theta(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^3,$$

$$\theta(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1, \quad \theta(x,y) = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right] e^{2\gamma\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}}, \quad \theta(x,y) = \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1},$$

т. е. для этих функций доказанные здесь результаты верны. А, например, для функций $\theta(x,y) = x^1y^1 + x^2$, $\theta(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + (y_2)^2$ доказанное выше несправедливо.

Литература

1. *Кыров В. А.* Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии // Сиб. журн. индустр. мат.—2010.—Т. 13, № 4. —С. 38–51.
2. *Кыров В. А.* Функциональные уравнения в симплектической геометрии // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН.—2010.—Т. 16, № 2.—С. 149–153.
3. *Кыров В. А.* Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2012.—Т. 26, № 1.—С. 31–38. DOI: 10.14498/vsgtu986.
4. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978.—400 с.
5. *Кыров В. А.* Решение функциональных уравнений, связанных со скалярным произведением // Челяб. физ.-мат. журн.—2017.—Т. 2, № 1.—С. 30–45.
6. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сиб. электрон. мат. изв.—2017.—Т. 14.—С. 657–672.

7. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Аналитический метод вложения евклидовой и псевдоевклидовой геометрий // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН.—2017.—Т. 23, № 2.—С. 165–181.
8. *Mikhailichenko G. G.* The Mathematical Basics and Results of the Theory of Physical Structures.—URL: https://arxiv.org/pdf/1602.02795.

Статья поступила 30 декабря 2016 г.
Окончательный вариант 12 марта 2017 г.

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 69–77

ON A FAMILY OF FUNCTIONAL EQUATIONS

Kyrov V. A.[1]

[1] Gorno-Altaisk State University,
1 Lenkina st., Gorno-Altaisk 649000, Russia
E-mail: `kyrovVA@yandex.ru`

Abstract. The $(n+1)$-dimensional geometry of local maximum mobility is given by some non-degenerate and differentiable function f of the pair of points on the manifold M, which is a motion group invariant of dimension $(n+1)(n+2)/2$. There is no complete classification of such geometries of dimension $n+1$, but some examples are well known: Euclidean geometry, symplectic geometry, constant curvature geometry. Recently, some previously unknown geometries of local maximum mobility has been found using the embedding method. The embedding method enables one to find functions f that define $(n+1)$-dimensional geometries of local maximum mobility by functions θ of known n-dimensional geometry of local maximum mobility. This problem is reduced to the solution of functional equations of a special type, which are a consequence of the invariance of the function f of the pair of points with respect to the motion group. Such equations are solved in this paper. By differentiation, they are first reduced to functional differential equations, from which we pass to differential equations by separating the variables. Then the solutions of the latter are substituted into the original functional equations, after which we get the final result.

Key words: functional equation, functional differential equation, differential equation.

Mathematical Subject Classification (2000): 39b62.

References

1. Kyrov V. A. Functional equations in pseudo-Euclidean geometry, *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki* [Journal of Applied and Industrial Mathematics], 2010, vol. 13, no. 4, pp. 38–51 (in Russian).
2. Kyrov V. A. Functional equations in simplicial geometry, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 149–153 (in Russian).
3. Kyrov V. A. On some class of functional-differential equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, vol. 26, no. 1, pp. 31–38 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu986.
4. Ovsyannikov L. V. *Gruppovoy Analiz Differentsial'nykh Uravneniy* [Group Analysis of Differential Aquation], Moscow, Nauka, 1978. 400 p. (in Russian).
5. Kyrov V. A. Solving of functional equations associated with the scalar product, *Chelyabinskiy Fiziko-Matematicheskiy Zhurnal*, 2017, vol. 2, no. 1, pp. 30–45 (in Russian).
6. Kyrov V. A., Mikhailichenko G. G. The analytic method of embedding symplectic geometry, *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2017, vol. 14, pp. 657–672 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.17377/ semi.2017.14.057.
7. Kyrov V. A., Mikhailichenko G. G. An analytic method for the embedding of the Euclidean and pseudo-Euclidean geometries, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2017, vol. 23, no.2, pp. 167–181 (in Russian).
8. Mikhailichenko G. G. *The Mathematical Basics and Results of the Theory of Physical Structures.* https://arxiv.org/pdf/1602.02795.

Received December 30, 2016
Final version March 12, 2017

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 78–86

УДК 517.98
DOI 10.23671/VNC.2018.3.18031

SOME ESTIMATES FOR THE GENERALIZED FOURIER TRANSFORM ASSOCIATED WITH THE CHEREDNIK–OPDAM OPERATOR ON $\mathbb{R}$

S. El Ouadih[1], **R. Daher**[1], **H. S. Lafdal**[1]

[1] Department of Mathematics, Faculty of Sciences Aïn Chock, University Hassan II, Route d'ElJadida, Km 8, B.P. 5366 Maârif 20100 Casablanca, Morocco

E-mail: salahwadih@gmail.com, rjdaher024@gmail.com, hamadlafdal@gmail.com

Abstract. In the classical theory of approximation of functions on $\mathbb{R}^+$, the modulus of smoothness are basically built by means of the translation operators $f \to f(x+y)$. As the notion of translation operators was extended to various contexts (see [2] and [3]), many generalized modulus of smoothness have been discovered. Such generalized modulus of smoothness are often more convenient than the usual ones for the study of the connection between the smoothness properties of a function and the best approximations of this function in weight functional spaces (see [4] and [5]). In [1], Abilov et al. proved two useful estimates for the Fourier transform in the space of square integrable functions on certain classes of functions characterized by the generalized continuity modulus, using a translation operator. In this paper, we also discuss this subject. More specifically, we prove some estimates (similar to those proved in [1]) in certain classes of functions characterized by a generalized continuity modulus and connected with the generalized Fourier transform associated with the differential-difference operator $T^{(\alpha,\beta)}$ in $L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$. For this purpose, we use a generalized translation operator.

Key words: Cherednik–Opdam operator, generalized Fourier transform, generalized translation.
Mathematical Subject Classification (2010): 34K99, 42A63.

1. Introduction

In [1], Abilov et al. proved two useful estimates for the Fourier transform in the space of square integrable functions on certain classes of functions characterized by the generalized continuity modulus, using a translation operator.
In this paper, we prove some estimates in certain classes of functions characterized by a generalized continuity modulus and connected with the generalized Fourier transform associated to $T^{(\alpha,\beta)}$ in $L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$ analogs of the statements proved in [1, 2–4]. For this purpose, we use a generalized translation operator.

In section 2, we give some definitions and preliminaries concerning the generalized Fourier transform. Some estimates are proved in section 3.

2. Preliminaries

In this section, we develop some results from harmonic analysis related to the differential-difference operator $T^{(\alpha,\beta)}$. Further details can be found in [5] and [6]. In the following we fix parameters α, β subject to the constraints $\alpha \geqslant \beta \geqslant -\frac{1}{2}$ and $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Let $\rho = \alpha + \beta + 1$ and $\lambda \in \mathbb{C}$. The Opdam hypergeometric functions $G_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ on $\mathbb{R}$ are eigenfunctions $T^{(\alpha,\beta)} G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x) = i\lambda G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x)$ of the differential-difference operator

$$T^{(\alpha,\beta)} f(x) = f'(x) + \big[(2\alpha+1)\coth x + (2\beta+1)\tanh x\big]\frac{f(x)-f(-x)}{2} - \rho f(-x)$$

that are normalized such that $G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(0) = 1$. In the notation of Cherednik one would write $T^{(\alpha,\beta)}$ as

$$T(k_1+k_2)f(x) = f'(x) + \left\{\frac{2k_1}{1+e^{-2x}} + \frac{4k_2}{1-e^{-4x}}\right\}\big(f(x)-f(-x)\big) - (k_1+2k_2)f(x),$$

with $\alpha = k_1 + k_2 - \frac{1}{2}$ and $\beta = k_2 - \frac{1}{2}$. Here k_1 is the multiplicity of a simple positive root and k_2 the (possibly vanishing) multiplicity of a multiple of this root. By [5] or [6], the eigenfunction $G_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ is given by

$$G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x) = \varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x) - \frac{1}{\rho - i\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x) = \varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x) + \frac{\rho}{4(\alpha+1)}\sinh(2x)\varphi_\lambda^{\alpha+1,\beta+1}(x),$$

where $\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x) = {}_2F_1\left(\frac{\rho+i\lambda}{2}; \frac{\rho-i\lambda}{2}; \alpha+1; -\sinh^2 x\right)$ is the classical Jacobi function.

Lemma 2.1 [7]. *The following inequalities are valid for Jacobi functions* $\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x)$

(i) $|\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x)| \leqslant 1$;

(ii) $1 - \varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x) \leqslant x^2(\lambda^2 + \rho^2)$.

Denote $L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$, the space of measurable functions f on $\mathbb{R}$ such that

$$\|f\|_{2,\alpha,\beta} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 A_{\alpha,\beta}(x)\,dx\right)^{1/2} < +\infty,$$

where

$$A_{\alpha,\beta}(x) = (\sinh|x|)^{2\alpha+1}(\cosh|x|)^{2\beta+1}.$$

The generalized Fourier transform of $f \in C_c(\mathbb{R})$ (the space of continuous functions on $\mathbb{R}$ with compact support) is defined by

$$\mathscr{H} f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x) G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(-x) A_{\alpha,\beta}(x)\,dx \quad \text{for all} \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

The inverse transform is given as

$$\mathscr{H}^{-1} g(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x)\left(1 - \frac{\rho}{i\lambda}\right)\frac{d\lambda}{8\pi |c_{\alpha,\beta}(\lambda)|^2},$$

here

$$c_{\alpha,\beta}(\lambda) = \frac{2^{\rho - i\lambda}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(i\lambda)}{\Gamma\big(\frac{1}{2}(\rho+i\lambda)\big)\Gamma\big(\frac{1}{2}(\alpha-\beta+1+i\lambda)\big)}.$$

The corresponding Plancherel formula was established in [5], to the effect that

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 A_{\alpha,\beta}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \left(|\mathscr{H} f(\lambda)|^2 + |\mathscr{H}\check{f}(\lambda)|^2\right)\,d\sigma(\lambda),$$

where $\check{f}(x) := f(-x)$ and $d\sigma$ is the measure given by

$$d\sigma(\lambda) = \frac{d\lambda}{16\pi|c_{\alpha,\beta}(\lambda)|^2}.$$

According to [6] there exists a family of signed measures $\mu_{x,y}^{(\alpha,\beta)}$ such that the product formula

$$G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x)G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(z)\, d\mu_{x,y}^{(\alpha,\beta)}(z),$$

holds for all $x, y \in \mathbb{R}$ and $\lambda \in \mathbb{C}$, where

$$d\mu_{x,y}^{(\alpha,\beta)}(z) = \begin{cases} \mathscr{K}_{\alpha,\beta}(x,y,z)A_{\alpha,\beta}(z)\, dz, & xy \neq 0; \\ \\ d\delta_x(z), & y = 0; \\ d\delta_y(z), & x = 0 \end{cases}$$

and

$$\mathscr{K}_{\alpha,\beta}(x,y,z) = M_{\alpha,\beta}|\sinh x \times \sinh y \times \sinh z|^{-2\alpha} \int\limits_0^\pi g(x,y,z,\chi)_+^{\alpha-\beta-1}$$
$$\times \left[1 - \sigma_{x,y,z}^\chi + \sigma_{x,z,y}^\chi + \sigma_{z,y,x}^\chi + \frac{\rho}{\beta+\frac{1}{2}} \coth x \times \coth y \times \coth z (\sin\chi)^2\right] (\sin\chi)^{2\beta} d\chi,$$

if $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ satisfy the triangular inequality $\|x-y\| < |z| < |x|+|y|$, and $\mathscr{K}_{\alpha,\beta}(x,y,z) = 0$ otherwise. Here

$$\sigma_{x,y,z}^\chi = \begin{cases} \frac{\cosh x + \cosh y - \cosh z \cos\chi}{\sinh x \sinh y}, & xy \neq 0; \\ 0, & xy = 0 \end{cases} \qquad (\forall\, x, y, z \in \mathbb{R},\ \chi \in [0,1])$$

and

$$g(x,y,z,\chi) = 1 - \cosh^2 x - \cosh^2 y \times \cosh^2 z + 2\cosh x \times \cosh y \times \cosh z \times \cos\chi.$$

Lemma 2.2 [6]**.** *For all $x, y \in \mathbb{R}$, we have*
(i) $\mathscr{K}_{\alpha,\beta}(x,y,z) = \mathscr{K}_{\alpha,\beta}(y,x,z)$;
(ii) $\mathscr{K}_{\alpha,\beta}(x,y,z) = \mathscr{K}_{\alpha,\beta}(-x,z,y)$;
(iii) $\mathscr{K}_{\alpha,\beta}(x,y,z) = \mathscr{K}_{\alpha,\beta}(-z,y,-x)$.

The product formula is used to obtain explicit estimates for the generalized translation operators

$$\tau_x^{(\alpha,\beta)} f(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(z)\, d\mu_{x,y}^{(\alpha,\beta)}(z).$$

It is known from [6] that

$$\mathscr{H}\tau_x^{(\alpha,\beta)} f(\lambda) = G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x)\mathscr{H}f(\lambda), \tag{1}$$

for $f \in C_c(\mathbb{R})$.

For $\alpha > -\frac{1}{2}$, we introduce the Bessel normalized function of the first kind j_α defined by

$$j_\alpha(x) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\Gamma(n+\alpha+1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

In the terms of $j_\alpha(x)$, we have (see [8])

$$\sqrt{hx} J_\alpha(hx) = O(1), \quad hx \geqslant 0, \tag{2}$$

where $J_\alpha(x)$ is Bessel function of the first kind, which is related to $j_\alpha(x)$ by the formula

$$j_\alpha(x) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{x^\alpha} J_\alpha(x). \tag{3}$$

Lemma 2.3 [9]. *Let $\alpha \geqslant \beta \geqslant \frac{-1}{2}$, $\alpha \neq \frac{-1}{2}$. Then for $|\nu| \leqslant \rho$, there exists a positive constant c_0 such that*

$$\left|1 - \varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda+i\nu}(x)\right| \geqslant c_0 |1 - j_\alpha(\lambda x)|.$$

For $f \in L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$, we define the finite differences of first and higher order as follows:

$$\Delta^1_h f = \Delta_h f = \left(\tau^{(\alpha,\beta)}_h + \tau^{(\alpha,\beta)}_{-h} - 2I\right) f,$$

$$\Delta^k_h f = \Delta_h\left(\Delta^{k-1}_h f\right) = \left(\tau^{(\alpha,\beta)}_h + \tau^{(\alpha,\beta)}_{-h} - 2I\right)^k f, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

where I is the unit operator in the space $L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$.

The generalized modulus of continuity of a function $f \in L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$ is defined by

$$\omega(f, \delta)_{2,\alpha,\beta} = \sup_{0<h\leqslant\delta} \left\|\Delta^k_h f\right\|_{2,\alpha,\beta}, \quad \delta > 0.$$

3. Main Result

The goal of this work is to prove some estimates for the integral

$$J^2_N(f) = \int_N^{+\infty} \left(|\mathscr{H} f(\lambda)|^2 + |\mathscr{H} \check{f}(\lambda)|^2\right) d\sigma(\lambda),$$

in certain classes of functions in $L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$.

Lemma 3.1. *If $f \in C_c(\mathbb{R})$, then*

$$\mathscr{H} \check{\tau}^{(\alpha,\beta)}_x f(\lambda) = G^{(\alpha,\beta)}_\lambda(-x) \mathscr{H} \check{f}(\lambda). \tag{4}$$

◁ For $f \in C_c(\mathbb{R})$, we have

$$\mathscr{H} \check{\tau}^{(\alpha,\beta)}_x f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \tau^{(\alpha,\beta)}_x f(-y) G^{(\alpha,\beta)}_\lambda(-y) A_{\alpha,\beta}(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \tau^{(\alpha,\beta)}_x f(y) G^{(\alpha,\beta)}_\lambda(y) A_{\alpha,\beta}(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(z) \mathscr{K}_{\alpha,\beta}(x,y,z) A_{\alpha,\beta}(z)\, dz\right] G^{(\alpha,\beta)}_\lambda(y) A_{\alpha,\beta}(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(z) \left[\int_{\mathbb{R}} G^{(\alpha,\beta)}_\lambda(y) \mathscr{K}_{\alpha,\beta}(x,y,z) A_{\alpha,\beta}(y)\, dy\right] A_{\alpha,\beta}(z)\, dz.$$

Since $\mathscr{K}_{\alpha,\beta}(x,y,z)=\mathscr{K}_{\alpha,\beta}(-x,z,y)$, it follows from the product formula that

$$\mathscr{H}\check{\tau}_x^{(\alpha,\beta)}f(\lambda)=G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(-x)\int_{\mathbb{R}}f(z)G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(z)A_{\alpha,\beta}(z)\,dz$$

$$=G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(-x)\int_{\mathbb{R}}f(-z)G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(-z)A_{\alpha,\beta}(z)\,dz=G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(-x)\mathscr{H}\check{f}(\lambda).\ \rhd$$

Lemma 3.2. *For $f\in L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$, then*

$$\left\|\Delta_h^k f\right\|^2_{2,\alpha,\beta}=2^{2k}\int_0^{+\infty}\left|\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(h)-1\right|^{2k}\left(|\mathscr{H}f(\lambda)|^2+|\mathscr{H}\check{f}(\lambda)|^2\right)\,d\sigma(\lambda).$$

$\lhd$ From formulas (1) and (4), we have

$$\mathscr{H}\big(\Delta_h^k f\big)(\lambda)=\Big(G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(h)+G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(-h)-2\Big)^k\mathscr{H}(f)(\lambda)$$

and

$$\mathscr{H}(\check{\Delta}_h^k f)(\lambda)=\Big(G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(-h)+G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(h)-2\Big)^k\mathscr{H}(\check{f})(\lambda).$$

Since

$$G_\lambda^{(\alpha,\beta)}(h)=\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(h)+\frac{\rho}{4(\alpha+1)}\sinh(2h)\varphi_\lambda^{\alpha+1,\beta+1}(h),$$

and $\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}$ is even, then

$$\mathscr{H}\big(\Delta_h^k f\big)(\lambda)=2^k\Big(\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(h)-1\Big)^k\mathscr{H}(f)(\lambda)$$

and

$$\mathscr{H}\big(\check{\Delta}_h^k f\big)(\lambda)=2^k\Big(\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(h)-1\Big)^k\mathscr{H}(\check{f})(\lambda).\ \rhd$$

Now by Plancherel Theorem, we have the result.

Theorem 3.1. *Given k and $f\in L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$. Then there exist a constant $c>0$ such that, for all $N>0$,*

$$J_N(f)=O\big(\omega\big(f,cN^{-1}\big)_{2,\alpha,\beta}\big).$$

$\lhd$ Firstly, we have

$$J_N^2(f)\leqslant\int_N^{+\infty}|j_\alpha(\lambda h)|\,d\mu(\lambda)+\int_N^{+\infty}|1-j_\alpha(\lambda h)|\,d\mu(\lambda),\tag{5}$$

with $d\mu(\lambda)=(|\mathscr{H}f(\lambda)|^2+|\mathscr{H}\check{f}(\lambda)|^2)d\sigma(\lambda)$. The parameter $h>0$ will be chosen in an instant.

In view of formulas (2) and (3), there exist a constant $c_1>0$ such that

$$|j_\alpha(\lambda h)|\leqslant c_1(\lambda h)^{-\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Then

$$\int_N^{+\infty}|j_\alpha(\lambda h)|\,d\mu(\lambda)\leqslant c_1(hN)^{-\alpha-\frac{1}{2}}J_N^2(f).$$

Choose a constant c_2 such that the number $c_3 = 1 - c_1 c_2^{-\alpha-\frac{1}{2}}$ is positive.
Setting $h = c_2/N$ in the inequality (5), we have

$$c_3 J_N^2(f) \leqslant \int_N^{+\infty} |1 - j_\alpha(\lambda h)|\, d\mu(\lambda). \tag{6}$$

By Hölder inequality and Lemma 2.3 the second term in (6) satisfies

$$\begin{aligned}
\int_N^{+\infty} |1 - j_\alpha(\lambda h)|\, d\mu(\lambda) &= \int_N^{+\infty} |1 - j_\alpha(\lambda h)| \times 1\, d\mu(\lambda) \\
&\leqslant \left(\int_N^{+\infty} |1 - j_\alpha(\lambda h)|^{2k}\, d\mu(\lambda) \right)^{1/2k} \left(\int_N^{+\infty} d\mu(\lambda) \right)^{1-1/2k} \\
&\leqslant \left(\int_N^{+\infty} |1 - j_\alpha(\lambda h)|^{2k}\, d\mu(\lambda) \right)^{1/2k} (J_N(f))^{2-1/k} \\
&\leqslant \frac{1}{c_0} \left(\int_N^{+\infty} |1 - \varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(h)|^{2k}\, d\mu(\lambda) \right)^{1/2k} (J_N(f))^{2-1/k}.
\end{aligned}$$

From Lemma 3.2, we conclude that

$$\int_N^{+\infty} \left|1 - \varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(h)\right|^{2k} d\mu(\lambda) \leqslant \left\|\Delta_h^k f\right\|_{2,\alpha,\beta}^2.$$

Therefore

$$\int_N^{+\infty} \left|1 - j_\alpha(\lambda h)\right| d\mu(\lambda) \leqslant \frac{1}{c_0} \left\|\Delta_h^k f\right\|_{2,\alpha,\beta}^{1/k} (J_N(f))^{2-1/k}.$$

For $h = c_2/N$, we obtain

$$c_3 J_N^2(f) \leqslant \frac{1}{c_0}\, \omega\Big(f, \frac{c_2}{N}\Big)_{2,\alpha,\beta}^{1/k} (J_N(f))^{2-1/k}.$$

Consequently by raising both sides to the power k and simplifying by $(J_N(f))^{2k}$ we finally obtain

$$c_0^k c_3^k J_N(f) \leqslant \omega\Big(f, \frac{c}{N}\Big)_{2,\alpha,\beta}$$

for all $N > 0$. The theorem is proved with $c = c_2$. $\rhd$

Theorem 3.3. *Let $f \in L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$. Then, for all $N > 0$,*

$$\omega\big(f, N^{-1}\big)_{2,\alpha,\beta} = O\left(N^{-2k} \left(\sum_{l=0}^{N} (l+1)^{4k-1} J_l^2(f) \right)^{1/2} \right).$$

$\lhd$ From Lemma 3.2, we have

$$\left\|\Delta_h^k f\right\|_{2,\alpha,\beta}^2 = 2^{2k} \int\limits_0^{+\infty} \left|\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(h) - 1\right|^{2k} \left(|\mathscr{H} f(\lambda)|^2 + |\mathscr{H} \check{f}(\lambda)|^2\right) d\sigma(\lambda).$$

This integral is divided into two

$$\int\limits_0^{+\infty} = \int\limits_0^{N} + \int\limits_N^{+\infty} = I_1 + I_2,$$

where $N = [h^{-1}]$. We estimate them separately.

From (i) of Lemma 2.1, we have the estimate

$$I_2 \leqslant c_4 \int\limits_N^{+\infty} \left(|\mathscr{H} f(\lambda)|^2 + |\mathscr{H} \check{f}(\lambda)|^2\right) d\sigma(\lambda) = c_4 J_N^2(f).$$

Now, we estimate I_1. From formula (ii) of Lemma 2.1, we have

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant h^{4k} \int\limits_0^{N} (\lambda+\rho)^{4k} \left(|\mathscr{H} f(\lambda)|^2 + |\mathscr{H} \check{f}(\lambda)|^2\right) d\sigma(\lambda) \\ &= h^{4k} \sum_{l=0}^{N-1} \int\limits_l^{l+1} (\lambda+\rho)^{4k} \left(|\mathscr{H} f(\lambda)|^2 + |\mathscr{H} \check{f}(\lambda)|^2\right) d\sigma(\lambda) \\ &\leqslant h^{4k} \sum_{l=0}^{N-1} (l+\rho+1)^{4k} \left(J_l^2(f) - J_{l+1}^2(f)\right). \end{aligned}$$

From the inequality $l+\rho+1 \leqslant (\rho+1)(l+1)$ we conclude

$$I_1 \leqslant (\rho+1)^{4k} h^{4k} \sum_{l=0}^{N-1} a_l \left(J_l^2(f) - J_{l+1}^2(f)\right)$$

with $a_l = (l+1)^{4k}$.

For all integers $m \geqslant 1$, the Abel transformation shows

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{m} a_l \left(J_l^2(f) - J_{l+1}^2(f)\right) &= a_0 J_0^2(f) + \sum_{l=1}^{m} (a_l - a_{l-1}) J_l^2(f) - a_m J_{m+1}^2(f) \\ &\leqslant a_0 J_0^2(f) + \sum_{l=1}^{m} (a_l - a_{l-1}) J_l^2(f), \end{aligned}$$

because $a_m J_{m+1}^2(f) \geqslant 0$.

Hence

$$I_1 \leqslant (\rho+1)^{4k} N^{-4k} \left(J_0^2(f) + \sum_{l=1}^{N-1} \left((l+1)^{4k} - l^{4k}\right) J_l^2(f)\right),$$

since $N \leqslant 1/h$. Moreover by the finite increments theorem, we have $(l+1)^{4k} - l^{4k} \leqslant 4k(l+1)^{4k-1}$. Then

$$I_1 \leqslant (\rho+1)^{4k} N^{-4k} \left(J_0^2(f) + 4k \sum_{l=1}^{N-1} (l+1)^{4k-1} J_l^2(f) \right).$$

Combining the estimates for I_1 and I_2 gives

$$\left\| \Delta_h^k f \right\|_{2,\alpha,\beta}^2 = O\left(N^{-4k} \sum_{l=0}^{N} (l+1)^{4k-1} J_l^2(f) \right),$$

which implies

$$\omega(f, N^{-1})_{2,\alpha,\beta} = O\left(N^{-2k} \left(\sum_{l=0}^{N} (l+1)^{4k-1} J_l^2(f) \right)^{1/2} \right),$$

and this ends the proof. $\triangleright$

References

1. *Abilov V. A., Abilova F. V. and Kerimov M. K.* Some Remarks Concerning the Fourier Transform in the Space $L_2(\mathbb{R})$, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2008, vol. 48, pp. 885–891.
2. *Hamma M. E., Daher R. and Khadari A.* On Estimates for the Dunkl Transform in the Space $L^2(\mathbb{R}^d, w_k(x)\,dx)$, *Ser. Math. Inform.*, 2013, vol. 28, no. 3, pp. 285–296.
3. *Daher R., Ouadih S. E.* Certain Problems on the Approximation of Functions by Fourier–Jacobi Sums in the Space $L_2^{(\alpha,\beta)}$, *Alabama J. Math.*, 2016, vol. 40, pp. 1–4.
4. *Ouadih S. E., Daher R.* New Estimates for the Generalized Fourier–Bessel Transform in the Space $L^2_{\alpha,n}$, *South. Asian Bull. Math.*, 2017, vol. 41, pp. 209–218.
5. *Opdam E. M.* Harmonic Analysis for Certain Representations of Graded Hecke Algebras, *Acta Math.*, 1995, vol. 175, no. 1, pp. 75–121.
6. *Anker J. P., Ayadi F., and Sifi M.* Opdams Hypergeometric Functions: Product Formula and Convolution Structure in Dimension 1, *Adv. Pure Appl. Math.*, 2012, vol. 3, no. 1, pp. 11–44.
7. *Platonov S. S.* Approximation of Functions in L_2-Metric on Noncompact Rank 1 Symmetric Space, *St. Petersburg Mathematical J.*, 2000, vol. 11, no. 1, pp. 183–201.
8. *Abilov V. A., Abilova F. V.* Approximation of Functions by Fourier–Bessel Sums, *Russian Mathematics* (*Izvestiya VUZ. Matematika*), 2001, vol. 45, no. 8, pp. 1–7.
9. *Bray W. O. and Pinsky M. A.* Growth Properties of Fourier Transforms via Module of Continuity, *J. Funct. Anal.*, 2008, vol. 255, pp. 2256–2285.

Received February 24, 2016
Final version January 19, 2018

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 78–86

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ, АССОЦИИРОВАННОГО С ОПЕРАТОРОМ ЧЕРЕДНИКА — ОПДАМА

Эл Оуади С.[1], Дагер Р.[1], Лафдаль Х. С.[1]

[1] Департамент математики, Факультет наук, Университет Хасана II,
Марокко, Маариф 20100 Касабланка
E-mail: salahwadih@gmail.com, rjdaher024@gmail.com, hamadlafdal@gmail.com

Аннотация. В классической теории приближения функций на $\mathbb{R}^+$, модуль гладкости в основном строится посредством операторов сдвига $f(\cdot) \mapsto f(\cdot + y)$. Поскольку понятие оператора сдвига было расширено в различных направлениях (см. [2] и [3]), были обнаружено много других обобщенных модулей гладкости. Часто при изучения взаимосвязи свойств гладкости функции и наилучшего приближения этой функции в весовых функциональных пространствах такие обобщенные модули гладкости оказываются более удобными, чем обычные (см. [4] и [5]). В работе [1] Абилов и др. для преобразования Фурье в пространстве квадратично интегрируемых функций доказали с использованием оператора сдвига две полезные оценки на некоторых классах функций, характеризуемых обобщенным модулем непрерывности. В данной статье мы также обсуждаем этот вопрос. Более конкретно, мы доказываем некоторые оценки (аналогичные доказанным в [1]) в классах функций, характеризуемых обобщенным модулем непрерывности и связанных с обобщенным преобразование Фурье, ассоциированное с дифференциально-разностным оператором $T^{(\alpha,\beta)}$ в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$. Для этой цели мы используем обобщенный оператор сдвига.

Ключевые слова: оператор Чередника — Опдама, обобщенное преобразование Фурье обобщенный сдвиг.

Mathematical Subject Classification (2000): 34K99, 42A63.

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 87–93

УДК 514.113.5
DOI 10.23671/VNC.2018.3.18032

СИММЕТРИЧНЫЕ МНОГОГРАННИКИ С РОМБИЧЕСКИМИ ВЕРШИНАМИ♯

В. И. Субботин[1]

[1] Южно-Российский государственный политехнический
университет (НПИ) им. М. И. Платова,
Россия, 346428, Новочеркасск, ул. Первомайская, 164–148

E-mail: geometry@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются замкнутые выпуклые многогранники в трехмерном евклидовом пространстве, некоторые вершины которых являются одновременно изолированными, симметричными и ромбическими. Ромбичность вершины означает, что все грани многогранника, инцидентные этой вершине, являются равными между собой ромбами в количестве n. Симметричность вершины означает, что она расположена на нетривиальной оси вращения порядка n многогранника. Учитывая, что совокупность всех ромбов вершины P называется ромбической звездой вершины P, изолированность вершины P означает, что ее ромбическая звезда не имеет общих точек с ромбическими звездами других вершин многогранника. Предположим, что в многограннике имеются также грани F_i, не принадлежащие ни одной ромбической звезде, причём у каждой грани F_i существует ось вращения, которая является локальной осью вращения звезды этой грани. Многогранники с такими условиями названы в работе RS-многогранниками (от первых букв слов rombic, symmetry). RS-многогранники оказываются связанными с многогранниками, сильно симметричными относительно вращения. Многогранники, сильно симметричные относительно вращения были ранее введены и полностью перечислены автором; они являются обобщением класса правильных (платоновых) многогранников. Отметим, что среди сильно симметричных многогранников есть семь таких, которые не являются комбинаторно эквивалентными ни правильным, ни равноугольно-полуправильным (архимедовым). В настоящей работе найдены все RS-многогранники и устанавливается связь некоторых из них с параллелоэдрами в трехмерном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: сильно симметричный многогранник, ромбическая вершина, RS-многогранник, TE-преобразование, параллелооэдр.

Mathematical Subject Classification (2000): 52B10, 52B15.

Введение

Тема настоящей статьи относится к направлению, в котором рассматриваются различные обобщения правильных (платоновых) многогранников (см., например, [1–6] и ссылки в списке литературы в [2]). К таким обобщениям относятся, в частности, классы сильно симметричных многогранников, рассмотренные автором в работах [2–4]; особенностью этих обобщений является то, что в основу положены свойства симметрии элементов многогранника. Например, в [2] рассматривается класс многогранников, *сильно*

♯ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности, проект № 16-41-240670.

симметричных относительно вращения граней. Напомним, что замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется *сильно симметричным относительно вращения граней*, если у каждой грани имеется ось вращения многогранника, перпендикулярная этой грани и пересекающая ее относительную внутренность. В [2] найден полный перечень таких многогранников, а также двойственных им — сильно симметричных относительно вращения многогранных углов. В числе этих многогранников имеются семь, которые даже комбинаторно не эквивалентны правильным и архимедовым.

В [4] было доказано, что глобальное условие на ось вращения можно ослабить, а именно, была доказана лемма: *для того чтобы многогранник был сильно симметричным, необходимо и достаточно, чтобы у каждой грани F имелась ось вращения, которая является осью вращения звезды грани F*. Под звездой грани F (вершины V) понимается совокупность всех граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с гранью F (вершиной V).

В настоящей работе вводится и полностью перечисляется класс замкнутых выпуклых многогранников в E^3 с симметричными ромбическими вершинами (класс RS) и устанавливается связь этого класса с параллелоэдрами в E^3.

Следующие определения являются подготовительными для введения понятия многогранника с ромбическими вершинами.

Определение 1. Вершина V многогранника называется *ромбической*, если ее звезда состоит из равных ромбов, имеющих общей вершиной V. При этом все ромбы одинаково расположены, т. е. сходятся в вершине V либо острыми, либо тупыми углами.

Если число таких ромбов равно n, то вершину будем называть *n-ромбической*.

Определение 2. n-ромбическая вершина называется *симметричной*, если она расположена на нетривиальной оси вращения порядка n многогранника.

Определение 3. Ромбическая вершина называется *изолированной*, если ее звезда не имеет общих элементов со звездой любой другой ромбической вершины многогранника.

Определение 4. Фигура, состоящая из ромбов звезды изолированной симметричной n-ромбической вершины, называется *симметричной n-ромбической шапочкой*, а сама вершина называется *вершиной шапочки*.

Определение 5. Две равные симметричные n-ромбические шапочки, расположенные друг к другу своими вогнутыми сторонами, будем называть *зеркально расположенными*, если они либо симметричны относительно плоскости, либо могут быть совмещены при помощи зеркального поворота вокруг оси, проходящей через их вершины.

Зеркальный поворот вокруг оси L — это композиция поворота вокруг оси L и отражения в плоскости, перпендикулярной этой оси.

Из определения 5, в частности, следует, что *ромбоэдр* — это выпуклый многогранник, составленный из двух равных симметричных зеркально расположенных 3-ромбических шапочек.

Если рассматривать многогранники, каждая вершина которых является симметричной ромбической, но не изолированной, то, как известно, класс таких многогранников исчерпывается двумя многогранниками: ромбическим додекаэдром и ромботриаконтаэдром [2].

1. Многогранники с ромбическими вершинами

Далее будем рассматривать многогранники, каждая ромбическая вершина которых является симметричной и изолированной. При этом каждая грань F, не входящая в звезду ромбической вершины, имеет ось вращения, перпендикулярную F. Предполагается, что эта ось вращения является осью вращения звезды грани F. Такой класс многогранников будем обозначать RS.

Теорема. *Всякий многогранник класса RS может быть получен при помощи преобразования отсечения некоторых трехгранных вершин одного из сильно симметричных относительно вращения граней многогранников и последующего симметричного продления полученных треугольных сечений до ромбов.*

$\triangleleft$ Операция отсечения вершины определяется, например, в [6, с. 76], [7, с. 439]. Преобразование отсечения вершины и последующего симметричного продления в своей плоскости получившейся в результате отсечения грани, упомянутое в теореме, будем называть TE-*преобразованием.*

Рассмотрим некоторый RS-многогранник M. Пусть A — некоторая его изолированная n-ромбическая вершина. Проведем плоскость p, опорную к M в точке A перпендикулярно оси вращения, проходящей через A. Сдвинем параллельно плоскость p в направлении от точки A к внутренности M до тех пор, пока эта плоскость пройдет через меньшие диагонали всех ромбов ромбической шапочки с вершиной A. Удалим часть многогранника, лежащую по ту сторону от плоскости p, которая содержит вершину A. Пересечение плоскости p с M представляет собой грань F. Через внутренность F проходит ось вращения многогранника M. Каждое ребро грани F является стороной треугольника, входящего в звезду F. Эти треугольники образуют замкнутую зону граней. Обозначим эту зону Z. Любые два соседние треугольника зоны Z имеют только одну общую вершину, которая является также и вершиной грани F. Ни через один из этих n треугольников не будет проходить ось вращения многогранника M.

Проделаем это с каждой ромбической вершиной многогранника M. Получим многогранник M', у которого через каждую грань, исключая треугольные, проходят оси вращения. Далее рассуждаем аналогично случаю многогранников с изолированными несимметричными поясами [4], т. е. рассмотрим один из треугольников T зоны Z. Продолжим три грани, имеющие общие ребра с T, до их пересечения в одной точке. Проделаем это с каждым треугольником каждой зоны. Получим новый многогранник M''.

Через центр каждой грани многогранника M'' будет проходить ось вращения многогранника. Таким образом, M'' является сильно симметричным относительно вращения граней.

Проведем теперь все построения в обратном порядке. Получим из многогранника M'' многогранник M с изолированными симметричными ромбическими вершинами. $\triangleright$

Замечание. Из приведенного доказательства видно, что для каждой ромбической вершины V достаточно считать ось вращения, проходящую через V, *локальной* осью вращения фигуры, состоящей из ромбической шапочки с вершиной V и всех граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с ромбами этой шапочки.

Далее *преобразование удлинения* (вдоль оси вращения) многогранника означает такой сдвиг его двух равных симметричных ромбических шапочек вдоль оси вращения этих шапочек, что расстояние между вершинами шапочек увеличивается. При этом раздвигаемые общие вершины ромбов шапочек, отличные от вершин шапочек, будут концами новых равных и параллельных оси сдвига ребер.

Напомним, что *усеченный ромбический триаконтаэдр* и 2-*й полуусеченный ромбический триаконтаэдр* — это два типа сильно симметричных многогранников из [2], которые могут быть получены отсечением вершин ромбического триаконтаэдра. *Усеченный икосаэдр* — один из полуправильных (архимедовых) многогранников, полученный отсечением вершин икосаэдра. *Удлиненный ромбический додекаэдр* — многогранник, полученный из ромбододекаэдра преобразованием удлинения вдоль оси AB 4-го порядка (рис. 2, e). *Удлиненный ромбоэдр* получается преобразованием удлинения вдоль оси AB ромбоэдра — многогранника, составленного из шести равных ромбов (рис. 2, f).

Следствие. *Следующие типы многогранников исчерпывают класс RS:*

a)–b) многогранники с 5-ромбическими вершинами, TE-преобразованные из усеченного ромбического триаконтаэдра;

c) многогранник с 5-ромбическими вершинами, TE-преобразованный из 2-го полуусеченного ромбического триаконтаэдра;

d) многогранник с 5-ромбическими вершинами, TE-преобразованный из усеченного икосаэдра;

e) удлиненный ромбический додекаэдр с 4-ромбическими вершинами;

f) удлиненные ромбоэдры с 3-ромбическими вершинами.

$\lhd$ Так как все многогранники, сильно симметричные относительно вращения граней перечислены, то достаточно выбрать из них те, которые допускают TE-преобразование. Многогранники, соответствующие типам a)–f) следствия, представлены на рис. 1 и 2.

Усеченный ромбический триаконтаэдр получен отсечением вершин степени 3 и степени 5 в ромбическом триаконтаэдре. Поэтому, применяя TE-преобразование к каждой трехгранной вершине каждой пятиугольной грани усеченного ромбического триаконтаэдра, получим многогранник пункта a). Если треугольные грани достаточно большие, т. е. будут иметь общие вершины с ромбами, то получим многогранник b).

2-й полуусеченный ромбический триаконтаэдр получен из ромбического триаконтаэдра отсечением только вершин степени 5. Поэтому, применяем TE-преобразование к вершинам 5-угольных граней 2-го полуусеченного ромбического триаконтаэдра. Получим многогранник пункта c).

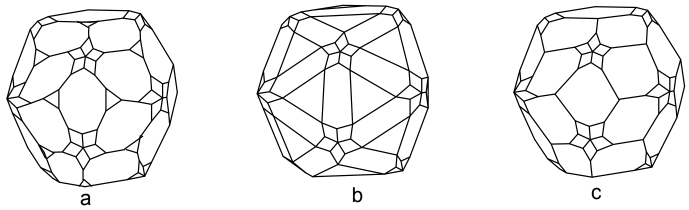


Рис. 1. RS-многогранники.

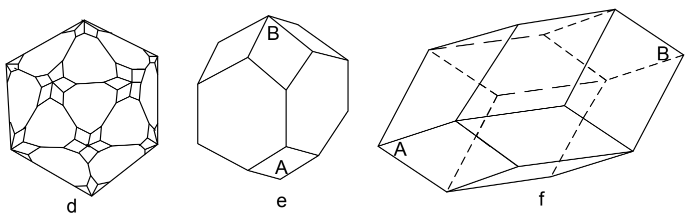


Рис. 2. RS-многогранники.

Применяя аналогично TE-преобразование к усеченному икосаэдру, получим многогранник d). Многогранник e) получается применением TE-преобразования к трехгранным углам верхнего и нижнего квадратных оснований прямоугольного параллелепипеда. Многогранник f) получается применением TE-преобразования к трехгранным углам оснований правильной 6-угольной призмы. $\rhd$

Отметим, что наличие оси симметрии 5-го порядка в некоторых многогранниках класса RS может служить указанием на возможные их приложения в теории квазикристаллов (см., например, [8]).

2. Связь RS-многогранников с параллелоэдрами

Как известно, [9] выпуклый многогранник P называется *параллелоэдром*, если все пространство E^3 можно разбить на параллельные копии P.

Всего существует пять аффинных типов параллелоэдров: параллелепипед, 6-угольная призма, ромбододекаэдр, удлиненный ромбододекаэдр и усеченный октаэдр.

Определение 6. *Правильным* будем называть параллелоэдр, гранями которого могут быть равные между собой ромбы и (или) правильные многоугольники и который является единственным с точностью до подобия в своем аффинном классе.

Очевидно, что правильные параллелоэдры следующие: куб, правильная 6-угольная призма с квадратными боковыми гранями, ромбододекаэдр, усеченный октаэдр с правильными 6-угольными и квадратными гранями, 12-гранник с правильными 6-угольными и ромбическими гранями — удлиненный ромбододекаэдр.

Замечание. В следующем предложении правильный плоский 6-угольник рассматривается как предельная форма 3-ромбической шапочки, у которой три ромба в вершине шапочки имеют тупые углы по $2\pi/3$. Таким образом, две зеркально расположенные ромбические шапочки совпадают и образуют в этом случае дважды покрытый плоский правильный 6-угольник; его мы будем считать замкнутым выпуклым многогранником — ромбоэдром, составленным из двух 3-ромбических шапочек. Аналогично, квадрат рассматривается как предельная форма 4-ромбической шапочки, у которой четыре ромба становятся квадратами. В этом случае две зеркально расположенные 4-ромбические шапочки совпадают и образуют дважды покрытый квадрат, который мы так же будем считать замкнутым выпуклым многогранником. Отметим, что с этой точки зрения правильная 4-угольная и правильная 6-угольная призма могут считаться предельными (вырожденными) формами RS-многогранников. Среди правильных параллелоэдров только удлиненный ромбододекаэдр является невырожденным RS-многогранником.

Предложение. *Для каждого правильного параллелоэдра P существует единственный многогранник R с ромбическими гранями такой, что P может быть получен из R либо преобразованием удлинения, либо (в случае, когда P — усеченный октаэдр) отсечением ромбических вершин.*

$\lhd$ Принимая во внимание предыдущее замечание, видим, что куб и правильная 6-угольная призма с квадратными боковыми гранями получаются, соответственно, путем преобразования удлинения дважды покрытых квадрата и правильного 6-угольника.

Ромбододекаэдр получаем удлинением ромбоэдра, у которого ромбы равны ромбам в ромбододекаэдре, т. е. у каждого ромба отношение диагоналей равно $\sqrt{2}$. Причем удлинение проводится вдоль зеркальной оси 6-го порядка на расстояние, равное длине стороны ромбов. Таким образом, ромбододекаэдр является частным случаем многогранника f) на рис. 2.

Полным отсечением трехгранных вершин ромбододекаэдра, при котором отсекающая плоскость проходит через концы ребер, инцидентных отсекаемой вершине, с последующим отсечением 4-гранных вершин ромбододекаэдра, получаем четвертый правильный параллелоэдр — усеченный октаэдр.

Рассмотрим теперь две зеркально расположенные симметричные 4-ромбические шапочки с совпадающими граничными вершинами на больших диагоналях ромбов шапочек. При этом шапочки выберем такие, чтобы на границе каждой шапочки все соседние ромбы составляли между собой углы по $2\pi/3$. Применяя преобразование удлинения на расстояние, равное стороне ромбов, к многограннику образованному этими шапочками, получим пятый правильный параллелоэдр — удлиненный ромбододекаэдр. $\rhd$

Литература

1. *Coxeter H. S. M.* Regular Polytopes.—N. Y.: Dover, 1973.
2. *Субботин В. И.* Об одном классе сильно симметричных многогранников // Чебышевский сб.—2016.—Т. 17, № 4.—С. 132–140.
3. *Субботин В. И.* Сильно симметричные многогранники // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—2003.—Т. 299.—С. 314–325.
4. *Субботин В. И.* О некоторых обобщениях сильно симметричных многогранников // Чебышевский сб.—2015.—Т. 16, № 2.—С. 222–230.
5. *Тимофеенко А. В.* К перечню выпуклых правильногранников // Современные проблемы математики и механики. К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова.—2011.—Т. 6, № 3.—С. 155–170.
6. *Емеличев В. А., Ковалев М. Д., Кравцов М. К.* Многогранники. Графы. Оптимизация.—М.: Наука, 1981.—344 с.
7. *Циглер Г. М.* Теория многогранников.—М.: МЦНМО, 2014.—568 с.
8. *Артамонов В. А.* Квазикристаллы и их симметрии // Фундамент. и прикл. математика.—2004.—Т. 10, № 3.—С. 3–10.
9. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники.—Новосибирск: Наука, 2007.—492 с.

Статья поступила 5 июня 2017 г.

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 87–93

SYMMETRIC POLYHEDRA WITH RHOMBIC VERTICES

Subbotin V. I.[1]

[1] Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI),
164–148 Pervomajskaya st., Novocherkassk 346428, Russia
E-mail: `geometry@mail.ru`

Abstract. Closed convex polyhedra in three-dimensional Euclidean space, some vertices of which are simultaneously isolated, symmetric and rhombic are considered in this paper. The rhombicity of the vertex means that all the faces of the polyhedron incident to this vertex are n rhombi equal to each other. The symmetry of a vertex means that it is located on a nontrivial rotation axis of order n of the polyhedron. Taking into account that the set of all rhombi of a vertex P is called a rhombic star of a vertex P, the isolation of a vertex P means that its rhombic star has no common points with rhombic stars of other vertices of a polyhedron. Suppose that in a polyhedron there are also faces F_i that do not belong to a single rhombic star, and each of F_i has a rotation axis, which is the local axis of rotation of a star of this face. Polyhedra with such conditions are called in the paper RS-polyhedra (from the first letters of the words rombic, symmetry). RS-polyhedrons are related to polyhedra that are strongly symmetric with respect to rotation. Polyhedra, strongly symmetric with respect to rotation were previously introduced and are completely listed by the author; they are a generalization of the class of regular (Platonic) polyhedra. We note that among strongly symmetric polyhedra there are seven such that are not combinatorically equivalent to either regular or equilateral semiregular (Archimedean). In the present paper, all RS-polyhedrons are found. It is shown that some of them are related to parallelohedra in three-dimensional Euclidean space.

Key words: strongly symmetrical polyhedron, rhombic vertex, RS-polyhedron, TE-transformation, parallelohedron.

Mathematical Subject Classification (2000): 52B10, 52B15.

References

1. *Coxeter H. S. M.* Regular Polytopes, New York, Dover, 1973, 346 p.
2. *Subbotin V. I.* On a Class of Strongly Symmetric Polyhedra, *Chebyshevskij sbornik* [Chebyshevskii Sbornik], 2016, vol. 17, no. 4, pp. 132–140 (in Russian). DOI: 10.22405/2226-8383-2016-17-4-132-140.

3. *Subbotin V. I.* Strongly Symmetric Polyhedra, *Journal of Mathematical Sciences*, 2005, vol. 131, no. 1, pp. 5438–5444. DOI: 10.1007/s10958-005-0419-1.
4. *Subbotin V. I.* Some Generalizations of Strongly Symmetric Polyhedra, *Chebyshevskij sbornik* [Chebyshevskii Sbornik], 2015, vol. 16, no. 2, pp. 222–230 (in Russian).
5. *Timofeenko A. V.* To the list of convex polyhedra with regular faces, *Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki* [Modern Problems of Mathematics and Mechanics], 2011, vol. 6, no. 3, pp. 155–170 (in Russian).
6. *Emelichev V. A., Kovalev M. D., Kravtsov M. K. Mnogogranniki. Grafy. Optimizatsiya* [Polyhedra. Graphs. Optimization], Moscow, 1981, 344 p.
7. *Ziegler G. M.* Lectures on Polytopes, New York, 1995, 373 p. DOI:10.1007/978-1-4613-8431-1.
8. *Artamonov V. A.* Quasicrystals and their symmetries, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 139, no. 4, pp. 6657–6662. DOI: 10.1007/s10958-006-0382-5.
9. *Alexandrov A. D.* Convex Polyhedra, New York, 2005, 524 p. DOI: 10.1007/b137434.

Received June 5, 2017

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 94–104

УДК 517.97
DOI 10.23671/VNC.2018.3.18033

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПО ЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ

С. А. Унучек[1]

[1] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: svun@mail.ru

Аннотация. В различных прикладных задачах часто нужно восстановить какую-либо характеристику объекта по некоторой информации (как правило, неполной или неточной) о других его характеристиках. Существуют различные подходы к решению аналогичных задач. В данной работе использовался подход, основанный на идеях Андрея Николаевича Колмогорова (в работах о n-поперечниках) о наилучших средствах приближения конечномерными подпространствами. Суть метода заключается в том, что ищется наилучшее средство аппроксимации на целом классе. Рассматривается задача одновременного восстановления операторов разделенных разностей всех порядков от 1 до $(n-1)$-го включительно на классе последовательностей с ограниченной n-ой разделенной разностью. При этом преобразование Фурье данной последовательности известно приближенно на некотором отрезке в среднеквадратичной норме. Построено семейство оптимальных методов восстановления. Среди найденных методов есть те, которые используют минимальную информацию о последовательности, предварительно «сглаживая» ее. Найдено точное значение оптимальной погрешности восстановления операторов разделенных разностей. Предельным переходом из полученных результатов вытекает непрерывный случай.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, оператор разделенной разности, преобразование Фурье.

Mathematical Subject Classification (2000): 65K10.

1. Введение

Впервые задача оптимального восстановления функционалов была поставлена С. А. Смоляком в работе [1]. Он же доказал, что среди оптимальных методов восстановления на выпуклом множестве есть линейный. В общем случае метод оптимального восстановления линейных операторов по приближенной информации разработан Г. Г. Магарилом-Ильяевым и К. Ю. Осипенко в работе [2]. В данной работе рассматривается задача одновременного восстановления операторов разделенных разностей различных порядков в среднеквадратичной норме на классе последовательностей с ограниченной n-й разделенной разностью по неточно заданному преобразованию Фурье самой последовательности. Аналогичная задача восстановления производной какого-либо порядка (или самой функции) на соболевском классе рассматривалась в работе [3]. Предельным переходом из полученных результатов вытекает непрерывный случай, исследованный в работе [3]. Одновременное восстановление разделенных разностей по неточно заданной самой последовательности рассматривалось в работе [4]. В работе [5] изучалась задача оптимального восстановления некоторой фиксированной разделенной разности по неточно заданному преобразованию Фурье самой последовательности в равномерной метрике.

2. Основные понятия

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Пусть $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h > 0$, — пространство последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ таких, что $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty$, с нормой $\|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \left(h\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2\right)^{1/2}$. Рассмотрим класс последовательностей

$$\mathscr{W}^n_{2,h} = \Big\{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) : \big\|\Delta^n_h x\big\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leqslant 1\Big\}.$$

Преобразованием Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l_{2,h(\mathbb{Z})}$ является функция

$$(Fx)(\omega) = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j\, e^{-ijh\omega} \in L_2([-\pi/h, \pi/h]),$$

оператора разделенной разности первого порядка — функция

$$\big(F\Delta^1_h x\big)(\omega) = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{x_{j+1} - x_j}{h}\, e^{-ijh\omega} = \frac{e^{ih\omega} - 1}{h}\,(Fx)(\omega),$$

преобразованием Фурье оператора разделенной разности порядка m — функция

$$\big(F\Delta^m_h x\big)(\omega) = \frac{(e^{ih\omega} - 1)^m}{h^m}(Fx)(\omega).$$

Ставится задача одновременного оптимального восстановления операторов всех разностей $(\Delta^1_h x, \Delta^2_h x, \ldots, \Delta^{n-1}_h x)$ последовательности $x \in \mathscr{W}^n_{2,h}$ при условии, что ее преобразование Фурье на отрезке $[-\sigma;\sigma]$, $0 < \sigma \leqslant \pi/h$, нам известно с точностью до $\delta : \|Fx(\omega) - y(\omega)\|_{L_2([-\sigma;\sigma])} \leqslant \delta$, $\delta > 0$.

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения $\varphi(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_{n-1}(y))$, $\varphi_k(y) : L_2([-\sigma;\sigma]) \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Обозначим $\overline{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1})$.

Погрешностью метода φ называется величина

$$e\big(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi\big) = \sup_{\substack{x\in\mathscr{W}^n_{2,h},\ y\in L_2([-\sigma;\sigma]),\\ \|Fx(\omega)-y(\omega)\|_{L_2([-\sigma;\sigma])}\leqslant\delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h x - \varphi_k(y)\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}}.$$

Здесь $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})$, $p_k \geqslant 0$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, — весовые коэффициенты, одновременно не равные 0, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению оператора какой-либо разности.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E\big(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta\big) = \inf_{\varphi:\, L_2([-\sigma;\sigma])\to(l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n} e\big(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi\big).$$

Метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, назовем *оптимальным методом.*

3. Основные результаты

Пусть x — положительный корень уравнения

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k x^{\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \, \frac{k}{n} \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}} x.$$

Рассмотрим обе части уравнения. Функция $y = \sum_{k=1}^{n-1} p_k x^{\frac{k}{n}}$ вогнута, $\lim_{x\to 0} y' = 0$. Функция $y = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}} x$ — прямая с положительным угловым коэффициентом, проходящая через начало координат. Это означает, что при $x > 0$ графики этих функций имеют единственную точку пересечения, т. е. данное уравнение всегда имеет единственный корень.

Введем обозначения

$$\widehat{\sigma} = \begin{cases} \frac{2}{h} \arcsin \frac{h x^{\frac{1}{2n}}}{2}, & x^{\frac{1}{2n}} < \frac{2}{h}, \\ \frac{\pi}{h}, & x^{\frac{1}{2n}} \geqslant \frac{2}{h}, \end{cases} \qquad t(\omega) = \frac{4 \sin^2 \frac{\omega h}{2}}{h^2}, \quad \omega_\sigma = t(\sigma).$$

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Тогда*

$$E\big(\mathscr{W}_{2,h}^n, F, \overline{\Delta}, \delta\big) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}} \right)^{1/2}, & \sigma \geqslant \widehat{\sigma}, \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{n-k}{n} + \omega_\sigma^{-n} \right) \right)^{1/2}, & \sigma < \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Все методы

$$\widehat{\varphi}_k(y) = \begin{cases} \Delta_h^k F^{-1}(\alpha_k(\omega) y(\omega)), & \omega \in (-\sigma; \sigma), \\ 0, & \omega \notin (-\sigma; \sigma), \end{cases}$$

где

$$\alpha_k(\omega) = \begin{cases} \frac{\widehat{\lambda}_1 + \theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)}, & \omega \in (-\sigma; \sigma), \\ 0, & \omega \notin (-\sigma; \sigma), \end{cases} \tag{1}$$

а $\theta_k(\cdot)$ для почти всех $\omega \in (-\sigma; \sigma)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) |\theta_k(\omega)|^2 \leqslant \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) \left(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) - \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) \right), \tag{2}$$

в котором

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{k}{n}} \left(1 - \frac{k}{n}\right), & \sigma \geqslant \widehat{\sigma}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(1 - \frac{k}{n}\right), & \sigma < \widehat{\sigma}, \end{cases}$$

$$\widehat{\lambda_2} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma \geqslant \widehat{\sigma}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^{k-n}, & \sigma < \widehat{\sigma}, \end{cases}$$

являются оптимальными.

4. Доказательство

Докажем, что

$$E\big(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta\big) \geqslant \sup_{\substack{x\in\mathscr{W}^n_{2,h},\\ \|Fx(\omega)\|_{L_2([-\sigma;\sigma])}\leqslant\delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h x\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}}. \tag{3}$$

Для любой последовательности $x \in \mathscr{W}^n_{2,h}$ такой, что $\|Fx(\omega)\|_{L_2([-\sigma;\sigma])} \leqslant \delta$, и для любого метода φ имеем

$$\begin{aligned}
\left(2\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h x\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\right)^{1/2} &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h(x) - \Delta^k_h(-x) + \varphi(0) - \varphi(0)\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h(x) - \varphi(0)\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} + \sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h(-x) - \varphi(0)\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(2\sum_{k=1}^{n-1} \sup_{\substack{x\in\mathscr{W}^n_{2,h},\\ \|Fx(\omega)\|_{L_2([-\sigma;\sigma])}\leqslant\delta}} p_k \big\|\Delta^k_h x\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} - \varphi(0)\right)^{1/2} \leqslant \Big(2e^2\big(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi\big)\Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

т. е. для любого метода φ

$$e\big(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi\big) \geqslant \sup_{\substack{x\in\mathscr{W}^n_{2,h},\\ \|Fx(\omega)\|_{L_2([-\sigma;\sigma])}\leqslant\delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h x\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}}.$$

Из данного неравенства следует неравенство (3).

Это означает, что квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h x\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \to \max, \quad \big\|\Delta^n_h x\big\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leqslant 1, \quad \big\|Fx(\omega)\big\|_{L_2([-\sigma;\sigma])} \leqslant \delta. \tag{4}$$

Перейдем к квадрату задачи и применим теорему Планшереля. Задача (4) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{|e^{ih\omega}-1|^{2k}}{h^{2k}} \big|Fx(\omega)\big|^2\, d\omega \to \max, \tag{5}$$

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \big|Fx(\omega)\big|^2\, d\omega \leqslant \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{|e^{ih\omega}-1|^{2n}}{h^{2n}} \big|Fx(\omega)\big|^2\, d\omega \leqslant 1.$$

Положим

$$\omega_0 = \begin{cases} \frac{2}{h}\arcsin\left(\frac{h}{2}\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}}\right), & \sigma \geqslant \widehat{\sigma}, \\[2ex] \frac{2}{h}\arcsin\left(\sin\frac{h\sigma}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(n-k)}}\right), & \sigma < \widehat{\sigma}. \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим случай $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$. Точка $x_0 = \frac{2\pi}{\delta^2}$ — точка касания прямой $y = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 x$ и функции $\widetilde{y} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k x^{\frac{k}{n}}$ (см. рис. 1). При $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$ в силу монотонности функции $\widetilde{y}$ выполняется двойное неравенство $\omega_\sigma^n \geqslant \omega_{\widehat{\sigma}}^n > x_0$. Это означает, что аргумент функции арксинус в равенстве (6) не превышает 1 при $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$.

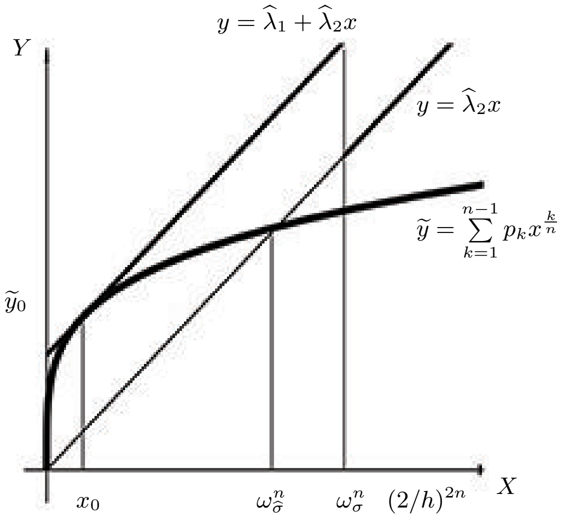


Рис. 1.

Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которых

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} D, & \omega \in \left[\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0\right], \\ 0, & \omega \notin \left[\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0\right]. \end{cases}$$

Положим $D = \delta\sqrt{m}$. Тогда

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left\|Fx_m(\omega)\right\|^2_{L_2([-\sigma;\sigma])} d\omega = \int\limits_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} D^2\, d\omega = \frac{D^2}{m} = \delta^2.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^n(\omega) \left\|Fx_m(\omega)\right\|^2_{L_2([-\pi;\pi])} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} t^n(\omega) D^2\, d\omega$$

$$= \frac{\delta^2 m}{2\pi} \int\limits_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} \left(\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{h\omega}{2}\right)^n d\omega \leqslant \frac{\delta^2 2^{2n} \sin^{2n} \frac{h\omega_0}{2}}{2\pi h^{2n}} = 1.$$

Тем самым функции $x_m(\cdot)$ допустимы в задаче (5). Следовательно, при $D = \delta\sqrt{m}$ значение этой задачи не менее величины

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}t^k(\omega)\big\|Fx_m(\omega)\big\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0}t^k(\omega)D^2\,d\omega$$

$$=\frac{\delta^2 m}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0}\frac{4^k}{h^{2k}}\sin^{2k}\frac{h\omega}{2}\,d\omega\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}p_k\frac{\delta^2 2^{2k}\sin^{2k}\frac{h\left(\omega_0-\frac{1}{m}\right)}{2}}{2\pi h^{2k}}.$$

Величина, стоящая в правой части этого неравенства при $m\to\infty$ стремится к величине $\sum_{k=1}^{n-1}p_k\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}$.

В случае $\sigma<\widehat{\sigma}$ очевидно, что $\omega_0<\sigma<\frac{\pi}{h}$. Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$ такую, что

$$(Fx_m)(\omega)=\begin{cases}D_1, & \omega\in\left[\omega_0-\frac{1}{m};\omega_0\right],\\ D_2, & \omega\in\left[\sigma;\sigma+\frac{1}{m}\right],\\ 0, & \omega\notin\left[\omega_0-\frac{1}{m};\omega_0\right]\cup\left[\sigma;\sigma+\frac{1}{m}\right].\end{cases}$$

Возьмем

$$D_1=\delta\sqrt{m}\,,\quad D_2=\left(\frac{2\sin\frac{h\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)}{2}}{h}\right)^{-n}\sqrt{m\left(2\pi-\delta^2{\omega_\sigma}^n\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}}\right)}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\big\|Fx_m(\omega)\big\|^2_{L_2([-\sigma;\sigma])}\,d\omega=\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}}D_1^2\,d\omega=\delta^2.$$

Аналогично

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}t^n(\omega)\big\|Fx_m(\omega)\big\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0}t^n(\omega)D_1^2\,d\omega+\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}}t^n(\omega)D_2^2\,d\omega\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\left(\delta^2\left(\frac{2}{h}\sin\frac{h\omega_0}{2}\right)^{2n}+\frac{D_2^2}{m}\left(\frac{2}{h}\sin\frac{h\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)}{2}\right)^{2n}\right)=1.$$

Таким образом, функции $x_m(\cdot)$ также допустимы в задаче (5). Значит, при указанных выше значениях δ, D_1 и D_2, значение этой задачи не менее величины

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}t^k(\omega)\big\|Fx_m(\omega)\big\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}d\omega=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\left(\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0}t^k(\omega)D_1^2d\omega+\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}}t^k(\omega)D_2^2d\omega\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\left[\delta^2\left(\frac{2}{h}\sin\frac{h\left(\omega_0-\frac{1}{m}\right)}{2}\right)^{2k}+\left(\frac{2\sin\frac{h\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)}{2}}{h}\right)^{-2n}\left(2\pi-\delta^2{\omega_\sigma}^n\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}}\right)\omega_\sigma^k\right].$$

Величина, стоящая в правой части этого неравенства при $m \to \infty$ стремится к

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{n-k}{n} + \omega_\sigma^{-n} \right).$$

Таким образом, мы доказали, что

$$E\big(\mathscr{W}_{2,h}^n, F, \overline{\Delta}, \delta\big) \geqslant \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{\frac{n-k}{n}} \right)^{1/2}, & \sigma \geqslant \widehat{\sigma}, \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{n-k}{n} + \omega_\sigma^{-n} \right) \right)^{1/2}, & \sigma < \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Построим оптимальные методы. Оптимальные методы будем искать среди методов вида $\varphi_k(y) = \Lambda_k y$, где $\Lambda_k : L_2([-\sigma;\sigma]) \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$ — линейный непрерывный оператор, действие которого в образах Фурье имеет вид

$$F(\Lambda_k y)(\omega) = \begin{cases} \frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k} \alpha_k(\omega) y(\omega), & \omega \in (-\sigma;\sigma), \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma), \end{cases}$$

где функция $\alpha_k(\omega) \in L_\infty((-\sigma;\sigma))$, $\alpha_k(\omega) = 0$, $\omega \notin (-\sigma;\sigma)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Для оценки погрешности таких методов рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\| \Delta_h^k x - \Lambda_k y \big\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2 \to \max,$$

$$\big\| Fx(\omega) - y(\omega) \big\|_{L_2([-\sigma;\sigma])} \leqslant \delta, \qquad x \in \mathscr{W}_{2,h}^n, \;\; y \in L_2([-\sigma;\sigma]).$$

Перепишем эту задачу в образах Фурье:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) \big| Fx(\omega) - \alpha_k(\omega) y(\omega) \big|^2 \, d\omega \to \max, \\ \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \big| Fx(\omega) - y(\omega) \big|^2 \, d\omega \leqslant \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^n(\omega) \big| Fx(\omega) \big|^2 \, d\omega \leqslant 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} \big| Fx(\omega) - \alpha_k(\omega) y(\omega) \big|^2 &= \big| Fx(\omega)(1 - \alpha_k(\omega)) + \alpha_k(\omega)(Fx(\omega) - y(\omega)) \big|^2 \\ &= \left| \frac{\alpha_k(\omega)\sqrt{\widehat{\lambda}_1}}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1}} \big(Fx(\omega) - y(\omega) \big) + \frac{1 - \alpha_k(\omega)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2 \, t^n(\omega)}} \sqrt{\widehat{\lambda}_2 \, t^n(\omega)} \, Fx(\omega) \right|^2 \\ &\leqslant q_k(\omega) \left(\widehat{\lambda}_1 \big| Fx(\omega) - y(\omega) \big|^2 + \widehat{\lambda}_2 \, t^n(\omega) \big| Fx(\omega) \big|^2 \right), \end{aligned}$$

где $q_k(\omega) = \frac{|\alpha_k(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_1} + \frac{|1-\alpha_k(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)}$.

Учитывая условия в задаче (7), имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}\sum_{k=1}^{n-1}p_k t^k(\omega)\big|Fx(\omega)-\alpha_k(\omega)y(\omega)\big|^2\,d\omega\leqslant\|Q(\cdot)\|_{L_\infty((-\sigma;\sigma))}\big(\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2\big),$$

где $Q(\omega)=\sum_{k=1}^{n-1}p_k t^k(\omega)q_k(\omega)$.

Если $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty((-\sigma;\sigma))}\leqslant 1$, то значение задачи (7)

$$\widehat{\lambda}_1\frac{\delta^2}{2\pi}+\widehat{\lambda}_2=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma\geqslant\widehat{\sigma},\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\omega_\sigma^k\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}}\frac{n-k}{n}+\omega_\sigma^{-n}\right), & \sigma<\widehat{\sigma},\end{cases}$$

не превосходит $\widehat{\lambda}_1\frac{\delta^2}{2\pi}+\widehat{\lambda}_2\leqslant E^2(\mathscr{W}^n_{2,h},F,\overline{\Delta},\delta)$.

Из последнего неравенства следует оценка сверху погрешности оптимального восстановления. Тем самым методы, в которых $a_k(\cdot)$, $k=1,\ldots,n-1$, выбраны так, что $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty((-\sigma;\sigma))}\leqslant 1$, будут оптимальными.

Покажем, что условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty((-\sigma;\sigma))}\leqslant 1$ эквивалентно выражению (2) в условии теоремы. Имеем

$$Q(\omega)=\sum_{k=1}^{n-1}p_k t^k(\omega)q_k(\omega)=\sum_{k=1}^{n-1}p_k t^k(\omega)\left(\frac{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}{\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}\left|\alpha_k(\omega)-\frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}\right|^2+\frac{1}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}\right).$$

Пусть $\theta_k(\omega)=\alpha_k(\omega)\big(\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n\big)-\widehat{\lambda}_1$.

Тогда условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty((-\sigma;\sigma))}\leqslant 1$ эквивалентно условию (2).

Рассмотрим функцию

$$g(t)=-\sum_{k=1}^{n-1}p_k t^k+\lambda_1\chi_{[-\sigma,\sigma]}+\lambda_2t^n,\quad t\in\big[0,4/h^2\big].$$

В силу вогнутости функции $\widetilde{y}=\sum_{k=1}^{n-1}p_kx^{k/n}$ в случае $\sigma\geqslant\widehat{\sigma}$ будет выполняться неравенство $\widetilde{y}\leqslant\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2x$ для всех $x\in[0;\omega_\sigma^n]$ (см. рис. 1). Так как $\omega_\sigma^n\geqslant\omega_{\widehat{\sigma}}^n$, неравенство $\sum_{k=1}^{n-1}p_kx^{k/n}<\widehat{\lambda}_2x$ выполняется при $x\in(\omega_\sigma^n;(2/h)^{2n}]$. Это означает неотрицательность функции $g(t)$ при всех $t\in[0,4/h^2]$.

В случае $\sigma<\widehat{\sigma}$ прямая $y=\widehat{\lambda}_2x$ пересекает график функции $\widetilde{y}=\sum_{k=1}^{n-1}p_kx^{k/n}$ в точке ω_σ^n, прямая $y=\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2x$ касается данной функции в точке $x_0<\omega_\sigma^n$, т. е. и в этом случае функция $g(t)\geqslant 0$.

Таким образом, в силу неотрицательности функции $g(t)$ правая часть неравенства (2) неотрицательна.

Верхняя и нижняя оценки погрешности совпадают, что доказывает оптимальность метода.

Пусть $\mathscr{W}_2^n(\mathbb{R})=\{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}):f^{(n-1)}\in LAC(\mathbb{R}),f^{(n)}(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\}$ — соболевское пространство, где $LAC(\mathbb{R})$ — множество функций, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке. Рассмотрим класс функций

$$\mathbb{W}_2^n(\mathbb{R})=\Big\{f(\cdot)\in\mathscr{W}_2^n(\mathbb{R}):\big\|f^{(n)}(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant 1,\,(Ff)(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\Big\},$$

где $(Ff)(\cdot)$ — преобразование Фурье функции f. Будем считать, что дана функция $y(\cdot) \in L_2([-\sigma;\sigma])$ такая, что $\|(Ff)(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2([-\sigma;\sigma])} \leqslant \delta$, где $\delta > 0$ — заданная величина погрешности.

Заметим, что, в пределе при $h \to 0$ k-я разделенная разность последовательности $x \in \mathscr{W}_{2,h}^n$ переходит в производную k-го порядка функции $f(\cdot) \in \mathbb{W}_2^n(\mathbb{R})$,

$$\lim_{h\to 0} t(\omega) = \omega^2, \quad \lim_{h\to 0} \omega_\sigma = \sigma^2, \quad \lim_{h\to 0} \widehat{\sigma} = \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}.$$

Не обосновывая строго предельный переход, приведем результат, который получается с помощью такого перехода (этот результат может быть получен и непосредственно, используя ту же схему рассуждений): погрешность одновременного оптимального восстановления производных всех порядков $(D^1 f(\cdot),\ D^2 f(\cdot),\ \ldots,\ D^{n-1} f(\cdot))$ функции $f(\cdot) \in \mathbb{W}_2^n(\mathbb{R})$ равна

$$E\big(\mathbb{W}_2^n(\mathbb{R}), F, \overline{D}, \delta\big) = \lim_{h\to 0} E\big(\mathscr{W}_{2,h}^n, F, \overline{\Delta}, \delta\big)$$

$$= \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}\right)^{1/2}, & \sigma \geqslant \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}, \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \sigma^{2k} \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{n-k}{n} + \sigma^{-2n}\right)\right)^{1/2}, & \sigma < \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}, \end{cases}$$

где $\overline{D} = (D^1, D^2, \ldots, D^{n-1})$.

Все методы

$$\widehat{\varphi}_k(y) = \begin{cases} \big(F^{-1}(\alpha_k(\omega) y(\omega))\big)^{(k)}, & \omega \in (-\sigma;\sigma), \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma), \end{cases}$$

где

$$\alpha_k(\omega) = \begin{cases} \frac{\widehat{\lambda}_1 + \theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \omega^n}, & \omega \in (-\sigma;\sigma), \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma), \end{cases}$$

а $\theta_k(\cdot)$ для почти всех $\omega \in (-\sigma;\sigma)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \omega^{2k} \big|\theta_k(\omega)\big|^2 \leqslant \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 \omega^{2n} \left(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \omega^{2n} - \sum_{k=1}^{n-1} p_k \omega^{2k}\right),$$

в котором

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{k}{n}} \left(1 - \frac{k}{n}\right), & \sigma \geqslant \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \sigma^{2k} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(1 - \frac{k}{n}\right), & \sigma < \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}, \end{cases}$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma \geqslant \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \sigma^{2(k-n)}, & \sigma < \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}, \end{cases}$$

являются оптимальными, и при

$$p_k = \begin{cases} 1, & k = r, \\ 0, & k \neq r \end{cases}$$

мы получаем результат, аналогичный результату, полученному при восстановлении производной функции порядка r в работе [3].

Замечание 1. Если преобразование Фурье последовательности с ограниченной n-й разделенной разностью на отрезке $[-\sigma;\sigma]$ известно приближенно, то с увеличением полудлины отрезка σ погрешность оптимального восстановления уменьшается, но лишь до определенного предела: при $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$ эта погрешность постоянна, т. е. за пределами отрезка $[-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}\,]$ информация о преобразовании Фурье последовательности из данного класса не нужна.

Литература

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дисс. ...к.ф.-м.н.—М.: МГУ, 1965.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функцион. анализ и его прил.—2003.—Т. 37.—С. 51–64. DOI: 10.4213/faa157.
3. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление линейных операторов по неточной информации // Мат. форум. Т. 2. Исследования по выпуклому анализу / отв. ред. В. М. Тихомиров.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2009.—С. 158–192.—(Итоги науки. ЮФО).
4. *Унучек С. А.* Оптимальное восстановление разделенных разностей по неточно заданной последовательности // Диф. уравнения.—2015.—Т. 51, № 7.—С. 951–957. DOI: 10.1134/S0374064115070122.
5. *Унучек С. А.* О восстановлении оператора разделенной разности по неточно заданному преобразованию Фурье // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 3.—С. 84–92. DOI: 10.23671/VNC.2017.3.7268.
6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру? // Мат. заметки.—2012.—Т. 92, № 1.—С. 59–67. DOI: 10.4213/mzm9042.

Статья поступила 11 августа 2017 г.

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 94–104

OPTIMAL RECOVERY OF THE OPERATORS OF THE DIVIDED DIFFERENCE OF THE INACCURATELY GIVEN SEQUENCE BY THE FOURIER TRANSFORM

Unuchek S. A.[1]

[1] Moscow Aviation Institute (National Research University),
4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russia,
E-mail: svun@mail.ru

Abstract. In various applications, it is often necessary to reconstruct some characteristic of an object from some information (usually incomplete or inaccurate) about its other characteristics. There are various approaches to solving similar problems. In this paper, we used an approach based on the ideas of Andrei Nikolaevich Kolmogorov concerning the best means of approximation by finite-dimensional subspaces. The essence of the method lies in the fact that the best means of approximation on the whole class is sought. We consider the problem of simultaneous recovery of operators of divided differences of a sequence of all orders from 1 to $(n-1)$th inclusive, in a class of sequences with bounded nth divided difference. The Fourier transform of this sequence is known inaccurately at a certain interval sequence in the mean square norm. A family of optimal recovery methods is constructed. Among the methods found are those that use minimal sequence information, pre-smoothing it. The exact value of the optimal error of recovering divided-difference operators is found. The passage to the limit from the obtained results implies a continuous case.

Key words: optimal recovery, operator of a divided difference, Fourier transform.

Mathematical Subject Classification (2000): 65K10.

References

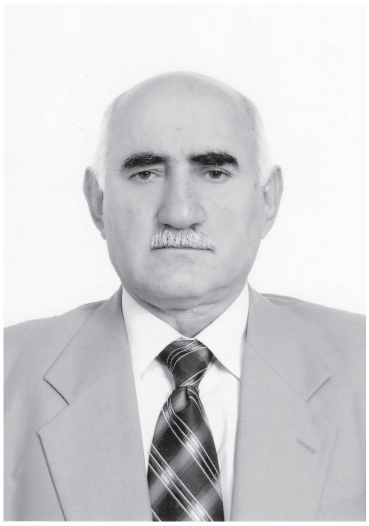
1. *Smolyak S. A. On Optimal Recovery of Fuctions and Functionals of them, Candidate dissertation*, Moscow State University, 1965 (in Russian).
2. *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Y.* Optimal Recovery of Functions and Their Derivatives from Inaccurate Information about the Spectrum and Inequalities for Derivatives, *Functional Analysis and Its Applications*, 2003, vol. 37, no. 3, pp. 203–214. DOI: 10.1023/A:1026084617039
3. *Magaril-Il'yaev G. G, Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Operators from Inaccurate Information, *Matematicheskij forum. T. 2. Issledovanija po vypuklomu analizu. Itogi nauki. Juzhnyj federal'nyj okrug* [Mathematical Forum, vol. 2, Studies on the Convex Analysis. Review of Science: Southern Federal District], 2009, vol. 2, pp. 158–192 (in Russian).
4. *Unuchek S. A.* Optimal Reconstruction of Divided Differences from an Inaccurate Sequence, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 7, pp. 948–954. DOI: 10.1134/S0012266115070125.
5. *Unuchek S. A.* On Optimal Recovery of the Operator of k-th Divided Difference from its Inaccurately Given Fourier Transfor, *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [Vladikavkaz Mathematical Journal], 2015, vol. 17, no. 3, pp. 84–92 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2017.3.7268.
6. *Magaril-Il'yaev G. G, Osipenko K. Yu.* How Best to Recover a Function from its Inaccurately Given Spectrum? *Mathematical Notes*, 2012, vol. 92, no. 1, pp. 51–58. DOI: 10.1134/S0001434612070061.

Received August 11, 2017

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 105–105

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Шарапудинов Идрис Идрисович
(некролог)



Отечественная наука понесла тяжелую утрату. 7 августа 2018 г. на 71-м году жизни скоропостижно скончался известный российский математик Шарапудинов Идрис Идрисович, доктор физико-математических наук, профессор.

Идрис Идрисович родился 7 июня 1948 года в селении Гогатль Ботлихского района Республики Дагестан. В 1966 г. окончил среднюю школу в селении Ботлих и поступил на физико-математический факультет Дагестанского государственного педагогического института, который окончил с отличием в 1971 г.

Аспирантуру Идрис Идрисович проходил при Московском государственном педагогическом институте, где и защитил кандидатскую диссертацию. С 1975 г. работал в Дагестанском государственном педагогическом университете, с 1992 по 2017 гг. — заведующим кафедрой математического анализа. В 1989 г. поступил в докторантуру при механико-математическом факультете МГУ, в 1991 г. успешно защитил докторскую диссертацию в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН.

С 2001 г. и до последних дней он заведовал Отделом математики и информатики (ОМИ) Дагестанского научного центра РАН, при этом с 2007 по 2011 гг. заведовал одновременно и Лабораторией теории функций и приближений Южного математического института Владикавказского научного центра РАН. Создание ОМИ стало возможным лишь благодаря его кипучей энергии и уникальному сочетанию глубоких познаний в классических областях математики с живым интересом к современным направлениям компьютерных наук. Здесь он нашел приложение своим недюжинным силам организатора науки, создал свою научную школу, и ныне ученики Идриса Идрисовича продолжают развивать его научные идеи и находить им новые применения.

Шарапудинов Идрис Идрисович относится к блестящей плеяде российских исследователей мирового уровня, он является одним из общепризнанных основателей современной теории пространств Лебега и Соболева с переменным показателем и теории ортогональных полиномов дискретной переменной. А в последние годы им были получены принципиально новые основополагающие результаты в такой актуальной и активно развивающейся области как теория систем функций, ортогональных в смысле Соболева.

Ушел из жизни выдающийся ученый, замечательный педагог, добрый и отзывчивый человек, любящий отец и дед. Светлая память об Идрисе Идрисовиче Шарапудинове навсегда сохранится в наших сердцах.

Редколлегия

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 106–107

ДЖЕМАЛИ ГУРИЕВИЧУ САНИКИДЗЕ 85 ЛЕТ

В этом году исполнилось 85 лет известному математику, доктору физико-математических наук, профессору Саникидзе Джемали Гуриевичу. Джемали Гуриевич родился 23 августа 1933 г. в г. Тбилиси. В 1956 г. окончил механико-математический факультет Тбилисского государственного университета. Ему довелось прослушать курсы лекций всемирно известных математиков: Н. И. Мусхелишвили, И. Н. Векуа, Ш. Е. Микеладзе, В. Д. Купрадзе, А. В. Бицадзе, Д. А. Квеселава, А. И. Каландия и др.

Под руководством известного грузинского математика, лауреата государственной премии, профессора Ш. Е. Микеладзе он подготовил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 — вычислительная математика, которую защитил 1963 г. В 1983 г. блестяще защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по той же специальности. Его научные интересы — это численные решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, задачи теории упругости и другие родственные вопросы.

В 2003 г. ему присвоили высшую награду Национальной академии прикладных наук России. В тексте награждения подчеркивается: «...Вы, Джемали Гуриевич, являетесь выдающимся современным ученым-математиком. Широко известны Ваши фундаментальные труды. Вами получены основополагающие результаты к важной области математики. Ваше имя широко известно в Грузии, в России и в других странах...».

Д. Г. Саникидзе принадлежит крупный вклад в современной теории численных методов. Он создатель тбилисской школы аппроксимации сингулярных операторов и признанный авторитет по численному решению сингулярных интегральных уравнений, а также автор и соавтор свыше 220 научных работ. К числу его наиболее известных результатов относятся:

1) Равномерные оценки погрешности квадратурных формул для сингулярных интегралов с весами Якоби.

2) Впервые рассмотрен сингулярный интеграл на кусочно-гладких линиях интегрирования с угловыми точками. Построена такая вычислительная схема, которая гарантирует аппроксимацию высшей степени точности.

3) Для интегралов типа Коши и их производных построены такие вычислительные алгоритмы, которые гарантируют сходимость и равномерные оценки.

4) Впервые разработан алгоритм применения сингулярных интегральных уравнений в численных конформных отображениях. В результате полученного сингулярного уравнения строится вычислительная схема, которая обосновывается.

5) Решение граничных задач теории функций, математической физики и теории упругости. Все эти задачи решаются численно без преобразования контуров интегрирования, т. е. по прямой аппроксимации соответствующих сингулярных интегральных уравнений.

В некоторых случаях вычислительные схемы обосновываются. Много сил Джемал Гуриевич отдает научно-организационной и научно-педагогической деятельности. С 1967 г. по сегодняшний день он работает заведующим отделом «Численные методы анализа» в институте Вычислительной математики им Н. И. Мусхелишвили АН Грузии, и по совместительству — доцентом кафедры Вычислительной математики Тбилисского государственного университета.

Д. Г. Саникидзе — постоянный член оргкомитета международного симпозиума под названием «Метод дискретных особенностей в задачах математической физики (МДОЗМФ)», который проводится регулярно с 1983 г. Он также регулярно участвует в работе конференции Южного математического института РАН «Порядковый анализ и смежные вопросы моделирования». Также постоянный член оргкомитета международной научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» Пензенского государственного университета. Проводит активную педагогическую работу. Имеет десятки учеников по всему миру, в том числе и в России.

Человеческие качества Джемала Гуриевича оказались инвариантными: несмотря на эпохальные перемены последней четверти века он остался человеком, в котором крупный ученый сочетается с удивительно скромным и мягким человеком, здоровый прагматизм с тонким чувством юмора, научная принципиальность с добротой и внимательным отношением к людям.

Сегодня Д. Г. Саникидзе полон энергии и интереса к многим областям математики. Желаем ему долгих лет счастливой жизни, благополучия близких и новых математических достижений.

А. Г. Кусраев, А. Ф. Матвеев, И.В. Бойков,
И. Д. Музаев, А. В. Сетуха, Ш. С. Хубежты

Вниманию авторов

Владикавказский математический журнал (ВМЖ) — научное периодическое издание, выходящее четыре раза в год. Журнал издается Южным математическим институтом — филиалом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Поступившие в редакцию ВМЖ статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи в порядке цитирования источников. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 2 усл. печ. листов ($\approx$ 17 стр. формата A4). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взимается.

Авторские права на журнал в целом принадлежат Южному математическому институту — филиалу ВНЦ РАН и Редколлегии журнала, которые обладают исключительным правом получать и распределять любые платежи, связанные с переуступкой авторских прав на журнал.

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 50-18-06;
E-mail: `rio@smath.ru`
Зав. редакцией: Кибизова В. В.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 20

Выпуск 3

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

Подписано в печать 18.10.2018. Дата выхода в свет 25.10.2018.
Формат бумаги $60\times84^1/_8$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 12,56. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный научный центр «Владикавказский научный центр
Российской академии наук» (ВНЦ РАН)

Издатель:
Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»

Адрес издателя:
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

Индекс 57380