



ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

<http://www.vlmj.ru>

Том 22, выпуск 1

2020



ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

<http://www.vlmj.ru>

Volume 22, Issue 1

2020

Главный редактор

А. Г. КУСПАЕВ

Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ, Россия

Ответственный секретарь

Е. К. БАСАЕВА

Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,
Владикавказ, Россия

Редакционная коллегия

А. В. АБАНИН

Южный федеральный университет,
Ростов-на-Дону, Россия

ХОСЕ БОНЕТ

Политехнический университет,
Валенсия, Испания

Н. А. ВАВИЛОВ

Санкт-Петербургский государственный
университет, Санкт-Петербург, Россия

А. О. ВАТУЛЬЯН

Южный федеральный университет,
Ростов-на-Дону, Россия

С. К. ВОДОПЬЯНОВ

Институт математики Сибирского
отделения РАН, Новосибирск, Россия

Е. И. ГОРДОН

Университет Восточного Иллинойса,
Чарльстон, США

А. И. КОЖАНОВ

Институт математики Сибирского
отделения РАН, Новосибирск, Россия

В. А. КОЙБАЕВ

Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова,
Владикавказ, Россия

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

Южный математический
институт — филиал ВЦ РАН,
Владикавказ, Россия

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

Институт математики Сибирского
отделения РАН, Новосибирск, Россия

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Москва, Россия

В. Д. МАЗУРОВ

Институт математики Сибирского
отделения РАН, Новосибирск, Россия

С. Г. САМКО

Южный федеральный университет,
Ростов-на-Дону, Россия;
Университет Алгарве, Фаро,
Португалия

ФАМ ЧОНГ ТИЕН

Вьетнамский национальный
университет, Ханой, Вьетнам

В. Г. ТРОИЦКИЙ

Альбертский университет,
Эдмонтон, Канада

ЛЕ ХАЙ ХОЙ

Наньянский технологический
университет, Сингапур

А. Б. ШАБАТ

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН,
Черноголовка, Россия

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22

Телефон: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru

Зав. редакцией: В. В. БОЗРОВА

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год

ЭЛЕКТРОННАЯ ВЕРСИЯ: www.vlmj.ru

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций:

свид. ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.;

свид. ЭЛ № ФС77-70171 от 21 июня 2017 г.

© Владикавказский научный центр РАН, 2020

Editor-in-Chief

ANATOLY G. KUSRAEV
Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,
Vladikavkaz, Russia

Editorial Executive Secretary

ELENA K. BASAEVA
Southern Mathematical Institute of VSC RAS,
Vladikavkaz, Russia

Editorial Board

ALEXANDER V. ABANIN
Southern Federal University,
Rostov-on-Don, Russia

JOSÉ BONET
Universitat Politècnica de València,
Valencia, Spain

EVGENY I. GORDON
Eastern Illinois University, Charleston, USA

LE HAI KHOI
Nanyang Technological University, Singapore

VLADIMIR A. KOIBAEV
North Ossetian State University,
Vladikavkaz, Russia

YURII F. KOROBAYNIK
Southern Mathematical
Institute VSC RAS,
Vladikavkaz, Russia

ALEXANDER I. KOZHANOV
Sobolev Institute of Mathematics
of Siberian Branch of the RAS,
Novosibirsk, Russia

SEMEN S. KUTATELADZE
Sobolev Institute of Mathematics
of Siberian Branch of the RAS,
Novosibirsk, Russia

GEORGII G. MAGARIL-IL'YAEV
Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia

VICTOR D. MAZUROV
Sobolev Institute of Mathematics
of Siberian Branch of the RAS,
Novosibirsk, Russia

STEFAN G. SAMKO
Universidade do Algarve,
Faro, Portugal;
Southern Federal University,
Rostov-on-Don, Russia

ALEXEY B. SHABAT
Landau Institute for Theoretical
Physics, Chernogolovka, Russia

PHAM TRONG TIEN
Vietnam National University,
Hanoi, Vietnam

VLADIMIR G. TROITSKY
University of Alberta,
Edmonton, Canada

ALEXANDER O. VATULYAN
Southern Federal University,
Rostov-on-Don, Russia

NIKOLAI A. VAVILOV
Saint Petersburg State University,
Saint Petersburg, Russia

SERGEI K. VODOPYANOV
Sobolev Institute of Mathematics
of Siberian Branch of the RAS,
Novosibirsk, Russia

Editorial Office: 22 Markusa St., Vladikavkaz 362027,
the Republic of North Ossetia-Alania, Russia
Phone: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru
Managing editor: V. V. BOZROVA

The journal was founded in 1999. It is published four times a year.
ELECTRONIC VERSION: www.vlmj.ru

Registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom,
Information Technologies and Mass Communications:
ПИ № ФС77-70008 dated May 31, 2017; ЭЛ № ФС77-70171 dated June 21, 2017.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 22, выпуск 1

январь–март, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| Артисевич А. Е., Шабат А. Б. Три теоремы о матрицах Вандермонда | 5 |
| Бесаева З. В., Тедеев А. Ф. Скорость убывания массы решения задачи Коши дважды нелинейного параболического уравнения с абсорбцией | 13 |
| Булыгин А. И. О некоторых свойствах подобно однородных \mathbb{R} -деревьев | 33 |
| Vamshee Krishna, D. and Shalini, D. Hankel Determinant of Third Kind for Certain Subclass of Multivalent Analytic Functions | 43 |
| Кадиев Р. И. Устойчивость импульсных систем двух линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздыванием | 49 |
| Hemavathi, P. S., Loksha, V., Manjunath, M., Reddy, P. S. K. and Shruti, R. Topological Aspects Boron Triangular Nanotube and Boron- α Nanotube | 66 |
| Франчук С. К. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа G_2 над полями характеристики $p > 0$ | 78 |
| Хубежты Ш. С. Численное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода | 85 |
| МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ | |
| А. В. Абанину — 65 лет | 93 |

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTER
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 22, issue 1

January–March, 2020

CONTENT

| | |
|--|----|
| Artisevich, A. E. and Shabat, A. B. Three Theorems on Vandermond Matrices | 5 |
| Besaeva, Z. V. and Tedeev, A. F. The Decay Rate of the Solutio to the Cauchy Problem for Doubly Nonlinear Parabolic Equation with Absorption | 13 |
| Bulygin, A. I. About Some Properties of Similarly Homogeneous \mathbb{R} -Trees | 33 |
| Vamshee Krishna, D. and Shalini, D. Hankel Determinant of Third Kind for Certain Subclass of Multivalent Analytic Functions | 43 |
| Kadiev, R. I. Stability of Impulse Systems of Two Linear Ito Differential Equations with Delay | 49 |
| Hemavathi, P. S., Loksha, V., Manjunath, M., Reddy, P. S. K. and Shruti, R. Topological Aspects Boron Triangular Nanotube and Boron- α Nanotube | 66 |
| Franchuk, S. K. On Irreducible Carpets of Additive Subgroups of Type G_2 Over Fields of Characteristic $p > 0$ | 78 |
| Khubezhty, Sh. S. On Numerical Solution of Hypersingular Integral Equations of the First Kind | 85 |
| MATHEMATICAL LIFE | |
| Abanin Alexander Vasil'evich (on his 60's anniversary) | 93 |

Vladikavkaz
2020

УДК 517.95

DOI 10.23671/VNC.2020.1.57532

ТРИ ТЕОРЕМЫ О МАТРИЦАХ ВАНДЕРМОНДА

А. Е. Артисевич¹, А. Б. Шабат²

¹ Адыгейский государственный университет,
Россия, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 20;

² Институт теоретической Физики им. Ландау РАН,
Россия, 142432, Черноголовка, пр. Ак. Семенова, 1а

E-mail: cokolovangela@rambler.ru, shabatab@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются алгебраические вопросы, связанные с дискретным преобразованием Фурье, определенным при помощи симметричной матрицы Вандермонда Λ . Основное внимание в первых двух теоремах уделяется выработке формулировок, независимых от размера $N \times N$ матрицы Λ и явных формул для элементов матрицы Λ через корни уравнения $\lambda^N = 1$. В третьей теореме рассматриваются рациональные функции $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие условию «вещественности» $f(\lambda) = f(\frac{1}{\lambda})$ на всей комплексной плоскости и связанные с известной задачей о коммутировании симметричных матриц Вандермонда Λ с (симметричными) трехдиагональными матрицами T . Показано, что уже несколько первых уравнений коммутирования и указанное выше условие вещественности определяют вид рассматриваемых рациональных функций $f(\lambda)$, а найденные уравнения для элементов трехдиагональных матриц T не зависят от порядка N коммутирующих матриц. Полученные уравнения и приведенные примеры позволяют высказать гипотезу о том, что рассматриваемые рациональные функции являются обобщением многочленов Чебышева. В определенном смысле аналогичная гипотеза была высказана в недавно опубликованной в журнале «Теоретическая и математическая физика» работе В. М. Бухштабера с соавторами, где обсуждаются приложения этих обобщений в современной математической физике.

Ключевые слова: матрица Вандермонда, дискретное преобразование Фурье, условия коммутирования, многочлены Лорана.

Mathematical Subject Classification (2010): 42A38.

Образец цитирования: Артисевич А. Е., Шабат А. Б. Три теоремы о матрицах Вандермонда // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 1.—С. 5–12. DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57532.

1. Симметричные матрицы Вандермонда

Мы называем матрицу Вандермонда A общего вида с комплексными элементами x_i^j :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^{N-1} \end{pmatrix}, \quad x_j \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

симметричной, если $A^T = A$. В этом случае $x_1 = 1$, а все остальные x_j являются степенями одного и того же комплексного числа λ . Этот частный случай матрицы Вандермонда (1) имеет следующий вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda^{N-1} & \lambda^{2(N-1)} & \dots & \lambda^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Известное свойство унитарности матриц дискретного преобразования Фурье (см. [1]), приводит нас к следующему уравнению для матриц Вандермонда (1):

$$AA^* = A^*A = N \cdot E, \quad (3)$$

где $*$ обозначает эрмитово сопряжение $A^* = \bar{A}^T$, а $E = \text{diag}(1, \dots, 1)$ — единичную матрицу.

Теорема 1. Матрица Вандермонда (1) удовлетворяет уравнению (3) в том и только в том случае, если x_j для $j = 1, 2, \dots, N$ являются N различными корнями уравнения $x^N = e^{iN\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. При этом матрица (1) записывается в виде произведения симметричной матрицы Вандермонда (2) с $\lambda^N = 1$ и диагональной $A = \Lambda \cdot \text{diag}(1, e^{i\gamma}, e^{i2\gamma}, \dots)$.

Последнюю формулу в теореме поясним следующим примером.

ПРИМЕР 1.1. Выбор $x_1 = e^{i\gamma}$ находится в нашем распоряжении и, выбрав при $N = 3$

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) \Rightarrow x_1^2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad x_1^3 = i; \quad \lambda = e^{\frac{2}{3}i\pi}, \quad (4)$$

мы получаем «унитарную» матрицу (1), удовлетворяющую уравнению (3):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1^2 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = 1.$$

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим диагональные элементы с номерами [22] и [33] произведения A^*A . Уравнение (3) дает для разностей $y_j = |x_j|^2 - 1$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_N = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_N^2 = 0 \Rightarrow y_j = 0 \quad (\forall j \in [N]).$$

Поэтому справедливо утверждение

Лемма 1. В условиях теоремы 1 выполняется $|x_j| = 1$ для любого j .

Таким образом независимо от размера матрицы Вандермонда доказательство теоремы 1 сводится в силу формул Виета к проверке импликации

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_N = 0, \\ x_1^2 + \dots + x_N^2 = 0, \\ \dots \dots \dots \\ x_1^{N-1} + \dots + x_N^{N-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_j^N = a \quad (\forall j \in [N]).$$

Остается заметить, что $|a| = 1$ в силу леммы 1 и что уравнение $z^N = a$ сводится к уравнению $\lambda^N = 1$ заменой $z = e^{i\gamma}$ при $a = e^{iN\gamma}$. Доказательство обратного утверждения, т. е. $\lambda = e^{\frac{2i\pi}{N}} \Rightarrow (3)$, можно извлечь из цитированной выше монографии [1].

ПРИМЕР 1.2. Пусть $N = 3$. Тогда восемь уравнений матричного равенства $A^*A = 3E$ можно представить в виде трех систем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 3; \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = 0; \\ y_1\bar{x}_1 + y_2\bar{x}_2 + y_3\bar{x}_3 = 0, \end{cases}$$

где мы сменили обозначения леммы 1 и $y_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j\bar{x}_j$. В силу леммы $y_j = 1 \Leftrightarrow x_j\bar{x}_j = 1$ для любого $j = 1, 2, 3$. При этом последняя система уравнений совпадает с первой, а вторая превращается в тождества вида $3 = 3$. Аналогично в случае $N = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix}$$

и 16 уравнений матричного равенства $A^*A = 4E$, при условии что $y_j = x_j\bar{x}_j = 1$,

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_4 = 0; \\ x_1^2 + \dots + x_4^2 = 0; \\ x_1^3 + \dots + x_4^3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + \dots + y_4 = 4; \\ y_1^2 + \dots + y_4^2 = 4; \\ y_1^3 + \dots + y_4^3 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1x_1 + \dots + y_4x_4 = 0; \\ y_1x_1^2 + \dots + y_4x_4^2 = 0; \\ y_1^2x_1 + \dots + y_4^2x_4 = 0 \end{cases}$$

сводятся к трем уравнениям первой из этих систем.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Множество корней из единицы при $N = 3$ состоит из трех элементов, образующих циклическую группу. При этом любой из элементов $\lambda_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\lambda_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$ можно использовать в качестве образующей циклической группы. Если решать рассматриваемую полиномиальную систему из 8 уравнений при помощи вычислительной техники, то решения записываются в виде, аналогичном (4), но со свободным параметром. Компьютер выдает два таких решения (с учетом перестановок). Следует заметить, что уже для случая $N = 5$ вычислительная техника испытывает затруднения и не доводит решение до конца.

Следующая теорема показывает, что для симметричных матриц Вандермонда Λ вида (2) условие $\Lambda\Lambda^* = N \cdot E$ из теоремы 1 можно заменить условием $\Lambda^2 = N \cdot Q$, где Q — матрица перестановок, состоящая из нулей и единиц:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Теорема 2. Симметричная $N \times N$ матрица Вандермонда (2) является матрицей дискретного преобразования Фурье и удовлетворяет условию $\lambda^N = 1$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^2 = N \cdot Q$, где Q — симметричная матрица перестановок (5).

◁ Доказательство этой теоремы приведено в монографии [1], и мы ограничимся замечанием, что для вывода основного уравнения $\lambda^N = 1$ достаточно приравнять к нулю элемент с номером $\boxed{12}$ в матрице Λ^2 , так как при $\lambda \neq 0$

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{N-1} = 0 \Rightarrow \lambda^N = 1. \triangleright$$

2. Канонические многочлены Лорана

Следуя работам [2, 3], рассмотрим теперь связанное с матрицами Вандермонда (1) коммутационное уравнение $TA = AT$, где T — трехдиагональная матрица общего вида:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{b}_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \tilde{b}_{N-1} & a_N \end{pmatrix}, \quad (6)$$

элементы которой можно выразить через элементы матрицы (1). В дополнение к работе [2] мы покажем, что в условиях теоремы 2, т. е. для симметричных матриц Вандермонда вида (2), диагональные элементы a_j матрицы (6) записываются в виде «канонических» многочленов Лорана:

$$P_n(\lambda) = \prod_{j=1}^n \left(\lambda + \gamma_j + \frac{1}{\lambda} \right). \quad (7)$$

Отметим, что коэффициенты этих «многочленов» степени $2n$ определяются только их номером n (см. ниже) и не зависят от размера N рассматриваемой симметричной матрицы (2).

2.1. Необходимые условия коммутирования. Схема вывода формул, выражающих элементы треугольной матрицы через элементы матрицы Вандермонда (1), мало зависит от предположения симметричности $A^T = A$, и мы ограничимся ниже именно этим случаем, предполагая для простоты искомую матрицу (6) также симметричной. Коммутатор симметрических матриц кососимметричен и его первая строка с элементами $\boxed{12}$, $\boxed{13}$, ... позволяют выразить разности диагональных элементов $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1$, ... через недиагональные. В результате получаем

$$\begin{cases} \boxed{12} : a_1 + b_1\lambda = b_1 + a_2 + b_2, & a_2 - a_1 = \lambda b_1 - b_1 - b_2, \\ \boxed{13} : a_1 + b_1\lambda^2 = b_2 + a_3 + b_3, & a_3 - a_1 = \lambda^2 b_1 - b_2 - b_3, \\ \boxed{14} : a_1 + b_1\lambda^3 = b_3 + a_4 + b_4, & a_4 - a_1 = \lambda^3 b_1 - b_3 - b_4, \dots \end{cases} \quad (8)$$

Вторая строка коммутатора с элементами $\boxed{23}$, $\boxed{24}$, $\boxed{25}$... дает

$$\begin{cases} \boxed{23} : b_1 + a_2\lambda^2 + b_2\lambda^4 = b_2\lambda + a_3\lambda^2 + b_3\lambda^3, \\ \boxed{24} : b_1 + a_2\lambda^3 + b_2\lambda^6 = b_3\lambda^2 + a_4\lambda^3 + b_4\lambda^4, \\ \boxed{25} : b_1 + a_2\lambda^4 + b_2\lambda^8 = b_4\lambda^3 + a_5\lambda^4 + b_5\lambda^5 \end{cases} \quad (9)$$

и, подставив сюда найденные из предыдущих уравнений разности диагональных элементов, находим уравнения для выражения b_j , $j \geq 2$, через b_1 и b_2 . В частности,

$$\begin{aligned} b_3(\lambda) &= \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 1 \right) b_2(\lambda) - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \right) b_1(\lambda), \\ b_4(\lambda) &= \left(\lambda^2 + \lambda + 2 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \right) b_2(\lambda) - \left(\lambda^2 + \lambda + 1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) b_1(\lambda). \end{aligned} \quad (10)$$

Итак, можно считать доказанной следующую теорему 3.

Теорема 3. Первые две строки уравнений коммутативности (8) и (9) позволяют найти вид коэффициентов трехдиагональной матрицы T в форме многочленов Лорана от независимой переменной λ и выразить их через $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$.

Сравнив полученные выражения с уравнением, полученным из элемента $\boxed{34}$ коммутатора

$$b_2\lambda^3 + a_3\lambda^6 + b_3\lambda^9 = \lambda^4b_3 + \lambda^6a_4 + \lambda^9b_4, \quad (11)$$

приходим к выводу (ср. [2]), что условие $b_1 = 0$ является *необходимым условием* для выполнения коммутационных соотношений $TA = AT$ в симметричном случае (2).

2.2. Формулы Виета. Рассматривая условия разрешимости коммутационных соотношений в кольце многочленов Лорана $\sum c_j\lambda^j$ от формальной переменной λ , будем использовать следующие обозначения:

$$\sum c_j\lambda^j = \left[\sum c_j\lambda^j \right]_- + \left[\sum c_j\lambda^j \right]_+; \quad \left[\sum c_j\lambda^j \right]_+ \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \geq 0} c_j\lambda^j,$$

где квадратные скобки $[\dots]_+$ и $[\dots]_-$ обозначают сумму соответственно членов с отрицательными и положительными степенями λ .

Лемма 2. Пусть $b_1 = 0$, $b_2 = 1$. Тогда все многочлены Лорана $b_m(\lambda)$ и $a_m(\lambda)$, найденные из уравнений (8) и (9), инвариантны относительно замены $\lambda \leftrightarrow \lambda^{-1}$, и для многочлена $a_{N+2}(\lambda)$ при любом $N > 0$ имеем

$$\begin{aligned} -[a_{N+2}]_+ &= \lambda^N + 2\lambda^{N-1} + 3\lambda^{N-2} + \dots + N\lambda + N, \\ [\lambda a_{N+2}]_- &= [a_{N+1}]_-, \quad N > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

\triangleleft Уравнения первой строчки при $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ и $a_1 = 1$ дают

$$a_2 = 0, \quad a_3 + b_3 = 0, \quad a_m = 1 - b_m - b_{m-1}, \quad m > 3. \quad (13)$$

Учитывая формулы (8), (9), получаем теперь (ср. [2]), что при $m > 0$

$$b_{m+1} = \frac{1}{\lambda}b_m + 1 + \lambda + \dots + \lambda^{m-1}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1.$$

Найденные по этим формулам многочлены Лорана $b_m(\lambda)$ инвариантны относительно замены $\lambda \leftrightarrow \lambda^{-1}$ и для доказательства уравнений (12) остается применить индукцию к $b_m + b_{m-1} - 1$. \triangleright

Следствием полученных выше формул является

Лемма 3. При $m \geq 3$ комплексные корни $\lambda^m = 1$ из единицы являются комплексными нулями многочленов Лорана $a_m(\lambda)$, $m \geq 3$, из леммы 3.

\triangleleft Заменив при помощи уравнения $\lambda^m = 1$, $m = N + 2$, отрицательные степени λ в формуле (12) на положительные

$$\begin{aligned} P_N(\lambda) &= \lambda^N + 2\lambda^{N-1} + 3\lambda^{N-2} + \dots + N\lambda + N + \frac{N}{\lambda} + \dots + \frac{1}{\lambda^N}, \\ \lambda^{N+2} = 1 &\Rightarrow \frac{1}{\lambda^N} = \lambda^2, \quad \frac{1}{\lambda^{N-1}} = \lambda^3, \dots, \quad \frac{1}{\lambda} = \lambda^{N+1}, \end{aligned}$$

после приведения подобных членов получаем

$$P_N(\lambda) \equiv N(\lambda^{N+1} + \lambda^N + \dots + 1) = 0, \quad \text{mod } \lambda^{N+2} = 1. \quad \triangleright \quad (14)$$

** В статье [4] получены аналогичные формулы.

Очевидно, общее число $2n$ комплексных корней многочленов Лорана $P_n(\lambda)$ из формулы (7) превосходит при $n > 2$ число $n + 2$ соответствующих комплексных корней из единицы. Дополнительные корни уравнения $P_n(\lambda) = 0$ можно найти, используя обобщенные *формулы Виета*, приспособленные к произведениям вида (7):

$$\begin{aligned} \left(\lambda + \gamma_1 + \frac{1}{\lambda}\right) \left(\lambda + \gamma_2 + \frac{1}{\lambda}\right) &= \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + (\gamma_1 + \gamma_2) \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + \gamma_1\gamma_2 + 2, \\ P_n(\lambda) = \prod_{j=1}^n \left(\lambda + \gamma_j + \frac{1}{\lambda}\right) &= \lambda^n + \frac{1}{\lambda^n} + \tilde{\sigma}_1 \left(\lambda^{n-1} + \frac{1}{\lambda^{n-1}}\right) + \tilde{\sigma}_2 \left(\lambda^{n-2} + \frac{1}{\lambda^{n-2}}\right) + \dots + \tilde{\sigma}_n. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты $\tilde{\sigma}_j$ выражаются через элементарные симметрические многочлены σ_i , $i \leq j$,

$$\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 = \sum \gamma_i; \quad \tilde{\sigma}_2 = \sigma_2 + n = n + \sum_{i < j} \gamma_i \gamma_j, \quad n > 2,$$

и определяются при $j \geq 2$ следующей рекуррентной формулой:

$$\tilde{\sigma}_j(n+1) = \tilde{\sigma}_j(n) + \gamma_{n+1} \tilde{\sigma}_{j-1}(n) + \tilde{\sigma}_{j-2}(n), \quad \tilde{\sigma}_0 = 1. \quad (15)$$

ПРИМЕР 3. При $n = 3$ комплексные корни уравнения $\lambda^5 = 1$ дают 4 из 6 корней рассматриваемого уравнения:

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3} + 2 \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) + 3 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + 3 = \prod_{j=1}^3 \left(\lambda + \gamma_j + \frac{1}{\lambda}\right) = 0.$$

Формулы Виета приводят в этом случае к следующей системе уравнений для γ_j :

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 2, \quad \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_3\gamma_2 = 0, \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -1.$$

Можно проверить независимо, что рассматриваемый многочлен $P_3(\lambda)$ является приводимым и факторизуется следующим образом:

$$P_3(\lambda) = \left(\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda}\right) \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + \lambda + \frac{1}{\lambda} + 1\right).$$

3. Заключение

Свойство унитарности матриц дискретного преобразования Фурье $AA^* = NE$ допускает, как следует из теоремы 1, дополнительные возможности (см. пример 1), которые могут использоваться при дискретном преобразовании Фурье квази-периодических функций. Имея в виду полный отказ от условий периодичности преобразуемых функций, представляется интересным исследовать возможности, предоставляемые коммутационными соотношениями вида

$$[T, A] = TA - AT = 0, \quad (16)$$

где A — матрица Вандермонда (1) и T — трехдиагональная матрица (6) общего вида. Дополнительный интерес в этой задаче связан с алгебраическими обобщениями уравнения $\lambda^N = 1$, рассмотренными в заключительном разделе данной работы и с многочленами Чебышева.

Литература

1. Бурланков Д. Е., Кузнецов М. И., Чирков А. Ю., Яковлев В. А. Компьютерная алгебра.—Нижний Новгород: Нижегородский гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского, 2002.—105 с.
2. Grunbaum F. A. The eigenvectors of the discrete Fourier transform: a version of the Hermite functions // J. Math. Anal. Appl.—1982.—Vol. 88, № 2.—P. 355–363. DOI: 10.1016/0022-247X(82)90199-8.
3. Шабат А. Б. Симметрические многочлены и законы сохранения // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, вып. 4.—С. 83–94. DOI 10.23671/VNC.2012.14.11014.
4. Бухштабер В. М., Тертыйный С. И. Семейство явных решений уравнений резистивной модели перехода Джозефсона // Теор. и мат. физика.—2013.—Т. 176, № 2.—С. 163–188. DOI: 10.4213/tmf8512.

Статья поступила 16 июля 2019 г.

Артисевич Анжела Евгеньевна
Адыгейский государственный университет,
старший преподаватель кафедры мат. анализа
РОССИЯ, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 20
E-mail: cokolovangela@rambler.ru

Шабат Алексей Борисович
Институт теоретической Физики им. Ландау РАН,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 142432, Черноголовка, пр. Ак. Семенова, 1а
E-mail: shabatab@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 1, P. 5–12

THREE THEOREMS ON VANDERMOND MATRICES

Artisevich, A. E.¹ and Shabat, A. B.²

¹ Adyghe State University,

208 Pervomayskaya St., Maikop 385000, Russia;

² Landau Institute for Theoretical Physics,

1A Akademika Semenova Ave., Chernogolovka 142432, Russia;

E-mail: cokolovangela@rambler.ru, shabatab@mail.ru

Abstract. We consider algebraic questions related to the discrete Fourier transform defined using symmetric Vandermonde matrices Λ . The main attention in the first two theorems is given to the development of independent formulations of the size $N \times N$ of the matrix Λ and explicit formulas for the elements of the matrix Λ using the roots of the equation $\Lambda^N = 1$. The third theorem considers rational functions $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, satisfying the condition of “materiality” $f(\lambda) = f(\frac{1}{\lambda})$, on the entire complex plane and related to the well-known problem of commuting symmetric Vandermonde matrices Λ with (symmetric) three-diagonal matrices T . It is shown that already the first few equations of commutation and the above condition of materiality determine the form of rational functions $f(\lambda)$ and the equations found for the elements of three-diagonal matrices T are independent of the order of N commuting matrices. The obtained equations and the given examples allow us to hypothesize that the considered rational functions are a generalization of Chebyshev polynomials. In a sense, a similar, hypothesis was expressed recently published in “Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika” by V. M. Bukhstaber et al., where applications of these generalizations are discussed in modern mathematical physics.

Key words: Vandermonde matrix, discrete Fourier transform, commutation conditions, Laurent polynomials.

Mathematical Subject Classification (2010): 42A38.

For citation: Artisevich, A. E. and Shabat, A. B. Three Vandermonde Matrices Theorem, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 1, pp. 11–12 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57532.

References

1. Burlankov, D. Ye., Kuznetsov, M. I., Chirkov A. Yu. and Yakovlev, V. A. *Computer Algebra*, Nizhny Novgorod, N. I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 2002, 105 p.
2. Grunbaum, F. A. The Eigenvectors of the Discrete Fourier Transform: A Version of the Hermite Functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 1982, vol. 88, no. 2, pp. 355–363. DOI: 10.1016/0022-247X(82)90199-8.
3. Shabat, A. B. Symmetrical Polynomials and Conservation Laws, *Vladikavkaz Math. J.*, 2012, vol. 14, no. 4, pp. 83–94. DOI: 10.23671/VNC.2012.14.11014.
4. Buchstaber, V. M. and Tertychniy, S. I. Explicit Solution Family for the Equation of the Resistively Shunted Josephson Junction Model, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2013, vol. 176, pp. 965–986. DOI: 10.1007/s11232-013-0085-2.

Received July 16, 2019

ANZHELA E. ARTISEVICH
Adygeya State University,
208 Pervomayskaya St., Maikop 385000, Russia,
Senior Lecturer
E-mail: cokolovangela@rambler.ru

ALEXEY B. SHABAT
Landau Institute for Theoretical Physics,
1A Akademika Semenova Ave., Chernogolovka 142432, Russia,
Professor
E-mail: shabatab@mail.ru

УДК 517.944

DOI 10.23671/VNC.2020.1.57535

СКОРОСТЬ УБЫВАНИЯ МАССЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ
ДВАЖДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
С АБСОРБЦИЕЙ

З. В. Бесаева¹, А. Ф. Тедеев²

¹Юго-Осетинский государственный университет им. А. А. Тибилова,
Республика Южная Осетия, 100001, Цхинвал, ул. Путина, 8;

²Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: besaeva.85@mail.ru, a_tedeev@yahoo.com

Аннотация. В работе изучается задача Коши для широкого класса квазилинейных параболических уравнений второго порядка с неоднородной плотностью и абсорбцией. Хорошо известно, что для рассматриваемого класса задач без абсорбции и при условии, что плотность стремится к нулю не слишком быстро, имеет место закон сохранения тотальной массы. Однако этот факт не всегда имеет место при наличии абсорбции. В данной работе найдены точные условия на характер нелинейности и поведения неоднородной плотности на бесконечности, которые гарантируют стремление к нулю тотальной массы решения при неограниченном возрастании времени. Другими словами, найден критерий стабилизации к нулю тотальной массы решения в терминах критических показателей. С помощью полученных результатов и локальных оценок типа Нэша — Мозера выводятся точные оценки решения в равномерной метрике.

Ключевые слова: задача Коши, вырождающиеся параболические уравнения, неоднородная плотность, абсорбция, критические показатели.

Mathematical Subject Classification (2010): 35K92, 35B33, 35E15.

Образец цитирования: Бесаева З. В., Тедеев А. Ф. Скорость убывания массы решения задачи Коши дважды нелинейного параболического уравнения с абсорбцией // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 1.—С. 13–32. DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57535.

1. Введение

В данной работе рассматривается задачи Коши для решения квазилинейных вырождающихся параболических уравнений вида

$$\rho(|x|)u_t - \operatorname{div} \vec{A}(x, t, u, \nabla u) + g(x, t, u) = 0, \quad (1.1)$$

$(x, t) \in s : \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$, удовлетворяющих начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad \rho(s) > 0, \quad 0 < s < \infty, \quad u_0(x) \geq 0, \quad \rho u_0(x) \in L_1(\mathbb{R}^N). \quad (1.2)$$

На протяжении всей работы предполагается выполнение следующих условий. Вектор-функция $\vec{A}(x, t, u, \xi) = (A_1(x, t, u, \xi), \dots, A_N(x, t, u, \xi)) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ и $g(x, t, u)$:

$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют условию Каратеодори, т. е. измеримы по переменным $(x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}$ и непрерывны соответственно по переменным $u \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$. Функция $\rho(s): \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ непрерывна монотонно убывающая функция по $s \in [0, \infty]$. Кроме того, предполагается выполнение следующих структурных условий: существуют положительные постоянные μ_1 и μ_2 такие, что

$$\vec{A}(x, t, u, \xi)\xi \geq \mu_1|\xi|^p |u|^{m-1}, \quad (1.3)$$

$$|\vec{A}(x, t, u, \xi)| \leq \mu_2|\xi|^{p-1} |u|^{m-1}, \quad (1.4)$$

$$\mu_2|u|^q \geq \text{sign } u, \quad g(x, t, u) \geq \mu_1|u|^q. \quad (1.5)$$

Кроме того, выполнено условия монотонности: для любых двух векторов $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ и $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$, для любого $u \in \mathbb{R}$, т. е. для $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ выполнены неравенства

$$(\vec{A}(x, t, u, \xi) - \vec{A}(x, t, u, \eta))(\xi - \eta) \geq 0, \quad (1.6)$$

$$[g(x, t, u_1) - g(x, t, u_2)][u_1 - u_2] \geq 0 \quad (1.7)$$

для всех ξ_1 и η_2 из \mathbb{R}^N . Постоянные p, m, q удовлетворяют следующим условиям:

$$1 < p + m - 2, \quad q > 1, \quad p > 1. \quad (1.8)$$

Предположим также, что функция $\rho(s)$ для всех $s > 0$ удовлетворяет условию **H**:
Существуют такие положительные постоянные l_1 и l_2 , причем $l_1 < p$, что функция $\rho(s)s^{l_1}$ монотонно убывает, а функция $\rho(s)s^{l_2}$ монотонно растет.

Примером уравнения (1.1) является

$$\rho(|x|)u_t = \Delta_{m,p}u - |u|^{q-1}u, \quad (1.9)$$

где

$$\Delta_{m,p}u := \text{div}(|u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

и $\rho(s) \sim s^{-l}$, $s \geq 1$, $0 < l < p$. Здесь символ \sim — наличие двусторонней оценки

$$c_1s^{-l} \leq \rho(s) \leq c_2s^{-l} \quad (\forall s \geq 1, c_1, c_2 > 0). \quad (1.10)$$

Для уравнения

$$\rho(|x|)u_t = \Delta_{m,p}u \quad (1.11)$$

с конечным интегралом $\|\rho u_0\|_1 := \int_{\mathbb{R}^N} \rho u_0 dx$, который принято называть *тотальной массой* или просто *массой начальной функции*, при выполнении, например, условия (1.10), справедлив закон сохранения «массы» (см. [1]):

$$\|\rho u_0\|_1 = \|\rho u(t)\|_1 \quad (\forall t > 0).$$

В работе [1] для задачи (1.1), (1.2) с $\rho(x) = (1 + |x|)^{-l}$, $l < p$, $g(x, t, u) \equiv 0$ установлена равномерная оценка решения

$$\|u(t)\|_\infty := \|u(x, t)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\rho u_0\|_1^{\frac{p-l}{h_1}} t^{-\frac{N-l}{h_1}} \quad (1.12)$$

для любых $t > 0$. Кроме того, из [1] следует, что если

$$\text{supp } u_0(x) \subset B_{R_0}(0) := \{x \in \mathbb{R}^N / |x| < R_0\}, \quad R_0 < \infty,$$

то $\text{supp } u(x, t)$ принадлежит шару $B_{\overline{R}(t)}(0)$, где

$$\overline{R}(t) = 4R_0 + \gamma \|u_0 \rho\|_1^{\frac{p+m-3}{h_1}} t^{\frac{1}{h_1}}. \quad (1.13)$$

Однако наличие абсорбирующего слагаемого в уравнении (1.1) может существенно изменить качественные свойства решений. В частности, тотальная масса $\|u\rho\|_1$ решения может стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$. Указанный феномен имеет место при $\rho(s) \equiv 1$. В этом случае (1.9) допускает «плоское» решение вида

$$U(t) \equiv C(p)(t+T)^{-\frac{1}{q-1}}.$$

Кроме того, для (1.9) справедлива также оценка (1.12) с $l = 0$. Таким образом, по теореме сравнения для решения задачи Коши (1.9), (1.2) имеет место оценка

$$\|u(t)\|_\infty \leq C \min \left\{ \|u_0\|_1^{\frac{p}{\beta}} t^{-\frac{N}{\beta}}, t^{-\frac{1}{q-1}} \right\} \quad (1.14)$$

при $t > 1$. Здесь $\beta = N(p+m-3) + p$.

Очевидно, что в (1.14) при достаточно больших t

$$\|u(t)\|_\infty \leq C t^{-\frac{1}{q-1}} \quad (1.15)$$

и условии, что $\frac{N}{\beta} < \frac{1}{q-1}$, т. е.

$$q < q^* = p + m - 2 + \frac{p}{N}.$$

Оказывается, что в этом случае $\|u(t)\|_1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и можно указать точную оценку массы решения. Подойдем теперь к этой же проблеме шире. Из оценки $L_1 - L_\infty$ типа Нэша — Мозера (см., например, [2]), имеем

$$\|u(t)\|_\infty \leq C \left\| u\left(\frac{t}{2}\right) \right\|_1^{\frac{p}{\beta}} t^{-\frac{N}{\beta}}. \quad (1.16)$$

Теперь, если иметь точную по порядку оценку массы при достаточно больших t , то можно снова прийти к тому же результату (1.14). Однако такой подход может быть применен к более широкому классу уравнений, а оценка массы решения, как это будет видно ниже, сводится к локальным энергетическим оценкам, имеющим в определенном смысле универсальный характер. В данной работе используются подходы работ [2–5] при изучении точного поведения тотальной массы решения задачи (1.1), (1.2) при $t \rightarrow \infty$.

Отметим, что исследование уравнения (1.11), представляет независимый интерес. Известно, что [6–8] в зависимости от скорости стремления к нулю на бесконечности $\rho(x)$ решение задачи (1.1), (1.2) обладает рядом нестандартных свойств. Укажем здесь на работы [9–17]. Оценкам массы решения для различных классов вырождающихся параболических уравнений были посвящены также работы [9, 10] (см. также имеющуюся там литературу). Прежде чем перейти к формулировкам основных результатов работы введем понятие решения (обобщенного) задачи (1.1), (1.2).

Решением задачи (1.1), (1.2) в $S = \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ будем называть функцию $u(x, t)$, которая для любых $t > 0$, $T > t$, $\sigma = \frac{p-1}{p+m-2}$ удовлетворяет условиям $u^{\frac{1}{\sigma}}(x, t)$, принадлежит классу

$$L_p(t, T) \times W_p^1(\mathbb{R}^N) \cap C([t, T] : L_{1+\sigma, \rho(|x|)}(\mathbb{R}^N)) \cap L_{q+\frac{1}{\sigma}}((t, T), L_{q+\frac{1}{\sigma}})$$

и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_t^T \int_{\mathbb{R}^N} \left((-u(x, \tau) \eta_\tau(x, \tau) \rho(|x|)) + \sum_{i=1}^N A_i(x, t, u, \nabla u) \eta_{x_i} + g(x, t, u) \eta(x, \tau) \right) dx d\tau \quad (1.17)$$

для любой $\eta(x, \tau) = 0$ при $\tau = t$ и $\tau = T$, $\eta^{\frac{1}{\sigma}}(x, t), \eta^{\frac{1}{\sigma}} \in L_{1+\sigma}(\rho(|x|)(t, T) : L_{1+\frac{1}{\sigma}}, \rho(|x|))$, $\eta^{\frac{1}{\sigma}}(x, t) \in L_p((t, T) \times W_p^1(\mathbb{R}^N)) \cap L_{q+\frac{1}{\sigma}}((t, T), L_{q+\frac{1}{\sigma}})$.

Кроме того, $u(x, t)$ удовлетворяет начальному условию

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) \rho(|x|) \zeta(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \rho(x) \zeta(x) dx.$$

Существование решения (1.1), (1.2) доказывается точно также, как в работе [1]. Единственность энергетического решения в случае $\rho(s) = \text{const}$ и начально-краевой задачи Коши — Дирихле хорошо известно. Таким образом, если $\text{supp } u_0 \subset B_{R_0}$, т. е. для начальной функции с компактным носителем единственность решения (1.1), (1.2) гарантирована.

Основные результаты работы содержатся в теоремах 1.1–1.5.

Обозначим $\Phi(R) := R^{N - \frac{p}{q - (p+m-2)}} \rho(R)$.

Теорема 1.1. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1.1), (1.2) в $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ и выполнены условия (1.3)–(1.7) и условие **Н**. Предположим, что $\Phi(R)$ для всех $R > 0$ строго монотонно убывает и

$$\Phi(R) \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty. \quad (1.18)$$

Тогда

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}^N} \rho(|x|) u(x, t) dx \leq \gamma \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\gamma \bar{R}(t)}} \rho(|x|) u_0(x) dx + \gamma \Phi(\bar{R}(t)), \quad (1.19)$$

где $\bar{R}(t)$ — функция, определяемая из соотношения $\rho(R) R^{\frac{p(q-1)}{q-(p+m-2)}}$ для любого $t > 0$.

Теорема 1.2. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1.1), (1.2) в $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ и выполнены условия (1.3)–(1.7) и условие **Н**. Предположим, что существуют положительные постоянные C_1, C_2 такие, что для всех $R > 0$

$$C_1 \leq \Phi(R) \leq C_2. \quad (1.20)$$

Тогда при достаточно больших значениях t выполняется оценка

$$E(t) \leq \gamma [\ln t]^{-\frac{1}{q-1}}. \quad (1.21)$$

Теорема 1.3. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1.1), (1.2) в $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ и выполнены условия (1.3)–(1.8), $q > q_l^*$, $\text{supp } u_0 \subset B_{R_0}$, $\rho(|x|) = \text{const}(1 + |x|)^{-l}$, $0 \leq l < p$. Тогда для достаточно больших значений времени t существует $Y = \gamma(\|u_0 \rho\|_1, \mu_1, \mu_2)$ такое, что

$$E(t) \geq \gamma E(0). \quad (1.22)$$

Теорема 1.4. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1.1), (1.2) в $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$, $\text{supp } u_0 \subset B_{R_0}$ и выполнены условия (1.3)–(1.7), условие **H**, $q = p + m - 2$. Тогда для достаточно больших t имеет место оценка

$$E(t) \leq \gamma [\rho(\ln t)]^{\frac{p+m-2}{p+m-3}} (\ln t)^N t^{-\frac{1}{p+m-3}}. \quad (1.23)$$

Теорема 1.5. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1.1), (1.2) в $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$, $\text{supp } u_0 \subset B_{R_0}$, $\|u_0 \rho\|_{1+\theta} < \infty$ для некоторого $\theta > 0$, $1 < q < p + m - 2$. Пусть еще выполнены условия (1.3)–(1.7) и условие **H**. Тогда существует постоянная C , не зависящая от t , такая, что

$$E(t) \leq C t^{-\frac{1}{p+m-3}}. \quad (1.24)$$

Рассмотрим частные случаи результатов теорем 1.1–1.3. Если $\rho(s) = (1 + s)^{-l}$, $s \geq 0$, $0 \leq l < p$, то согласно результатам теорем 1.1–1.3

$$q < p + m + 2 + \frac{p}{N - l} := q_l^*. \quad (1.25)$$

Тогда $\Phi(R) \sim R^{-\frac{(q^*-q)(N-l)}{q-(p+m-2)}}$, $E(t) \leq \gamma \bar{R}(t)^{-\frac{(q^*-q)(N-l)}{q-(p+m-2)}}$, где $\bar{R}(t) \sim t^{\frac{q-(p+m-2)}{(p-l)(q-(p+m-2))+p+m-3}}$, при $q = q_l^*$: $E(t) \leq \gamma (\ln t)^{-\frac{1}{q^*-1}}$, $t > 1$. Если же $q > q_l^*$, то $E(t) \geq \gamma$, $t > 1$.

Таким образом, q_l^* в (1.25) играет роль критического показателя для задачи (1.1), (1.2). Всюду в дальнейшем параметрами γ , C , c , будем обозначать различные постоянные, которые зависят лишь от параметров задачи μ_1 , μ_2 , N , p , m , q и не зависят от размеров области решения задачи.

Работа организована следующим образом: в §2 даются вспомогательные утверждения, §§3–7 посвящены доказательствам теорем 1.1–1.5 соответственно.

2. Вспомогательные утверждения

В дальнейшем нам потребуются следующие леммы (см. [17]).

Лемма 2.1. Пусть последовательность y_h , $h = 0, 1, 2, \dots$, неотрицательных чисел удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$y_{h+1} \leq C b^h y_h^{1+\varepsilon}, \quad h = 0, 1, \dots,$$

с какими-либо положительными постоянными C , ε и $b \geq 1$. Тогда $y_h \rightarrow 0$, $h \rightarrow \infty$ при условии, что $y_0 \leq C^{-\frac{1}{\varepsilon}} b^{\frac{1}{\varepsilon^2}}$.

Лемма 2.2. Пусть y_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, — последовательность равномерно ограниченных положительных чисел, удовлетворяющих рекуррентным неравенствам

$$y_n \leq C b^n y_{n+1}^{1-\alpha},$$

где $C, b > 1$ и $\alpha \in (0, 1)$ — заданные постоянные. Тогда $y_0 \leq \left(\frac{2C}{b^{1-\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Пусть $\psi(R) := R^{N(p+m-3)+p} \rho(R)^{p+m-2}$.

Лемма 2.3. Пусть $\text{supp } u_0 \subset B_{R_0}$ и выполнены условия теоремы 1.1. Тогда для любого $t > 0$ имеет место оценка

$$\zeta(t) := \inf \{r : u(\cdot, t) = 0, |x| > r\} \leq 4R_0 + \gamma \psi^{(-1)}(t \|u_0 \rho\|_1^{p+m-3}).$$

◁ Обозначим

$$r'_i = \frac{R}{2} - \sigma_2 R + \frac{R}{2^i} (\sigma_2 - \sigma_1), \quad r''_i = R + \sigma_2 R - \frac{R}{2^i} (\sigma_2 - \sigma_1),$$

где $i = 0, 1, \dots$, $R > 4R_0$, $\frac{1}{4} > \sigma_2 > \sigma_1 > 0$. Пусть $A_i = r'_i < |x| < r''_i \subset A_{i+1}$. Рассмотрим срезающую функцию η_i такую, что $\eta_i \equiv 1$, $x \in A_i$, $\eta_i \equiv 0$ вне A_{i+1} , $|\nabla \eta_i| \leq \gamma(2^{-i}R(\sigma_2 - \sigma_1))^{-1}$. Возьмем в интегральном тождестве в роли тестирующей функции $\eta_{i-1}^p u^\theta$, где $\theta > 0$. Тогда, рассуждая также как в [18], получим неравенство

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < T < t} \int_{\mathbb{R}^N} \rho u^{1+\theta} \eta_i^p dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u^{m+\theta-2} |\nabla u|^p \eta_i^p dx d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u^{q+\theta} \eta_i^p dx d\tau \\ & \leq \gamma(2^{-i}R(\sigma_2 - \sigma_1))^{-p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N \cap \text{supp } \eta_i} u^{p+m+\theta-2} dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Обозначим $u^{\frac{p+m+\theta-2}{p}} \eta_i^s = v_i$, $s > 0$, т. е. $u \eta_i^{\frac{sp}{p+m+\theta-2}} = v_i^{\frac{p}{p+m+\theta-2}}$. Значит, $u^{1+\theta} \eta_i^{\frac{sp(1+\theta)}{p+m+\theta-2}} = v_i^{\frac{p(1+\theta)}{p+m+\theta-2}}$ при условии, что s выбрано удовлетворяющим неравенству $\frac{s(1+\theta)}{p+m+\theta-2} > 1$. Кроме того,

$$\begin{aligned} & \left| \nabla \left(u^{\frac{p+m+\theta-2}{p}} \eta_{i-1}^s \right) \right|^p = |\nabla v_i|^p \\ & \leq 2^{p-1} \left[\left(\frac{p+m+\theta-2}{p} \right)^p u^{m+\theta-2} |\nabla u|^p \eta_i^{sp} + u^{p+m+\theta-2} s^p |\nabla \eta_i|^p \eta_i^{s-p} \right] \\ & \leq \gamma u^{m+\theta-2} |\nabla u|^p \eta_i^p + \gamma [2^{-i}R(\sigma_2 - \sigma_1)]^{-p} u^{p+m+\theta-2} \eta_i^{sp}. \end{aligned}$$

Таким образом, из неравенства (2.1) получаем, что

$$\begin{aligned} J_i & := \sup_{0 < \tau < t} \int_{\mathbb{R}^N} \rho v_i^a dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_i|^p dx d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \eta_i^p u^{p+\theta} dx d\tau \\ & \leq \gamma \frac{2^{ip}}{(\sigma_2 - \sigma_1)^p R^p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} v_{i+1}^p dx d\tau, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $a = \frac{(1+\theta)p}{p+m+\theta-2}$. Применяя неравенство Ниренберга — Гальярдо, получаем

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} v_{i+1}^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{i+1}|^p dx \right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_{i+1}^\mu dx \right)^{\frac{1-\alpha}{\mu}}, \quad (2.3)$$

где α определяется из условия $\frac{N}{p} = \frac{(N-p)\alpha}{p} + \frac{N(1-\alpha)}{\mu}$, $\mu = \frac{p}{p+m+\theta-2}$, т. е. $\alpha = \frac{N(p+m+\theta-3)}{N(p+m+\theta-3)+p}$. Возводя (2.3) в степень p и применяя неравенство Юнга, получаем

$$\frac{1}{R^p} \int_{\mathbb{R}^N} v_{i+1}^p dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{i+1}|^p dx + \gamma R^{-\frac{p}{1-\alpha} \frac{1}{1+\theta}} \varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_{i+1}^\mu dx \right)^{\frac{p}{\mu}}.$$

Интегрируя по времени обе части этого неравенства и замечая, что в силу условия **H**

$$\int_{A_{i+1}} v_{i+1}^\mu dx = \int_{A_{i+1}} \rho(|x|)\rho(|x|)^{-1}v_{i+1}^\mu dx \leq \gamma\rho(R)^{-1} \int_{A_{i+1}} \rho v_{i+1}^\mu dx,$$

приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} v_{i+1}^\mu dx d\tau &\leq \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{i+1}|^p dx d\tau \\ &+ \gamma\varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} R^{-\frac{p}{1-\alpha}} t [\rho(R)]^{-\frac{p}{\mu}} \left(\sup_{0<\tau<t} \int_{\mathbb{R}^N} \rho v_{i+1}^\mu dx \right)^{\frac{p}{\mu}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Следовательно, объединяя (2.2) и (2.4), имеем

$$J_i \leq \varepsilon J_{i+1} + \gamma\varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} R^{-\frac{p}{1-\alpha}} t \rho(R)^{-\frac{p}{\mu}} \left(\sup_{0<\tau<t} \int_{\mathbb{R}^N} \rho v_\infty^\mu dx \right)^{\frac{p}{\mu}}.$$

Итерируя это неравенство, получим

$$J_0 \leq \gamma R^{-\frac{p}{1-\alpha}} t \rho(R)^{-\frac{p}{\mu}} \left[\sup_{0<\tau<t} \int_{\mathbb{R}^N} (\rho v_\infty^\mu dx)^{\frac{p}{\mu}} \right]. \quad (2.5)$$

Далее, применяя неравенство Гёльдера, с учетом **H** получаем

$$\begin{aligned} \left[\sup_{0<\tau<t} \int_{A_0} \rho u dx \right] &\leq \left[\sup_{0<\tau<t} \int_{A_0} \rho u^{1+\theta} dx \right]^{\frac{1}{1+\theta}} \left(\int_{A_0} \rho dx \right)^{\frac{\theta}{1+\theta}} \leq J_0^{\frac{1}{1+\theta}} \left(\int_{A_0} \rho dx \right)^{\frac{\theta}{1+\theta}} \\ &\leq \gamma R^{-\frac{p}{(1+\theta)(1-\alpha)}} t^{\frac{1}{1+\theta}} \rho(R)^{-\frac{p}{\mu} \frac{1}{1+\theta} + \frac{\theta}{1+\theta}} R^{\frac{N\theta}{1+\theta}} \left[\sup_{0<\tau<t} \int_{A_\infty} \rho u dx \right]^{\frac{p}{\mu(1+\theta)}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Заметим, что

$$A_0 = R\left(\frac{1}{2}\right) - \sigma_1 < |x| < R(1 + \sigma_1), \quad A_\infty = R(2^{-1} - \sigma_2) < |x| < R(1 + \sigma_2).$$

Выберем: $\sigma_2 = \delta 2^{-n}$, $\sigma_1 = \delta 2^{-n-1}$, $n = 0, 1, \dots$, $0 < \delta < \frac{1}{4}$. Тогда после элементарных упрощений и подсчета постоянных находим из (2.6), что

$$M_n := \sup_{0<\tau<1} \int_{B_n} \rho u dx \leq \gamma b^n t^{\frac{1}{1+\theta}} R^{-\frac{N(p+m-3)+p}{1+\theta}} \rho(R)^{-\frac{p+m-2}{1+\theta}} M_{n-1}^{1+\frac{p+m-3}{1+\theta}},$$

где $B_n = R(\frac{1}{2}) - \delta 2^{-n-1} < |x| < R(1 + \delta 2^{-n-1})$. В силу итеративной леммы 2.1 выводим, что $M_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, если

$$\gamma t^{\frac{1}{1+\theta}} R^{-\frac{N(p+m-3)+p}{1+\theta}} \rho(R)^{-\frac{p+m-2}{1+\theta}} M_0^{\frac{p+m-3}{1+\theta}} < \varepsilon_1,$$

где ε_1 — достаточно малая постоянная, зависящая лишь от данных задачи. Этого можно добиться подходящим выбором R . Выберем R из следующего равенства:

$$\psi(R) = 2\gamma^{1+\theta} t \widetilde{M}_0^{p+m-3} \varepsilon_1^{-(1+\theta)},$$

или отсюда

$$R = \widetilde{R}(t) = \psi^{(-1)}(\Gamma t \widetilde{M}_0^{p+m-3}),$$

где $\widetilde{M}_0 = \int_{\mathbb{R}^N} \rho u_0 dx$. \triangleright

Обозначим

$$\begin{aligned} Y_{n+1} := & \sup_{A_{n+1}} \int \rho v_{n+1}^a dx + \int_0^t \int_{A_{n+1}} |\nabla v_{n+1}|^p dx d\tau \\ & + \int_0^t \int_{A_{n+1}} \eta_n^p u^{q+\theta} dx d\tau \leq \gamma \frac{2^{np}}{\sigma^p R^p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} v_n^p dx d\tau, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$A_n = R'_n < |x| < R''_n, \quad R'_n = \frac{R}{2} - \sigma \frac{R}{2^n}, \quad R''_n = R + \sigma 2^{-n} R, \quad \forall \sigma : 0 < \sigma < \frac{1}{4},$$

где $\theta > 0$, $b_1 > 2$, $v_n = u^{\frac{p+m+\theta-2}{p}} \eta_n^s$ и η_n — срезающая функция A_n . Справедлива

Лемма 2.4. В условиях предыдущей леммы имеет место неравенство

$$Y_{n+1} \leq \gamma \frac{2^{np}}{\sigma R^p} \frac{t^{\frac{(1+\theta)p}{\beta+\theta p}}}{\rho(R)^{\frac{p(p+m+\theta-2)}{\beta+\theta p}}} Y_n^{1+\frac{p(p+m-3)}{\beta+\theta p}}, \quad \text{где } \beta = N(p+m-3) + p. \quad (2.8)$$

\triangleleft В силу неравенства Соболева — Ниренберга — Гальярдо

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx \right)^{\frac{b}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^a dx \right)^{\frac{1-b}{a}}.$$

Здесь $0 < b < 1$ определяется из соотношения $\frac{N}{p} = \frac{(N-p)b}{p} + \frac{(1-b)N}{a}$. Значит, $a = \frac{(1+\theta)p}{p+m+\theta-2}$, $b = \frac{N(p+m-3)}{N(p+m-3)+(1+\theta)p}$. Далее, рассуждая как в лемме 2.3, получим

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} v_n^p dx d\tau & \leq \gamma \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx d\tau \right)^b \left(\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^a dx \right)^{\frac{p}{a}} d\tau \right)^{1-b} \\ & \leq \gamma \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx d\tau \right)^b t^{1-b} \left[\sup_{0 < \tau < t} \int_{\mathbb{R}^N} \rho v_n^a dx \right]^{\frac{p}{a}(1-b)} \rho(R)^{-\frac{p}{a}(1-b)} \\ & \leq \gamma t^{1-b} \rho(R)^{-\frac{p}{a}(1-b)} Y_n^{b+\frac{p}{a}(1-b)}. \end{aligned}$$

Теперь, если воспользоваться аналогичным (2.1) неравенством, придем к требуемому утверждению. \triangleright

3. Доказательство теоремы 1.1

Имеем

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}^N} \rho(|x|)u(x, t) dx = \int_{B_R} \rho(|x|)u(x, t) dx + \int_{|x|>R} \rho(|x|)u(x, t) dx := I_1(R) + I_2(R). \quad (3.1)$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$I_1(R) \leq \left(\int_{B_R} u(x, t)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_R} \rho(x)^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}}. \quad (3.2)$$

В силу леммы 2.4 и неравенства (1.6) имеем

$$\int_{B_R} u(x, t)^q dx \leq \mu_1^{-1} \int_{B_R} g(x, t, u) dx \leq \mu_1^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, t, u) dx = -\mu_1^{-1} \frac{dE}{dt}. \quad (3.3)$$

Следовательно, из (3.1)–(3.3) выводим

$$E(t) \leq \mu_1^{-\frac{1}{q}} \left(-\frac{dE}{dt} \right)^{\frac{1}{q}} \varphi_1(R)^{\frac{q-1}{q}} I_2(R), \quad (3.4)$$

где $\varphi_1(R) := \int_{B_R} \rho(|x|)^{\frac{q}{q-1}} dx$. В силу условия **H** $\varphi_1(R) \sim R^N \rho(R)^{\frac{q}{q-1}}$. Для оценки $I_2(R)$ поступим следующим образом. Пусть $R_i = R(1+2^{-i})$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Пусть $\zeta(x)$ — гладкая функция на $(0, \infty)$ и такая, что $\zeta(x) = 1$ для $|x| \geq R_i$, $\zeta(x) = 0$ для $|x| \leq R_{i+1}$, $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ для $R_{i+1} < |x| < R_i$. Обозначим $U_i = \{ |x| > R_i \}$. Умножим теперь обе части (1.1) на $\zeta^s(x)$ и результат проинтегрируем по $\mathbb{R}^N \times [0, t)$. Это даст

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^s(x) \rho(|x|) u(x, t) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} g(x, t, u) \zeta^s(x) dx d\tau \\ &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} s \zeta^{s-1} \sum_{i=1}^N a_i(x, t, u, \nabla u) \zeta_{x_i} dx d\tau + \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^s(x) \rho(|x|) u_0(x) dx. \end{aligned}$$

В силу (1.4), (1.5) отсюда получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^N} \zeta^s \rho u dx + \mu_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u^q \zeta^s dx d\tau \leq s \mu_2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u^{m-1} |\nabla u|^{p-1} |\nabla \zeta| \zeta^{s-1} dx d\tau + \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^s \rho u_0 dx. \quad (3.5)$$

Обозначив первый интеграл справа через $\varepsilon(R, t)$, оценим его по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \varepsilon(R, t) &\leq \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N \cap \text{supp } \nabla \zeta} \tau^\beta u^{m-1-\theta} |\nabla u|^p \zeta^s dx d\tau \right]^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad \times \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^{-\beta(p-1)} \zeta^{s-p} |\nabla \zeta|^p u(x, t) dx d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \equiv I_3^{\frac{p-1}{p}} I_4^{\frac{1}{p}}, \quad (3.6) \end{aligned}$$

где $0 < \beta < \frac{1}{p-1}$, $\theta = \frac{2-m}{p-1}$. Заметим, что в силу условия **H** имеет место неравенство

$$I_4 \leq \sup_{x \in B_{2R} \setminus B_R} \frac{1}{\rho(|x|)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^{-\beta(p-1)} \zeta^{s-p} |\nabla \zeta|^p \rho u \leq ct^{1-\beta(p-1)} \frac{1}{\rho(R)R^p} \sup_{0 < \tau < t} \int_{U_{i+1}} \rho u(x, \tau) dx. \quad (3.7)$$

Далее, для оценки I_3 умножим обе части (1.1) на $\tau^\beta u^{1-\theta} \zeta^s$ и результат проинтегрируем по частям по $\mathbb{R}^N \times (0, t)$. С учетом (1.3)–(1.5) и неравенства Юнга, это даст

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^\beta u^{m-1-\theta} \zeta^s dx d\tau + \mu_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^\beta u^{q+1-\theta} |\nabla u|^p \zeta^s dx d\tau \\ & \leq \frac{1}{2-\theta} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^{\beta-1} \rho u^{2-\theta} \zeta^s dx d\tau + \frac{\gamma}{R^p} 2^{ip} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^\beta u^{m-1+p-\theta} \zeta^{s-p} dx d\tau =: I_5 + I_6. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В силу неравенства Юнга имеем

$$I_5 \leq \varepsilon_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^\beta u^{q+1-\theta} \zeta^s dx d\tau + C(\varepsilon_1) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^{\beta-\frac{q-\theta}{q-1}} \rho^{\frac{q-\theta}{q-1}} (|x|) u \zeta^s dx d\tau.$$

Заметим, что второй интеграл в правой части (п. ч.) этого неравенства оценится следующим образом:

$$\text{п. ч.} \leq Ct^{1+\beta-\frac{q-\theta}{q-1}} \rho(R)^{\frac{1-\theta}{q-1}} \sup_{0 < \tau < t} \int_{\mathbb{R}^N} u \rho \zeta^s dx. \quad (3.9)$$

Далее имеем по неравенству Юнга

$$I_6 \leq \varepsilon_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^\beta u^{q+1-\theta} \zeta^s dx d\tau + C(\varepsilon_1) 2^{\frac{ip(a+1-\theta)}{q-(p+m-2)}} t^{1+\beta} R^N R^{-\frac{p(q+1-\theta)}{q-(p+m-2)}}. \quad (3.10)$$

Таким образом, из (3.8)–(3.10) выводим при достаточно малом $\varepsilon_1 > 0$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^\beta u^{m-1-\theta} |\nabla u|^p \zeta^s dx d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \tau^\beta u^{q+1-\theta} \zeta^s dx d\tau \\ & \leq Ct^{1+\beta-\frac{q-\theta}{q-1}} \rho(R)^{\frac{1-\theta}{q-1}} \sup_{0 < \tau < t} \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^s u \rho dx + cb^i R^{N-\frac{p(q+1-\theta)}{q-(p+m-2)}} t^{1+\beta}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $b > 1$. Обозначив

$$\begin{aligned} \sup_{0 < \tau < t} \int_{U_{i+1}} \rho u dx &= I_{i+1}, \\ t^{1-\frac{\beta(p-1)}{p}} R^{-1} \rho(R)^{-\frac{1}{p}} &= B_1(R, t), \end{aligned}$$

$$t^{(1+\beta-\frac{q-\theta}{q-1})\left(\frac{p-1}{p}\right)} \rho(R)^{\frac{1-\theta}{q-1} \frac{p-1}{p}} = B_2(R, t),$$

$$R^{-\frac{(p-1)(q+1-\theta)}{q-(p+m-2)}} t^{\frac{1+\beta}{p}} R^{\frac{N(p-1)}{p}} = B_3(R, t)$$

и объединив (3.6)–(3.11), получим

$$\varepsilon(R, t) \leq \gamma B_1(R, t) \left\{ B_2(R, t) \left[\sup_{0 < \tau < t} \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^s u \rho dx \right]^{\frac{p-1}{p}} + b^i B_3(R, t) \right\} I_{i+1}^{\frac{1}{p}}. \quad (3.12)$$

Оценим (3.12) по неравенству Юнга следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon(R, t) &\leq \varepsilon_2 \sup_{0 < \tau < t} \int_{U_{i+1}} \rho u dx + \gamma R^{-\frac{p}{p-1}} \rho^{-\frac{q-(p+m-2)}{(p-1)(q-1)}} \sup_{0 < \tau < t} \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^s \rho u dx \\ &+ b_1^i t^{\frac{p}{p-1}} R^{N-\frac{p}{p-1} \frac{qp-1}{q-(p+m-2)}} \rho(R)^{-\frac{1}{p-1}} = \varepsilon_2 \mu_{i+1}(t) + \gamma \left[\frac{t}{\rho(R) R^{\frac{p(q-1)}{q-(p+m-2)}}} \right]^{\frac{q-(p+m-2)}{(p-1)(q-1)}} \\ &\times \sup_{0 < \tau < t} \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^s u \rho dx + \gamma b_1^i \frac{t}{\rho(R) R^{\frac{p(q-1)}{q-(p+m-2)}}} \frac{\rho(R) R^N}{R^{\frac{p}{q-(p+m-2)}}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon(R, t) &\leq \gamma B_1(R, t) B_2^{\frac{p-1}{p}}(R, t) \left[\sup_{0 < \tau < t} \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^s u \rho dx \right]^{\frac{p-1}{p}} I_{i+1}^{\frac{1}{p}} + \gamma b^i B_1(R, t) B_3(R, t) I_{i+1}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \varepsilon_1^{\frac{p}{p-1}} \frac{p-1}{p} \left[\sup_{0 < \tau < t} \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^s u \rho dx \right] + \varepsilon_1^{-p} \frac{1}{p} [B_1(R, t) B_2^{\frac{p-1}{p}}(R, t)]^p I_{i+1} \\ &+ \varepsilon_2^p \frac{1}{p} I_{i+1} + \varepsilon_2^p \frac{1}{p} I_{i+1} + \varepsilon_2^{-\frac{p}{p-1}} \frac{p-1}{p} b^i \frac{p-1}{p} [B_1(R, t) B_2(R, t)]^{\frac{p}{p-1}}. \end{aligned}$$

Вычисляя $[B_1(R, t) B_2^{\frac{p-1}{p}}(R, t)]^p \varepsilon_1^{-p} \frac{1}{p} = \delta$,

$$\text{п. ч.} \leq \delta I_{i+1} + \varepsilon_2(\delta) \frac{p-1}{p} b^i \frac{p-1}{p} [B_1(R, t) B_2(R, t)]^{\frac{p}{p-1}},$$

$$I_i \leq \delta I_{i+1} + b_1^i [B_1(R, t) B_2(R, t)]^{\frac{p}{p-1}},$$

выбирая δ настолько малым, что $\delta b_1 < 1$. Здесь $\mu_i := \sup_{0 < \tau < t} \int_{U_i} \rho u(x, \tau) dx$. Выберем теперь $R = \bar{R}(t) = \Gamma \Phi^{(-1)}(t)$, где Γ достаточно большое число. Тогда $\frac{t}{\Phi(R)} \leq \delta(\Gamma)$, где для сколь угодно малого $\delta(\Gamma)$ выполняется $\gamma \delta^{\frac{q-(p+m-2)}{(p-1)(q-1)}} < \frac{1}{4}$. Наконец, из (3.4) и (3.13) выводим

$$\mu_i(t) dx \leq \gamma \int_{|x| > \bar{R}(t)} u_0 \rho dx + \delta \mu_{i+1}(t) + \gamma b_2^j \frac{\rho(\bar{R}) \bar{R}^N}{\bar{R}(t)^{\frac{p}{q-(p+m-2)}}}.$$

Итерируя это неравенство при достаточно малом $\varepsilon_2 > 0$, получим оценку

$$\mu_0(t) \leq \gamma_1 \int_{|x| > \bar{R}(t)} u_0 \rho dx + \gamma_2 \frac{\rho(\bar{R}) \bar{R}^N}{\bar{R}(t)^{\frac{p}{q-(p+m-2)}}} := \bar{E}_2(t).$$

Таким образом, $I_2(R) \leq E_2(t)$. Значит, из (3.4) имеем для $0 < \tau < t$

$$F(\tau) = E(\tau) - \bar{E}_2(t) \leq \mu_i^{-1} \left(-\frac{dF(\tau)}{d\tau} \right)^{\frac{1}{q}} R^N(t) \rho(\bar{R}(t))^{\frac{q}{q-1}}.$$

Интегрируя это неравенство от 0 до t , приходим к требуемому утверждению. Теорема 1.1 доказана.

4. Доказательство теоремы 1.2

Из (1.1) имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \rho u(x, t) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, t, u) dx. \quad (4.1)$$

Применяя неравенство Гёльдера и (4.1), получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \rho u(x, t) dx &\leq \left(\int_{B_R} u^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_R} \rho^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \leq \left(\mu_1 \int_{B_R} g(x, t, u) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_R} \rho^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \\ &\leq \left(-\mu_1^{-1} \frac{d}{dt} \int_{B_R} \rho u(x, t) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_R} \rho^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Так как носитель начальной функции содержится в шаре B_{R_0} , то согласно лемме 2.3 носитель $u(x, t)$ также содержится в шаре радиуса $\bar{R}(t) = 4R_0 + \gamma\psi(t)$. Следовательно,

$$\left(\int_{B_R} \rho^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{q-1} \leq C_N \bar{R}(t)^{N(q-1)} \rho(\bar{R}(t))^q. \quad (4.3)$$

Поскольку по условию теоремы $C_1 \leq \rho(R) R^{N - \frac{q}{q-(p+m-2)}} \leq C_2$ для всех достаточно больших $R > R_1$, то по определению $\bar{R}(t)$ получим, что при достаточно больших $t > t_1(R_0, \|u_0\rho\|_1)$

$$\bar{R}^{N(q-1)} \rho(\bar{R})^q \sim t. \quad (4.4)$$

Таким образом, из (4.2), (4.3), (4.4) находим

$$-\frac{d}{dt} \int \rho u(x, t) dx \geq \gamma t^{-1} \left(\int \rho u(x, t) dx \right)^q.$$

Интегрируя это неравенство в промежутке $[t_1, t]$, приходим к требуемому утверждению. Теорема 1.2 доказана.

5. Доказательство теоремы 1.3

Прежде всего отметим, что если $\rho(|x|) \sim |x|^{-l}$, $0 \leq l < p$, и $\text{supp } u_0 \subset B_{R_0}(0)$, $R_0 < \infty$, то для всех $t > 0$ имеют место оценки [1]

$$\|u(t)\|_{\infty} \leq C \|\rho u_0\|_1^{\frac{p}{h_l}} t^{-\frac{N-l}{h_l}}, \quad (5.1)$$

$$\text{supp } u(x, t) \in B_{\tilde{R}(t)}(0), \quad (5.2)$$

где $\zeta(t) = 4R_0 + \gamma \|\rho u_0\|^{\frac{p+m-3}{h_l}} t^{\frac{1}{h_l}}$, $h_l = (N-l)(p+m-3) + p-l > 0$. Следовательно, интегрируя (1.1) по $Q(t_1, t_2) = \mathbb{R}^N \times (t_1, t_2)$, $t_1 < t_2$, получаем

$$\begin{aligned} E(t_1) &:= \int_{\mathbb{R}^N} \rho u(x, t_1) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho u(x, t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, t, u) dx d\tau \\ &\leq E(t_2) + \mu_2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^N} u^q(x, \tau) dx d\tau. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Учитывая оценки (5.1), (5.2), отсюда имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^N} u^q(x, \tau) dx d\tau &\leq \gamma \int_{t_1}^{t_2} \|u(\tau)\|_{\infty}^{q-1} \tilde{R}(\tau)^l d\tau \times E(\tau) d\tau \\ &\leq \gamma \int_{t_1}^{t_2} E(0)^{\frac{p(q-1)}{h_l}} \left(4R_0 + \gamma E(0)^{\frac{p+m-3}{h_l}} \tau^{\frac{1}{h_l}}\right) E(\tau) d\tau \\ &\leq \gamma E(t_1) E(0)^{\frac{p(q-1)}{h_l} + \frac{(p+m-3)l}{h_l}} \int_{t_1}^{t_2} \tau^{-\frac{(N-l)(q-1)}{h_l}} \tau^{\frac{l}{h_l}} d\tau \end{aligned} \quad (5.4)$$

при условии, что t_1 выбрано настолько большим, что $2R_0 \leq \gamma E(0)^{\frac{(p+m-3)l}{h_l}} t_1^{\frac{l}{h_l}}$. Тогда в силу того, что $q > q_l^*$

$$\int_{t_1}^{\infty} \tau^{-\frac{(N-l)(q-1)-l}{h_l}} d\tau < \infty.$$

Следовательно, из (5.4) получаем, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^N} u^q(x, \tau) dx d\tau \leq \gamma t_1^{-\frac{(N-l)(q-q_l^*)}{h_l}} E(0)^{\frac{p(q-1)+(p+m-3)l}{h_l}} E(t_1). \quad (5.5)$$

Окончательно из (5.3) и (5.5) находим

$$E(t_1) \leq E(t_2) + \gamma t_1^{-\frac{(N-l)(q-q_l^*)}{h_l}} E(0)^{\frac{p(q-1)+(p+m-3)l}{h_l}} E(t_1). \quad (5.6)$$

Теперь, выбирая t_1 достаточно большим, имеем

$$\gamma t_1^{-\frac{(N-l)(q-q_l^*)}{h_l}} E(0)^{\frac{p(q-1)+(p+m-3)l}{h_l}} = \frac{1}{2},$$

а из (5.6) получаем, что

$$E(t_2) \geq \gamma E(t_1). \quad (5.7)$$

Осталось показать, что $E(t_1) > 0$.

Лемма 5.1. *Решение (1.1) не может удовлетворять условию $u(x, t_0) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$ и $\forall t_0 > 0$.*

◁ Доказывается точно также как в работах [2, 4]. ▷

Теорема 1.3 доказана.

6. Доказательство теоремы 1.4

Итак, пусть $q = p + m - 2$. Нам потребуется следующая лемма Стампакия.

Лемма 6.1. *Пусть $\varphi(s)$ — неубывающая неотрицательная функция, определяемая на $[k_0, \infty)$, и такая, что для всех $l > k \geq k_0$ выполняется*

$$\varphi(l) \leq \frac{C}{(l-k)^\tau} \varphi(k), \quad (6.1)$$

где C и τ — положительные постоянные. Тогда для любого $k > k_0$ имеет место оценка

$$\varphi(k) \leq \varphi(k_0) \exp \left[1 - (Ce)^{-\frac{1}{\tau}} (k - k_0) \right]. \quad (6.2)$$

В силу леммы 2.4

$$\begin{aligned} Y_{n+1} := \sup_{0 < \tau < t} \int_{A_{n+1}} \rho u^{1+\theta} dx + \int_0^t \int_{A_{n+1}} u^{\theta+m-2} |\nabla u|^p dx d\tau \\ + \int_0^t \int_{A_{n+1}} u^{\theta+m-2} dx d\tau \leq \gamma \frac{b^n t^{\frac{(1+\theta)p}{\beta+\theta p}} Y_n^{1+\frac{(p+m-3)p}{\beta+p\theta}}}{R^p \rho(R)^{\frac{p(p+m+\theta-2)}{\beta+\theta p}}}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

и, следовательно, $Y_n \rightarrow 0$ при условии, что

$$Y_1^{\frac{(p+m-3)p}{\beta+p\theta}} t^{\frac{(1+\theta)p}{\beta+\theta p}} R^{-p} \rho(R)^{-\frac{p(p+m+\theta-2)}{\beta+\theta p}} \leq \varepsilon,$$

где ε — достаточно малое положительное число, зависящее лишь от параметров задачи. Предыдущее неравенство эквивалентно неравенству

$$Y_1^{p+m-3} t^{1+\theta} R^{-(\beta+p\theta)} \rho(R)^{-(p+m+\theta-2)} \leq \varepsilon^{\frac{\beta+p\theta}{p}}. \quad (6.4)$$

Пусть

$$\varphi(R) := \int_0^t \int_{|x| > \frac{R}{4}} u^{p+m-2+\theta} dx d\tau.$$

Тогда легко получаем неравенство $\varphi(R) \leq \gamma R^{-p} \varphi\left(\frac{R}{2}\right)$. Взяв теперь в лемме $l = R, k = \frac{R}{2}$, $\tau = p, C = \gamma$, получаем, что

$$\varphi\left(\frac{3R}{4}\right) \leq \gamma \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u^{p+m+\theta-2} dx d\tau \right] \exp(-\gamma R).$$

Далее заметив, что $\rho u_0 \in L_{1+\theta}$, имеем

$$\frac{1}{1+\theta} \int_{\mathbb{R}^N} \rho u^{1+\theta} dx + \mu_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u^{m+\theta-2} |\nabla u|^p dx d\tau + \mu_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u^{p+m+\theta-2} dx d\tau \leq \frac{1}{1+\theta} \int_{\mathbb{R}^N} \rho u_0^{1+\theta} dx.$$

Следовательно,

$$\varphi\left(\frac{3R}{4}\right) \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho u_0^{1+\theta} dx \right) \exp(-\gamma R).$$

Таким образом, (6.4) удовлетворится, если

$$t^{1+\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho u_0^{1+\theta} dx \right)^{p+m-3} \exp(-\gamma(p+m-3)R) R^{-(\beta+p\theta)} \rho(R)^{-(p+m+\theta-2)} \leq \varepsilon_1, \quad (6.5)$$

где ε_1 достаточно мало. Очевидно, что (6.5) будет выполнено, если для достаточно больших $t > 0$ выбрать R следующим образом: $R \geq R(t) := \Gamma \log t$, где $\Gamma = \Gamma(\|u_0\|_{1+\theta}, \varepsilon_1)$ — достаточно большая константа. Тогда мы приходим к замечанию, что $u = 0$ вне шара $B_{\Gamma \log t}$. Для доказательства теоремы осталось оценить массу решения для достаточно больших t . В силу неравенства Гёльдера

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho u dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho u^{1+\theta} dx \right)^{\frac{1}{1+\theta}} \left(\int_{B_{\Gamma \log t}} \rho dx \right)^{\frac{\theta}{1+\theta}}. \quad (6.6)$$

Следовательно, оценка массы сводится к оценке интеграла

$$E_{1+\theta}(t) := \int_{\mathbb{R}^N} \rho u^{1+\theta} dx.$$

Интегрируя (1.1) по \mathbb{R}^N легко получить неравенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \rho u^{1+\theta} dx \leq -\gamma \int_{\mathbb{R}^N} u^{p+m+\theta-2} dx. \quad (6.7)$$

Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho u^{1+\theta} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{p+m+\theta-2} dx \right)^{\frac{1+\theta}{p+m+\theta-2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho^{\frac{p+m+\theta-2}{p+m-3}} dx \right)^{\frac{p+m-3}{p+m+\theta-2}}, \quad (6.8)$$

$$\frac{d}{dt} E_{1+\theta}(t) \leq -\gamma D(T)^{-\frac{D+m-3}{1+\theta}} E_{1+\theta}^{\frac{p+m+\theta-2}{1+\theta}}(t), \quad 0 < t < T, \quad (6.9)$$

где $D(T) = \int_{B_{\Gamma \log T}} \rho^{\frac{p+m+\theta-2}{p+m-3}}(x) dx$. Интегрируя (6.9) в пределах от 0 до T , получаем, что

$$E_{1+\theta}(T) \leq \gamma T^{-\frac{1+\theta}{p+m-3}} D(T).$$

Наконец, объединяя это неравенство с (6.6), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \rho u(x, T) dx &\leq \gamma \left(\int_{B_{\Gamma \log T}} \rho dx \right)^{\frac{\theta}{1+\theta}} T^{-\frac{1}{p+m-3}} \left(\int_{B_{\Gamma \log T}} \rho^{\frac{p+m+\theta-2}{p+m-3}}(x) dx \right)^{\frac{1}{1+\theta}} \\ &= \gamma \rho^{\frac{p+m-2}{p+m-3}} (\log T) (\log T)^N T^{-\frac{1}{p+m-3}}. \end{aligned}$$

Теорема 1.4 доказана.

7. Доказательство теоремы 1.5

Из неравенства (2.7) следует, что

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &:= \sup_{0 < \tau < t} \int_{A_{n+1}} \rho v_{n+1}^a dx + \int_0^t \int_{A_{n+1}} |\nabla v_{n+1}|^p dx d\tau + \int_0^t \int_{A_{n+1}} v_{n+1}^\nu dx d\tau \\ &\leq \gamma \frac{2^n p}{\sigma^p R^p} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} v_n^p dx d\tau, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $a = \frac{(1+\theta)p}{p+m+\theta-2}$, $\nu = \frac{(q+\theta)p}{p+m+\theta-2}$.

Далее, условие $q < p + m - 2$ позволяет применить тройное мультипликативное неравенство типа Соболева — Ниренберга — Гальярдо. Для получения этого неравенства поступим следующим образом:

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n^p dx \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx \right)^B \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^b dx \right)^{\frac{(1-B)p}{b}}, \quad (7.2)$$

где B определяется из соображения размерности

$$\frac{N}{p} = \frac{(N-p)B}{p} + \frac{N(1-B)}{b}, \quad a < b < \nu, \quad a = \frac{(1+\theta)p}{p+m+\theta-2}, \quad \nu = \frac{p(q+\theta)}{p+m+\theta-2}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n^b dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^\nu dx \right)^{\frac{\nu-b}{\nu-a}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^a dx \right)^{\frac{b-a}{\nu-a}}. \quad (7.3)$$

Соединяя неравенства (7.2) и (7.3), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n^p dx \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx \right)^B \left(\left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^\nu dx \right)^{\frac{\nu-b}{\nu-a}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^a dx \right)^{\frac{b-a}{\nu-a}} \right)^{\frac{(1-B)p}{b}}. \quad (7.4)$$

Теперь подберем параметр b так, что

$$B + \frac{(1-B)p}{b} \frac{(\nu-b)}{\nu-a} = 1. \quad (7.5)$$

Вычисления дают

$$B = \frac{N(p-b)}{N(p-b)+bp}, \quad b = \frac{p\nu}{p-a+\nu}.$$

Замечая, что

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n^a dx \leq \gamma \rho(R)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} \rho v_n^a dx$$

и интегрируя по времени (7.4) с учетом (7.5), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} v_n^p dx d\tau &\leq \gamma \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx d\tau \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} v_n^\nu dx d\tau \right) \\ &\times \left(\sup_{0 < \tau < t} \int_{\mathbb{R}^N} \rho v_n^a dx \right)^{\frac{\nu-b}{\nu-a} \frac{(1-B)p}{b}} \rho(R)^{-\frac{\nu-b}{\nu-a} \frac{(1-B)p}{b}}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Следовательно, из (7.1) и (7.6) вытекает

$$Y_{n+1} \leq \frac{\gamma 2^{np}}{(\sigma R)^p} \rho(R)^{-\frac{b-a}{\nu-a} \frac{(1-B)p}{b}} Y_n^{1+\frac{\nu-b}{\nu-a}}, \quad Y_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Вычисления дают

$$\begin{aligned} Y_1 &= \sup_{0 < \tau < t} \int_{A_1} \rho u^{1+\theta} dx + \int_0^t \int_{A_1} \left| \nabla u^{\frac{p+m+\theta-2}{p}} \right|^p dx d\tau + \int_0^t \int_{A_1} u^{q+\theta} dx d\tau \leq \gamma \int_{\mathbb{R}^N} \rho u_0^{1+\theta} dx, \\ &R^p \rho^{-\frac{b-a}{\nu-a} \frac{1-B}{b} p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho u_0^{1+\theta} dx \right)^{\frac{\nu-b}{\nu-a}} \leq \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Пользуясь условиями **H**, легко проверить, что

$$R^{-p} \rho^{-\frac{b-a}{\nu-a} \frac{1-B}{b} p} (R) \leq \gamma R^{-p} \rho(R) \leq \gamma R^{-(p-\sigma)}, \quad \sigma < p.$$

Следовательно, (7.7) выполнено, если

$$\tilde{R}^{-(p-\sigma)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho u_0^{1+\theta} dx \right)^{\frac{\nu-b}{\nu-a}} = \frac{\varepsilon_1}{2},$$

т. е.

$$\tilde{R} = \left\{ \frac{2\gamma_*}{\varepsilon_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho u_0^{1+\theta} dx \right)^{\frac{\nu-b}{\nu-a}} \right\}^{\frac{1}{p-\sigma}},$$

$u(x, t) = 0$ вне шара радиуса $R = 4R_0 + \tilde{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho u dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^q dx \geq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho u dx \right)^q.$$

Интегрируя уравнение (1.1) по \mathbb{R}^N и учитывая (1.5), получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \rho u dx \leq -\mu_1 \int_{\mathbb{R}^N} u^q dx \leq -\mu_1 \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho u dx \right)^q.$$

Интегрируя это неравенство, имеем

$$\frac{dE}{E^q} \leq -\mu_1 \gamma dt,$$

$$\frac{1}{1-q} (E^{1-q}(t) - E^{1-q}(0)) \leq -\mu_1 \gamma t.$$

Отсюда следует, что при $t > 0$

$$E(t) \leq \gamma t^{-\frac{1}{q-1}},$$

что и требовалось доказать. Теорема 1.5 доказана.

Литература

1. *Tedeev A. F.* The interface blow-up phenomenon and local estimates for doubly degenerate parabolic equations // *Appl. Anal.*—2007.—Vol. 86, № 6.—P. 755–782. DOI: 10.1080/00036810701435711.
2. *Andreucci D., Tedeev A. F., Ughi M.* The Cauchy problem for degenerate parabolic equations with source and damping // *Ukr. Math. Bull.*—2004.—Vol. 1, № 1.—P. 1–23.
3. *Ben-Artzi B., Koch H.* Decay of mass for a semilinear parabolic equation // *Commun. Partial Differ. Equ.*—1999.—Vol. 24, № 5–6.—P. 869–881. DOI: 10.1080/03605309908821450.
4. *Skrypnik I., Tedeev A. F.* Decay of the mass of the solution to Cauchy problem of the degenerate parabolic equation with nonlinear potential // *Complex Var. Elliptic Equ.*—2018.—Vol. 63, № 1.—P. 90–115. DOI: 10.1080/17476933.2017.1286331.
5. *Kamin S., Rosenau P.* Propagation of thermal waves in an inhomogeneous medium // *Commun. Pure Appl. Math.*—1981.—Vol. 34, № 6.—P. 831–852. DOI: 10.1002/cpa.3160340605.
6. *Kamin S., Rosenau P.* Nonlinear diffusion in finite mass medium // *Commun. Pure Appl. Math.*—1982.—Vol. 35, № 1.—P. 113–127. DOI: 10.1002/cpa.3160350106.
7. *Kamin S., Kersner R.* Disappearance of interfaces in finite time // *Mechanica.*—1993.—Vol. 28, № 2.—P. 117–120. DOI: 10.1007/BF01020323.
8. *Eidus D., Kamin S.* The filtration equation in class of functions decreasing at infinity // *Proc. Amer. Math. Soc.*—1994.—Vol. 120, № 3.—P. 825–830. DOI: 10.1090/S0002-9939-1994-1169025-2.
9. *Galaktionov V. A., Kamin S., Kersner R., Vazquez J. L.* Intermediate asymptotics for inhomogeneous nonlinear heat conduction // *J. Math. Sci.*—2004.—Vol. 120, № 3.—P. 1277–1294. DOI: 10.1023/B:JOTH.0000016049.94192.aa.
10. *Guedda M., Hihorst D., Peletier M. A.* Disappearing interfaces in nonlinear diffusion // *Adv. Math. Sci. Appl.*—1997.—Vol. 7, № 2.—P. 695–710.
11. *Мартыненко А. В., Тедеев А. Ф.* Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с источником и неоднородной плотностью // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики.*—2007.—Т. 47, № 2.—С. 245–255.
12. *Мартыненко А. В., Тедеев А. Ф.* О поведении решений задачи Коши для вырождающегося параболического уравнения с неоднородной плотностью и источником // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики.*—2008.—Т. 48, № 7.—С. 1214–1229.
13. *Reyes G., Vazquez J. L.* The inhomogeneous PME in several space dimensions. existence and uniqueness of finite energy solutions // *Commun. Pure Appl. Anal.*—2008.—Vol. 7, № 6.—P. 1275–1294. DOI: 10.3934/cpa.2008.7.1275.

14. Reyes G., Vazquez J. L. Long time behavior for the inhomogeneous PMI in a medium with slowly decaying density // Commun. Pure Appl. Anal.—2009—Vol. 8, № 2.—P. 493–508. DOI: 10.3934/cpaa.2009.8.493.
15. Kamin S., Reyes G., Vazquez J. L. Long time behavior for the inhomogeneous PME in a medium with rapidly decaying density // Discrete Contin. Dyn. Syst.—A.—2010.—Vol. 26, № 2.—P. 521–549. DOI: 10.3934/dcdc.2010.26.521.
16. Benachour S., Laurentcot Ph. Global Solutions to viscous Hamilton–Jacobi equations with irregular initial data // Commun. Partial Differ. Equ.—1999.—Vol. 24, № 11–12.—P.1999–2021. DOI: 10.1080/03605309908821492.
17. Di Benedetto E. Degenerate parabolic equations.—New York: Springer–Verlag, 1993.—387 p.
18. Andreucci D., Tedeev A. F. Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations // Adv. Differ. Equ.—2005.—Vol. 10, № 1.—P. 89–120.

Статья поступила 31 июля 2019 г.

БЕСАЕВА ЗАРИНА ВЯЧЕСЛАВОВНА

Юго-Осетинский государственный университет им. А. А. Тибилова,
старший преподаватель

Республика Южная Осетия, 100001, Цхинвал, ул. Путина, 8

E-mail: besaeva.85@mail.ru

ТЕДЕЕВ АНАТОЛИЙ ФЕДОРОВИЧ

Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,
ведущий научный сотрудник

Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: a_tedeev@yahoo.com

<https://orcid.org/0000-0001-7883-9795>

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 1, P. 12–32

THE DECAY RATE OF THE SOLUTION TO THE CAUCHY PROBLEM FOR DOUBLY NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH ABSORPTION

Besaeva, Z. V.¹ and Tedeev, A. F.²

¹South Ossetian State University named after A. A. Tibilov,
8 Putin St., Tskhinval 100001, South Ossetia;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia
E-mail: besaeva.85@mail.ru, a_tedeev@yahoo.com

Abstract. This work deals with the Cauchy problem for a wide class of quasilinear second-order degenerate parabolic equations with inhomogeneous density and absorption terms. It is well known that for the problem under consideration but without absorption term and when the density tends to zero at infinity not very fast the mass conservation law holds true. However that fact is not always valid with an absorption term. In this paper, the precise conditions on both the structure of nonlinearity and inhomogeneous density which guarantee the decay to zero of the total mass of solution as time goes to infinity is established. In other words the criteria of stabilization to zero of the total mass for a large time is established in terms of critical exponents. As a consequence of obtained results and local Nash-Moser estimates the sharp sup bound of a solution is done as well.

Key words: the Cauchy problem, degenerate parabolic equations, inhomogeneous density, absorption, critical exponents.

Mathematical Subject Classification (2010): 35K92, 35B33, 35E15.

For citation: Besaeva, Z. V. and Tedeev, A. F. The Decay Rate of the Solution to the Cauchy Problem for Doubly Nonlinear Parabolic Equation with Absorption, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 1, pp. 31–32 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57535.

References

1. Tedeev, A. F. The Interface Blow-up Phenomenon and Local Estimates for Doubly Degenerate Parabolic Equations, *Applicable Analysis*, 2007, vol. 86, no. 6, pp. 755–782. DOI: 10.1080/00036810701435711.
2. Andreucci, D., Tedeev, A. F. and Ughi, M. The Cauchy Problem for Degenerate Parabolic Equations with Source and Damping, *Ukrainian Mathematical Bulletin*, 2004, vol. 1, no. 1, pp. 1–23.
3. Ben-Artzi, B. and Koch, H. Decay of Mass for a Semilinear Parabolic Equation, *Communications in Partial Differential Equations*, 1999, vol. 24, no. 5–6, pp. 869–881. DOI: 10.1080/03605309908821450.
4. Skrypnik, I. and Tedeev A. F. Decay of the Mass of the Solution to Cauchy Problem of the Degenerate Parabolic Equation with Nonlinear Potential, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2018, vol. 63, no. 1, pp. 90–115. DOI: 10.1080/17476933.2017.1286331.
5. Kamin, S. and Rosenau, P. Propagation of Thermal Waves in an Inhomogeneous Medium, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1981, vol. 34, no. 6, pp. 831–852. DOI: 10.1002/cpa.3160340605.
6. Kamin, S. and Rosenau, P. Nonlinear Diffusion in Finite Mass Medium, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1982, vol. 35, no. 1, pp. 113–127. DOI: 10.1002/cpa.3160350106.
7. Kamin, S. and Kersner, R. Disappearance of Interfaces in Finite Time, *Mechanica*, 1993, vol. 28, no. 2, pp. 117–120. DOI: 10.1007/BF01020323.
8. Eidus, D. and Kamin, S. The Filtration Equation in Class of Functions Decreasing at Infinity, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1994, vol. 120, no. 3, pp. 825–830. DOI: 10.1090/S0002-9939-1994-1169025-2.
9. Galaktionov, V. A., Kamin, S., Kersner, R. and Vazquez, J. L. Intermediate Asymptotics for Inhomogeneous Nonlinear Heat Conduction, *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, vol. 120, no. 3, pp. 1277–1294. DOI: 10.1023/B:JOTH.0000016049.94192.aa.
10. Guedda, M., Hihorst, D. and Peletier, M. A. Disappearing Interfaces in Nonlinear Diffusion, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 1997, vol. 7, no. 2, pp. 695–710.
11. Martynenko, A. V. and Tedeev, A. F. Cauchy Problem for Quasilinear Parabolic Equation with a Source Term and an Inhomogeneous Density, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 2, pp. 238–248. DOI: 10.1134/s096554250702008x.
12. Martynenko, A. V. and Tedeev, A. F. On the Behavior of Solutions to the Cauchy Problem for a Degenerate Parabolic Equation with Inhomogeneous Density and a Source, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 7, pp. 1145–1160. DOI: 10.1134/s0965542508070087.
13. Reyes, G. and Vazquez, J. L. The Inhomogeneous PME in Several Space Dimensions. Existence and Uniqueness of Finite Energy Solutions, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2008, vol. 7, no. 6, pp. 1275–1294. DOI: 10.3934/cpaa.2008.7.1275.
14. Reyes, G. and Vazquez, J. L. Long Time Behavior for the Inhomogeneous PMI in a Medium with Slowly Decaying Density, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2009, vol. 8, no. 2, pp. 493–508. DOI: 10.3934/cpaa.2009.8.493.
15. Kamin, S., Reyes, G. and Vazquez, J. L. Long Time Behavior for the Inhomogeneous PME in a Medium with Rapidly Decaying Density, *Discrete and Continuous Dynamical Systems–A*, 2010, vol. 26, no. 2, pp. 521–549. DOI: 10.3934/dcdc.2010.26.521.
16. Benachour, S. and Laurentcot, Ph. Global Solutions to Viscous Hamilton–Jacobi Equations with Irregular Initial Data, *Communications in Partial Differential Equations*, 1999, vol. 24, no. 11–12, pp. 1999–2021. DOI: 10.1080/03605309908821492.
17. Di Benedetto, E. *Degenerate Parabolic Equations*, New York, Springer–Verlag, 1993, 387 p.
18. Andreucci, D. and Tedeev, A. F. Universal Bounds at the Blow-Up Time for Nonlinear Parabolic Equations, *Advances in Differential Equations*, 2005, vol. 10, no. 1, pp. 89–120.

Received 31 July, 2019

ZARINA V. BESAeva
 South Ossetian State University named after A. A. Tibilov,
 8 Putin St., Tskhinval 100001, South Ossetia,
 Senior Lecturer
 E-mail: besaeva.85@mail.ru
 ANATOLY F. TEDEEV
 Southern Mathematical Institute VSC RAS,
 22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
 Leading Researcher
 a_tedeev@yahoo.com
<https://orcid.org/0000-0001-7883-9795>

УДК 515.124

DOI 10.23671/VNC.2020.1.57537

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОДОБНО ОДНОРОДНЫХ \mathbb{R} -ДЕРЕВЬЕВ

А. И. Булыгин¹

¹ Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, 163002, Архангельск, наб. Северной Двины, 17

E-mail: alexey.buligin@gmail.com

Аннотация. В работе рассматриваются свойства локально полных подобно однородных неоднородных \mathbb{R} -деревьев. Геодезические пространства называются \mathbb{R} -деревьями, если любые две точки можно соединить единственной дугой. Рассмотрена общая проблема А. Д. Александрова характеристики метрических пространств. Построены отображения некоторых классов \mathbb{R} -деревьев, сохраняющие расстояние один. Для этого используется конструкция, с помощью которой на произвольном метрическом пространстве вводится новая специальная метрика. В терминах этой новой сформулирован признак, необходимый для того, чтобы отображение, сохраняющее расстояние один, было бы изометрией. В рассмотренном случае характеристика А. Д. Александрова не выполняется. Кроме того, в работе исследована граница строго вертикального \mathbb{R} -дерева. Доказано, что любая орисфера в строго вертикальном \mathbb{R} -дереве является ультраметрическим пространством. Если число ветвления строго вертикального \mathbb{R} -дерева не больше континуума, то любая сфера и любая орисфера в \mathbb{R} -дереве имеют мощность континуума, а если число ветвления \mathbb{R} -дерева больше континуума, то всякая сфера или орисфера будут иметь мощность, равную числу ветвления.

Ключевые слова: подобно однородное пространство, вертикальное \mathbb{R} -дерево, метрика, орисфера.

Mathematical Subject Classification (2000): 54E35, 54E45.

Образец цитирования: Булыгин А. И. О некоторых свойствах подобно однородных \mathbb{R} -деревьев // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 1.—С. 33–42. DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57537.

Введение

В работе изучаются некоторые свойства подобно однородных неоднородных метрических пространств с внутренней метрикой, в частности \mathbb{R} -деревьев. Подобно однородные пространства являются естественным обобщением однородных римановых пространств, геометрия которых хорошо изучена с различных точек зрения, см., например, [1].

Понятие \mathbb{R} -дерева, введенное Жаком Титсом в 1977 г. (real-tree, см. [2]), является обобщением понятия симплициального дерева и включается в более общее семейство так называемых Λ -деревьев [3]. При этом правильно будет отметить, что А. Д. Александров привел две характеристики \mathbb{R} -деревьев еще в 1955 г. [4]. Всякое \mathbb{R} -дерево является $SAT(\kappa)$ -пространством при любом $\kappa \in \mathbb{R}$ [5].

Роль \mathbb{R} -деревьев в метрической геометрии и топологии чрезвычайно велика. Они возникают при изучении метрических и топологических пространств в целом ряде ситуаций. М. Громов доказал, что асимптотическим конусом пространства Лобачевского

размерности $n \geq 2$ является \mathbb{R} -дерево, каждая точка которого является точкой ветвления кратности 2^{\aleph_0} . Конструктивное описание этого \mathbb{R} -дерева выполнено А. Дюбиной и И. Полтеровичем в статье [6]. В работах В. Н. Берестовского и К. Плаута (см. [7]), посвященных изучению фундаментальной группы равномерных пространств, вводится понятие универсального \mathbb{R} -дерева, которое является аналогом универсального накрывающего пространства, например, для равномерного пространства, не являющегося локально односвязным. Показано, что в ряде естественных случаев такое универсальное \mathbb{R} -дерево изометрично \mathbb{R} -дереву Дюбиной — Полтеровича. Полезный критерий \mathbb{R} -дерева в терминах метрических полурешеток получен в статье П. Д. Андреева [8].

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы более подробно рассмотреть некоторые свойства симплициальных и вертикальных \mathbb{R} -деревьев. Полученные результаты являются продолжением исследований по геометрии подобно однородных \mathbb{R} -деревьев, представленных в [9].

Статья организована следующим образом. В первом параграфе приводятся необходимые определения и факты. Отображения \mathbb{R} -деревьев, сохраняющие расстояние один, изучаются во втором параграфе. Некоторые свойства строго вертикального \mathbb{R} -дерева и возможности их применения приведены в третьем параграфе.

1. Предварительные сведения

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Для числа $\varepsilon > 0$ точка $m \in X$ называется ε -серединой между точками $x, y \in X$, если выполнены неравенства

$$d(x, m), d(y, m) < \frac{1}{2}d(x, y) + \varepsilon.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Метрика d называется *внутренней*, если для любых точек $x, y \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует ε -середина m между x и y , и *строго внутренней*, если для любых $x, y \in X$ между ними имеется середина m :

$$d(x, m) = d(y, m) = \frac{1}{2}d(x, y).$$

Под отрезком в X с концами $x, y \in X$ понимается образ в X числового отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ при изометрическом вложении $i : [a, b] \rightarrow X$, при котором $i(a) = x$ и $i(b) = y$. Пространство X называется *геодезическим*, если любые две точки $x, y \in X$ можно соединить отрезком. В частности, всякое полное метрическое пространство со строго внутренней метрикой является геодезическим пространством.

Подобием пространства (X, d) с коэффициентом $k > 0$ называется биекция $\varphi : X \rightarrow X$, при которой для любых $x, y \in X$ выполнено

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = k \cdot d(x, y).$$

В частности, подобие φ с коэффициентом $k = 1$ является изометрией X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пространство X называется *подобно однородным*, если для любых точек $x, y \in X$ существует подобие φ , переводящее x в $\varphi(x) = y$. Если для любых $x, y \in X$ существует изометрия φ , переводящая x в y , пространство X называется *однородным*. Другими словами, пространство X *однородно* (соответственно, *подобно однородно*), если его группа изометрий $\text{Isom}(X)$ (соответственно, группа подобий $\text{Sim}(X)$) действует на X транзитивно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пространство X называется *локально полным*, если для любой точки $x \in X$ определено число $r > 0$, для которого замкнутый шар $B(x, r)$ полон в метрике d .

Понятно, что в этом случае полными будут и шары $B(x, r')$ при всех положительных $r' \leq r$. Точная верхняя грань радиусов r , для которых шар $B(x, r)$ полон, называется *радиусом полноты* в точке x . Для радиуса полноты в статье [10] принято обозначение $c(x)$. Если $c(x_0) = +\infty$ хотя бы в одной точке $x_0 \in X$, то пространство X полное и $c(x) = +\infty$ во всех точках $x \in X$.

Теорема 1 (Берестовский В. Н., [10]). *Локально полное подобно однородное пространство X однородно тогда и только тогда, когда оно полно.*

В статье рассматриваются исключительно подобно однородные пространства, не являющиеся однородными, поэтому функция $c(x)$ всюду конечна. В этом случае легко доказать, что для любых точек $x, y \in X$ выполнено неравенство

$$|c(x) - c(y)| \leq d(x, y).$$

Если $\varphi : X \rightarrow X$ — подобие с коэффициентом $k > 0$, то для любой точки $x \in X$ выполнено $c(\varphi(x)) = k \cdot c(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Нетривиальное (содержащее более одной точки) геодезическое пространство (X, d) называется *\mathbb{R} -деревом*, если объединение любых двух отрезков $[xy]$ и $[yz]$ в X , пересечение которых есть их общий конец y , является вновь отрезком $[xz]$. Иначе говоря, X является *\mathbb{R} -деревом*, если любая сторона произвольного треугольника Δxyz в X содержится в объединении двух других сторон: $[xz] \subset [xy] \cup [yz]$.

Еще одно эквивалентное определение \mathbb{R} -дерева дано в работе [11] и основано на понятии дуги.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Дугой* в пространстве (X, d) с концами $x, y \in X$ называется образ числового отрезка $[a, b]$ при вложении (не обязательно изометрическом) $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, при котором $\gamma(a) = x$ и $\gamma(b) = y$. Геодезическое пространство X называется *\mathbb{R} -деревом*, если в нем любые две точки $x, y \in X$ соединяются единственной дугой. В этом случае всякая дуга автоматически является отрезком.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *пилообразной*, если:

1. f не является постоянной ни на каком интервале $(c, d) \subset [a, b]$;
2. из того, что f монотонна на интервале $(c, d) \subset [a, b]$ следует, что $f|_{(c,d)}$ — линейная функция с угловым коэффициентом ± 1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть (Y, d) — локально полное подобно однородное неоднородное \mathbb{R} -дерево. Оно называется *вертикальным*, если на каждом отрезке $[xy]$, параметризованном натуральной параметризацией $\gamma : [a, b] \rightarrow Y$ так, что $\gamma(a) = x$ и $\gamma(b) = y$, функция радиуса полноты $c(\gamma(t))$ является пилообразной. Вертикальное \mathbb{R} -дерево (Y, d) называется *строго вертикальным*, если на любом отрезке функция $c(\gamma(t))$ имеет не более одной внутренней точки локального экстремума.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Числом ветвления \mathbb{R} -дерева X в точке $x \in X$ называется кардинальное число $\mathfrak{B}(X) - 1$, где $\mathfrak{B}(X)$ — кардинальное число компонент связности множества $X \setminus \{x\}$. Если $\mathfrak{B}(X) = 1$, точка x называется *терминальной*. В этом случае ее число ветвления равно нулю. В случае, когда \mathbb{R} -дерево X является однородным или подобно однородным, его число ветвления во всех точках совпадает. В этом случае оно не содержит терминальных точек. Числом ветвления однородного или подобно однородного \mathbb{R} -дерева будем называть число ветвления в произвольной его точке.

ПРИМЕР 1. Примером тривиального строго вертикального \mathbb{R} -дерева является пространство $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$ со стандартной метрикой $d(s, t) = |s - t|$. Число ветвления при этом равно единице, а радиус полноты в любой точке $t \in \mathbb{R}_+$ определяется $c(t) = t$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть (X, d) — строго вертикальное \mathbb{R} -дерево, отличное от \mathbb{R}_+ . Будем говорить, что X имеет *ветвление кверху* (соответственно, *ветвление книзу*), если всякая точка экстремума радиуса полноты является точкой минимума (соответственно, максимума).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть на метрическом пространстве (X, d) задано отношение частичного порядка \preceq , по отношению к которому множество X является \wedge -полурешеткой. Это значит, что для любых двух точек $u, v \in X$ определен их инфимум $z = u \wedge v$, т. е. такая точка z , что $z \preceq u$, $z \preceq v$, и для произвольной точки $w \in X$ из $w \preceq u, v$ следует $w \preceq z$. Из антисимметричности отношения \preceq следует, что для любых $u, v \in X$ инфимум $z = u \wedge v$ определен однозначно. Полурешетка (X, \preceq) называется *нижне полулинейной*, если для любой точки $x \in X$ ее нижний конус

$$\underline{K}_x = \{y \in X \mid y \preceq x\}$$

линейно упорядочен относительно порядка \preceq . Тройка (X, d, \preceq) называется метрической \wedge -полурешеткой, если (X, \preceq) является \wedge -полурешеткой, и для любых точек $u, v \in X$ выполняется равенство

$$d(u, v) = d(u, u \wedge v) + d(u \wedge v, v).$$

2. Отображения \mathbb{R} -деревьев, сохраняющие расстояние один

В 1960-х гг. А. Д. Александров сформулировал общую проблему характеристики метрических пространств:

Найти условия, достаточные для того, чтобы в метрическом пространстве (M, d) выполнялась следующая характеристика изометрий. Всякая биекция $F : M \rightarrow M$, сохраняющая вместе с обратным к ней отображением фиксированное расстояние r , есть изометрия.

В этом параграфе показано, что для многих \mathbb{R} -деревьев существуют биективные отображения на себя, сохраняющие расстояние один, но не являющиеся изометриями (см. предложение 2 и предложение 3). Для этого используется конструкция, с помощью которой на произвольном метрическом пространстве вводится новая специальная метрика. В терминах этой новой метрики можно сформулировать признак, необходимый для того, чтобы отображение, сохраняющее расстояние один, было бы изометрией.

Пусть (M, d) — произвольное метрическое пространство. Введем на множестве M новую метрику d_J , которая может принимать конечные значения или значение ∞ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Для точек $x, y \in M$ *прыжковый путь длины n* между ними определяется как отображение

$$\gamma : \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow M,$$

при котором $\gamma(0) = x$, $\gamma(n) = y$ и $d(\gamma(i-1), \gamma(i)) = 1$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Число n называется *длиной прыжкового пути* γ .

Прыжковым расстоянием d_J между точками $x, y \in M$ называется минимальная длина прыжкового пути между ними. В частности, считаем $d_J(x, x) = 0$ для любой точки $x \in M$. Если между точками x и y не существует никакого прыжкового пути, мы полагаем $d_J(x, y) = \infty$.

Очевидно, что прыжковое расстояние на M задает метрику, которая может принимать бесконечные значения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пространство M называется *прыжково связным*, если $d_J(x, y) < \infty$ для всех $x, y \in M$. *Компонентой прыжковой связности* называется максимальное по включению прыжково связное подмножество $\mathcal{A} \subset M$. Для произвольной точки $x \in M$ однозначно определена содержащая ее компонента прыжковой связности \mathcal{A}_x . Всякое множество, представимое в виде объединения компонент прыжковой связности, называется *прыжково инвариантным*.

Ключевую роль для следующих построений в этом параграфе играет легко доказываемое

Предложение 1. Пусть множество M допускает разбиение в виде объединения $M = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ двух непустых непересекающихся прыжково инвариантных множеств \mathcal{A} и \mathcal{B} . Предположим, что метрическое пространство (\mathcal{A}, d_J) допускает нетривиальную изометрию f на себя, причем найдутся точки $x \in \mathcal{A}$ и $y \in \mathcal{B}$, для которых $d(x, y) \neq d(f(x), y)$. Тогда метрическое пространство (M, d) допускает биективное отображение $F : M \rightarrow M$, сохраняющее расстояние один, но не являющееся изометрией:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathcal{A}; \\ x, & x \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. \mathbb{R} -дерево называется *симплициальным деревом*, если оно обладает структурой одномерного симплициального комплекса. Нульмерные симплексы такого комплекса называются *вершинами*, а одномерные — *ребрами* симплициального дерева. Каждому ребру $e = [xy]$ сопоставляется некоторое положительное число $\ell(e)$ — его *длина*. Метрика симплициального дерева X является внутренней метрикой, при которой расстояния между вершинами $x, y \in X$ равно сумме длин ребер, составляющих метрический отрезок $[xy]$.

Предложение 2. Пусть X — полное симплициальное дерево, для которого все расстояния между вершинами являются рациональными числами и представляются дробями, знаменатели которых равномерно ограничены. Тогда X допускает биективное отображение на себя, сохраняющее расстояние один, не являющееся изометрией.

◁ Пусть n — наименьший общий знаменатель всех дробей, задающих расстояния между вершинами в X . Для построения нижеприводимой конструкции, мы можем считать, что все ребра дерева X имеют длину $1/n$ (ребра большей длины можно разбить на отрезки длины $1/n$). Выберем произвольно такие числа α, β , что $0 < \alpha < \beta < \frac{1}{2n}$. Пусть $\mathcal{A}_\alpha \subset X$ (соответственно, \mathcal{A}_β) — множество точек, удаленных от вершин дерева X на расстояние α (соответственно, β). Тогда множества $\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta$ и

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\alpha \cup \mathcal{A}_\beta$$

прыжково инвариантны, причем метрическое пространство $(\mathcal{A}_\alpha, d_J)$ изометрично метрическому пространству (\mathcal{A}_β, d_J) . Прыжковая изометрия $\phi_J : \mathcal{A}_\beta \rightarrow \mathcal{A}_\alpha$ устанавливается по следующему правилу. Для произвольной точки $x \in \mathcal{A}_\beta$ однозначно определена ближайшая к ней вершина $z \in X$. Для нее $d(x, z) = \beta$. На отрезке $[xz]$ существует единственная точка $y \in \mathcal{A}_\alpha$. Положим $\phi_J(x) = y$. Покажем, что отображение ϕ_J является прыжковой изометрией.

Действительно, всякая точка $y \in \mathcal{A}_\alpha$ является внутренней точкой некоторого ребра $[zw]$, и на этом ребре однозначно определена точка x , для которой $d(z, x) = \beta$. Она и является прообразом $\phi_J^{-1}(y)$.

Пусть теперь задан прыжковый путь $x = x_0, x_1, \dots, x_n = p$ из точки x в точку $p \in \mathcal{A}_\beta$. Покажем, что путь $y = \phi_J(x_0), \phi_J(x_1), \dots, \phi_J(x_n) = q$ есть также прыжковый путь из точки $y = \phi_J(x)$ в точку $q = \phi_J(p)$. Для этого достаточно убедиться, что все расстояния $d_J(\phi_J(x_{i-1}), \phi_J(x_i))$ равны $1/n$:

$$d_J(\phi_J(x_{i-1}), \phi_J(x_i)) = 1/n. \quad (1)$$

Действительно, пусть z_{i-1} — ближайшая вершина к точке x_{i-1} , а z_i — к точке x_i . Тогда ровно одна из двух точек z_{i-1} или z_i принадлежит отрезку $[x_{i-1}x_i]$. Значит и из точек $\phi_J(x_{i-1})$ и $\phi_J(x_i)$ отрезку $[x_{i-1}x_i]$ принадлежит ровно одна. Легко видеть, что во всех возможных ситуациях равенство (1) выполнено. Следовательно,

$$d_J(p, q) \leq d_J(x, y).$$

Аналогично доказывается обратное неравенство.

Множество $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\alpha \cup \mathcal{A}_\beta$ прыжково инвариантно, а X представляется в виде объединения $\mathcal{A} \cup (X \setminus \mathcal{A})$ двух непустых прыжково инвариантных множеств. Отображение ϕ_J действует на множестве \mathcal{A} , как нетривиальная изометрия. Основываясь на предложении 1, получаем требуемое отображение $F : X \rightarrow X$:

$$F(x) = \begin{cases} \phi_J(x), & \text{если } x \in \mathcal{A}; \\ x, & \text{если } x \in (X \setminus \mathcal{A}). \end{cases} \triangleright$$

Можно указать и другую конструкцию отображения, не являющегося изометрией и сохраняющего единичные расстояния.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим произвольное симплициальное дерево X , все ребра которого имеют длину $1/n$.

Отметим теперь ряд свойств вспомогательной функции $\varphi : [0, 1/n] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t + \frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}$. Она возрастает, $\varphi(t) = t$ при $t \in \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\}$, $\varphi(t) > (<) t$ при $t \in (0, \frac{1}{2n})$ (соответственно, при $t \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n})$), $\varphi(\frac{1}{n} - t) = \frac{1}{n} - \varphi(t)$, см. рисунок 1.

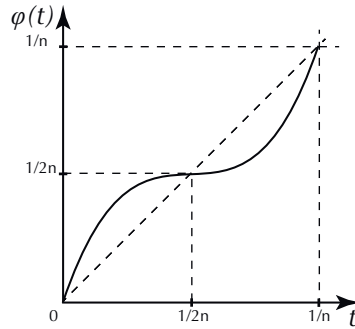


Рис. 1. График функции $t \mapsto \varphi(t)$.

Рассмотрим непрерывное биективное отображение $F : X \rightarrow X$, которое на каждом ребре симплициального дерева действует по правилу

$$F(\gamma(t)) = \gamma(\varphi(t)) = \gamma\left(t + \frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}\right),$$

где $\gamma : [0, \frac{1}{n}] \rightarrow X$ — натуральная параметризация соответствующего ребра. Нетрудно проверить, что данное отображение сохраняет заданное расстояние и не является изометрией.

Предложение 3. Пусть \mathbb{R} -дерево X допускает нетривиальную изометрию, а множество попарных расстояний между его точками ветвления не более чем счетно. Тогда X допускает биективное отображение на себя, сохраняющее расстояние один и не являющееся изометрией.

◁ Пусть $f : X \rightarrow X$ — нетривиальная изометрия и $P \subset \mathbb{R}_+$ — счетное множество попарных расстояний между точками ветвления в X . Выберем произвольную точку ветвления $x \in X$. Пусть \mathcal{A} — компонента прыжковой связности, содержащая точку x . Покажем, что \mathcal{A} не совпадает с X .

Действительно, \mathcal{A} представляется как объединение

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k,$$

где

$$\mathcal{A}_k = \{y \in X : d_J(x, y) \leq k\}.$$

Определим отображение $D_x : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ равенством $D_x(y) = d(x, y)$. Тогда множество значений $D_x|_{\mathcal{A}}$ не более чем счетно. Действительно, $D_x(\mathcal{A}_0) = \{0\}$, $D_x(\mathcal{A}_1) = \{1\}$, и для каждого $k \geq 1$ множество значений $D_x(\mathcal{A}_{k+1})$ получается из $D_x(\mathcal{A}_k)$ добавлением некоторого подмножества из множества

$$\Delta_k = \{k+1\} \cup \{|1+2a-b| : a \in P, a \leq k, b \in D_x(\mathcal{A}_k)\}.$$

Поскольку Δ_k не более чем счетно при всех натуральных k , по индукции получаем, что каждое $D_x(\mathcal{A}_k)$ не более чем счетно. Следовательно, $D_x(\mathcal{A})$ представляется как счетное объединение не более чем счетных множеств, т. е. $D_x(\mathcal{A})$ само не более чем счетно. Поэтому оно не может содержать никакого интервала из \mathbb{R}_+ , а в X есть точки, не принадлежащие \mathcal{A} .

Множество \mathcal{A} прыжково инвариантно, а X представляется в виде объединения $\mathcal{A} \cup (X \setminus \mathcal{A})$ двух непустых прыжково инвариантных множеств. Отображение f действует хотя бы на одном из этих множеств как нетривиальная изометрия, поскольку f — нетривиальная изометрия на всем X . В итоге получаем требуемое отображение $F : X \rightarrow X$. ▷

Следует отметить, что F — биекция, сохраняющая расстояние один, причем этим же свойством обладает обратное отображение F^{-1} . Характеризация А. Д. Александрова для метрических пространств в рассмотренном случае не выполняется. Полученный результат согласуется с работами других авторов (см. [12–14]).

3. Граница строго вертикального \mathbb{R} -дерева

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Пусть (X, d) — строго вертикальное \mathbb{R} -дерево, имеющее ветвление кверху. Для точек $x, y \in X$ будем говорить, что x предшествует y , если на отрезке $[xy]$ минимум радиуса полноты достигается в x . В этом случае примем обозначение $x \nearrow y$. Аналогично, пусть (X, d) — строго вертикальное \mathbb{R} -дерево с ветвлением книзу. Для точек $x, y \in X$ мы говорим, что x предшествует y , если в x достигается максимум радиуса полноты на $[xy]$. В этом случае мы принимаем обозначение $x \searrow y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть (X, d) — строго вертикальное \mathbb{R} -дерево с ветвлением книзу. Определим метрику d на множестве X следующим образом:

- а) если $x \nearrow y$ или $y \nearrow x$, то $d(x, y) = \left| \frac{1}{c(x)} - \frac{1}{c(y)} \right|$;
- б) если x и y несравнимы в смысле порядка \nearrow , то $d(x, y) = d(x, x \wedge y) + d(x \wedge y, y)$.

Теорема 2 (Андреев П. Д., [8]). Пусть (X, d) — геодезическое пространство. Оно является \mathbb{R} -деревом тогда и только тогда, когда на X существует частичный порядок \preceq , по отношению к которому тройка (X, d, \preceq) является ниже полулинейной метрической \wedge -полурешеткой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Метрика называется *ультраметрикой*, если она удовлетворяет усиленному неравенству треугольника $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$. Пространство (X, d) является *ультраметрическим*, если метрика d , определенная на нем, удовлетворяет данному условию.

В любом строго вертикальном \mathbb{R} -дереве (X, d) всякая сфера по отношению к метрике d является ультраметрическим пространством. Если зафиксировать точку y , принадлежащую сфере $S(x, d(x, y))$, а центр x устремить к бесконечности по некоторому фиксированному лучу пространства X , то сферы $S(x, d(x, y))$ будут сходиться по Хаусдорфу в категории пространств с отмеченной точкой к некоторому множеству. В геометрии Лобачевского предел сфер, полученный таким способом, называется *орисферой*. В общей геометрии метрических пространств используется аналогия с геометрией Лобачевского, и также предельные множества называются орисферами. Из того, что в \mathbb{R} -дереве (X, d) все сферы — это ультраметрические пространства следует, что и все орисферы также являются ультраметрическими пространствами.

Если число ветвления строго вертикального \mathbb{R} -дерева не больше континуума, то любая сфера и любая орисфера в \mathbb{R} -дереве имеют мощность континуума, а если число ветвления \mathbb{R} -дерева больше континуума, то всякая сфера или орисфера будут иметь мощность, равную числу ветвления.

Рассмотрим в строго вертикальном \mathbb{R} -дереве с ветвлением книзу сферу S , она будет являться ультраметрическим пространством.

Теорема 3. Пусть (X, d) — строго вертикальное \mathbb{R} -дерево с ветвлением вниз. Тогда:

1. все множества уровней функции радиуса полноты являются оришарами с центром в единственной бесконечно удаленной точке;
2. обратно, все оришары являются множествами уровня функции $c(x)$;
3. все множества уровня функции $c(x)$ изометричны. Пусть также \bar{X} пополнение пространства X , тогда его граница $dX = \bar{X} \setminus X$ изометрична произвольному оришару.

◁ Доказательство теоремы основано на том, что всякое строго вертикальное \mathbb{R} -дерево изометрично модельному \mathbb{R} -дереву $X_-(G)$ для некоторой группы G [9]. Для строго вертикальных \mathbb{R} -деревьев с ветвлением вниз модельное \mathbb{R} -дерево T представляется как множество кусочно-постоянных слева функций вида $f : (a, +\infty) \rightarrow G$, где $a > 0$, G — некоторая группа, причем $f|_{(b, +\infty)} = e$ при некотором $b \geq a$, где e — единица в G . В таком представлении число a равно радиусу полноты функции f , как элемента модельного \mathbb{R} -дерева. Изометрия множества уровня $c^{(-1)}(s)$ на $c^{(-1)}(t)$ при $t > s$ осуществляется сдвигом вида $f \rightarrow g$, где функция $g : (t; +\infty) \rightarrow G$ определяется равенством $g(p) = f(p + s - t)$ для всех $p > t$. ▷

Применение конструкций ультраметрического анализа и пространств данного типа, в приложениях к теории спиновых стекол, динамике макромолекул и генетике, подробно изложены в книге [15].

Литература

1. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. Римановы многообразия и однородные геодезические.— Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012.—414 с.—(Итоги науки. Юг России. Мат. монография. Вып. 4).

2. Tits J. A “theorem of Lie-Kolchin” for trees // Contributions to Algebra.—N. Y.: Academic Press, 1977.—P. 377–388.
3. Chiswell I. Introduction to Λ -trees.—U.K.: Queen Mary & Westfield College, University of London, 2001.—328 p.
4. Alexandrov A. D. On a Generalization of Riemannian Geometry.—Berlin: Jahresber. Humb. Univ., 1955.
5. Bridson M., Haefliger A. Metric Spaces of Non-Positive Curvature.—Berlin: Springer-Verlag, 1999.—643 p.—(Ser. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Vol. 319.) DOI: 10.1007/978-3-662-12494-9.
6. Dyubina A., Polterovich I. Explicit constructions of universal \mathbb{R} -trees and asymptotic geometry of hyperbolic spaces // Bull. Lond. Math. Soc.—2001.—Vol. 33, № 6.—P. 727–734. DOI: 10.1112/S002460930100844X.
7. Berestovskii V. N., Plaut C. Covering \mathbb{R} -trees, \mathbb{R} -free groups and dendrites // Advances in Mathematics.—2010.—Vol. 224, № 5.—P. 1765–1783. DOI: 10.1016/j.aim.2010.01.015.
8. Андреев П. Д. Полулинейные метрические полурешетки на \mathbb{R} -деревьях // Изв. вузов. Матем.—2007.—№ 6.—С. 3–13. DOI: 10.3103/S1066369X07060011.
9. Andreev P. D., Bulygin A. I. On the Vertical Similarly Homogeneous \mathbb{R} -Trees // Lobachevskii J. Math.—2019.—Vol. 40, № 2.—P. 127–139. DOI: 10.1134/S1995080219020033.
10. Берестовский В. Н. Подобно однородные локально полные пространства с внутренней метрикой // Изв. вузов. Математика.—2004.—№ 11.—С. 3–22.
11. Bestvina M. \mathbb{R} -trees in topology, geometry and group theory // Handbook of geometric topology / Eds. R. J. Daverman, R. B. Sher.—Amsterdam: Elsevier Science, 2002.—P. 55–91.
12. Александров А. Д. Отображения семейств множеств // Докл. АН СССР.—1970.—Т. 190, № 3.—С. 502–505.
13. Богатый С. А., Фролкина О. Д. Изометричность отображений, сохраняющих периметр // Вестн. Московск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика.—2004.—№ 1.—С. 3–11.
14. Berestovskii V. N. Pathologies in Aleksandrov spaces of curvature bounded above // Siber. Adv. Math.—2002.—Vol. 12, № 4.—P. 1–18.
15. Козырев С. В. Методы и приложения ультраметрического и p -адического анализа: от теории всплесков до биофизики // Совр. пробл. матем.—2008.—Т. 12.—С. 3–168. DOI: 10.4213/spm23.

Статья поступила 15 июля 2019 г.

БУЛЫГИН АЛЕКСЕЙ ИВАНОВИЧ
Северный (Арктический) федеральный
университет им. М. В. Ломоносова,
аспирант
РОССИЯ, 163002, Архангельск, наб. Северной Двины, 17
E-mail: alexey.buligin@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 1, P. 32–42

ABOUT SOME PROPERTIES OF SIMILARLY HOMOGENEOUS \mathbb{R} -TREES

Bulygin, A. I.¹

¹ Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov,
17 Severnaya Dvina Emb., Arkhangelsk 163002, Russia

E-mail: alexey.buligin@gmail.com

Abstract. In this paper we consider the properties of locally complete similarly homogeneous inhomogeneous \mathbb{R} -trees. The geodesic space is called \mathbb{R} -tree if any two points may be connected by the unique arc. The general problem of A. D. Alexandrov on the characterization of metric spaces is considered. The distance one preserving mappings are constructed for some classes of \mathbb{R} -trees. To do this, we use the construction with the help of which a new special metric is introduced on an arbitrary metric space. In terms of this new metric,

a criterion is formulated that is necessary for a so that a distance one preserving mapping to be isometric. In this case, the characterization by A. D. Alexandrov is not fulfilled. Moreover, the boundary of a strictly vertical \mathbb{R} -tree is also studied. It is proved that any horosphere in a strictly vertical \mathbb{R} -tree is an ultrametric space. If the branch number of a strictly vertical \mathbb{R} -tree is not greater than the continuum, then the cardinality of any sphere and any horosphere in the \mathbb{R} -tree equals the continuum, and if the branch number of \mathbb{R} -tree is larger than the continuum, then the cardinality of any sphere or horosphere equals the number of branches.

Key words: similarly homogeneous space, strictly vertical \mathbb{R} -tree, metric, horosphere.

Mathematical Subject Classification (2010): 54E35, 54E45.

For citation: Bulygin, A. I. About Some Properties of Similarly Homogeneous \mathbb{R} -Trees, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 1, pp. 32–42 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57537.

References

1. Berestovskii, V. N. and Nikonorov, Yu. G. *Riemannian Manifolds and Homogeneous Geodesics*, Vladikavkaz, SMI VSC RAS., 2012, vol. 4, 414 p. (in Russian).
2. Tits, J. A. “Theorem of Lie-Kolchin” for Trees, *Contributions to Algebra*, New York, Academic Press, 1977, pp. 377–388.
3. Chiswell, I. *Introduction to Λ -Trees*, U.K., Queen Mary & Westfield College, University of London, 2001, 328 p.
4. Alexandrov, A. D. *On a Generalization of Riemannian Geometry*, Berlin, Jahresber. Humb. Univ., 1955.
5. Bridson, M. and Haefliger, A. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature. Ser. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 319*, Berlin, Springer-Verlag, 1999, 643 p. DOI: 10.1007/978-3-662-12494-9.
6. Dyubina, A. and Polterovich, I. Explicit Constructions of Universal \mathbb{R} -Trees and Asymptotic Geometry of Hyperbolic Spaces, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 2001, vol. 33, no. 6, pp. 727–734. DOI: 10.1112/S002460930100844X.
7. Berestovskii, V. N. and Plaut, C. Covering \mathbb{R} -Trees, \mathbb{R} -Free Groups and Dendrites, *Advances in Mathematics*, 2010, vol. 224, no. 5, pp. 1765–1783. DOI: 10.1016/j.aim.2010.01.015.
8. Andreev, P. D. Semilinear Metric Semilattices on \mathbb{R} -Trees, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2007, vol. 51, no. 6, pp. 1–10. DOI: 10.3103/S1066369X07060011.
9. Andreev, P. D. and Bulygin, A. I. On the Vertical Similarly Homogeneous \mathbb{R} -Trees, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, no. 2, pp. 127–139. DOI: 10.1134/S1995080219020033.
10. Berestovskii, V. N. Similarly Homogeneous Locally Complete Spaces with an Intrinsic Metric, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2004, vol. 48, no. 11, pp. 1–19. (in Russian).
11. Bestvina, M. \mathbb{R} -Trees in Topology, Geometry and Group Theory, *Handbook of Geometric Topology*, North-Holland, Elsevier Science, 2002, pp. 55–91.
12. Aleksandrov, A. D. Mappings of Families of Sets, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1970, vol. 190, no. 3, p. 502–505 (in Russian).
13. Bogatyj, S. A. and Frolkina, O. D. Isometricity of Mappings Preserving Perimeter, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika Mekhanika*, 2004, no. 1, pp. 3–11 (in Russian).
14. Berestovskii, V. N. Pathologies in Aleksandrov Spaces of Curvature Bounded Above, *Siberian Advances in Mathematics*, 2002, vol. 12, no. 4, pp. 1–18.
15. Kozyrev, S. V. Methods and Applications of Ultrametric and p -Adic Analysis: From Wavelet Theory to Biophysics, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 274, suppl. 1, S1–S84. DOI: 10.1134/S0081543811070017.

Received 15 July, 2019

ALEKSEY I. BULYGIN

Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov,
17 Severnaya Dvina Emb., Arkhangelsk 163002, Russia,
Post-Graduate Student

E-mail: alexey.buligin@gmail.com

УДК 512.643.86+517.546

DOI 10.23671/VNC.2020.1.57538

HANKEL DETERMINANT OF THIRD KIND
FOR CERTAIN SUBCLASS OF MULTIVALENT ANALYTIC FUNCTIONS

D. Vamshee Krishna¹ and D. Shalini²

¹ GITAM Institute of Science,

Visakhapatnam 530045, Andhra Pradesh, India;

² Dr. B. R. Ambedkar University, Srikakulam 532410, Andhra Pradesh, India

E-mail: vamsheekrishna1972@gmail.com, shaliniraj1005@gmail.com

Abstract. The objective of this paper is to obtain an upper bound (not sharp) to the third order Hankel determinant for certain subclass of multivalent (p -valent) analytic functions, defined in the open unit disc E . Using the Toeplitz determinants, we may estimate the Hankel determinant of third kind for the normalized multivalent analytic functions belonging to this subclass. But, using the technique adopted by Zaprawa [1], i. e., grouping the suitable terms in order to apply Lemmas due to Hayami [2], Livingston [3] and Pommerenke [4], we observe that, the bound estimated by the method adopted by Zaprawa is more refined than using upon applying the Toeplitz determinants.

Key words: p -valent analytic function, upper bound, third Hankel determinant, positive real function.

Mathematical Subject Classification (2010): 30C45, 30C50.

For citation: Vamshee Krishna, D. and Shalini, D. Hankel Determinant of Third Kind for Certain Subclass of Multivalent Analytic Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 3, pp. 43–48. DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57538.

1. Introduction

Let A_p (p is a fixed integer ≥ 1) denotes the class of functions f of the form

$$f(z) = z^p \sum_{n=0}^{\infty} a_{p+n} z^n, \quad (1.1)$$

in the open unit disc $E = \{z : |z| < 1\}$ with $p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Let S be the subclass of $A_1 = A$, consisting of univalent functions. In 1985, Louis de Branges de Bourcia proved the Bieberbach conjecture also called as Coefficient conjecture, which states that for a univalent function its n^{th} -Taylor's coefficient is bounded by n (see [5]). The bounds for the coefficients of these functions give information about their geometric properties. In particular, the growth and distortion properties of a normalized univalent function are determined by the bound of its second coefficient. The Hankel determinant of f given in (1.1) (when $p = 1$), for $q, n \in \mathbb{N}$ was defined by Pommerenke [6] as follows and has been extensively studied by many authors:

$$H_q(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2q-2} \end{vmatrix}. \quad (1.2)$$

One can easily observe that the Fekete–Szegő functional is $H_2(1)$. In recent years, the research on Hankel determinants has focused on the estimation of $|H_2(2)|$, where

$$H_2(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_2a_4 - a_3^2,$$

known as the second Hankel determinant obtained for $q = 2$ and $n = 2$ in (1.2). Many authors obtained upper bound to the functional $|a_2a_4 - a_3^2|$ for various subclasses of univalent and multivalent analytic functions. The exact (sharp) estimates of $|H_2(2)|$ for the subclasses of S namely, bounded turning, starlike and convex functions denoted by \mathcal{R} , S^* and \mathcal{K} respectively in the open unit disc E , that is, functions satisfying the conditions $\operatorname{Re} f'(z) > 0$, $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$ and $\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$ were proved by Janteng et al. [7, 8] and obtained the bounds as $4/9$, 1 , and $1/8$ respectively. For the class $S^*(\psi)$ of Ma-Minda starlike functions, the exact bound of the second Hankel determinant was obtained by Lee et al. [9]. Choosing $q = 2$ and $n = p + 1$ in (1.2), we obtain the second Hankel determinant for the p -valent function (see [10]), namely

$$H_2(p+1) = \begin{vmatrix} a_{p+1} & a_{p+2} \\ a_{p+2} & a_{p+3} \end{vmatrix} = a_{p+1}a_{p+3} - a_{p+2}^2.$$

The case $q = 3$ appears to be much more difficult than the case $q = 2$. Very few papers have been devoted to the third Hankel determinant denoted by $H_3(1)$, obtained by choosing $q = 3$ and $n = 1$ in (1.2). Babalola [11] is the first one, who tried to estimate an upper bound to $|H_3(1)|$ for the classes \mathcal{R} , S^* and \mathcal{K} . Following this paper, Raza and Malik [12] obtained an upper bound for the third Hankel determinant for a class of analytic functions related with lemniscate of Bernoulli. Sudharsan et al. [13] derived an upper bound to $H_3(1)$ for a subclass of analytic functions. Bansal et al. [14] modified the upper bound for $|H_3(1)|$ for some of the classes estimated by Babalola [11] to some extent. Recently, Zaprawa [1] improved the results obtained by Babalola [11]. Further, Orhan and Zaprawa [15] obtained an upper bound for third Hankel determinant for the classes S^* and \mathcal{K} functions of order alpha. Very recently, Kowalczyk et al. [16] estimated sharp upper bound to $|H_3(1)|$ for the class of convex functions \mathcal{K} and showed as $|H_3(1)| \leq \frac{4}{135}$, which is far better than the bound obtained by Zaprawa [1]. Lecko et al. [17] calculated sharp bound for Hankel determinant of the third kind for starlike functions of order $1/2$. For our discussion in this paper, we consider $H_3(p)$ for the values $q = 3$ and $n = p$ in (1.2), called as Hankel determinant of third order for the p -valent function given in (1.1), namely

$$H_3(p) = \begin{vmatrix} a_p & a_{p+1} & a_{p+2} \\ a_{p+1} & a_{p+2} & a_{p+3} \\ a_{p+2} & a_{p+3} & a_{p+4} \end{vmatrix} \quad (a_p = 1).$$

Expanding the determinant, we have

$$H_3(p) = [a_p(a_{p+2}a_{p+4} - a_{p+3}^2) + a_{p+1}(a_{p+2}a_{p+3} - a_{p+1}a_{p+4}) + a_{p+2}(a_{p+1}a_{p+3} - a_{p+2}^2)], \quad (1.3)$$

equivalently

$$H_3(p) = H_2(p+2) + a_{p+1}J_{p+1} + a_{p+2}H_2(p+1),$$

where $J_{p+1} = (a_{p+2}a_{p+3} - a_{p+1}a_{p+4})$ and $H_2(p+2) = (a_{p+2}a_{p+4} - a_{p+3}^2)$.

Motivated by the results obtained by different authors mentioned above and who are working in this direction (see [18, 19]), in particular the result obtained by Zaprawa [1] in finding an upper bound to the Hankel determinant of third kind for the subclass \mathcal{R} of S , consisting of functions whose derivative has a positive real part (also called as bounded turning functions), introduced by Alexander in 1915 and a systematic study of properties of these functions was conducted by MacGregor [20], who indeed referred to numerous earlier investigations involving functions whose derivative has a positive real part. In the present paper, we are making an attempt to obtain an upper bound to $|H_3(p)|$, for the function f given in (1.1), when it belongs to certain subclass of analytic functions, defined as follows.

DEFINITION 1.1. A function $f \in A_p$ is said to be in the class $I_p(\beta)$ (β is real) (see [21]), if it satisfies the condition

$$\operatorname{Re} \left\{ (1 - \beta) \frac{f(z)}{z^p} + \beta \frac{f'(z)}{pz^{p-1}} \right\} > 0, \quad z \in E - \{0\}. \tag{1.4}$$

1. Choosing $\beta = 1$ and $p = 1$, we obtain $I_1(1) = \mathcal{R}$.
2. Selecting $\beta = 1$, we get $I_p(1) = \mathcal{R}_p$, denotes the class of multivalent bounded turning functions.

In proving our result, we require a few sharp estimates in the form of Lemmas valid for functions with positive real part.

Let \mathcal{P} denote the class of functions consisting of g , such that

$$g(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \tag{1.5}$$

which are analytic in E and $\operatorname{Re}g(z) > 0$ for $z \in E$. Here g is called the Caratheodòry function [22].

Lemma 1.1 [2]. *If $g \in \mathcal{P}$, then the sharp estimate $|c_k - \mu c_k c_{n-k}| \leq 2$, holds for $n, k \in \mathbb{N}$, with $n > k$ and $\mu \in [0, 1]$.*

Lemma 1.2 [3]. *If $g \in \mathcal{P}$, then the sharp estimate $|c_k - c_k c_{n-k}| \leq 2$, holds for $n, k \in \mathbb{N}$, where $n > k$.*

Lemma 1.3 [4]. *If $g \in \mathcal{P}$ then $|c_k| \leq 2$, for each $k \geq 1$ and the inequality is sharp for the function $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$, $z \in E$.*

In order to obtain our result, we referred to the classical method devised by Libera and Zlotkiewicz [23, 24], used by several authors in the literature.

2. Main Result

Theorem 2.1. *If $f \in I_p(\beta)$ ($\beta \geq 1$ is real) with $p \in \mathbb{N}$, then*

$$|H_3(p)| \leq \left[\frac{4p^2(6p^6 + 60p^5\beta + 227p^4\beta^2 + 426p^3\beta^3 + 437p^2\beta^4 + 252p\beta^5 + 68\beta^6)}{(p + \beta)^2(p + 2\beta)^3(p + 3\beta)^2(p + 4\beta)} \right].$$

◁ For the function $f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \in I_p(\beta)$, by virtue of Definition 1.1, there exists an analytic function $g \in \mathcal{P}$ in the open unit disc E with $g(0) = 1$ and $\operatorname{Re}g(z) > 0$ such that

$$(1 - \beta) \frac{f(z)}{z^p} + \beta \frac{f'(z)}{pz^{p-1}} = g(z) \Leftrightarrow [(1 - \beta)pf(z) + \beta f'(z) = pz^p g(z)]. \tag{2.1}$$

Replacing f' and g with their series expressions in (2.1), upon simplification, we obtain

$$a_{p+n} = \frac{pc_n}{p+n\beta}, \quad n, p \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Substituting the values of a_{p+1} , a_{p+2} , a_{p+3} and a_{p+4} from (2.2) in the functional given in (1.3), it simplifies to

$$|H_3(p)| = p^2 \left[\frac{c_2 c_4}{(p+2\beta)(p+4\beta)} - \frac{pc_2^3}{(p+2\beta)^3} - \frac{c_3^2}{(p+3\beta)^2} - \frac{pc_1^2 c_4}{(p+\beta)^2(p+4\beta)} + \frac{2pc_1 c_2 c_3}{(p+\beta)(p+2\beta)(p+3\beta)} \right]. \quad (2.3)$$

On grouping the terms in (2.3), in order to apply Lemmas, we have

$$|H_3(p)| = p^2 \left[\frac{pc_4(c_2 - c_1^2)}{(p+\beta)^2(p+4\beta)} - \frac{1}{(p+3\beta)^2} c_3 \left\{ c_3 - \frac{6pc_1 c_2}{(p+\beta)(p+2\beta)} \right\} + \frac{pc_2(c_4 - c_2^2)}{(p+2\beta)^3} - \frac{2p^2 c_2(c_4 - c_1 c_3)}{(p+\beta)(p+2\beta)(p+3\beta)^2} + \frac{(p^6 + 6p^5\beta + 3p^4\beta^2 - 30p^3\beta^3 - 36p^2\beta^4 + 24p\beta^5 + 36\beta^6)c_2 c_4}{(p+\beta)^2(p+2\beta)^3(p+3\beta)^2(p+4\beta)} \right]. \quad (2.4)$$

Applying the triangle inequality in (2.4), we obtain

$$|H_3(p)| \leq p^2 \left[\frac{p|c_4||c_2 - c_1^2|}{(p+\beta)^2(p+4\beta)} + \frac{1}{(p+3\beta)^2} |c_3| \left| c_3 - \frac{6pc_1 c_2}{(p+\beta)(p+2\beta)} \right| + \frac{p|c_2||c_4 - c_2^2|}{(p+2\beta)^3} + \frac{2p^2|c_2||c_4 - c_1 c_3|}{(p+\beta)(p+2\beta)(p+3\beta)^2} + \frac{(p^6 + 6p^5\beta + 3p^4\beta^2 - 30p^3\beta^3 - 36p^2\beta^4 + 24p\beta^5 + 36\beta^6)|c_2||c_4|}{(p+\beta)^2(p+2\beta)^3(p+3\beta)^2(p+4\beta)} \right]. \quad (2.5)$$

Upon using the Lemmas given in 1.2, 1.3 and 1.4 in the inequality (2.5), it reduces to

$$|H_3(p)| \leq 4p^2 \left[\frac{p}{(p+\beta)^2(p+4\beta)} + \frac{1}{(p+3\beta)^2} + \frac{p}{(p+2\beta)^3} + \frac{2p^2}{(p+\beta)(p+2\beta)(p+3\beta)^2} + \frac{(p^6 + 6p^5\beta + 3p^4\beta^2 - 30p^3\beta^3 - 36p^2\beta^4 + 24p\beta^5 + 36\beta^6)c_2 c_4}{(p+\beta)^2(p+2\beta)^3(p+3\beta)^2(p+4\beta)} \right]. \quad (2.6)$$

Further simplification, we obtain

$$|H_3(p)| \leq \left[\frac{4p^2(6p^6 + 60p^5\beta + 227p^4\beta^2 + 426p^3\beta^3 + 437p^2\beta^4 + 252p\beta^5 + 68\beta^6)}{(p+\beta)^2(p+2\beta)^3(p+3\beta)^2(p+4\beta)} \right]. \quad (2.7)$$

This completes the proof of our Theorem. \triangleright

REMARK 2.1. Choosing $p = 1$ and $\beta = 1$ in the inequality (2.7), it coincides with the result obtained by Zaprawa [1].

Acknowledgement. The authors are extremely grateful to the esteemed Reviewers for a careful reading of the manuscript and making valuable suggestions leading to a better presentation of the paper.

References

1. Zaprawa, P. Third Hankel Determinants for Subclasses of Univalent Functions, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2017, vol. 14, no. 1, article 19. DOI: 10.1007/s00009-016-0829-y.
2. Hayami, T. and Owa, S. Generalized Hankel Determinant for Certain Classes, *International Journal of Mathematical Analysis*, 2010, vol. 4, no. 52, pp. 2573–2585.
3. Livingston, A. E. The Coefficients of Multivalent Close-to-Convex Functions, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1969, vol. 21, no. 3, pp. 545–552.
4. Pommerenke, Ch. *Univalent Functions*, Gottingen, Vandenhoeck and Ruprecht, 1975.
5. De Branges de Bourcia Louis. A Proof of Bieberbach Conjecture, *Acta Math.*, 1985, vol. 154, no. 1–2, pp. 137–152.
6. Pommerenke, Ch. On the Coefficients and Hankel Determinants of Univalent Functions, *Journal of the London Mathematical Society*, 1966, vol. 41 (s-1), pp. 111–122.
7. Janteng, A., Halim, S. A. and Darus, M. Hankel Determinant for Starlike and Convex Functions, *International Journal of Mathematical Analysis*, 2007, vol. 1, no. 13, pp. 619–625.
8. Janteng, A., Halim S. A. and Darus M. Coefficient Inequality for a Function Whose Derivative has a Positive Real Part, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, vol. 7, no. 2, article 50.
9. Lee, S. K., Ravichandran, V. and Supramaniam, S. Bounds for the Second Hankel Determinant of Certain Univalent Functions, *Journal of Inequalities and Applications*, 2013, article 281. DOI: 10.1186/1029-242X-2013-281.
10. Vamshee Krishna, D. Coefficient Inequality for Certain p -Valent Analytic Functions, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 2014, vol. 44, no. 6, pp. 1941–1959.
11. Babalola, K. O. On $H_3(1)$ Hankel Determinant for Some Classes of Univalent Functions, *Inequality Theory and Applications* / ed. Y. J. Cho, J. K. Kim, S. S. Dragomir, New York, Nova Science Publishers, 2010, vol. 6, pp. 1–7.
12. Raza, M. and Malik, S. N. Upper Bound of Third Hankel Determinant for a Class of Analytic Functions Related with Lemniscate of Bernoulli, *Journal of Inequalities and Applications*, 2013, article 412. DOI: 10.1186/1029-242X-2013-412.
13. Sudharsan, T. V., Vijayalakshmi, S. P. and Stephen, B. A. Third Hankel Determinant for a Subclass of Analytic Functions, *Malaya Journal of Matematik*, 2014, vol. 2, no. 4, pp. 438–444.
14. Bansal, D., Maharana, S. and Prajapat, J. K. Third Order Hankel Determinant for Certain Univalent Functions, *Journal of the Korean Mathematical Society*, 2015, vol. 52, no. 6, pp. 1139–1148.
15. Orhan, H. and Zaprawa, P. Third Hankel Determinants for Starlike and Convex Functions of Order Alpha, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 2018, vol. 55, no. 1, pp. 165–173.
16. Kowalczyk, B., Lecko, A. and Sim, Y. J. The Sharp Bound for the Hankel Determinant of the Third Kind for Convex Functions, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 2018, vol. 97, no. 3, pp. 435–445. DOI: 10.1017/S0004972717001125.
17. Lecko, A., Sim, Y. J. and Smiarowska, B. The Sharp Bound of the Hankel Determinant of the Third Kind for Starlike Functions of Order $1/2$, *Complex Analysis and Operator Theory*, 2019, vol. 13, no. 5, pp. 2231–2238. DOI: 10.1007/s11785-018-0819-0.
18. Cho, N. E., Kowalczyk B., Kwon, O. S. et al. The Bounds of Some Determinants for Starlike Functions of Order Alpha, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2018, vol. 41, no. 1, pp. 523–535. DOI: 10.1007/s40840-017-0476-x.
19. Vamshee Krishna, D. and Shalini, D. Bound on $H_3(1)$ Hankel Determinant for Pre-Starlike Functions of Order α , *Proyecciones Journal of Math.*, 2018, vol. 37, no. 2, pp. 305–315. DOI: 10.4067/S0716-09172018000200305.
20. MacGregor, T. H. Functions Whose Derivative Have a Positive Real Part, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1962, vol. 104, no. 3, pp. 532–537. DOI: 10.1090/S0002-9947-1962-0140674-7.
21. Kilic, Ö. Ö. Sufficient Conditions for Subordination of Multivalent Functions, *Journal of Inequalities and Applications*, 2008, article ID 374756. DOI: 10.1155/2008/374756.
22. Duren, P. L. *Univalent Functions*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 259, New York, Springer-Verlag, 1983.

23. Libera, R. J. and Zlotkiewicz, E. J. Coefficient Bounds for the Inverse of a Function with Derivative in \mathcal{P} , *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1983, vol. 87, no. 2, pp. 251–257. DOI: 10.1090/S0002-9939-1983-0681830-8.
24. Libera, R. J. and Zlotkiewicz E. J. Early Coefficients of the Inverse of a Regular Convex Function, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1982, vol. 85, no. 2, pp. 225–230. DOI: 10.1090/S0002-9939-1982-0652447-5.

Received 26 November, 2018

DEEKONDA VAMSHEE KRISHNA
GITAM Institute of Science,
Visakhapatnam 530045, Andhra Pradesh, India,
Assistant Professor
E-mail: vamsheekrishna1972@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-3334-9079>;

D. SHALINI
Dr. B. R. Ambedkar University,
Srikakulam 532410, Andhra Pradesh, India,
Teaching Assistant
E-mail: shaliniraj1005@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-4059-8900>

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 1, С. 43–48

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ГАНКЕЛЯ ТРЕТЬЕГО РОДА ДЛЯ НЕКОТОРОГО ПОДКЛАССА МНОГОВАЛЕНТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Вамши Кришна Д.¹, Шалини Д.²

¹ Университет ГИТАМ, Вишакхапатнам 530045, Андхра-Прадеш, Индия;

² Университет доктора Б. Р. Амбедкара, Шрикакулам, 532410, Андхра-Прадеш, Индия

E-mail: vamsheekrishna1972@gmail.com, shaliniraj1005@gmail.com

Аннотация. Целью данной статьи является получение (не точной) верхней границы для определителя Ганкеля третьего порядка для некоторого подкласса многовалентных (p -валентных) аналитических функций, определенных на открытом единичном диске E . Используя определители Теплица, мы можем оценить определитель Ганкеля третьего рода для нормированных многовалентных аналитических функций, принадлежащих этому подклассу. Однако, используя технику, принятую Саправой [1], т. е. группируя подходящие члены для применения лемм Хаями [2], Ливингстона [3] и Померенке [4], мы видим, что оценка методом Саправы точнее, чем при применении определителей Теплица.

Ключевые слова: p -валентная аналитическая функция, верхняя граница, третий определитель Ганкеля, положительная вещественная функция.

Mathematical Subject Classification (2010): 30C45, 30C50.

Образец цитирования: Vamshee Krishna, D. and Shalini, D. Hankel Determinant of Third Kind for Certain Subclass of Multivalent Analytic Functions // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, № 3.—С. 43–48 (in English). DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57538.

УДК 517.929.4+519.21

DOI 10.23671/VNC.2020.1.57571

УСТОЙЧИВОСТЬ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Р. И. Кадиев^{1,2}

¹Дагестанский государственный университет,
Россия, 367000, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43 а;

²Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН,
Россия, 367032, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45

E-mail: kadiev_r@mail.ru

Аннотация. Исследуются вопросы $2p$ -устойчивости ($1 \leq p < \infty$) систем двух линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями и с импульсными воздействиями по одной компоненте решений на основе теории положительно обратимых матриц. Для этого применяются идеи и методы, разработанные Н. В. Азбелевым и его учениками для исследования вопросов устойчивости детерминированных функционально-дифференциальных уравнений. Приводятся достаточные условия $2p$ -устойчивости и экспоненциальной $2p$ -устойчивости ($1 \leq p < \infty$) систем двух линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями и с импульсными воздействиями по одной компоненте решений в терминах положительной обратимости матриц, построенных по параметрам исходных систем. Проверяется выполнимость этих условий для конкретных уравнений. Получены достаточные условия экспоненциальной моментной устойчивости системы двух детерминированных линейных дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями и коэффициентами с импульсными воздействиями по одной компоненте решений в терминах параметров этой системы. Показано, что в этом случае из общих утверждений можно получить новые результаты для исследуемой системы.

Ключевые слова: уравнения Ито, устойчивость решений, импульсные воздействия, положительная обратимость матрицы.

Mathematical Subject Classification (2010): 34K20, 34K50.

Образец цитирования: Кадиев Р. И. Устойчивость импульсных систем двух линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 1.—С. 49–65. DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57571.

1. Введение

Стохастические дифференциальные уравнения описывают многие реальные, практически важные задачи современной физики, биологии, экономики, кибернетики и т. д. Импульсные дифференциальные уравнения Ито с последствием являются хорошей математической моделью для финансовых процессов. Среди различных вопросов, возникающих при решении таких задач, один из важнейших — вопрос об устойчивости решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями.

Исследования устойчивости систем со случайными параметрами приобрели широкий размах после появления в 1960 г. работы И. Я. Каца и Н. Н. Красовского, в которой даны основополагающие определения стохастической устойчивости и впервые применены функции Ляпунова в исследованиях вопросов устойчивости для таких систем. Исследованию вопросов устойчивости для уравнений Ито с последствием методом функционалов Ляпунова — Красовского — Разумихина посвящено большое количество работ как отечественных, так и зарубежных математиков. Достаточно полный их список приведен в монографиях [1–4]. Однако применение этих методов во многих случаях встречало серьезные трудности. Поэтому эффективные признаки устойчивости обычно удавалось доказывать лишь для сравнительно узких классов стохастических функционально-дифференциальных уравнений. В детерминированном случае при исследовании вопросов устойчивости высокую эффективность показал метод вспомогательных или «модельных» уравнений — « W -метод» Н. В. Азбелева. Этот метод применительно к стохастическим функционально-дифференциальным уравнениям развит автором данной статьи. Он является, в принципе, универсальным методом. Это не означает, конечно, что он всегда дает наилучшие результаты. Однако, по крайней мере, этот метод может помочь во многих «безнадежных» ситуациях, где трудно использовать более традиционный «инструментарий». Этот метод позволяет обойти некоторые трудности традиционных схем, возникающие при изучении вопросов устойчивости для уравнений с неограниченными запаздываниями, со случайными коэффициентами и запаздываниями, а также с импульсными воздействиями. Устойчивость решений по Ляпунову относительно начальной функции для детерминированных импульсных дифференциальных уравнений исследовалась в работах [5–8]. Для импульсных дифференциальных уравнений Ито с последствием вопросы устойчивости решений по начальной функции ранее, по-видимому, другими авторами не рассматривались. Некоторым вопросам устойчивости решений для систем линейных дифференциальных уравнений Ито с последствием и с импульсными воздействиями по всем компонентам решений посвящены работы [9–12]. В этих работах исследование проведено по аналогии с работой [8], т. е. методом вспомогательных или «модельных» уравнений, который подробно изложен в работах [13–15].

В настоящей работе изучаются вопросы $2p$ -устойчивости и экспоненциальной $2p$ -устойчивости ($1 \leq p < \infty$) для систем двух линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями и с импульсными воздействиями по одной компоненте решений. При этом применяются принципы метода вспомогательных уравнений и теория положительно обратимых матриц. Отличие от классического метода вспомогательных уравнений состоит в том, что каждое уравнение системы преобразуется независимо от остальных, а каждая компонента решения оценивается отдельно. Такой подход, в сочетании с теорией положительно обратимых матриц, позволяет получить новые результаты, в том числе и в детерминированном случае, а также эффективно исследовать вопросы устойчивости для уравнений с импульсными воздействиями.

2. Предварительные сведения и объект исследования

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$ — стохастический базис; k^2 — линейное пространство 2-мерных \mathcal{F}_0 -измеримых случайных величина; $\mathcal{B}_i, i = 2, \dots, m$, — независимые стандартные винеровские процессы согласованные с потоком $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$; $1 \leq p < \infty$; c_p — положительное число, зависящее от p [16, с. 65] и используемое в оценке (3); E — символ математического ожидания; \bar{E} — единичная 2×2 -матрица; $|\cdot|$ — норма в R^2 ; $\|\cdot\|$ — норма 2×2 -матрицы, согласованная с нормой в R^2 ; $\|\cdot\|_X$ — норма в нормированном пространстве X ; μ — мера Лебега на $[0, +\infty)$.

Пусть $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$ — 2×2 -матрица. Матрица B называется неотрицательной, если $b_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2$, и положительной, если $b_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2$.

Очевидно, что матрица $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$ с $b_{12} \leq 0$, $b_{21} \leq 0$ положительно обратима, если главные диагональные миноры матрицы B положительны. В рамках этой статьи мы будем пользоваться этим признаком положительной обратимости 2×2 -матрицы с неположительными внедиагональными элементами. Более общие признаки положительной обратимости матриц можно найти в [17].

В данной работе исследуются вопросы устойчивости для системы двух линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями и с импульсными воздействиями по одной компоненте решений вида

$$dx(t) = - \sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)x(h_{1j}(t)) dt + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(t)x(h_{ij}(t)) d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \geq 0), \quad (1)$$

$$x_2(\mu_j) = B_j x_2(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{почти наверно (п. н.),}$$

относительно начальных данных

$$x(t) = \varphi(t) \quad (t < 0), \quad (1a)$$

$$x(0) = b, \quad (1b)$$

где

- 1) $x = \text{col}(x_1, x_2)$ — 2-мерный неизвестный случайный процесс;
- 2) $A_{ij} = (a_{sk}^{ij})_{s,k=1}^2$ — 2×2 -матрица при $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, элементами матриц A_{1j} , $j = 1, \dots, m_1$, являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых п. н. локально суммируемы, а элементами матриц A_{ij} , $i = 2, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых п. н. локально суммируемы с квадратом;
- 3) h_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, — измеримые по Борелю функции, заданные на $[0, \infty)$ такие, что $h_{ij}(t) \leq t$ ($t \in [0, \infty)$) μ -почти всюду, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$;
- 4) μ_j , $j = 1, 2, 3, \dots$, — действительные числа такие, что $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j = \infty$;
- 5) B_j , $j = 1, 2, 3, \dots$, — отличные от нуля действительные числа;
- 6) $\varphi = \text{col}(\varphi_1, \varphi_2)$ — \mathcal{F}_0 -измеримый 2-мерный случайный процесс;
- 7) $b = \text{col}(b_1, b_2)$ — \mathcal{F}_0 -измеримая 2-мерная случайная величина, т. е. $b \in k^2$.

Пусть в дальнейшем: D^2 — линейное пространство 2-мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[0, +\infty)$, траектории которых п. н. непрерывно справа и имеют пределы слева; L^2 — линейное пространство 2-мерных случайных процессов на $(-\infty, 0)$, которые не зависят от винеровских процессов \mathcal{B}_i , $i = 2, \dots, m$, и имеет п. н. ограниченные в существенном траектории; $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow R^1$ — положительная непрерывная функция.

Решение задачи (1), (1a), (1b) это 2-мерный случайный процесс $x = \text{col}(x_1, x_2)$ из пространства D^2 такой, что $x_2(\mu_j) = B_j x_2(\mu_j - 0)$, $j = 1, 2, 3, \dots$, п. н. и

$$x(t) = x(\mu_j) - \sum_{j=1}^{m_1} \int_{\mu_j}^t A_{1j}(s)x(h_{1j}(s)) ds + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \int_{\mu_j}^t A_{ij}(s)x(h_{ij}(s)) d\mathcal{B}_i(s) \\ (t \in [\mu_j, \mu_{j+1})), \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ x(0) = b, \quad x(t) = \varphi(t) \quad (t < 0),$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега и Ито соответственно.

Отметим, что при сделанных предположениях задача (1), (1a), (1b) имеет единственное решение [18]. Обозначим через $x(t, b, \varphi)$ решение системы (1), удовлетворяющее условиям (1a) и (1b), т. е. $x(t, b, \varphi) = \varphi(t)$ при $t < 0$ и $x(0, b, \varphi) = b$. Очевидно, что $x(\cdot, b, \varphi) \in D^2$.

Введем следующие обозначения линейных нормированных подпространств пространств D^2 , k^2 , L^2 :

$$M_p^\gamma = \left\{ x : x \in D^2, \|x\|_{M_p^\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \geq 0} (E|\gamma(t)x(t)|^p)^{1/p} < \infty \right\} \quad (M_p^1 = M_p);$$

$$k_p^2 = \left\{ \alpha : \alpha \in k^2, \|\alpha\|_{k_p^2} \stackrel{\text{def}}{=} (E|\alpha|^p)^{1/p} < \infty \right\};$$

$$L_p^2 = \left\{ \varphi : \varphi \in L^2, \|\varphi\|_{L_p^2} \stackrel{\text{def}}{=} \text{vrai sup}_{\nu < 0} (E|\varphi(\nu)|^p)^{1/p} < \infty \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Систему (1) называют:

– *p-устойчивой* относительно начальных данных, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta(\epsilon) > 0$, что при любых $b \in k_p^2$, $\varphi \in L_p^2$ и $\|b\|_{k_p^2} + \|\varphi\|_{L_p^2} < \delta(\epsilon)$ будет выполнено неравенство $(E|x(t, b, \varphi)|^p)^{1/p} \leq \epsilon$ для любого $t \geq 0$;

– *асимптотически p-устойчивой* относительно начальных данных, если оно *p-устойчиво*, и, кроме того, для любых $b \in k_p^2$, $\varphi \in L_p^2$ и $\|b\|_{k_p^2} + \|\varphi\|_{L_p^2} < \delta(\epsilon)$ будет $\lim_{t \rightarrow +\infty} (E|x(t, b, \varphi)|^p)^{1/p} = 0$;

– *экспоненциально p-устойчивой* относительно начальных данных, если существуют положительные числа K, λ такие, что для решений $x(t, b, \varphi)$ задачи (1), (1a), (1b) выполнено неравенство $(E|x(t, b, \varphi)|^p)^{1/p} \leq K \exp\{-\lambda t\} (\|b\|_{k_p^2} + \|\varphi\|_{L_p^2})$ ($t \geq 0$).

Заметим, что в предыдущих определениях величина b — случайная величина, φ — случайный процесс. В известных определениях их считают детерминированными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Систему (1) назовем *M_p^γ -устойчивой*, если для любых $b \in k_p^2$, $\varphi \in L_p^2$ для решения задачи (1), (1a), (1b) $x(\cdot, b, \varphi)$ имеем $x(\cdot, b, \varphi) \in M_p^\gamma$ и выполнено неравенство

$$\|x(\cdot, b, \varphi)\|_{M_p^\gamma} \leq c(\|b\|_{k_p^2} + \|\varphi\|_{L_p^2}) \quad (2)$$

для некоторого положительного числа c .

Очевидно, что

– из M_p -устойчивости системы (1) следует *p-устойчивость* этой же системы относительно начальных данных;

– из M_p^γ -устойчивости системы (1) (где $\gamma(t) \geq \delta > 0$ ($t \geq 0$) и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = +\infty$) следует *асимптотическая p-устойчивость* этой же системы относительно начальных данных;

– из M_p^γ -устойчивости системы (1) (где $\gamma(t) = \exp\{\lambda\}$, λ — некоторое положительное число) следует *экспоненциальная p-устойчивость* этой же системы относительно начальных данных.

Лемма 1. Пусть $f(s)$ — скалярный случайный процесс, интегрируемый по винеровскому процессу $\mathcal{B}(s)$ на отрезке $[0, t]$. Тогда справедливо неравенство

$$\left(E \left| \int_0^t f(s) d\mathcal{B}(s) \right|^{2p} \right)^{1/2p} \leq c_p \left(E \left(\int_0^t |f(s)|^2 d(s) \right)^p \right)^{1/2p}, \quad (3)$$

где c_p — некоторое число, зависящее от p .

Справедливость неравенства (3) следует из неравенства 4 работы [16, с. 65], где приведено и конкретное выражение для c_p .

Лемма 2. Пусть $g(s)$ — скалярная функция на $[0, \infty)$, квадрат которой локально суммируем, $f(s)$ — скалярный случайный процесс такой, что $\sup_{s \geq 0} (E|f(s)|^{2p})^{1/2p} < \infty$. Тогда справедливы следующие неравенства

$$\sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t g(s)f(s) ds \right|^{2p} \right)^{1/2p} \leq \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t |g(s)| ds \right) \sup_{s \geq 0} (E|f(s)|^{2p})^{1/2p}, \quad (4)$$

$$\sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t (g(s))^2 (f(s))^2 ds \right|^p \right)^{1/2p} \leq \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t (g(s))^2 ds \right)^{1/2} \sup_{s \geq 0} (E|f(s)|^{2p})^{1/2p}. \quad (5)$$

Справедливость леммы доказана в работе [19].

3. Метод исследования

Как было отмечено во введении, устойчивость системы (1) будем проверять преобразованием системы (1), с помощью вспомогательного (модельного) уравнения, в другое, более простое, уравнение, для которого непосредственно можно проверить условия, обеспечивающие устойчивость систем (1).

Наряду с системой (1) рассмотрим систему двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями по одной компоненте решений вида

$$\begin{aligned} dx(t) &= [B(t)x(t) + f(t)]dt \quad (t \geq 0), \\ x_2(\mu_j) &= B_j x_2(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

где $B(t)$ — 2×2 -матрица, элементы которой измеримые по Лебегу функция и $f(t)$ — 2-мерная измеримая по Лебегу функция, $B_j, \mu_j, j = 1, 2, 3, \dots$, — те же самые величины, что и для системы (1).

Для системы (6) рассмотрим соответствующую линейную однородную систему вида

$$\begin{aligned} dx(t) &= B(t)x(t) \quad (t \geq 0) \\ x_2(\mu_j) &= B_j x_2(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. 2×2 -матрица $X(t)$ ($t \geq 0$), столбцы которой являются решениями системы (7) и $X(0) = \bar{E}$, назовем *фундаментальной матрицей* для системы (6).

В силу того, что через любое $x_0 \in \mathbb{R}^n$ проходит единственное решение системы (7), имеем $\det X(t) \neq 0$ при $t \geq 0$.

Непосредственно, методом вариации постоянных, можно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 3. Для решения системы (6), проходящего через x_0 , имеет место представление

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t)X(s)^{-1}f(s) ds \quad (t \geq 0).$$

Используя систему (6) и лемму 3, задачу (1), (1a), (1b) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$x(t) = X(t)b + (\Theta x)(t) + (C\varphi)(t) \quad (t \geq 0), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} (\Theta x)(t) &= \int_0^t X(t)X(s)^{-1} \left[B(s) - \sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(s) \bar{x}(h_{1j}(s)) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t X(t)X(s)^{-1} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(s) \bar{x}(h_{ij}(s)) d\mathcal{B}_i(s), \\ (C\varphi)(t) &= \int_0^t X(t)X(s)^{-1} \left[- \sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(s) \bar{\varphi}(h_{1j}(s)) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t X(t)X(s)^{-1} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(s) \bar{\varphi}(h_{ij}(s)) d\mathcal{B}_i(s), \end{aligned}$$

где $\bar{x}(t)$ — неизвестный 2-мерный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $\bar{x}(t) = 0$ при $t < 0$, и $\bar{\varphi}(t)$ — известный 2-мерный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t)$ при $t \in (-\infty, 0)$ и $\bar{\varphi}(t) = 0$ при $t \in [0, +\infty)$.

Приведем следующую теорему, которая следует из результатов работы [9], а также в справедливости которой можно убедиться и непосредственно.

Теорема 1. Пусть при любых $b \in k_p^2$, $\varphi \in L_p^2$ для системы (8) имеем

$$\|Xb\|_{M_p^\gamma} \leq c_1 \|b\|_{k_p^2}, \quad \|\Theta x\|_{M_p^\gamma} \leq c_2 \|x\|_{M_p^\gamma}, \quad \|C\varphi\|_{M_p^\gamma} \leq c_3 \|\varphi\|_{L_p^2},$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые положительные числа и $c_2 < 1$. Тогда система (1) M_p^γ -устойчиво.

На основе этой теоремы в работе [9] получены достаточные условия p -устойчивости относительно начальных данных систем вида (1) в терминах параметров этих систем.

Для $x(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t))$ ($t \geq 0$) обозначим $\bar{x}_i^\gamma = \sup_{t \geq 0} (E|\gamma(t)x_i(t)|^p)^{1/p}$, $i = 1, 2$, $\bar{x}^\gamma = \text{col}(\bar{x}_1^\gamma, \bar{x}_2^\gamma)$.

Пусть для некоторого $\gamma(t)$, $t \in [0, \infty)$, переходя к оценкам в каждом уравнении системы (8), нам удалось получить матричное неравенство следующего вида:

$$\bar{E} \bar{x}^\gamma \leq C \bar{x}^\gamma + \bar{c} \|b\|_{k_p^2} \hat{E} + \hat{c} \|\varphi\|_{L_p^2} \hat{E}, \quad (9)$$

где C — некоторая 2×2 -матрица, \bar{c}, \hat{c} — некоторые положительные числа, \hat{E} — 2-мерный вектор, все элементы которой равны единице. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если матрица $\bar{E} - C$ положительно обратима, то система (1) M_p^γ -устойчива.

◁ В предположениях теоремы мы имеем: матрица $\bar{E} - C$ положительно обратима. Следовательно, неравенство (9) можно переписать в следующем виде:

$$\bar{E} \bar{x}^\gamma \leq (\bar{E} - C)^{-1} (\bar{c} \|b\|_{k_p^2} \hat{E} + \hat{c} \|\varphi\|_{L_p^2} \hat{E}).$$

Тогда из предыдущего неравенства получаем

$$|\bar{x}^\gamma| \leq K (\|b\|_{k_p^2} + \|\varphi\|_{L_p^2}), \quad (10)$$

где $K = \|(\bar{E} - C)^{-1}\| |\hat{E}| \max\{\bar{c}, \hat{c}\}$. Поскольку $x(t, b, \varphi) = x(t)$ и $\|x(\cdot, b, \varphi)\|_{M_p^\gamma} \leq |\bar{x}^\gamma|$, то из неравенства (10) следует, что для любых $b \in k_p^2$, $\varphi \in L_p^2$ имеем

$$\|x(\cdot, b, \varphi)\|_{M_p^\gamma} \leq c (\|b\|_{k_p^2} + \|\varphi\|_{L_p^2}),$$

где c — некоторое положительное число. Следовательно, система (1) M_p^γ -устойчиво. ▷

В следующем параграфе на основе теоремы 2 будут получены достаточные условия M_{2p}^γ -устойчивости системы (1) в терминах параметров этой системы.

4. Экспоненциальная устойчивость

В дальнейшем предположим, что $\gamma(t) = \exp\{\lambda t\}$ ($t \in [0, \infty)$), где λ — некоторое положительное число, $0 \leq t - h_{ij}(t) \leq \tau_{ij}$ ($t \in [0, \infty)$) μ -почти всюду при $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, для некоторых положительных чисел τ_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, существуют индексы $I_s \in \{1, \dots, m_1\}$, $s = 1, 2$, и положительные числа ρ , σ , B , \bar{a}_s , \bar{a}_{sk}^{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, $s, k = 1, 2$, такие, что для системы (1) имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |B_j| &\leq B, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \rho \leq \mu_{j+1} - \mu_j \leq \sigma \text{ при } j = 1, 2, \dots, \\ |a_{sk}^{ij}(t)| &\leq \bar{a}_{sk}^{ij}, \quad t \in [0, +\infty), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m_i, \quad s, k = 1, 2, \quad P \times \mu\text{-почти всюду,} \\ \sum_{k \in I_s} a_{ss}^{1k}(t) &\geq \bar{a}_s, \quad t \in [0, +\infty), \quad s = 1, 2, \quad P \times \mu\text{-почти всюду,} \end{aligned}$$

и для некоторого положительного числа D выполнено неравенство

$$\exp\{-\bar{a}_2 t\} \prod_{0 < \mu_j \leq t} |B_j| < D \text{ при } t \in [0, +\infty).$$

Пусть C — 2×2 -матрица, элементы которой определены следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 - \frac{1}{\bar{a}_1} \left[\sum_{k \in I_1} \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{11}^{1k} \tau_{1k} \bar{a}_{11}^{1j} + \sum_{j=1, j \notin I_1}^{m_1} \bar{a}_{11}^{1j} \right] \\ &\quad - c_p \left(\frac{1}{2\bar{a}_1} \right)^{1/2} \left[\sum_{k \in I_1} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{11}^{1k} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{11}^{ij} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{11}^{ij} \right], \\ c_{12} &= -\frac{1}{\bar{a}_1} \left[\sum_{k \in I_1} \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{11}^{1k} \tau_{1k} \bar{a}_{12}^{1\nu} + \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{12}^{1\nu} \right] \\ &\quad - c_p \left(\frac{1}{2\bar{a}_1} \right)^{1/2} \left[\sum_{k \in I_1} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{11}^{1k} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{12}^{i\nu} + \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{12}^{i\nu} \right], \\ c_{22} &= 1 - \frac{\max\{1, B\}(1 - \exp\{-\bar{a}_2 \sigma\})}{\bar{a}_2(1 - \exp\{-\bar{a}_2 \rho\}B)} \left[\sum_{k \in I_2} \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{22}^{1k} \tau_{1k} \bar{a}_{22}^{1j} + \sum_{j=1, j \notin I_2}^{m_1} \bar{a}_{22}^{1j} \right] \\ &\quad - c_p \left(\frac{\max\{1, B^2\}(1 - \exp\{-2\bar{a}_2 \sigma\})}{2\bar{a}_2(1 - \exp\{-2\bar{a}_2 \rho\}B^2)} \right)^{1/2} \left[\sum_{k \in I_2} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{22}^{1k} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{22}^{ij} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{22}^{ij} \right], \\ c_{21} &= -\frac{\max\{1, B\}(1 - \exp\{-\bar{a}_2 \sigma\})}{\bar{a}_2(1 - \exp\{-\bar{a}_2 \rho\}B)} \left[\sum_{k \in I_2} \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{22}^{1k} \tau_{1k} \bar{a}_{21}^{1\nu} + \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{21}^{1\nu} \right] \\ &\quad - c_p \left(\frac{\max\{1, B^2\}(1 - \exp\{-2\bar{a}_2 \sigma\})}{2\bar{a}_2(1 - \exp\{-2\bar{a}_2 \rho\}B^2)} \right)^{1/2} \left[\sum_{k \in I_2} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{22}^{1k} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{21}^{i\nu} + \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{21}^{i\nu} \right]. \end{aligned}$$

Теорема 3. Если $c_{11} > 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0$, то система (1) M_{2p}^γ -устойчива для некоторого положительного числа λ .

◁ Систему (1) с условиями (1а) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} d\bar{x}_s(t) = & - \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^2 a_{sk}^{1j}(t) [\bar{x}_k(h_{1j}(t)) + \bar{\varphi}_k(h_{1j}(t))] dt \\ & - \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^2 a_{sk}^{ij}(t) [\bar{x}_k(h_{ij}(t)) + \bar{\varphi}_k(h_{ij}(t))] d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \geq 0), \quad s = 1, 2, \\ \bar{x}_2(\mu_j) = & B_j \bar{x}_2(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \text{ п. н.}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\bar{x}_s(t)$ — неизвестный скалярный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $\bar{x}_s(t) = 0$ при $t < 0$, и $\bar{\varphi}_s(t)$ — известный скалярный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $\bar{\varphi}_s(t) = \varphi_s(t)$ при $t \in [-\hat{\sigma}, 0)$ и $\bar{\varphi}_s(t) = 0$ при $t \in (-\infty, -\hat{\sigma}) \cup [0, +\infty)$ для $s = 1, 2$ и $\hat{\sigma} = \max\{\tau_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m_i\}$. Обозначим через $\bar{x}(t, b, \bar{\varphi})$ решение системы (11), удовлетворяющее условию (1b). Очевидно, что решение задачи (11), (1b) при $t \geq 0$ совпадает с решением задачи (1), (1а), (1b), т. е. $x(t, b, \varphi) = \bar{x}(t, b, \bar{\varphi})$ при $t \geq 0$.

Если в системе (11) сделать замену $\bar{x}_s(t) = \exp\{-\lambda t\} y_s(t)$, где $y_s(t)$ — неизвестный скалярный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $y_s(t) = 0$ при $t < 0$, $0 < \lambda < \min\{\bar{a}_s, s = 1, 2\}$ для $s = 1, 2$, то получим систему

$$\begin{aligned} dy_s(t) = & \left[\lambda y_s(t) - \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^2 a_{sk}^{1j}(t) [\exp\{\lambda(t - h_{1j}(t))\} y_k(h_{1j}(t)) + \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_k(h_{1j}(t))] \right] dt \\ & + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^2 a_{sk}^{ij}(t) [\exp\{\lambda(t - h_{ij}(t))\} y_k(h_{ij}(t)) + \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_k(h_{ij}(t))] d\mathcal{B}_i(t) \quad (12) \\ & (t \geq 0), \quad s = 1, 2, \\ y_2(\mu_j) = & B_j y_2(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \text{ п. н.} \end{aligned}$$

Положив $\eta_s(t) = \sum_{k \in I_s} a_{ss}^{1k}(t) \exp\{\lambda(t - h_{1k}(t))\} - \lambda$ при $s = 1, 2$ и учитывая, что $\int_{h_{1k}(t)}^t dy_s(\tau) = y_s(t) - y_s(h_{1k}(t))$, $k \in I_s$, систему (12) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} dy_s(t) = & \left[-\eta_s(t) y_s(t) + \sum_{k \in I_s} a_{ss}^{1k}(t) \exp\{\lambda(t - h_{1k}(t))\} \right. \\ & \times \int_{h_{1k}(t)}^t dy_s(\tau) + \sum_{k \in I_s} a_{ss}^{1k}(t) \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_s(h_{1k}(t)) \\ & \left. + \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1, k \neq s}^2 a_{sk}^{1j}(t) [\exp\{\lambda(t - h_{1j}(t))\} y_k(h_{1j}(t)) + \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_k(h_{1j}(t))] \right] dt \quad (13) \\ & + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^2 a_{sk}^{ij}(t) [\exp\{\lambda(t - h_{ij}(t))\} y_k(h_{ij}(t)) + \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_k(h_{ij}(t))] d\mathcal{B}_i(t) \\ & (t \geq 0), \quad s = 1, 2, \\ y_2(\mu_j) = & B_j y_2(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \text{ п. н.} \end{aligned}$$

Подставляя выражение для $dy_s(t)$ из правой части s -го уравнения системы (12) в s -е уравнение системы (13) при $s = 1, 2$, получим

$$\begin{aligned}
dy_s(t) = & \left[-\eta_s(t)y_s(t) + \sum_{k \in I_s} a_{ss}^{1k}(t) \exp\{\lambda(t - h_{1k}(t))\} \right. \\
& \times \int_{h_{1k}(t)}^t \left\{ \left[\lambda y_s(\tau) + \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^2 a_{sk}^{1j}(\tau) [\exp\{\lambda(\tau - h_{1j}(\tau))\} y_k(h_{1j}(\tau)) \right. \right. \\
& \left. \left. + \exp\{\lambda\tau\} \bar{\varphi}_k(h_{1j}(\tau))] \right] d\tau + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^2 a_{sk}^{ij}(\tau) [\exp\{\lambda(\tau - h_{ij}(\tau))\} y_k(h_{ij}(\tau)) \right. \\
& \left. \left. + \exp\{\lambda\tau\} \bar{\varphi}_k(h_{ij}(\tau))] d\mathcal{B}_i(\tau) \right\} + \sum_{k \in I_s} a_{ss}^{1k}(t) \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_s(h_{1k}(t)) \right] \\
& + \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq s \text{ при } j \in I_s}}^2 a_{sk}^{1j}(t) [\exp\{\lambda(t - h_{1j}(t))\} y_k(h_{1j}(t)) + \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_k(h_{1j}(t))] dt \\
& + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^2 a_{sk}^{ij}(t) [\exp\{\lambda(t - h_{ij}(t))\} y_k(h_{ij}(t)) + \exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_k(h_{ij}(t))] d\mathcal{B}_i(t) \\
& (t \geq 0), \quad s = 1, 2, \quad y_2(\mu_j) = B_j y_2(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \text{п. н.}
\end{aligned} \tag{14}$$

Из системы (14) с учетом условия (1b), обозначая

$$m_1(t, \varsigma) = \exp \left\{ - \int_{\varsigma}^t \mu_1(\zeta) d\zeta \right\}, \quad m_2(t, \varsigma) = \exp \left\{ - \int_{\varsigma}^t \mu_1(\zeta) d\zeta \right\}_{\varsigma < \mu_j \leq t} B_j,$$

представлением для решений скалярных линейных дифференциальных уравнений Ито с импульсными воздействиями [9] получим систему

$$\begin{aligned}
y_s(t) = & m_s(t, 0) b_s + \sum_{k \in I_s} \int_0^t m_s(t, \varsigma) a_{ss}^{1k}(\varsigma) \exp\{\lambda(\varsigma - h_{1k}(\varsigma))\} \int_{h_{1k}(\varsigma)}^{\varsigma} \lambda y_s(\tau) d\tau d\varsigma \\
& + \sum_{k \in I_s} \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{\nu=1}^2 \int_0^t m_s(t, \varsigma) a_{ss}^{1k}(\varsigma) \exp\{\lambda(\varsigma - h_{1k}(\varsigma))\} \int_{h_{1k}(\varsigma)}^{\varsigma} a_{s\nu}^{1j}(\tau) [\exp\{\lambda(\tau - h_{1j}(\tau))\} y_\nu(h_{1j}(\tau)) \\
& + \exp\{\lambda\tau\} \bar{\varphi}_\nu(h_{1j}(\tau))] d\tau d\varsigma = \sum_{k \in I_s} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{\nu=1}^2 \int_0^t m_s(t, \varsigma) a_{ss}^{1k}(\varsigma) \exp\{\lambda(\varsigma - h_{1k}(\varsigma))\} \\
& \times \int_{h_{1k}(\varsigma)}^{\varsigma} a_{s\nu}^{ij}(\tau) [\exp\{\lambda(\tau - h_{ij}(\tau))\} y_\nu(h_{ij}(\tau)) + \exp\{\lambda\tau\} \bar{\varphi}_\nu(h_{ij}(\tau))] d\mathcal{B}_i(\tau) d\varsigma \\
& + \sum_{k \in I_s} \int_0^t m_s(t, \varsigma) a_{ss}^{1k}(\varsigma) \exp\{\lambda\varsigma\} \bar{\varphi}_s(h_{1k}(\varsigma)) d\varsigma + \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1, k \neq s \text{ при } j \in I_s}^2 \int_0^t m_s(t, \varsigma) a_{sk}^{1j}(\varsigma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [\exp\{\lambda(\varsigma - h_{1j}(\varsigma))\} y_k(h_{1j}(\varsigma)) + \exp\{\lambda\varsigma\} \bar{\varphi}_k(h_{1j}(\varsigma))] d\varsigma \\
& + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^2 \int_0^t m_s(t, \varsigma) a_{sk}^{ij}(\varsigma) [\exp\{\lambda(\varsigma - h_{ij}(\varsigma))\} y_k(h_{ij}(\varsigma)) + \exp\{\lambda\varsigma\} \bar{\varphi}_k(h_{ij}(\varsigma))] d\mathcal{B}_i(\varsigma) \quad (15) \\
& (t \geq 0), \quad s = 1, 2.
\end{aligned}$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$\hat{y}_s = \sup_{t \geq 0} (E|y_s(t)|^{2p})^{1/2p}, \quad \hat{\varphi}_s = \text{vrai sup}_{t < 0} (E|\varphi_s(t)|^{2p})^{1/2p}, \quad s = 1, 2,$$

и следующими очевидными неравенствами:

$$\text{vrai sup}_{t \geq 0} (E|\exp\{\lambda t\} \bar{\varphi}_s(h_{ij}(t))|^{2p})^{1/2p} \leq \exp\{\lambda \tau_{ij}\} \hat{\varphi}_s,$$

$$s = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m_i;$$

$$|m_1(t, \varsigma)| \leq \exp\{-(\bar{a}_1 - \lambda)(t - \varsigma)\}, \quad t \in [0, +\infty), \varsigma \in [0, t], \quad P \times \mu\text{-почти всюду},$$

$$|m_2(t, \varsigma)| \leq \exp\{-(\bar{a}_2 - \lambda)(t - \varsigma)\} \prod_{\varsigma < \mu_j \leq t} |B_j|, \quad t \in [0, +\infty), \varsigma \in [0, t], \quad P \times \mu\text{-почти всюду},$$

а также неравенством

$$\int_0^t \exp\{-(\bar{a}_2 - \lambda)(t - \varsigma)\} \prod_{\varsigma < \mu_j \leq t} |B_j| d\varsigma \leq \frac{\max\{1, B\}(1 - \exp\{-(\bar{a}_2 - \lambda)\sigma\})}{(\bar{a}_2 - \lambda)(1 - \exp\{-(\bar{a}_2 - \lambda)\rho\}B)},$$

доказанными в [8], и неравенством

$$\left(\int_0^t \exp\{-2(\bar{a}_2 - \lambda)(t - \varsigma)\} \prod_{\varsigma < \mu_j \leq t} (B_j)^2 d\varsigma \right)^{1/2} \leq \left(\frac{\max\{1, B^2\}(1 - \exp\{-2(\bar{a}_2 - \lambda)\sigma\})}{2(\bar{a}_2 - \lambda)(1 - \exp\{-2(\bar{a}_2 - \lambda)\rho\}B^2)} \right)^{1/2},$$

справедливость которого следует из предыдущего неравенства.

Из уравнения (15) с учетом предыдущих обозначений и неравенств, а также неравенств (3)–(5) получаем оценки

$$\begin{aligned}
\hat{y}_s & \leq \hat{D} \|b_s\|_{k_{2p}^1} + \lambda L_{1s} \left[\sum_{k \in I_s} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} \tau_{1k} \right] \hat{y}_s \\
& + L_{1s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{\nu=1}^2 \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} \tau_{1k} \bar{a}_{s\nu}^{1j} \exp\{\lambda \tau_{1j}\} (\hat{y}_\nu + \hat{\varphi}_\nu) \right] \\
& + c_p L_{2s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{\nu=1}^2 \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{s\nu}^{ij} \exp\{\lambda \tau_{ij}\} (\hat{y}_\nu + \hat{\varphi}_\nu) \right] \quad (16) \\
& + L_{1s} \left[\sum_{k \in I_s} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda \tau_{1k}\} \hat{\varphi}_s \right] + L_{1s} \left[\sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1, k \neq s \text{ при } j \in I_s}^2 \bar{a}_{sk}^{1j} \exp\{\lambda \tau_{1j}\} (\hat{y}_k + \hat{\varphi}_k) \right] \\
& + c_p L_{2s} \left[\sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^2 \bar{a}_{sk}^{ij} \exp\{\lambda \tau_{ij}\} (\hat{y}_k + \hat{\varphi}_k) \right], \quad s = 1, 2,
\end{aligned}$$

где $\widehat{D} = \max\{1, D\}$,

$$\begin{aligned} L_{11} &:= \frac{1}{(\bar{a}_1 - \lambda)}, \quad L_{21} = \left(\frac{1}{2(\bar{a}_1 - \lambda)} \right)^{1/2}, \\ L_{12} &:= \frac{\max\{1, B\}(1 - \exp\{-(\bar{a}_2 - \lambda)\sigma\})}{(\bar{a}_2 - \lambda)(1 - \exp\{-(\bar{a}_2 - \lambda)\rho\}B)}, \\ L_{22} &:= \left(\frac{\max\{1, B^2\}(1 - \exp\{-2(\bar{a}_2 - \lambda)\sigma\})}{2(\bar{a}_2 - \lambda)(1 - \exp\{-2(\bar{a}_2 - \lambda)\rho\}B^2)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Из оценок (16) и с учетом того, что норма в R^2 выбрана так, чтобы $\widehat{\varphi}_j \leq \|\varphi\|_{L_{2p}^2}$ при $j = 1, 2$, получаем

$$\widehat{y}_s \leq \widehat{D} \|b_s\|_{k_{2p}^1} + \sum_{j=1}^2 N_{sj}(\lambda) \widehat{y}_j + M_s(\lambda) \|\varphi\|_{L_{2p}^2}, \quad s = 1, 2, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} N_{ss}(\lambda) &:= \lambda L_{1s} \left[\sum_{k \in I_s} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda\tau_{1k}\} \tau_{1k} \right] \\ &+ L_{1s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda\tau_{1k}\} \tau_{1k} \bar{a}_{ss}^{1j} \exp\{\lambda\tau_{1j}\} + \sum_{j=0, j \notin I_s}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1j} \exp\{\lambda\tau_{1j}\} \right] \\ &+ c_p L_{2s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda\tau_{1k}\} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{ss}^{ij} \exp\{\lambda\tau_{ij}\} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{ij} \exp\{\lambda\tau_{ij}\} \right], \\ & \quad s = 1, 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{sj}(\lambda) &:= L_{1s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{\nu=0}^{m_1} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda\tau_{1k}\} \tau_{1k} \bar{a}_{sj}^{1\nu} \exp\{\lambda\tau_{1\nu}\} + \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{sj}^{1\nu} \exp\{\lambda\tau_{1\nu}\} \right] \\ &+ c_p L_{2s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda\tau_{1k}\} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{sj}^{i\nu} \exp\{\lambda\tau_{i\nu}\} + \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{sj}^{i\nu} \exp\{\lambda\tau_{i\nu}\} \right], \\ & \quad s, j = 1, 2, \quad s \neq j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_s(\lambda) &:= L_{1s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{\nu=1}^2 \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda\tau_{1k}\} \tau_{1k} \bar{a}_{s\nu}^{1j} \exp\{\lambda\tau_{1j}\} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k \in I_s} \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda\tau_{1k}\} + \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1, k \neq s}^2 \bar{a}_{sk}^{1j} \exp\{\lambda\tau_{1j}\} \right] \\ &+ c_p L_{2s} \left[\sum_{k \in I_s} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{\nu=1}^2 \bar{a}_{ss}^{1k} \exp\{\lambda\tau_{1k}\} \sqrt{\tau_{1k}} \bar{a}_{s\nu}^{ij} \exp\{\lambda\tau_{ij}\} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{\nu=1}^2 \bar{a}_{s\nu}^{ij} \exp\{\lambda\tau_{ij}\} \right]. \end{aligned}$$

Обозначим теперь $y(t) = \text{col}(y_1(t), y_2(t))$, $\bar{y} = \text{col}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$, $M(\lambda) = \text{col}(M_1(\lambda), M_2(\lambda))$ и пусть $C(\lambda) = (c_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^2$ — 2×2 -матрица, элементы которой определены следующим образом:

$$c_{ss}(\lambda) = 1 - N_{ss}(\lambda), \quad s = 1, 2, \quad c_{sj}(\lambda) = -N_{sj}(\lambda), \quad s, j = 1, 2, \quad s \neq j.$$

Тогда из оценок (17) получаем

$$C(\lambda)\bar{y} \leq \widehat{D} \|b\|_{k_{2p}^2} \widehat{E} + M(\lambda)\|\varphi\|_{L_{2p}^2}, \quad (18)$$

где \widehat{E} — 2-мерный вектор, элементы которой равны единице. Очевидно также, что $C(0) = C$. В силу условий теоремы матрица C положительно обратима, а тогда при достаточно малых λ матрица $C(\lambda)$ также является положительно обратимой, т. е. существует $\lambda = \lambda_0$ такое, что $C(\lambda_0)$ положительно обратима. Тогда из неравенства (18) получаем

$$|\bar{y}| \leq K(\|b\|_{k_{2p}^2} + \|\varphi\|_{L_{2p}^2}), \quad (19)$$

где $K = \|(C(\lambda_0)^{-1} \|\widehat{E}\| \max\{\widehat{D}, |M(\lambda_0)|\})\|$.

Поскольку $x(t, b, \varphi) = \exp\{-\lambda t\}y(t)$ и $\sup_{t \geq 0} (E|y(t)|^{2p})^{1/2p} \leq |\bar{y}|$, то из неравенства (19) следует, что существуют положительные числа $\lambda = \lambda_0$, $K = \|(C(\lambda_0)^{-1} \|\widehat{E}\| \max\{\widehat{D}, |M(\lambda_0)|\})\|$ такие, что для решения $x(t, b, \varphi)$ задачи (1), (1a), (1b) выполнено неравенство

$$(E|x(t, b, \varphi)|^{2p})^{1/2p} \leq K \exp\{-\lambda t\} (\|b\|_{k_{2p}^2} + \|\varphi\|_{L_{2p}^2}) \quad (t \geq 0).$$

Следовательно, система (1) M_{2p}^{γ} -устойчива при некотором положительном λ . \triangleright

5. Примеры

Рассмотрим систему двух детерминированных линейных дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями и коэффициентами с импульсными воздействиями по одной компоненте решений вида

$$\begin{aligned} dx(t) &= - \sum_{j=1}^m A_j x(t - h_j) dt \quad (t \geq 0), \\ x_2(\mu_j) &= B_j x_2(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

где $A_j = (a_{sk}^j)_{s,k=1}^2$, $j = 1, \dots, m$, — 2×2 -матрицы, элементами которых являются действительные числа, h_j , $j = 1, \dots, m$, — неотрицательные действительные числа, μ_j , $j = 1, 2, 3, \dots$, — действительные числа такие, что $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j = \infty$, B_j , $j = 1, 2, 3, \dots$, — действительные числа.

Утверждение 1. Пусть для системы (20) $\sum_{j=1}^m a_{ss}^j = a_s > 0$, $s = 1, 2$, существуют положительные числа B , ρ , σ такие, что имеют место следующие неравенства: $|B_j| \leq B$, $j = 1, 2, \dots$, $\rho \leq \mu_{j+1} - \mu_j \leq \sigma$ при $j = 1, 2, \dots$, для некоторого положительного числа D выполнено неравенство $\exp\{-a_2 t\} \prod_{0 < \mu_j \leq t} |B_j| < D$ при $t \in [0, +\infty)$, $c_{11} > 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0$, где

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 - \frac{1}{a_1} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{11}^k| h_k |a_{11}^j|, \\ c_{12} &= -\frac{1}{a_1} \left[\sum_{k=1}^m \sum_{\nu=1}^m |a_{11}^k| h_k |a_{12}^\nu| + \sum_{\nu=1}^m |a_{12}^\nu| \right], \\ c_{22} &= 1 - \frac{\max\{1, B\}(1 - \exp\{-a_2 \sigma\})}{a_2(1 - \exp\{-a_2 \rho\}B)} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{22}^k| h_k |a_{22}^j|, \end{aligned}$$

$$c_{21} = -\frac{\max\{1, B\}(1 - \exp\{-a_2\sigma\})}{a_2(1 - \exp\{-a_2\rho\}B)} \left[\sum_{k=1}^m \sum_{\nu=1}^m |a_{22}^k| h_k |a_{21}^\nu| + \sum_{\nu=1}^m |a_{21}^\nu| \right].$$

Тогда система (20) экспоненциально устойчива относительно начальных данных.

Справедливость утверждения вытекает непосредственно из теоремы 3.

Пусть для системы (20) $h_1 = 0$, $a_{ss}^1 > 0$, $s = 1, 2$. В этом случае из теоремы 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. Пусть для системы (20) существуют положительные числа B , ρ , σ такие, что имеют место следующие неравенства: $|B_j| \leq B$, $j = 1, 2, \dots$, $\rho \leq \mu_{j+1} - \mu_j \leq \sigma$ при $j = 1, 2, \dots$, для некоторого положительного числа D выполнено неравенство $\exp\{-a_{22}^1 t\} \prod_{0 < \mu_j \leq t} |B_j| < D$ при $t \in [0, +\infty)$, $c_{11} > 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0$, где

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 - \frac{1}{a_{11}^1} \sum_{j=2}^m |a_{11}^j|, & c_{12} &= -\frac{1}{a_{11}^1} \sum_{\nu=1}^m |a_{s\nu}^\nu|, \\ c_{22} &= 1 - \frac{\max\{1, B\}(1 - \exp\{-a_{22}^1\sigma\})}{a_{22}^1(1 - \exp\{-a_{22}^1\rho\}B)} \sum_{j=2}^m |a_{22}^j|, \\ c_{21} &= -\frac{\max\{1, B\}(1 - \exp\{-a_{22}^1\sigma\})}{a_{22}^1(1 - \exp\{-a_{22}^1\rho\}B)} \sum_{\nu=1}^m |a_{21}^\nu|. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда система (20) экспоненциально устойчива относительно начальных данных.

Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений Ито с постоянными запаздываниями и коэффициентами с импульсными воздействиями по одной компоненте решений вида

$$\begin{aligned} dx(t) &= -\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}x(t - h_{1j}) dt + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}x(t - h_{ij}) d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \geq 0), \\ x_2(\mu_j) &= B_j x_2(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \text{ п. н.}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $A_{ij} = (a_{sk}^{ij})_{s,k=1}^2$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, — 2×2 -матрицы, элементы которых являются действительными числами, h_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, — неотрицательные действительные числа, μ_j , $j = 1, 2, 3, \dots$, — действительные числа такие, что $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j = \infty$, B_j , $j = 1, 2, 3, \dots$, — действительные числа.

Утверждение 3. Пусть для системы (22) $\sum_{j=1}^{m_1} a_{ss}^{1j} = a_s > 0$, $s = 1, 2$, существуют положительные числа B , ρ , σ такие, что имеют место следующие неравенства: $|B_j| \leq B$, $j = 1, 2, \dots$, $\rho \leq \mu_{j+1} - \mu_j \leq \sigma$ при $j = 1, 2, \dots$, для некоторого положительного числа D выполнено неравенство $\exp\{-a_2 t\} \prod_{0 < \mu_j \leq t} |B_j| < D$ при $t \in [0, +\infty)$, $c_{11} > 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0$, где

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 - \frac{1}{a_1} \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} |a_{11}^{1k}| h_{1k} |a_{11}^{1j}| \\ &- c_p \left(\frac{1}{2a_1} \right)^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{11}^{1k}| \sqrt{h_{1k}} |a_{11}^{ij}| + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{11}^{ij}| \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{12} &= -\frac{1}{a_1} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{\nu=1}^{m_1} |a_{11}^{1k}| h_{1k} |a_{12}^{1\nu}| + \sum_{\nu=1}^{m_1} |a_{12}^{1\nu}| \right] \\
&\quad - c_p \left(\frac{1}{2a_1} \right)^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{11}^{1k}| \sqrt{h_{1k}} |a_{12}^{i\nu}| + \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{12}^{i\nu}| \right], \\
c_{22} &= 1 - \frac{\max\{1, B\}(1 - \exp\{-a_2\sigma\})}{a_2(1 - \exp\{-a_2\rho\}B)} \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} |a_{22}^{1k}| h_{1k} |a_{22}^{1j}| \\
&\quad - c_p \left(\frac{\max\{1, B^2\}(1 - \exp\{-2a_2\sigma\})}{2a_2(1 - \exp\{-2a_s\rho\}B^2)} \right)^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{22}^{1k}| \sqrt{h_{1k}} |a_{22}^{ij}| + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{22}^{ij}| \right], \\
c_{21} &= -\frac{\max\{1, B\}(1 - \exp\{-a_2\sigma\})}{a_2(1 - \exp\{-a_2\rho\}B)} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{\nu=1}^{m_1} |a_{22}^{1k}| h_{1k} |a_{21}^{1\nu}| + \sum_{\nu=1}^{m_1} |a_{21}^{1\nu}| \right] \\
&\quad - c_p \left(\frac{\max\{1, B^2\}(1 - \exp\{-2a_2\sigma\})}{2a_2(1 - \exp\{-2a_s\rho\}B^2)} \right)^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{22}^{1k}| \sqrt{h_{1k}} |a_{21}^{i\nu}| + \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{21}^{i\nu}| \right].
\end{aligned}$$

Тогда система (22) экспоненциально $2p$ -устойчива относительно начальных данных.

Справедливость утверждения следует из теоремы 3.

Пусть в дальнейшем для системы (22) $m_1 = 1$, $h_{11} = 0$, $a_{ss}^{11} > 0$, $s = 1, \dots, n$. Из теоремы 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 4. Пусть для системы (22) существуют положительные числа B , ρ , σ такие, что имеют место следующие неравенства: $|B_j| \leq B$, $j = 1, 2, \dots$, $\rho \leq \mu_{j+1} - \mu_j \leq \sigma$ при $j = 1, 2, \dots$, для некоторого положительного числа D выполнено неравенство $\exp\{-a_{11}t\} \prod_{0 < \mu_j \leq t} |B_j| < D$ при $t \in [0, +\infty)$, $c_{11} > 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0$, где

$$\begin{aligned}
c_{11} &= 1 - c_p \left(\frac{1}{2a_{11}^{11}} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{11}^{ij}|, \\
c_{12} &= -|a_{12}^{11}| \frac{1}{a_{11}^{11}} - c_p \left(\frac{1}{2a_{11}^{11}} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{12}^{i\nu}|, \\
c_{22} &= 1 - c_p \left(\frac{\max\{1, B^2\}(1 - \exp\{-2a_{22}^{11}\sigma\})}{2a_{22}^{11}(1 - \exp\{-2a_{22}^{11}\rho\}B^2)} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{m_i} |a_{22}^{ij}|, \\
c_{21} &= -|a_{21}^{11}| \frac{\max\{1, B\}(1 - \exp\{-a_{22}^{11}\sigma\})}{a_{22}^{11}(1 - \exp\{-a_{22}^{11}\rho\}B)} \\
&\quad - c_p \left(\frac{\max\{1, B^2\}(1 - \exp\{-2a_{22}^{11}\sigma\})}{2a_{22}^{11}(1 - \exp\{-2a_{22}^{11}\rho\}B^2)} \right)^{1/2} \sum_{i=2}^m \sum_{\nu=1}^{m_i} |a_{21}^{i\nu}|.
\end{aligned}$$

Тогда система (22) экспоненциально $2p$ -устойчива относительно начальных данных.

Литература

1. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.—М.: Наука, 1981.—448 с.
2. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений.—Рига: Зинатне, 1989.—421 с.

3. Mao X. R. Stochastic Differential Equations and Their Applications.—Chichester: Horwood Publishing Ltd., 1997.
4. Mohammed S.-E. A. Stochastic differential systems with memory: theory, examples and applications // Stochastic Analysis and Related Topics VI. Proceedings of The Sixth Oslo–Silivri Workshop (Geilo, 1996).—Boston: Birkhäuser, 1998.—P. 1–77. DOI: 10.1007/978-1-4612-2022-0_1.
5. Anokhin A., Berezansky L., Braverman E. Exponential stability of linear delay impulsive differential equations // J. Math. Anal. Appl.—1995.—Vol. 193, № 3—P. 923–941. DOI: 10.1006/jmaa.1995.1275.
6. Berezansky L., Braverman E. Boundedness and stability of impulsively perturbed delay differential equations // Functional Differential Equations.—1995.—Vol. 3, № 1–2.—P. 19–30.
7. Bainov D., Stamova I., Vatsala A. Global stability of sets for linear // Applicable Analysis.—1996.—Vol. 62, № 1–2.—P. 149–160. DOI: 10.1080/00036819608840475.
8. Berezansky L., Idels L. On integrable solutions of impulsive delay differential equations // Commun. Appl. Math. Anal.—1998.—Vol. 2.—P. 301–309.
9. Кадиев Р. И., Поносов А. В. Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с последействием // Дифференц. уравнения.—2007.—Т. 43, № 7.—С. 879–885.
10. Кадиев Р. И. Устойчивость решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями по линейному приближению // Дифференц. уравнения.—2013.—Т. 49, № 8.—С. 963–970.
11. Kadiev R. I., Ponosov A. V. Stability of impulsive stochastic differential linear functional equations with linear delays // J. of Abstract Differential Equations and Applications.—2012.—Vol. 2, № 2.—P. 7–25.
12. Кадиев Р. И., Поносов А. В. Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями // Дифференц. уравнения.—2010.—Т. 46, № 4.—С. 486–498.
13. Кадиев Р. И., Поносов А. В. Устойчивость линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений при постоянно действующих возмущениях // Дифференц. уравнения.—1992.—Т. 28, № 2.—С. 198–207.
14. Кадиев Р. И. Достаточные условия устойчивости стохастических систем с последействием // Дифференц. уравнения.—1994.—Т. 30, № 4.—С. 555–564.
15. Кадиев Р. И. Устойчивость решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук.—Махачкала, 2000.—234 с.
16. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов.—М.: Наука, 1986.—512 с.
17. Беллман Р. Введение в теорию матриц.—М.: Наука, 1969.—368 с.
18. Кадиев Р. И. Существование и единственность решения задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений по семимартингалу // Изв. вузов. Математика.—1995.—№ 10.—С. 35–40.
19. Кадиев Р. И., Поносов А. В. Положительная обратимость матриц и устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями // Дифференц. уравнения. Минск.—2013.—Т. 53, № 5.—С. 579–590. DOI: 10.1134/S0374064117050016.

Статья поступила 22 февраля 2019 г.

КАДИЕВ РАМАЗАН ИСМАИЛОВИЧ
Дагестанский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 367000, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43 а

Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН,
РОССИЯ, 367032, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45
E-mail: kadiev_r@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-5630-7744>

STABILITY OF IMPULSE SYSTEMS OF TWO LINEAR ITO
DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAYKadiev, R. I.^{1,2}¹ Dagestan State University,

43 a M. Gadzhieva St., Makhachkala 367000, Russia;

² Dagestan Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences,

45 M. Gadzhieva St., Makhachkala 367032, Russia

E-mail: kadiev_r@mail.ru

Abstract. The problems $2p$ -stability ($1 \leq p < \infty$) of systems of two linear Ito differential equations with delay and impulse impacts on one component of solutions are studied on the base of the theory of positively reversible matrices. Ideas and methods developed by N. V. Azbelev and his followers to study the stability problems of deterministic functional-differential equations are applied for this purpose. Sufficient conditions for the $2p$ -stability and exponential $2p$ -stability of systems of two linear Ito differential equations with delay and impulse impacts on one component of solutions are given in terms of positive reversibility of the matrices constructed from the parameters of the original systems. The validity of these conditions is checked for specific equations. Sufficient conditions for exponential moment stability of a system of two deterministic linear differential equations with constant delay and coefficients with pulse influences on one component of solutions are received in terms of parameters of this system. It is shown that in this case from the general statements it is possible to receive new results for the studied system.

Key words: Ito's equations, stability of solutions, impulse impacts, positive invertibility of a matrix.

Mathematical Subject Classification (2010): 34K20, 34K50.

For citation: Kadiev, R. I. Stability of Impulse Systems of Two Linear Ito Differential Equations with Delay, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 1, pp. 49–65 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57571.

References

1. Kolmanovskiy, V. B. and Nosov, V. R. *Ustoychivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemyykh sistem s posledeystviem* [Stability and Periodic Regimes of Controlled Systems with Aftereffect], Moscow, Nauka, 1981, 448 p. (in Russian).
2. Tsar'kov, E. F. *Sluchaynye vozmushcheniya differentsial'no-funktsional'nykh uravneniy* [Random Perturbations of Functional-Differential Equations], Riga, Zinatne, 1989, 421 p. (in Russian).
3. Mao, X. R. *Stochastic Differential Equations and Applications*, Chichester, Horwood Publishing Ltd., 1997.
4. Mohammed, S.-E. A. *Stochastic Differential Systems with Memory: Theory, Examples and Applications, Stochastic Analysis and Related Topics VI. Proceedings of The Sixth Oslo-Silivri Workshop (Geilo, 1996)*, Boston, Birkhäuser, 1998, pp. 1–77. DOI: 10.1007/978-1-4612-2022-0_1.
5. Anokhin, A., Berezansky, L. and Braverman, E. Exponential Stability of Linear Delay Impulsive Differential Equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1995, vol. 193, no. 3, pp. 923–941. DOI: 10.1006/jmaa.1995.1275.
6. Berezansky, L. and Braverman, E. Boundedness and Stability of Impulsively Perturbed Delay Differential Equations, *Functional Differential Equations*, 1995, vol. 3, no 1–2, pp. 19–30.
7. Bainov, D., Stamova, I. and Vatsala, A. Global Stability of Sets for Linear, *Applicable Analysis*, 1996, vol. 62, no. 1–2, pp. 149–160. DOI: 10.1080/00036819608840475.
8. Berezansky, L. and Idels, L. On Integrable Solutions of Impulsive Delay Differential Equations, *Commun. Appl. Math. Anal.*, 1998, vol. 2, pp. 301–309.
9. Kadiev, R. I. and Ponosov, A. V. Stability of Solutions of Linear Impulsive Systems of Itô Differential Equations with Aftereffect, *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 7, pp. 898–904. DOI: 10.1134/s0012266107070026.

10. Kadiev, R. I. Solutions of Nonlinear Impulsive Itô Functional-Differential Equations: Stability by the Linear Approximation, *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 8, pp. 933–940. DOI: 10.1134/s0012266113080028.
11. Kadiev, R. I. and Ponosov, A. V. Stability of Impulsive Stochastic Differential Linear Functional Equations with Linear Delays, *Journal of Abstract Differential Equations and Applications*, 2012, vol. 2, no. 2, pp. 7–25.
12. Kadiev, R. I. and Ponosov, A. V. Stability of Linear Impulsive Itô Differential Equations with Bounded Delays, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 4, pp. 489–501. DOI: 10.1134/S0012266110040038.
13. Kadiev, R. I. and Ponosov, A. V. Stability of Linear Stochastic Functional-Differential Equations with Constantly Acting Perturbations, *Differential Equations*, 1992, vol. 28, no. 2, pp. 173–179.
14. Kadiev, R. I. Sufficient Conditions for the Stability of Stochastic Systems with Aftereffect, *Differential Equations*, 1994, vol. 30, no. 4, pp. 509–517.
15. Kadiev, R. I. *Ustoychivost' resheniy stokhasticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy: dissertatsiya . . . doktora fiziko-matematicheskikh nauk* [Stability of Solutions of Stochastic Functional-Differential Equations: Dissertation . . . Doctor of Physico-Mathematical Sciences], Makhachkala, 2000, 234 p. (in Russian).
16. Liptser, R. Sh. and Shiryaev, A. N. *Teoriya martingalov* [Theory of Martingales], Moscow, Nauka, 1986, 512 p. (in Russian).
17. Bellman R. *Vvedenie v teoriyu matrits* [Introduction to Matrix Analysis], Moscow, Nauka, 1969, 368 p. (in Russian).
18. Kadiev, R. I. Existence and Uniqueness of the Solution of the Cauchy Problem for Functional-Differential Equations with Respect to a Semimartingale, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1995, vol. 39, no. 10, pp. 33–37.
19. Kadiev, R. I. and Ponosov, A. V. Positive Invertibility of Matrices and Stability of Itô Delay Differential Equations, *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 571–582. DOI: 10.1134/S0012266117050019.

Received February 22, 2019

RAMAZAN I. KADIEV

Dagestan State University,
43 a M. Gadzhiev St., Makhachkala 367000, Russia,
Professor

Dagestan Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences,
45 M. Gadzhiev St., Makhachkala 367032, Russia,

E-mail: kadiev_r@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-5630-7744>

УДК 544.13

DOI 10.23671/VNC.2020.1.57585

TOPOLOGICAL ASPECTS BORON TRIANGULAR NANOTUBE
AND BORON- α NANOTUBE[#]

P. S. Hemavathi¹, V. Lokesha², M. Manjunath², P. S. K. Reddy³, R. Shruti²

¹ Siddaganga Institute of Technology, Tumkur 572 103, Karnataka, India;

² Vijayanagara Sri Krishnadevaraya University, Ballari 583 105, Karnataka, India;

³ Sri Jayachamarajendra College of Engineering, JSS Science and Technology University,
Mysuru 570 006, Karnataka, India

E-mail: psh@sit.ac.in, v.lokesha@gmail.com, manju3479@gmail.com,
pskreddy@jssstuniv.in, shrutichinnu77@gmail.com

Abstract. Topological graph indices have been used in a lot of areas to study required properties of different objects such as atoms and molecules. Such indices have been described and studied by many mathematicians and chemists since most graphs are generated from molecules by replacing each atom with a vertex and each chemical bond with an edge. These indices are also topological graph invariants measuring several chemical, physical, biological, pharmacological, pharmaceutical, etc. properties of graphs corresponding to real life situations. The degree-based topological indices are used to correlate the physical and chemical properties of a molecule with its chemical structure. Boron nanotubular structures are high-interest materials due to the presence of multicenter bonds and have novel electronic properties. These materials have some important issues in nanodevice applications like mechanical and thermal stability. Therefore, they require theoretical studies on the other properties. In this paper, we compute the third Zagreb index, harmonic index, forgotten index, inverse sum index, modified Zagreb index and symmetric division deg index by applying subdivision and semi total point graph for boron triangular and boron- α nanotubes.

Key words: topological indices, Zagreb indices, harmonic index, forgotten index, inverse sum index and symmetric division deg index, boron triangular and boron- α nanotubes.

Mathematical Subject Classification (2010): 05C05, 05C12, 05C75.

For citation: Hemavathi, P. S., Lokesha, V., Manjunath, M., Reddy, P. S. K., Shruti R. Topological Aspects Boron Triangular Nanotube and Boron- α Nanotube, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 1, pp. 66–77. DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57585.

1. Introduction and Preliminaries

A systematic study of topological indices is one of the most striking aspects in many branches of Mathematics with its applications and various other fields of science and technology. Several different topological indices have been investigated so far, most of them useful topological indices are distance based or degree based. This indices may be used to

[#] The first author supported by the TEQIP Competitive Research Grant: VTU/TEQIP 3/2019/321 Dated 10th December 2019.

© 2020 Hemavathi, P. S., Lokesha, V., Manjunath, M., Reddy, P. S. K. and Shruti, R.

derive the quantitative structure property relationship (QSPR) or quantitative structure activity relationship (QSAR). Topological index to correlated the physico-chemical properties of chemical compounds with their molecular structure. Topological indices are the numerical value associated with chemical constitution for correlation of chemical structure with various physical properties, chemical reactivity or biological activity.

The third Zagreb index

$$M_3(G) = \sum_{uv \in E(G)} |d_G(u) - d_G(v)| \quad (1.1)$$

was introduced by Fath-Tabar in [1].

The harmonic index $H(G)$ is introduced in [2] and is defined as:

$$H(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{2}{d_u + d_v}. \quad (1.2)$$

Unfortunately, another degree based graph invariant has not attracted any attention in the literature of Mathematical Chemistry for more than forty years. In view of this fact, Furtula et al. [3] named it as forgotten topological index and is defined as:

$$F(G) = \sum_{uv \in E(G)} [d_G(u)^2 + d_G(v)^2]. \quad (1.3)$$

The inverse sum index [4] is given by

$$I(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{d_u d_v}{d_u + d_v}. \quad (1.4)$$

For more details on this important topological indices, we refer to [5, 6]. According to the article in [7], both first and second Zagreb indices give greater weights to the inner vertices and edges, and smaller weights to outer vertices and edges which oppose intuitive reasoning. The second modified Zagreb index is:

$${}^m M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{d_u \cdot d_v}. \quad (1.5)$$

Among 148 discrete Adriatic indices [8, 9], we considered symmetric division deg discrete adriatic index. The symmetric division deg index is defined as (see [10]):

$$SDD(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{d_u^2 + d_v^2}{d_u \cdot d_v}. \quad (1.6)$$

The subdivision graph $S(G)$ is the graph obtained by replacing each of its edge by a path of length 2 or equivalently, by inserting an additional vertex into each edge of G .

The semi total point $R(G)$ graph is obtained from G by adding a new vertex corresponding to every edge of G and by joining each new vertex to the end vertices of the edge corresponding to it.

Boron nanotubes: In last 20 years, various type of boron containing nanomaterials. Boron nanomaterials have been considered as excellent material for enhancing the characteristics of optoelectronic nano devices because of their broad elastic modulus,

high melting point, excessive conductivity. These materials can carry excessive emission current, which recommends that they may have great prospective applications in field emission area [11]. Boron nanomaterials some best properties such as excessive resistance to oxidation at high temperatures, great chemical stability and are stable broad band-gap semiconductor [12, 13]. Moreover, the extensive range of boron nanomaterials themselves could be the building blocks for combining with other existing nanomaterial to design and create materials with new properties. The boron triangular nanotube was created in 2004 [11] and obtained from a carbon hexagonal nanotube by adding an extra atom to the centre of each hexagon. Also, a special boron nanotube was fabricated from a carbon hexagonal nanotube in 2008, by adding an extra atom to the centre of certain hexagons [14, 15]. This nanotube is designed by generating a mixture of hexagons and triangles called boron- α nanotube. These nanotubes are important materials for optical, electronic, bio and chemical sensing applications. The comparison study about some computational aspects of boron triangular and boron- α nanotubes has been investigated in [16]. The 3D perceptions of boron triangular and boron- α nanotube are presented in the Fig. 1.

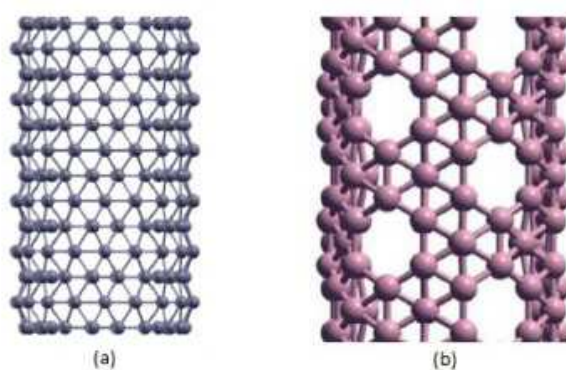


Fig. 1 (a) 3D-perception of boron triangular nanotube, (b) 3D-perception of boron- α nanotube.

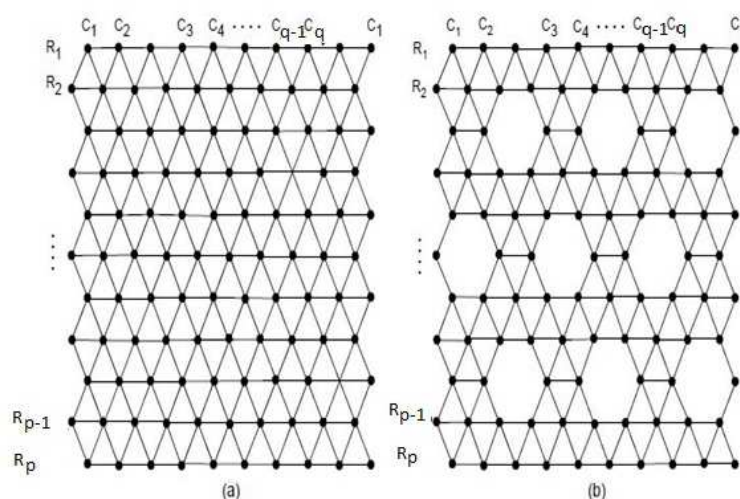


Fig. 2 (a) 2D-sheet of boron triangular nanotube $BT[p, q]$, (b) 2D-sheet of boron- α nanotube $BA[p, q]$.

Recently Jia-Bao, Hani Shaker and et al. [17] worked on topological aspects of boron nanotubes. Motivated from these works, we compute the third Zagreb index, harmonic index,

forgotten index, inverse sum index, modified Zagreb index and symmetric division deg index by applying subdivision and semi total point graph for boron triangular and boron- α nanotubes.

This paper is organized as follows: In Section 2, we get topological indices of boron triangular nanotube, subdivision and semi total point graph of boron triangular nanotube. In Section 3, the topological indices of boron- α nanotube, subdivision and semi total point graph of boron- α nanotube $BA(X)[p, q]$ are obtained. Finally, in Section 4, we presented the topological indices of boron- α nanotube, subdivision and semi total point graph of boron- α nanotube $BA(Y)[p, q]$.

2. Boron triangular nanotube, subdivision and semi total point graph of boron triangular nanotube

We denote the molecular graphs of boron triangular and boron- α nanotubes by $BT[p, q]$ and $BA[p, q]$ respectively, where p is the number of rows and q be the number of columns in 2D sheet of $BT[p, q]$ and $BA[p, q]$ as shown in the Fig. 2. Then boron- α nanotubes can be categorized into two classes with respect to p , denoted these classes as $BA(X)[p, q]$ and $BA(Y)[p, q]$.

Table 1. The order and size of triangular boron nanotubes

| Molecular graph | $BT[p, q]$ | $S = BT[p, q]$ | $R = BT[p, q]$ |
|-----------------|----------------------|----------------|----------------------|
| Order | $\frac{3pq}{2}$ | $3q(2p - 1)$ | $3q(2p - 1)$ |
| Size | $\frac{3q(3p-2)}{2}$ | $3q(3p - 2)$ | $\frac{9q(3p-2)}{2}$ |

Theorem 2.1. Consider the boron triangular nanotube $BT[p, q]$, where $p \geq 3$ and q is even, then

- $M_3(BT[p, q]) = 12q,$
- $H(BT[p, q]) = \frac{3}{4}pq + \frac{3}{4}q + \frac{6}{5}q - 2q,$
- $F(BT[p, q]) = 324pq - 864q + 96q + 312q,$
- $I(BT[p, q]) = \frac{27}{2}pq - 36q + 6q + \frac{72}{5}q,$
- ${}^mM_2(BT[p, q]) = \frac{1}{8}pq - \frac{1}{3}q + \frac{3}{16}q + \frac{1}{4}q,$
- $SDD(BT[p, q]) = 9pq - 24q + 6q + 13q.$

\triangleleft Consider the boron triangular nanotube $G = BT[p, q]$. There are three edge partitions corresponding to the degree of end vertices which are presented as $E_{4,4} = \{uv \in E_G \mid d_u = 4, d_v = 4\}$, $E_{4,6} = \{uv \in E_G \mid d_u = 4, d_v = 6\}$ and $E_{6,6} = \{uv \in E_G \mid d_u = 6, d_v = 6\}$.

Therefore, we have $|E_{4,4}| = 3q$, $|E_{4,6}| = 6q$ and $|E_{6,6}| = \frac{3q(3p-8)}{2}$. The respective edge partitions are shown in Fig. 3 in which edges belong to $E_{4,4}$, $E_{4,6}$ and $E_{6,6}$ respectively. Hence applying the topological indices definitions (Equation (1.1) to (1.6)) we get required results. \triangleright

Theorem 2.2. Consider the subdivision graph of boron triangular nanotube $BT[p, q]$, then

- $M_3(BT[p, q]) = 36pq + 24q - 72q,$
- $H(BT[p, q]) = \frac{9}{4}pq + 4q - \frac{9}{2}q,$
- $F(BT[p, q]) = 360pq + 240q - 720q,$
- $I(BT[p, q]) = \frac{27}{2}pq + 16q - 27q,$

- ${}^m M_2(BT[p, q]) = \frac{3}{4}pq + \frac{3}{2}q - \frac{3}{2}q,$
- $SDD(BT[p, q]) = 30pq + 30q - 60q.$

◁ Consider the subdivision graph of boron triangular nanotube $S = BT[p, q]$. There are two edge partitions corresponding to the degree of end vertices which are presented as $E_{2,4} = \{uv \in E_S \mid d_u = 2, d_v = 4\}$ and $E_{2,6} = \{uv \in E_S \mid d_u = 2, d_v = 6\}$.

Therefore, we have $|E_{2,4}| = 12q$, and $|E_{2,6}| = 9q(p - 2)$. Applying the subdivision graph operator to the Fig. 3, then respective edge partitions which edges belong to $E_{2,4}$ and $E_{2,6}$ respectively. Hence applying the topological indices definitions (Equation (1.1) to (1.6)), we get required results. ▷

Theorem 2.3. Consider the semi total point graph of boron triangular nanotube $R = BT[p, q]$, then

- $M_3(BT[p, q]) = 72q + 90pq - 180q + 24q,$
- $H(BT[p, q]) = \frac{12}{5}q + \frac{9}{7}pq - \frac{18}{7}q + \frac{3}{8}q + \frac{3}{5}q + \frac{3}{8}pq - q,$
- $F(BT[p, q]) = 816q + 1332pq - 2664q + 384q + 1248q + 1296pq - 3456q,$
- $I(BT[p, q]) = \frac{96}{5}q + \frac{108}{7}q - \frac{216}{7}q + 12q + \frac{144}{5}q + 27pq - 72q,$
- ${}^m M_2(BT[p, q]) = \frac{3}{4}q + \frac{3}{8}pq - \frac{3}{4}q + \frac{3}{64}q + \frac{1}{16}q + \frac{1}{32}pq - \frac{1}{12}q,$
- $SDD(BT[p, q]) = 51q + \frac{111}{2}pq - 111q + 6q + 13q + 9pq - 24q.$

◁ Consider the semi total point boron triangular nanotube $R = BT[p, q]$. There are five edge partitions corresponding to the degree of end vertices which are presented as $E_{2,8} = \{uv \in E_R \mid d_u = 2, d_v = 8\}$, $E_{2,12} = \{uv \in E_R \mid d_u = 2, d_v = 12\}$, $E_{8,8} = \{uv \in E_R \mid d_u = 8, d_v = 8\}$, $E_{8,12} = \{uv \in E_R \mid d_u = 8, d_v = 12\}$ and $E_{12,12} = \{uv \in E_R \mid d_u = 12, d_v = 12\}$.

Therefore, we have $|E_{2,8}| = 12q$, $|E_{2,12}| = 9q(q - 2)$, $|E_{8,8}| = 3q$, $|E_{8,12}| = 6q$, and $|E_{12,12}| = \frac{3q(3p-8)}{2}$. Applying the semi total point graph operator to the Fig. 3, then respective edge partitions which edges belongs to $E_{2,8}$, $E_{2,12}$, $E_{8,8}$, $E_{8,12}$, and $E_{12,12}$ respectively. Hence applying the topological indices definitions (Equation (1.1) to (1.6)), we get required results. ▷

3. Boron- α nanotube, subdivision and semi total point graph of boron- α nanotube $BA(X)[p, q]$

In this segment, we concentrated basic result on boron- α nanotube, subdivision and semi total point graph of boron- α nanotube $BA(X)[p, q]$.

Table 2. The order and size of boron- α $BA(X)[p, q]$ nanotubes

| Molecular graph | $BA(X)[p, q]$ | $S_1 = BA(X)[p, q]$ | $R_1 = BA(X)[p, q]$ |
|-----------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| Order | $\frac{q}{3}(4p + 1)$ | $\frac{q}{6}(29p - 4)$ | $\frac{q}{6}(29p - 4)$ |
| Size | $\frac{q}{2}(7p - 2)$ | $q(7p - 2)$ | $\frac{3q(7p-2)}{2}$ |

Theorem 3.1. Consider the boron- α nanotube $BA(X)[p, q]$, then

- $M_3\{BA(X)[p, q]\} = 2pq + 4q - 6q + 4q,$
- $H\{BA(X)[p, q]\} = \frac{3}{4}q + \frac{8}{9}q + \frac{2}{5}q + \frac{3}{10}pq - \frac{4}{5}q + \frac{4}{11}pq - \frac{12}{11}q,$
- $F\{BA(X)[p, q]\} = 96q + 164q + 104q + 75pq - 200q + 122pq - 366q,$

- $I\{BA(X)[p, q]\} = 6q + \frac{80}{9}q + \frac{24}{5}q + \frac{15}{4}pq - 10q + \frac{60}{11}pq - \frac{180}{11}q,$
- ${}^mM_2\{BA(X)[p, q]\} = \frac{3}{16}q + \frac{1}{5}q + \frac{1}{12}q + \frac{3}{50}pq - \frac{4}{25}q + \frac{1}{15}pq - \frac{1}{5}q,$
- $SDD\{BA(X)[p, q]\} = 6q + \frac{41}{5}q + \frac{13}{3}q + 3pq - 8q + \frac{61}{15}pq - \frac{61}{5}q.$

\triangleleft Consider the boron- α nanotube $H = BA(X)[p, q]$. There are five edge partitions corresponding to the degree of end vertices which are presented as $E_{4,4} = \{uv \in E_H \mid d_u = 4, d_v = 4\}$, $E_{4,5} = \{uv \in E_H \mid d_u = 4, d_v = 5\}$, $E_{4,6} = \{uv \in E_H \mid d_u = 4, d_v = 6\}$, $E_{5,5} = \{uv \in E_H \mid d_u = 5, d_v = 5\}$ and $E_{5,6} = \{uv \in E_H \mid d_u = 5, d_v = 6\}$.

Therefore, we have $|E_{4,4}| = 3q$, $|E_{4,5}| = 4q$, $|E_{4,6}| = 2q$, $|E_{5,5}| = \frac{q(3p-8)}{2}$, and $|E_{5,6}| = 2q(p-3)$. The respective edge partitions are shown in Fig. 4 in which edges belong to $E_{4,4}$, $E_{4,5}$, $E_{4,6}$, $E_{5,5}$ and $E_{5,6}$ respectively. Hence applying the topological indices definitions (Equation (1.1) to (1.6)), we get required results. \triangleright

Theorem 3.2. Consider the subdivision graph of boron- α nanotube $S_1 = BA(X)[p, q]$,

- $M_3\{BA(X)[p, q]\} = 24q + 15pq - 30q + 8pq - 16q,$
- $H\{BA(X)[p, q]\} = 4q + \frac{10}{7}pq - \frac{20}{7}q + \frac{1}{2}pq - q,$
- $F\{BA(X)[p, q]\} = 240q + 145pq - 290q + 80pq - 160q,$
- $I\{BA(X)[p, q]\} = 16q + \frac{50}{7}pq - \frac{100}{7}q + 3pq - 6q,$
- ${}^mM_2\{BA(X)[p, q]\} = \frac{3}{2}pq + \frac{1}{2}q - q + \frac{1}{6}pq - \frac{1}{3}q,$
- $SDD\{BA(X)[p, q]\} = 30q + \frac{29}{2}pq - 29q + \frac{20}{3}pq - \frac{40}{3}q.$

\triangleleft Consider the subdivision graph of boron- α nanotube $S_1 = BA(X)[p, q]$. There are three edge partitions corresponding to the degree of end vertices which are presented as $E_{2,4} = \{uv \in E_{S_1} \mid d_u = 2, d_v = 4\}$, $E_{2,5} = \{uv \in E_{S_1} \mid d_u = 2, d_v = 5\}$ and $E_{2,6} = \{uv \in E_{S_1} \mid d_u = 2, d_v = 6\}$.

Therefore, we have $|E_{2,4}| = 12q$, $|E_{2,5}| = 5q(p-2)$ and $|E_{2,6}| = 2q(p-2)$. Applying the subdivision graph operator to the Fig. 4, then respective edge partitions which edges belongs to $E_{2,4}$, $E_{2,5}$ and $E_{2,6}$ respectively. Hence applying the topological indices definitions (Equation (1.1) to (1.6)), we get required results. \triangleright

Theorem 3.3. Consider the semi total point graph of boron- α nanotube $R_1 = BA(X)[p, q]$,

- $M_3\{BA(X)[p, q]\} = 72q + 40pq - 80q + 20pq - 40q + 8q + 8q + 4pq - 12q,$
- $H\{BA(X)[p, q]\} = \frac{3}{2}q + \frac{1}{2}pq - q + \frac{1}{6}pq - \frac{1}{3}q + \frac{3}{32}q + \frac{1}{10}q + \frac{1}{24}q + \frac{3}{100}pq$
 $-\frac{2}{25}q + \frac{1}{30}pq + \frac{1}{10}q,$
- $F\{BA(X)[p, q]\} = 816q + 520pq - 1040q + 296pq - 592q + 384q + 656q$
 $+416q + 300pq - 800q + 488pq - 1464q,$
- $I\{BA(X)[p, q]\} = \frac{96}{5}q + \frac{25}{3}pq - \frac{50}{3}q + \frac{24}{7}pq - \frac{48}{7}q + 12q + \frac{160}{9}q + \frac{48}{5}q$
 $+\frac{15}{2}pq - 20q + \frac{120}{11}pq - \frac{360}{11}q,$

- ${}^m M_2\{BA(X)[p, q]\} = \frac{3}{4}q + \frac{1}{4}pq - \frac{1}{2}q + \frac{1}{12}pq - \frac{1}{6}q + \frac{3}{64}q + \frac{1}{20}q + \frac{1}{48}q$
 $+ \frac{3}{200}pq - \frac{1}{25}q + \frac{120}{11}pq - \frac{360}{11}q,$
- $SDD\{BA(X)[p, q]\} = 51q + 26pq - 52q + \frac{37}{3}pq - \frac{74}{3}q + 6q + \frac{41}{5}q + \frac{13}{2}q + 3pq$
 $- 8q + \frac{61}{15}pq - \frac{61}{5}q.$

◁ Consider the semi total point graph of boron- α nanotube $R_1 = BA(X)[p, q]$. There are eight edge partitions corresponding to the degree of end vertices which are presented as $E_{2,8} = \{uv \in E_{R_1} \mid d_u = 2, d_v = 8\}$, $E_{2,10} = \{uv \in E_{R_1} \mid d_u = 2, d_v = 10\}$, $E_{2,12} = \{uv \in E_{R_1} \mid d_u = 2, d_v = 12\}$, $E_{8,8} = \{uv \in E_{R_1} \mid d_u = 8, d_v = 8\}$, $E_{8,10} = \{uv \in E_{R_1} \mid d_u = 8, d_v = 10\}$, $E_{8,12} = \{uv \in E_{R_1} \mid d_u = 8, d_v = 12\}$, $E_{10,10} = \{uv \in E_{R_1} \mid d_u = 10, d_v = 10\}$ and $E_{10,12} = \{uv \in E_{R_1} \mid d_u = 10, d_v = 12\}$.

Therefore, we have $|E_{2,8}| = 12q$, $|E_{2,10}| = 5q(p - 2)$, $|E_{2,12}| = 2q(p - 2)$, $|E_{8,8}| = 3q$, $|E_{8,10}| = 4q$, $|E_{8,12}| = 2q$, $|E_{10,10}| = \frac{q(3p-8)}{2}$, and $|E_{10,12}| = 2q(p - 3)$. Applying the semi total point graph operator to the Fig. 4 and then applying the topological indices definitions (Equation (1.1) to (1.6)), we get required results. ▷

4. Boron- α , subdivision and semi total point graph of boron- α nanotube $BA(Y)[p, q]$

In this section we demonstrated the results on boron- α , subdivision and semi total point graph of boron- α nanotube $BA(Y)[p, q]$.

Table 3. The order and size of boron- α nanotubes of $BA(Y)[p, q]$

| Molecular graph | $BA(Y)[p, q]$ | $S_2 = BA(Y)[p, q]$ | $R_2 = BA(Y)[p, q]$ |
|-----------------|-----------------------|-------------------------|-------------------------|
| Order | $\frac{4}{3}pq$ | $\frac{q}{6}(29p - 12)$ | $\frac{q}{6}(29p - 12)$ |
| Size | $\frac{q}{2}(7p - 4)$ | $q(7p - 4)$ | $\frac{3q(7p-4)}{2}$ |

Theorem 4.1. Consider the boron- α nanotube $BA(Y)[p, q]$, then

- $M_3\{BA(Y)[p, q]\} = 2q + 3q + 2q + 2q + 2pq - 5q,$
- $H\{BA(Y)[p, q]\} = \frac{1}{6}q + \frac{1}{4}q + \frac{2}{9}q + \frac{3}{8}q + \frac{4}{9}q + \frac{1}{5}q + \frac{3}{10}pq - \frac{4}{5}q + \frac{4}{11}pq - \frac{10}{11}q,$
- $F\{BA(Y)[p, q]\} = 9q + 34q + 45q + 48q + 82q + 52q + 75pq - 200q + 122pq - 305q,$
- $I\{BA(Y)[p, q]\} = \frac{3}{4}q + \frac{15}{8}q + 2q + 3q + \frac{40}{9}q + \frac{12}{5}q + \frac{15}{4}pq - 10q + \frac{60}{11}pq - \frac{150}{11}q,$
- ${}^m M_2\{BA(Y)[p, q]\} = \frac{1}{18}q + \frac{1}{15}q + \frac{1}{18}q + \frac{3}{32}q + \frac{1}{10}q + \frac{1}{24}q + \frac{3}{50}pq - \frac{4}{25}q + \frac{1}{15}pq - \frac{1}{6}q,$
- $SDD\{BA(Y)[p, q]\} = q + \frac{34}{15}q + \frac{5}{2}q + 3q + \frac{41}{10}q + \frac{13}{6}q + 3pq - 8q + \frac{61}{15}pq - \frac{61}{6}q.$

◁ Consider the boron- α nanotube $K = BA(Y)[p, q]$. There are eight edge partitions corresponding to the degree of end vertices which are presented as $E_{3,3} = \{uv \in E_K \mid d_u = 3, d_v = 3\}$, $E_{3,5} = \{uv \in E_K \mid d_u = 3, d_v = 5\}$, $E_{3,6} = \{uv \in E_K \mid d_u = 3, d_v = 6\}$, $E_{4,4} = \{uv \in E_K \mid d_u = 4, d_v = 4\}$, $E_{4,5} = \{uv \in E_K \mid d_u = 4, d_v = 5\}$, $E_{4,6} = \{uv \in E_K \mid d_u = 4, d_v = 6\}$, $E_{5,5} = \{uv \in E_K \mid d_u = 5, d_v = 5\}$ and $E_{5,6} = \{uv \in E_K \mid d_u = 5, d_v = 6\}$.

Therefore, we have $|E_{3,3}| = \frac{q}{2}$, $|E_{3,5}| = q$, $|E_{3,6}| = q$, $|E_{4,4}| = \frac{3q}{2}$, $|E_{4,5}| = 2q$, $|E_{4,6}| = q$, $|E_{5,5}| = \frac{q(3p-8)}{2}$, and $|E_{5,6}| = q(2p-5)$. Hence applying the topological indices definitions (Equation (1.1) to (1.6)), we get required results. \triangleright

Theorem 4.2. Consider the subdivision graph of boron- α nanotube $S_2 = BA(Y)[p, q]$,

- $M_3\{BA(Y)[p, q]\} = 3q + 12q + 15pq - 30q + 8pq - 12q,$
- $H\{BA(Y)[p, q]\} = \frac{6}{5}q + 2q + \frac{10}{7}pq - \frac{20}{7}q + \frac{1}{2}pq - \frac{3}{4}q,$
- $F\{BA(Y)[p, q]\} = 39q + 120q + 145pq - 290q + 80pq - 120q,$
- $I\{BA(Y)[p, q]\} = \frac{18}{5}q + 8q + \frac{50}{7}pq - \frac{100}{7}q + 3pq - \frac{9}{2}q,$
- ${}^mM_2\{BA(Y)[p, q]\} = \frac{1}{2}q + \frac{3}{4}q + \frac{1}{2}pq - q + \frac{1}{6}pq - \frac{1}{4}q,$
- $SDD\{BA(Y)[p, q]\} = \frac{13}{2}q + 15q + \frac{29}{2}pq - 29q + \frac{20}{3}pq - 10q.$

\triangleleft Consider the subdivision graph of boron- α nanotube $S_2 = \{BA(Y)[p, q]\}$. There are four edge partitions corresponding to the degree of end vertices which are presented as $E_{2,3} = \{uv \in E_{S_2} \mid d_u = 2, d_v = 3\}$, $E_{2,4} = \{uv \in E_{S_2} \mid d_u = 2, d_v = 4\}$, $E_{2,5} = \{uv \in E_{S_2} \mid d_u = 2, d_v = 5\}$ and $E_{2,6} = \{uv \in E_{S_2} \mid d_u = 2, d_v = 6\}$.

Therefore, we have $|E_{2,3}| = 3q$, $|E_{2,4}| = 6q$, $|E_{2,5}| = 5q(p-2)$ and $|E_{2,6}| = q(2p-3)$. Applying the subdivision graph operator to the Fig. 5, then respective edge partitions which edges belongs to $E_{2,3}$, $E_{2,4}$, $E_{2,5}$ and $E_{2,6}$ respectively. Hence applying the topological indices definitions (Equation (1.1) to (1.6)), we get required results. \triangleright

Theorem 4.3. Consider the semi total point graph of boron- α nanotube $R_2 = BA(Y)[p, q]$,

- $M_3\{BA(Y)[p, q]\} = 12q + 36q + 40pq - 80q + 20pq - 30q + 4q + 6q + 4q + 4q + 4pq - 10q,$
- $H\{BA(Y)[p, q]\} = \frac{3}{4}q + \frac{6}{5}q + \frac{5}{6}pq - \frac{5}{3}q + \frac{2}{7}pq - \frac{3}{7}q + \frac{1}{12}q + \frac{1}{8}q + \frac{1}{9}q + \frac{3}{16}q + \frac{2}{9}q + \frac{1}{10}q + \frac{3}{20}pq - \frac{2}{5}q + \frac{2}{11}pq - \frac{5}{11}q,$
- $F\{BA(Y)[p, q]\} = 120q + 408q + 520pq - 1040q + 296q - 444q + 36q + 136q + 180q + 192q + 328q + 208q + 300pq - 800q + 488pq - 1220q,$
- $I\{BA(Y)[p, q]\} = \frac{9}{2}q + \frac{48}{5}q + \frac{25}{3}pq - \frac{50}{3}q + \frac{24}{7}pq - \frac{36}{7}q + \frac{3}{2}q + \frac{15}{4}q + 4q + 6q + \frac{80}{9}q + \frac{24}{5}q + \frac{15}{2}pq - 20q + \frac{120}{11}pq - \frac{300}{11}q,$
- ${}^mM_2\{BA(Y)[p, q]\} = \frac{1}{4}q + \frac{3}{8}q + \frac{1}{4}pq - \frac{1}{2}q + \frac{1}{12}pq - \frac{1}{8}q + \frac{1}{72}q + \frac{1}{60}q + \frac{1}{72}q + \frac{3}{128}q + \frac{1}{40}q + \frac{1}{16}q + \frac{3}{200}pq - \frac{1}{25}q + \frac{1}{60}pq - \frac{1}{24}q,$
- $SDD\{BA(Y)[p, q]\} = 10q + \frac{51}{2}q + 26pq - 52q + \frac{37}{3}pq - \frac{37}{2}q + q + \frac{34}{15}q + \frac{5}{2}q + 3q + \frac{41}{10}q + \frac{13}{6}q + 3pq - 8q + \frac{61}{15}pq - \frac{61}{6}q.$

\triangleleft Consider the semi total point graph of boron- α nanotube $R_2 = BA(Y)[p, q]$. There are twelve edge partitions corresponding to the degree of end vertices which are presented

as $E_{2,6} = \{uv \in E_{R_2} \mid d_u = 2, d_v = 6\}$, $E_{2,8} = \{uv \in E_{R_2} \mid d_u = 2, d_v = 8\}$, $E_{2,10} = \{uv \in E_{R_2} \mid d_u = 2, d_v = 10\}$, $E_{2,12} = \{uv \in E_{R_2} \mid d_u = 2, d_v = 12\}$, $E_{6,6} = \{uv \in E_{R_2} \mid d_u = 6, d_v = 6\}$, $E_{6,10} = \{uv \in E_{R_2} \mid d_u = 6, d_v = 10\}$, $E_{6,12} = \{uv \in E_{R_2} \mid d_u = 6, d_v = 12\}$, $E_{8,8} = \{uv \in E_{R_2} \mid d_u = 8, d_v = 8\}$, $E_{8,10} = \{uv \in E_{R_2} \mid d_u = 8, d_v = 10\}$, $E_{8,12} = \{uv \in E_{R_2} \mid d_u = 8, d_v = 12\}$, $E_{10,10} = \{uv \in E_{R_2} \mid d_u = 10, d_v = 10\}$ and $E_{10,12} = \{uv \in E_{R_2} \mid d_u = 10, d_v = 12\}$.

Therefore, we have $|E_{2,6}| = 3q$, $|E_{2,8}| = 6q$, $|E_{2,10}| = 5q(p-2)$, $|E_{2,12}| = q(2p-3)$, $|E_{6,6}| = \frac{q}{2}$, $|E_{6,10}| = q$, $|E_{6,12}| = q$, $|E_{8,8}| = \frac{3q}{2}$, $|E_{8,10}| = 2q$, $|E_{8,12}| = q$, $|E_{10,10}| = \frac{q(3p-8)}{2}$, and $|E_{10,12}| = q(2p-5)$. Applying the semi total point graph operator to the Fig. 5 and then applying the topological indices definitions (Equation (1.1) to (1.6)), we get required results. \triangleright

Table 4. The order and size of boron- α nanotubes of $BA(Y)[p, q]$

| Index | $G = BT[p, q]$ | $H = BA(X)[p, q]$ | $K = BA(Y)[p, q]$ |
|-------|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| M_3 | $12q$ | $[2p+2]q$ | $[2p+4]q$ |
| H | $[0.75p-0.05]q$ | $[0.66364p+0.14798]q$ | $[0.66364p-0.05076]q$ |
| F | $[324p-456]q$ | $[197p-202]q$ | $[197p-235]q$ |

Table 5. Degree based topological indices of boron nanotubes

| I | $[13.5p-15.6]q$ | $[9.20455p-6.67475]q$ | $[9.20455p-9.16692]q$ |
|-----------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| mM_2 | $[0.125p+0.10417]q$ | $[0.12667p+0.11083]q$ | $[0.12667p+0.08653]q$ |
| SDD | $[9p-5]q$ | $[7.06667p-1.66667]q$ | $[7.06667p-3.13333]q$ |

Table 6. Subdivision graph of degree based topological indices of boron nanotubes

| Index | $S = BT[p, q]$ | $S_1 = BA(X)[p, q]$ | $S_2 = BA(Y)[p, q]$ |
|-----------|----------------|-------------------------|------------------------|
| M_3 | $[36p-48]q$ | $[23p-22]q$ | $[23p-27]q$ |
| H | $[2.25p-0.5]q$ | $[1.92857p+0.14286]q$ | $[1.92857p-0.40741]q$ |
| F | $[360p-480]q$ | $[225p-210]q$ | $[225p-251]q$ |
| I | $[13.5p-11]q$ | $[10.14286p-4.28571]q$ | $[10.14286p-7.18571]q$ |
| mM_2 | $0.75pq$ | $[0.66667p+0.16667]q$ | $0.66667pq$ |
| SDD | $[30p-30]q$ | $[21.16667p-12.33333]q$ | $[21.16667p-17.5]q$ |

Table 7. Semi total point graph of degree based topological indices of boron nanotubes

| Index | $R = BT[p, q]$ | $R_1 = BA(X)[p, q]$ | $R_2 = BA(Y)[p, q]$ |
|-----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| M_3 | $[90p-84]q$ | $[64p-44]q$ | $[64p-54]q$ |
| H | $[1.66071p-0.19643]q$ | $[0.73p+0.422083]q$ | $[1.45087p-0.17062]q$ |
| F | $[2628p-3672]q$ | $[1604p-1624]q$ | $[1604p-1896]q$ |
| I | $[42.42857p-42.85714]q$ | $[30.17099p-17.67330]q$ | $[30.17099p-26.04336]q$ |
| mM_2 | $[0.40625p+0.02604]q$ | $[11.25742p-32.65998]q$ | $[0.365p+0.02163]q$ |
| SDD | $[64.5p-65]q$ | $[45.4p-25.16667]q$ | $[45.4p-38.13333]q$ |

Conclusion: In this paper, we study important classes of boron nanotubes and formulated M_3 , H , I , mM_2 , SDD indices of their molecular graphs by using edge partition technique. The simplified of these indices for boron triangular nanotube, subdivision and semi total point graph of boron triangular nanotube, boron- α , subdivision and semi total point graph of boron- α nanotube $BA(X)[p, q]$ and boron- α , subdivision and semi total point graph of boron- α nanotube $BA(Y)[p, q]$ are given in Table 1, Table 2 and Table 3. These results can be used in detecting some physical and chemical properties of these boron nanotubes.

Acknowledgment: The authors would like to extend their gratitude to the referee for the valuable suggestions. The first author is thankful to the Visvesvaraya Technological University, Belgaum for the financial support under TEQIP Competitive Research Grant.

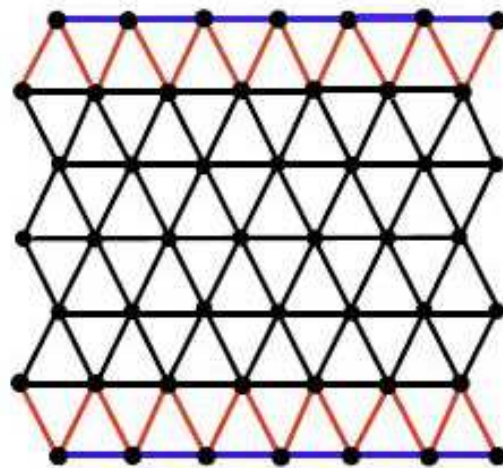


Fig. 3 The edge partitions of $BT[7,4]$ nanotube with respect to degree of end vertices.

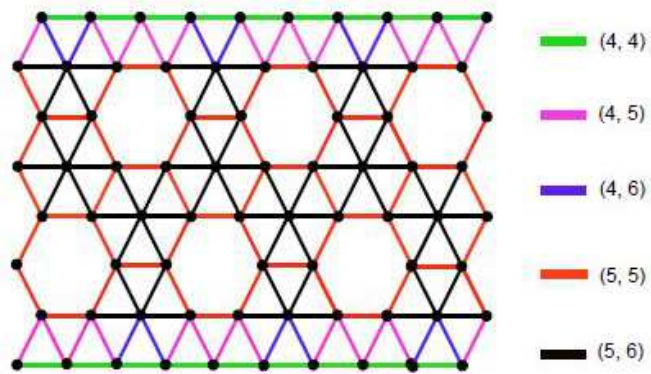


Fig. 4 The edge partitions of $BA(X)[8,6]$ nanotube with respect to degree of end vertices.

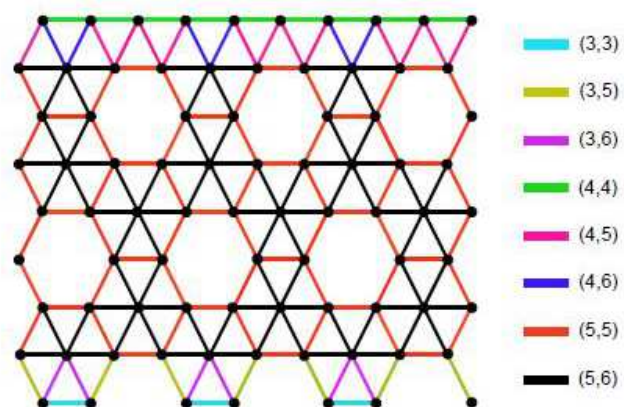


Fig. 5 The edge partitions of $BT(Y)[9,6]$ nanotube with respect to degree of end vertices.

References

1. Fath-Tabar, M. Old and New Zagreb Indices of Graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 2011, vol. 65, no. 1, pp. 79–84.
2. Fajtlowicz, S. On Conjectures of Graffiti-II, *Congr. Numer.*, 1987, vol. 60, pp. 187–197.
3. Furtula, B. and Gutman, I. A Forgotten Topological Index, *J. Math. Chem.*, 2015, vol. 53, no. 4, pp. 1184–1190. DOI: 10.1007/s10910-015-0480-z.
4. Balaban, A. T. Highly Discriminating Distance Based Numerical Descriptor, *Chem. Phys. Lett.*, 1982, vol. 89, pp. 399–404. DOI: 10.1016/0009-2614(82)80009-2.
5. Das, K. C. and Gutman, I. Some Properties of the Second Zagreb Index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 2004, vol. 52, pp. 103–112.
6. Devillers, J. and Balaban, A. T. *Topological Indices and Related Descriptors in QSAR and QSPR*, Gordon and Breach Science Publishers, 1999.
7. Milicevic, A., Nikolic, S. and Trinajstic, N. On Reformulated Zagreb Indices, *Molecular Diversity*, 2004, vol. 8, no. 4, pp. 393–399. DOI: 10.1023/b:modi.0000047504.14261.2a.
8. Alexander, V. Upper and Lower Bounds of Symmetric Division deg Index, *Iran. J. Math. Chem.*, 2014, vol. 5, no. 2, pp. 91–98.
9. Vukicevic, D. and Gasperov, M. Bond Additive Modeling 1. Adriatic Indices, *Croat. Chem. Acta*, 2010, vol. 83, no. 3, pp. 243–260.
10. Gupta, C. K., Lokesha, V., Shwetha, S. B. and Ranjini, P. S. On the Symmetric Division deg Index of Graph, *Southeast Asian Bull. Math.*, 2016, vol. 40, no. 1, pp. 59–80.
11. Kunstmann, J. and Quandt, A. Broad Boron Sheets and Boron Nanotubes: Anab Initiostudy of Structural, Electronic, and Mechanical Properties, *Phys. Rev. B*, 2006, vol. 74, no. 3, pp. 1–14. DOI: 10.1103/physrevb.74.035413.
12. Battersby, S. Boron Nanotubes Could Outperform Carbon. *New Scientist*.—URL: www.newscientist.com (accessed on 4 January 2008).
13. Miller, P. Boron Nanotubes Beat Carbon at its Own Game. *Engadget*. URL: www.engadget.com (accessed on 6 January 2008).
14. Lee, R. K. F., Cox, B. J. and Hill, J. M. Ideal Polyhedral Model for Boron Nanotubes with Distinct Bond Lengths, *J. Phys. Chem. C.*, 2009, vol. 113, no. 46, pp. 19794–19805. DOI: 10.1021/jp904985r.
15. Tang, H. and Ismail-Beigi, S. Novel Precursors for Boron Nanotubes, the Competition of Two-center and Three-center Bonding in Boron Sheets, *Phys. Rev. Lett.*, 2007, vol. 99, no. 11, pp. 115501–115504. DOI: 10.1103/physrevlett.99.115501.
16. Manuel, P. Computational Aspects of Carbon and Boron Nanotubes, *Molecules*, 2010, vol. 15, no. 12, pp. 8709–8722. DOI: 10.3390/molecules15128709.
17. Liu, J.-B., Shaker, H., Nadeem, I. and Hussain, M. Topological Aspects of Boron Nanotubes, *Advances in Materials Science and Engineering*, vol. 2018, pp. 1–11. DOI: 10.1155/2018/5729291.

Received May 6, 2019

PANCHANAHALLY SHIVALINGAPPA HEMAVATHI
Siddaganga Institute of Technology,
Tumkur 572 103, Karnataka, India,
Assistant Professor
E-mail: psh@sit.ac.in;

VEERABADHRAIAH LOKESHA
Vijayanagara Sri Krishnadevaraya University,
Ballari 583 105, Karnataka, India,
Professor and Chairman
E-mail: v.lokesha@gmail.com;

MUDDULAPURAM MANJUNATH
Vijayanagara Sri Krishnadevaraya University,
Ballari 583 105, Karnataka, India,
Research Scholar
E-mail: manju3479@gmail.com

POLAEPALLI SIVA KOTA REDDY
Sri Jayachamarajendra College of Engineering,
JSS Science and Technology University,
Mysuru 570 006, Karnataka, India,
Professor
E-mail: pskreddy@jssstuniv.in
RANI SHRUTI
Vijayanagara Sri Krishnadevaraya University,
Ballari 583 105, Karnataka, India,
Research Scholar
E-mail: shrutichinnu77@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 1, P. 66–77

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ
ТРИАНГУЛЯРНЫХ БОРНЫХ НАНОТРУБОК
И АЛЬФА-БОРНЫХ НАНОТРУБОК

Хемавати П. С.¹, Локеша В.², Манджунатх М.², Редди П. С. К.³, Шрути Р.²

¹ Технологический институт Сиддаганга, Тумкур 572 103, Карнатака, Индия;

² Виджаянагара Шри Кришнадеварайский университет, Беллари 583 105, Карнатака, Индия;

³ Научно-технический университет Джагадгуру Шри Шиваратрешвара,
Майсур 570 006, Карнатака, Индия

E-mail: psh@sit.ac.in, v.lokesha@gmail.com, manju3479@gmail.com,
pskreddy@jssstuniv.in, shrutichinnu77@gmail.com

Аннотация. Индексы топологических графов использовались во многих областях для изучения требуемых свойств различных объектов, таких как атомы и молекулы. Такие индексы были описаны и изучены многими математиками и химиками, поскольку большинство графиков генерируются из молекул путем замены каждого атома вершиной, а каждой химической связи — ребром. Эти индексы также являются топологическими инвариантами графа, измеряющими некоторые химические, физические, биологические, фармакологические, фармацевтические и т. д. свойства графов, соответствующие реальным жизненным ситуациям. Основанные на степени топологические индексы используются для корреляции физических и химических свойств молекулы с ее химической структурой. Нанотрубные структуры из бора являются интересными материалами благодаря наличию многоцентровых связей и обладают новыми электронными свойствами. Применение этих материалов в области наноустройств ставит ряд важных вопросов, таких как механическая и термическая стабильность. Поэтому они требуют теоретических исследований по разным свойствам. Статья посвящена подсчету третьего Загребского индекса, гармонического индекса, индекса обратной суммы, модифицированного индекса Загреба и индекса степени симметричного деления с применением к борным нанотрубкам треугольного типа и альфа-борным нанотрубкам.

Ключевые слова: топологический индекс, индекс Загреба, гармонический индекс, индекс обратной суммы, индекс степени симметричного деления, треугольные борные нанотрубки, альфа-борные нанотрубки.

Mathematical Subject Classification (2010): 05C05, 05C12, 05C75.

Образец цитирования: Hemavathi P. S., Lokesha V., Manjunath M., Reddy P. S. K., Shruti R. Topological Aspects Boron Triangular Nanotube and Boron- α Nanotube // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, № 1.—С. 66–77 (in English). DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57585.

УДК 512.5

DOI 10.23671/VNC.2020.1.57590

О НЕПРИВОДИМЫХ КОВРАХ АДДИТИВНЫХ ПОДГРУПП ТИПА G_2
НАД ПОЛЯМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ $p > 0$ [#]

С. К. Франчук¹

¹ Институт математики и фундаментальной информатики СФУ,
Россия, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: svetlya4ok-03@mail.ru

Аннотация. Данная работа посвящена изучению подгрупп групп Шевалле, определяемых коврами — наборами аддитивных подгрупп основного кольца определения. Такие подгруппы называются ковровыми и они порождаются корневыми элементами с коэффициентами из соответствующих аддитивных подгрупп. По определению ковер замкнут, если определяемая им ковровая подгруппа не содержит новых корневых элементов. Одним из принципиально важных вопросов при изучении ковровых подгрупп является вопрос о замкнутости исходного ковра. Известно, что этот вопрос сводится к неприводимым коврам, т. е. к коврам, все аддитивные подгруппы которых ненулевые [1, 2]. В статье описаны неприводимые ковры типа G_2 над полем K характеристики $p > 0$, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R -модулем, в случае когда K — алгебраическое расширение поля R .

Ключевые слова: группа Шевалле, ковер аддитивных подгрупп, ковровая подгруппа.

Mathematical Subject Classification (2010): 22E05.

Образец цитирования: Франчук С. К. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа G_2 над полями характеристики $p > 0$ // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 1.—С. 78–84. DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57590.

1. Введение

Основным результатом статьи является следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r : r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер типа G_2 над полем K характеристики $p > 0$. Предположим, что хотя бы одна из аддитивных подгрупп \mathfrak{A}_r является R -модулем, где K — алгебраическое расширение поля R . Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из группы Шевалле $G_2(K)$ при $p \neq 3$ все \mathfrak{A}_r совпадают с некоторым подполем P поля K , а при $p = 3$

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ — короткий корень;} \\ Q, & \text{если } r \text{ — длинный корень} \end{cases}$$

[#]Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований, проект № 19-01-00566.

© 2020 Франчук С. К.

для некоторых полей P и Q , удовлетворяющих следующим включениям:

$$R \subseteq P, Q \subseteq K, \quad (1)$$

$$P^3 \subseteq Q \subseteq P. \quad (2)$$

Для ковра \mathfrak{A} из вышеизложенной теоремы его ковровая подгруппа $G_2(\mathfrak{A})$ является промежуточной между $G_2(Q)$ и $G_2(P)$, и в силу [3] (см. также [4, теорема 8.1]) ковер \mathfrak{A} является замкнутым. Примеры незамкнутых неприводимых ковров любых типов над кольцами указаны в [5, 6]. Различные факторизации ковровых подгрупп, сомножители которых замкнутые ковровые подгруппы и подгруппы ранга 1, приведены в [7, 8]. Отметим также, что над локально конечным полем любой неприводимый ковер ранга больше 1 замкнут [9].

Ранее автором был получен аналогичный результат при более сильном ограничении, когда все аддитивные подгруппы являлись R -модулями [10]. Там же указаны примеры, когда ковер \mathfrak{A}_r параметризуется двумя различными полями P и Q характеристики 3.

2. Обозначения и определения

Далее Φ — приведенная неразложимая система корней ранга n , $E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа Φ над полем K . Группа $E(\Phi, K)$ порождается своими корневыми подгруппами

$$x_r(K) = \{x_r(t) : t \in K\}, \quad r \in \Phi.$$

Подгруппы $x_r(K)$ абелевы, и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u).$$

Назовем (*элементарным*) *ковром типа Φ ранга n над K* всякий набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r : r \in \Phi\}$ кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r, s, ir+js \in \Phi, \quad i, j > 0,$$

где

$$\mathfrak{A}_r^i = \{a^i : a \in \mathfrak{A}_r\},$$

а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \quad r, s, ir+js \in \Phi.$$

Данное определение ковра принадлежит В. М. Левчуку [11]. Всякий ковер \mathfrak{A} типа Φ над K определяет *ковровую* подгруппу

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) : r \in \Phi \rangle$$

группы Шевалле $E(\Phi, K)$, где $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная подмножеством M группы $E(\Phi, K)$. Ковер \mathfrak{A} типа Φ над кольцом K называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, т. е.

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) \cap x_r(K) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r), r \in \Phi \rangle.$$

Известно, что вопрос о замкнутости ковров редуцируется к *неприводимым* коврам, т. е. к коврам, все аддитивные подгруппы которых ненулевые [1, 2].

Следующая лемма является частным случаем следствия 3.2 из [1].

Лемма 1. Пусть $\{a, b\}$ — фундаментальная система системы корней Φ типа A_2 , $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r : r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер над полем K , причем хотя бы одна аддитивная подгруппа \mathfrak{A}_s является R -модулем, где K — алгебраическое расширение поля R и $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. Тогда $\mathfrak{A}_r = P$, $r \in \Phi$, для некоторого подполя P поля K .

Заметим, что в лемме 1 ограничение на характеристику поля отсутствует.

Наряду с элементарной группой Шевалле $E(\Phi, K)$ рассматривают расширенную группу Шевалле $\Phi(K)$, которая является расширением группы $E(\Phi, K)$ при помощи всех диагональных элементов $h(\chi)$, где χ — K -характер целочисленной решетки корней $\mathbb{Z}\Phi$, т. е. гомоморфизм аддитивной группы $\mathbb{Z}\Phi$ в мультипликативную группу K^* кольца K [12] (см. также [13]). Любой K -характер χ однозначно задается значениями на фундаментальных корнях, и для любых $r \in \Phi$ и $t \in K$

$$h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t).$$

Отметим, что в нашем случае, при $\Phi = G_2$, элементарная группа Шевалле $E(\Phi, K)$ совпадает с расширенной группой Шевалле $\Phi(K)$.

Лемма 2 [9, лемма 1]. Сопрягая диагональным элементом $h(\chi)$ ковровую подгруппу $E(\Phi, \mathfrak{A})$, получим ковровую подгруппу

$$h(\chi)E(\Phi, \mathfrak{A})h(\chi)^{-1} = E(\Phi, \mathfrak{A}'),$$

определяемую ковром

$$\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{A}'_r \mid r \in \Phi\}, \quad \mathfrak{A}'_r = \chi(r)\mathfrak{A}_r.$$

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [14]).

Лемма 3. Пусть K — алгебраическое расширение поля R и подкольцо A поля K является R -модулем. Тогда A — поле, причем $R \subseteq A \subseteq K$.

3. Доказательство теоремы 1

В [1, следствие 3.2] при $\text{char } K > 3$ доказано, что аддитивные подгруппы \mathfrak{A}_r совпадают с некоторым подполем P поля K . Поэтому теорему нужно доказывать только в следующих двух случаях, которые в [1] не рассматривались: 1) $\text{char } K = 2$; 2) $\text{char } K = 3$.

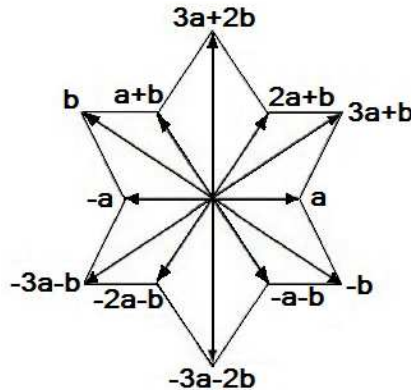


Рис. 1. Система корней типа G_2 .

Система корней типа G_2 представлена на рис. 1. Нам потребуются четыре типа коммутаторных формул:

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u)x_{3a+b}(\pm t^3u)x_{3a+2b}(\pm t^3u^2), \quad (3)$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu)x_{3a+b}(\pm 3t^2u)x_{3a+2b}(\pm 3tu^2), \quad (4)$$

$$[x_a(t), x_{2a+b}(u)] = x_{(3a+b)}(\pm 3tu), \quad (5)$$

$$[x_b(t), x_{3a+b}(u)] = x_{(3a+2b)}(\pm tu). \quad (6)$$

Условия ковровости, возникающие из формул (3) и (4), дают соответственно следующие серии включений

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}, \quad (7)$$

$$\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}, \quad (8)$$

$$\mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}, \quad (9)$$

$$\mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b^2 \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}, \quad (10)$$

$$2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}, \quad (11)$$

$$3\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}, \quad (12)$$

$$3\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b}^2 \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}. \quad (13)$$

Аналогично формулы (5) и (6) дают соответственно включения

$$3\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}, \quad (14)$$

$$\mathfrak{A}_b\mathfrak{A}_{3a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}. \quad (15)$$

В силу леммы 2 с точностью до сопряжения диагональным элементом из $G_2(K)$ можно считать, что $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. По условию теоремы существует такой корень s , что аддитивная подгруппа \mathfrak{A}_s является R -модулем. Зафиксируем этот корень.

Далее доказательство теоремы разбивается на два случая:

- 1) s — длинный корень,
- 2) s — короткий корень.

1) Пусть s — длинный корень. Длинные корни из Φ составляют подсистему корней типа A_2 с фундаментальной системой $\{b, 3a + b\}$, $1 \in \mathfrak{A}_{-b}$, а включение $1 \in \mathfrak{A}_{-3a-b}$ следует из $\mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}$ только для отрицательных корней. По лемме 1 независимо от характеристики поля K все аддитивные подгруппы \mathfrak{A}_r , индексированные длинными корнями, совпадают с некоторым подполем Q поля K . В частности, отсюда и из условия ковровости следует, что $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi$. Поэтому из включений типа $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ следует совпадение всех аддитивных подгрупп \mathfrak{A}_r , соответствующих коротким корням, а затем и включения $Q \subseteq \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi$. Пусть $\mathfrak{A}_a = P$. Из включений (9), (11) и (12) получаем соответственно включения

$$P^3 \subseteq Q, \quad 2PP \subseteq P, \quad 3P \subseteq Q.$$

Поэтому, если $p = 2$, то все \mathfrak{A}_r совпадают с полем Q . Если $p = 3$, то $P^3 \subseteq Q \subseteq P$ и P — кольцо, являющееся R -модулем, а в силу леммы 3 аддитивная подгруппа P становится полем.

2) Пусть s — короткий корень. Так как $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$, то из условия ковровости следует, что $1 \in \mathfrak{A}_r$, $r \in -\Phi^+$.

Пусть $\text{char } K = 3$. В этом случае в силу формулы (4) подгруппа, порожденная короткими корневыми подгруппами, изоморфна группе Шевалле типа A_2 . Поэтому по лемме 1 все \mathfrak{A}_r для коротких корней r совпадают с некоторым полем P . Сейчас из условия ковровости следует, что $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi$. В силу включений типа (15) получаем, что все аддитивные подгруппы \mathfrak{A}_r , индексированные длинными корнями, совпадают с некоторой аддитивной подгруппой Q поля K . Снова в силу (15) справедливо включение $QQ \subseteq Q$. Отсюда следует, что Q — кольцо с единицей. Из (7) и (9) получаются включения $P^3 \subseteq Q \subseteq P$. Далее, множество P^3 является полем, и P — его алгебраическое расширение, а в силу (9) кольцо Q будет P^3 -модулем. Поэтому по лемме 3 кольцо Q — поле.

Пусть $\text{char } K = 2$. Не теряя общности, можно считать, что именно \mathfrak{A}_{a+b} является R -модулем. Тогда в силу условия ковровости типа (7) и (14) соответственно справедливы следующие включения:

$$\mathfrak{A}_{-b}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_a,$$

$$3\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_b.$$

Сейчас, используя включение $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$, получаем $\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_a \cap \mathfrak{A}_b$. Теперь в силу условия ковровости (7) получаем $\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$. Таким образом, \mathfrak{A}_{a+b} — кольцо, а в силу леммы 3 — поле. Положим $\mathfrak{A}_{a+b} = P$. Так как $1 \in \mathfrak{A}_{a+b}$ и $1 \in \mathfrak{A}_r$, $r \in -\Phi^+$, то из коммутаторных формул типа (3) и условий ковровости получаем, что $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi$. Покажем сейчас, что $\mathfrak{A}_r = P$ для всех $r \in \Phi$. Включение $1 \in \mathfrak{A}_r$ для длинных корней влечет совпадение всех \mathfrak{A}_r . Далее, используя включение (7), получаем $\mathfrak{A}_a, \mathfrak{A}_b \subseteq P$, а в силу (12) $P \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}$. Таким образом, $\mathfrak{A}_r = P$, если r — длинный корень. Так как $\mathfrak{A}_a \subseteq P$ и $\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_a$, то $P \subseteq \mathfrak{A}_a$. Итак, получаем совпадение \mathfrak{A}_a с полем P . Аналогично показывается равенство $\mathfrak{A}_r = P$ для всех других коротких корней. \triangleright

Автор выражает благодарность профессору Я. Н. Нужиному за постановку задачи и помощь в выполнении настоящей работы.

Литература

1. Левчук В. М. О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 504–517.
2. Нужин Я. Н. Разложение Леви для ковровых подгрупп групп Шевалле над полем // Алгебра и логика.—2016.—Т. 55, № 5.—С. 558–570. DOI: 10.17377/alglog.2016.55.503.
3. Нужин Я. Н. О подгруппах групп Шевалле типа B_l , C_l , F_4 и G_2 , параметризуемых двумя несовершенными полями характеристики 2 и 3 // Математика в современном мире. Тез. докл. междунар. конф., посвящ. 60-летию ин-та мат-ки им. С. Л. Соболева.—Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2017.—С. 90.
4. Нужин Я. Н., Степанов А. В. Подгруппы групп Шевалле типов B_l и C_l , содержащие группу над подкольцом, и связанные с ними ковры // Алгебра и анализ.—2019.—Т. 31, № 4.—С. 198–224.
5. Койбаев В. А. Элементарные сети в линейных группах // Тр. ин-та мат. и мех. УрО РАН.—2011.—Т. 17, № 4.—С. 134–141.
6. Куклина С. К., Лихачева А. О., Нужин Я. Н. О замкнутости ковров лиева типа над коммутативными кольцами // Тр. ин-та мат. и мех. УрО РАН.—2015.—Т. 21, № 3.—С. 192–196.
7. Койбаев В. А., Нужин Я. Н. Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца // Фундамент. и прикл. матем.—2013.—Т. 18, № 1.—С. 75–84.
8. Нужин Я. Н. Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами // Журн. сиб. федер. ун-та.—2011.—Т. 4, № 4.—С. 527–535.
9. Койбаев В. А., Куклина С. К., Лихачева А. О., Нужин Я. Н. Подгруппы групп Шевалле над локально конечным полем, определяемые набором аддитивных подгрупп // Мат. заметки.—2017.—Т. 102.—С. 857–865. DOI: 10.4213/mzm11038.

10. Франчук С. К. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа G_2 // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика.—2019.—Т. 27.—С. 80–86. DOI: 10.26516/1997-7670.2019.27.80.
11. Левчук В. М. Параболические подгруппы некоторых АВА-групп // Мат. заметки.—1982.—Т. 31, № 4.—С. 509–525.
12. Carter R. W. Simple groups of Lie type.—London: John Wiley and Sons, 1972.—(Pure Appl. Math., № 28).
13. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле.—М.: Мир, 1975.—263 с.
14. Койбаев В. А., Нужин Я. Н. k -Инвариантные сети над алгебраическим расширением поля k // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 1.—С. 143–147. DOI: 10.17377/smzh.2017.58.114.

Статья поступила 10 декабря 2019

ФРАНЧУК СВЕТЛАНА КОНСТАНТИНОВНА
Институт математики и фундаментальной информатики СФУ,
аспирант
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: svetlya4ok-03@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 1, P. 78–84

ON IRREDUCIBLE CARPETS OF ADDITIVE SUBGROUPS OF TYPE G_2 OVER FIELDS OF CHARACTERISTIC $p > 0$

Franchuk, S. K.¹

¹ Institute of Mathematics and Computer Science,
Siberian Federal University,
79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russian
E-mail: svetlya4ok-03@mail.ru

Abstract. This article is devoted to the study of subgroups of Chevalley groups defined by carpets, sets of additive subgroups of the main definition ring. Such subgroups are called carpet subgroups and they are generated by root elements with coefficients from the corresponding additive subgroups. By definition, a carpet is closed if the carpet subgroup it defines, does not contain new root elements. One of the important questions in the study of carpet subgroups is the question of the closeness of the original carpet. It is known that this question is reduced to irreducible carpets, that is, to carpets all additive subgroups of which are nonzero [1, 2]. The article describes irreducible carpets of type G_2 over a field K of characteristic $p > 0$, at least one additive subgroup of which is an R -module, in the case when K is an algebraic extension of the field R .

Key words: Chevalley group, carpet of additive subgroups, carpet subgroup.

Mathematical Subject Classification (2010): 22E05.

For citation: Franchuk, S. K. On Irreducible Carpets of Additive Subgroups of Type G_2 Over Fields of Characteristic $p > 0$, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 1, pp. 78–84 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57590.

References

1. Levchuk, V. M. Generating Sets of Root Elements of Chevalley Groups over a Field, *Algebra and Logic*, 1983, vol. 22, no. 5, pp. 362–371. DOI: 10.1007/BF01982113.
2. Nuzhin, Ya. N. Levi Decomposition for Carpet Subgroups of Chevalley Groups over a Field, *Algebra and Logic*, 2016, vol. 55, no. 5, pp. 367–375. DOI: 10.1007/s10469-016-9408-3.
3. Nuzhin, Ya. N. About Subgroups of Chevalley Groups of Type B_1 , C_1 , F_4 and G_2 Parametrized by Two Imperfectfields of Characteristic 2 and 3, *Matematika v sovremennom mire. Tez. mezhdunar. konf., posvyashch. 60-letiyu in-ta mat-ki im. S. L. Soboleva*, Novosibirsk, 2017, pp. 90 (in Russian).

4. Nuzhin, Ya. N. and Stepanov, A. V. Subgroups of Chevalley Groups of Type B_l и C_l Containing the Group over a Subring, and the Corresponding Carpets, *Algebra i Analiz*, 2019, vol. 31, no. 4, pp. 198–224 (in Russian).
5. Koibaev, V. A. Elementary Nets in Linear Groups, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 134–141 (in Russian).
6. Kuklina, S. K., Likhacheva, A. O. and Nuzhin, Ya. N. On Closeness of Carpets of Lie Type over Commutative Rings, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 192–196 (in Russian).
7. Koibaev, V. A. and Nuzhin, Ya. N. Subgroups of the Chevalley Groups and Lie Rings Definable by a Collection of Additive Subgroups of the Initial Ring, *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 201, no. 4, pp. 458–464. DOI: 10.1007/s10958-014-2006-9.
8. Nuzhin, Ya. N. Factorization of Carpet Subgroups of the Chevalley Groups over Commutative Rings, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 527–535 (in Russian).
9. Koibaev, V. A., Kuklina, S. K., Likhacheva, A. O. and Nuzhin, Ya. N. Subgroups, of Chevalley Groups over a Locally Finite Field, Defined by a Family of Additive Subgroups, *Mathematical Notes*, 2017, vol. 102, pp. 857–865. DOI: 10.1134/S0001434617110190.
10. Franchuk, S. K. On Irreducible Carpets of Additive Subgroups of Type G_2 , *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2019, vol. 27, pp. 80–86 (in Russian). DOI: 10.26516/1997-7670.2019.27.80.
11. Levchuk, V. M. Parabolic Subgroups of Certain ABA -Groups, *Mathematical Notes*, 1982, vol. 31, no. 4, pp. 259–267. DOI: 10.1007/BF01138934.
12. Carter, R. W. *Simple Groups of Lie Type*, *Pure Appl. Math.*, no. 28, London, John Wiley and Sons, 1972.
13. Steinberg, R. *Lekcii o gruppah Shevalle* [Lectures on Chevalley Groups], Moscow, Mir Publ., 1975 (in Russian).
14. Koibaev, V. A. and Nuzhin, Ya. N. k -Invariant Nets over an Algebraic Extension of a Field k , *Siberian Mathematical Journal*, 2017, vol. 58, no. 1, pp. 143–147. DOI: 10.1134/S0037446617010141.

Received December 10, 2019

SVETLANA K. FRANCHUK
Institute of Mathematics and Computer Science,
Siberian Federal University,
79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russian,
Postgraduate
E-mail: svetlya4ok-03@mail.ru

УДК 517.392

DOI 10.23671/VNC.2020.1.57607

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Ш. С. Хубежты^{1,2}

¹ Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Ватутина, 46;

² Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22

E-mail: shalva57@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматривается один метод квадратур для численного решения гиперсингулярных интегральных уравнений на классе функций, неограниченных на концах интервала интегрирования. Для гиперсингулярного интеграла с весовой функцией $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ строится квадратурная формула интерполяционного типа с применением нулей ортогонального многочлена Чебышева первого рода. Для регулярного интеграла используется квадратурная формула наивысшей степени точности с той же весовой функцией $p(x)$. После дискретизации гиперсингулярного интегрального уравнения параметру сингулярности придаются значения корней многочлена Чебышева и, раскрывая неопределенности при совпадении значений узлов, получается система линейных алгебраических уравнений. Но, как оказалось, полученная система некорректная, т. е. не имеет единственного решения. Благодаря определенным дополнительным условиям, система становится корректной, и доказывается теорема о существовании и сходимости приближенного метода на некотором широком классе функций. Приводятся тестовые примеры, которые показывают, что построенная вычислительная схема удобна для реализации и эффективна для решения гиперсингулярных интегральных уравнений на классе функций, неограниченных на концах интервала интегрирования.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл, квадратурная формула, вычислительная схема, оценка погрешности.

Mathematical Subject Classification (2010): 65R20, 45E05.

Образец цитирования: Хубежты Ш. С. Численное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 1.—С. 85–92. DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57607.

1. Введение

Теория сингулярных интегральных уравнений из-за многочисленных приложений переживает бурное развитие. Этим уравнениям посвящены фундаментальные труды широко известных математиков: Д. Гильберта, А. Пуанкаре, Т. Карлемана, Н. И. Мусхелишвили, С. Г. Михлина, З. Пресдорфа и т. д. Хорошо известен спектр применения теории сингулярных интегральных уравнений в механике и технике: теории упругости и термоупругости, аэродинамике. Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения являются одним из основных аппаратов математического моделирования задач электродинамики.

Однако решение сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений возможно лишь в исключительных случаях, и основным аппаратом в прикладных задачах являются численные методы. В этом направлении должен отметить труды В. В. Иванова, И. К. Лифанова, Б. Г. Габдулхаева, Д. Г. Саникидзе, И. В. Бойкова и др. Но надо отметить, что и теория и методы численного решения гиперсингулярных интегральных уравнений разработаны в значительно меньшей степени, нежели соответствующая теория и методы для сингулярных интегральных уравнений. Среди работ, посвященных приближенным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений, можно отметить работы Б. Г. Габдулхаева [1], И. К. Лифанова [2], И. В. Бойкова [3, 4] и др.

Гиперсингулярное интегральное уравнение первого рода имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x,t)\varphi_0(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $-1 < x < 1$, $k(x,t)$ и $f(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_0(t)$ — неизвестная функция.

Гиперсингулярный интеграл

$$H(\varphi_0, x) = \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p} dt \quad (p \geq 2) \quad (2)$$

понимается в смысле конечной части по Адамару [1]:

$$H(\varphi_0, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left\{ \int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p} dt + \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p} dt - \frac{\psi(x)}{\varepsilon^{p-1}} \right\}, \quad (3)$$

где

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{p-2} \frac{\varphi_0^{(k)}(x)}{k!} \cdot \frac{\varepsilon^k [1 + (-1)^{p-k}]}{p-k-1}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать гиперсингулярные интегральные уравнения первого рода в случае $p = 2$, т. е. уравнения вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x,t)\varphi_0(t) dt = f(x), \quad (4)$$

где

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2} dt + \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2} dt - \frac{2\varphi_0(x)}{\varepsilon} \right). \quad (5)$$

В задачах механики и электродинамики чаще всего встречаются случаи, когда $\varphi_0(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \sqrt{1-t^2} \varphi(t), & \varphi_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \varphi(t), \\ \varphi_0(t) &= \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi(t), & \varphi_0(t) &= \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \varphi(t), \end{aligned}$$

где $\varphi(t)$ — достаточно гладкая функция на отрезке $[-1, 1]$.

2. Квадратурные формулы для гиперсингулярных интегралов и вычислительная схема

Так как мы ищем решения уравнения (4) на классе функций, неограниченных на концах интервала интегрирования $[-1, 1]$, т. е. вида $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\varphi(t)$, методом квадратур, то нам понадобятся квадратурные формулы для интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dx.$$

В работе [5] построена квадратурная формула для вышеуказанного гиперсингулярного интеграла, которая имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{1-x_k^2}}{x-x_k} \\ \times \left[\frac{U_{n-1}(x_k) - U_{n-1}(x)}{x-x_k} + \frac{xU_{n-1}(x) - nT_n(x)}{1-x^2} \right] \varphi(x_k), \quad (6) \end{aligned}$$

где $T_n(x) = \cos n \arccos x$, $U_n(x) = \frac{\sin(n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ — ортогональные многочлены Чебышева соответственно по весам $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — нули многочлена $T_n(x)$.

Кроме этого, для регулярного интеграла мы будем использовать квадратурную формулу типа Гаусса [6, с. 132]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t) dt \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi. \quad (7)$$

Вычислительная схема для поиска решений уравнения (4) вида $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \varphi(t)$, т. е. уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} k(x,t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (8)$$

строится следующим образом: используя квадратурные формулы (6) и (7) и подставляя их в (8), получаем следующее дискретное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \sqrt{1-x_k^2}}{(x-x_k)^2} \left[U_{n-1}(x_k) - U_{n-1}(x) + (x-x_k) \frac{xU_{n-1}(x) - nT_n(x)}{1-x^2} \right] \varphi(x_k) \\ + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(x, x_k) \varphi(x_k) = f(x), \quad (9) \end{aligned}$$

где $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Придавая параметру x последовательно значения x_1, x_2, \dots, x_n и раскрывая неопределенности при $x_j = x_k$ ($k = j$) [7], получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^n \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{1-x_k^2}}{(x_j-x_k)^2} \left[U_{n-1}(x_k) - U_{n-1}(x_j) + (x_j-x_k) \frac{x_j U_{n-1}(x_j) - n T_n(x_j)}{1-x_j^2} \right] \varphi(x_k) \\ & + \frac{-(n^2-1)(1-x_j^2) + 3x_j^2}{2n(1-x_j^2)^2} \varphi(x_j) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(x_j, x_k) \varphi(x_k) = f(x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (10)$$

Это и есть построенная вычислительная схема для уравнения (8).

Попытки численного решения системы (10) для некоторых тестовых задач не увенчались успехом. Численные результаты не сходились к точным решениям. И. В. Бойков подробно изучил данную проблему в работе [4]. Им установлено, что для существования и единственности решения уравнения (8) требуется выполнение следующих дополнительных условий:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_0(t) \varphi(t) dt = C_0, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_1(t) \varphi(t) dt = C_1, \quad (11)$$

где $T_0(t)$ и $T_1(t)$ — ортогональные многочлены Чебышева первого рода степени 0 и степени 1, а C_0 и C_1 — произвольные постоянные.

В работе [4, с. 458] указано, что «если $f(x)$ — достаточно гладкая функция, то на классе функций вида $(1-t^2)^{-1/2} \varphi(t)$ оператор K_0

$$\left(K_0 \varphi_0 \equiv \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2} dt = f(x) \right) \quad (*)$$

имеет правый обратный оператор. Так как правый обратный оператор не единственный, то необходимо выделить конкретный правый оператор. Следовательно, для получения однозначного решения уравнения (*) нужно на него наложить дополнительные условия вида (11). При этих условиях и в предположении, что $f(x)$ — достаточно гладкая функция, уравнение (*) однозначно разрешимо.

С учетом этого замечания построение и обоснование коллокационного метода и метода механических квадратур для приближенного решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода проводится на базе общей теории приближенных методов [8].»

С учетом дополнительных условий (11) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^n \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{1-x_k^2}}{(x_j-x_k)^2} \left[U_{n-1}(x_k) - U_{n-1}(x_j) + (x_j-x_k) \frac{x_j U_{n-1}(x_j) - n T_n(x_j)}{1-x_j^2} \right] \varphi(x_k) \\ + \frac{-(n^2-1)(1-x_j^2) + 3x_j^2}{2n(1-x_j^2)^2} \varphi(x_j) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(x_j, x_k) \varphi(x_k) = f(x_j), \quad j = 2, 3, \dots, n-1, \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_0(x_k) \varphi(x_k) = C_0, \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_1(x_k) \varphi(x_k) = C_1, \end{cases} \quad (12)$$

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t.$$

Система (12) является системой линейных алгебраических уравнений порядка $n \times n$ относительно неизвестных $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$.

Решая систему (12), мы получаем численное решение уравнения (8) $\varphi(t)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n .

3. Обоснование вычислительной схемы и примеры

Справедлива следующая теорема (см. [3, 4]).

Теорема 1. Пусть в уравнении (8) с условиями (11) функции $k(x, t)$ и $f(x)$ на отрезке $[-1; 1]$ принадлежат классу $H_r(\alpha)$ ($r > 1$) (т. е. имеют непрерывные производные до порядка $r - 1$, а производная $\varphi^{(r)}$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$) и это уравнение с условиями (11) имеет единственное решение. Тогда система линейных алгебраических уравнений (12) также имеет единственное решение и справедлива оценка

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta}}\right) \quad (0 < \beta < \alpha),$$

где

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{T_n(t)}{(t-x_k)T'_n(x_k)} \varphi(x_k),$$

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad T_n(t) = \cos n \arccos t.$$

◁ Для доказательства введем пространство X (см. [3, 4]) функций $x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \varphi(t)$, $\varphi(t) \in H_r(\alpha)$ ($\alpha > \frac{1}{2}$) с нормой

$$\|x(t)\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi(t)| + \max_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi'(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}$$

и пространство Y функций $y(t) \in H(\beta)$ ($\beta < \alpha - \frac{1}{2}$) с нормой

$$\|y(t)\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |y(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|y(t_1) - y(t_2)|}{(t_1 - t_2)^\beta}.$$

Тогда гиперсингулярный оператор Hx отображает пространство X в пространство Y , причем $\|Hx\|_Y \leq K\|x\|$, $K = \|H\|$. После этого аналогично доказательствам в [4] на основе общей теории приближенных методов [8] доказывается указанная теорема. ▷

Приведем несколько тестовых примеров.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} (x+t)\varphi(t) dt = x$$

с дополнительными условиями

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_0(t)\varphi(t) dt = 1, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_1(t)\varphi(t) dt = 0.$$

Для этого уравнения $k(x, t) = x + t$, $f(x) = x$, $C_0 = 1$, $C_1 = 0$. Точное решение $\varphi(t) = 1$. При $n = 4$ получаем следующие результаты: $\varphi(x_1) = 1$, $\varphi(x_2) = 1$, $\varphi(x_3) = 0,9999999$, $\varphi(x_4) = 0,9999999$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} (x+t)\varphi(t) dt = \frac{1}{2}$$

с дополнительными условиями

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_0(t)\varphi(t) dt = 0, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_1(t)\varphi(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Здесь $k(x, t) = x + t$, $f(x) = \frac{1}{2}$, $C_0 = 0$, $C_1 = \frac{1}{2}$. Точное решение $\varphi(t) = t$. При $n = 4$ получаем $\varphi(x_1) = 0,9238794$, $\varphi(x_2) = 0,3826835$, $\varphi(x_3) = -0,3826833$, $\varphi(x_4) = -0,9238797$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} (x+t)\varphi(t) dt = 1 + \frac{x}{2}$$

с дополнительными условиями

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_0(t)\varphi(t) dt = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_1(t)\varphi(t) dt = 0.$$

Здесь $k(x, t) = x + t$, $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$, $C_0 = \frac{1}{2}$, $C_1 = 0$. Точное решение $\varphi(t) = t^2$. При $n = 4$ получаем $\varphi(x_1) = 0,8535533$, $\varphi(x_2) = 0,1464467$, $\varphi(x_3) = 0,1464465$, $\varphi(x_4) = 0,8535534$.

Во всех указанных примерах погрешность

$$|\varepsilon(t)| = |\varphi(t) - \varphi_n(t)| \leq 10^{-6}.$$

Она показывает, что вычислительная схема (12) удобна для реализации на ЭВМ и эффективна для решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода.

Литература

1. Габдулхаев Б. Г., Шарипов Р. Н. Оптимизация квадратурных формул для сингулярных интегралов Коши и Адамара // Конструктивная теория функций.—Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987.—С. 3–48.
2. Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения.—М.: «Янус-К», 2001.—508 с.

3. Бойков И. В., Бойкова А. И., Сёмов М. А. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода // Изв. вузов. Поволж. регион. Физ.-мат. науки. Математика.—2015.— № 3 (35).—С. 11–27.
4. Бойков И. В., Бойкова А. И. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода с особенностями второго порядка // XIII Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» (Саранск, 12–16 июля 2017 г.).—Саранск, 2017.—С. 446–461.
5. Хубежты Ш. С., Плиева Л. Ю. О квадратурных формулах для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // Аналит. и числ. методы моделирования естеств.-науч. и соц. проблем: Сб. статей IX Междунар. науч.-техн. конф. (28–31 октября 2014 г.).—Пенза: Изд-во ПГУ, 2014.—С. 54–59.
6. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов.—М.: Наука, 1967.—500 с.
7. Хубежты Ш. С. О численном решении гиперсингулярных интегральных уравнений I рода с ядром Адамара // Мат. и компьютер. моделирование естеств.-науч. и соц. проблем: Материалы X Междунар. конф. молод. специалистов, аспирантов и студентов (23–27 мая 2016 г.).—Пенза: Изд-во ПГУ, 2016.—С. 83–92.
8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1977.—720 с.

Статья поступила 30 ноября 2018 г.

ХУБЕЖТЫ ШАЛВА СОЛОМОНОВИЧ
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
профессор кафедры мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Ватутина, 46;
Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела мат. моделирования
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
E-mail: shalva57@rambler.ru

*Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 1, P. 85–92*

ON NUMERICAL SOLUTION OF HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

Khubezhty Sh. S.^{1,2}

¹ North Ossetian State University,
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia;

² Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia

E-mail: shalva57@rambler.ru

Abstract. We consider a quadrature method for the numerical solution of hypersingular integral equations on the class of functions that are unbounded at the ends of the integration interval. For a hypersingular integral with a weight function $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, a quadrature formula of the interpolation type is constructed using the zeros of the Chebyshev orthogonal polynomial of the first kind. For a regular integral, the quadrature formula of the highest degree of accuracy is also used with the weight function $p(x)$. After discretizing the hypersingular integral equation, the singularity parameter is given the values of the roots of the Chebyshev polynomial and, evaluating indeterminate forms when the values of the nodes coincide, a system of linear algebraic equations is obtained. But, as it turned out, the resulting system is incorrect, that is, it does not have a unique solution, there is no convergence. Due to certain additional conditions, the system turns out to be correct. This is proved on numerous test cases, in which the errors of computations are also sufficiently small. On the basis of the considered test problems, we conclude that the constructed computing scheme

is convenient for implementation and effective for solving hypersingular integral equations on the class of functions of the integration interval unbound at the ends.

Key words: hypersingular integral, quadrature formula, computational scheme, error estimate.

Mathematical Subject Classification (2010): 65R20, 45E05.

For citation: Khubezhity, Sh. S. On Numerical Solution of Hypersingular Integral Equations of the First Kind, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 1, pp. 85–92 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57607.

References

1. Gabdulkhayev, B. G. and Sharipov, R. N. Optimization of Quadrature Formulas for Singular Cauchy and Hadamard Integrals, *Konstruktivnaya Teoriya Funktsii i Funktsional'nyi Analiz* [Constructive Theory of Functions and Functional Analysis], Kazan', Kazan. Gos. Univ., 1987, issue 6, pp. 3–48 (in Russian).
2. Vaynikko, G. M., Lifanov, I. K. and Poltavskiy, I. N. *Chislennye Metody v Gipersingulyarnykh Integral'nykh Uravneniyah i ih Prilozheniya* [Numerical Methods in Hypersingular Equations and their Applications], Moscow, Yanus-K, 2001, 508 p. (in Russian).
3. Boykov, I. V., Boykov, A. I. and Semov, M. A. Approximate Solution of Nonlinear Hypersingular Integral Equations of First Kind, *Izvestiya Vysshih Uchebnykh Zavedenii. Povolzhskii Region. Fiziko-Matematicheskie Nauki. Matematika* [University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences. Mathematics], 2015, no. 3 (35), pp. 11–27 (in Russian).
4. Boykov, I. V. and Boykova, A. I. Approximate Solution of Some Type of Hypersingular Integral Equations, *XIII Mezhdunar. Konf. «Differentsial'nye Uravneniya i ikh Prilozheniya v Matematicheskoy Modelirovaniy» (Saransk, 12–16 Iyulja 2017)* [XIII International Scientific Conference “Differential Equations and their Applications in Mathematical Modeling” (Saransk, July 12–16, 2017)], Saransk, 2017, pp. 446–461 (in Russian).
5. Khubezhity, Sh. S. and Plieva, L. Yu. O Kvadraturnykh Formulakh dlya Gipersingulyarnykh Integralov na Otrezke Integrirvaniya, *Analiticheskie i Chislennye Metody Modelirovaniya Estestvenno-Nauchnykh i Sotsial'nykh Problem: Sbornik Statey IX Mezhdunarodnoy Nauchno-Tekhnicheskoy Konferentsii (28–31 Oktyabrya 2014)* [Analytical and Numerical Methods of Modelling of Natural Science and Social Problems: Proceedings of the Ninth International Conference ANM-2014 (28–31 October, 2014)], Penza, 2014, pp. 54–59 (in Russian).
6. Krylov, V. I. *Priblizhennoe Vychislenie Integralov* [Approximate Calculation of Integrals], Moscow, Nauka, 1967, 500 p. (in Russian).
7. Khubezhity, Sh. S. O Chislenom Reshenii Gipersingulyarnykh Integral'nykh Uravneniy I Roda s Yadrom Adamara, *Matematicheskoe i Komp'yuternoe Modelirovanie Estestvenno-Nauchnykh i Sotsial'nykh Problem: Materialy X Mezhdunarodnoy Nauchno-Tekhnicheskoy Konferentsii Molodykh Spetsialistov, Aspirantov i Studentov (23–27 Maya 2016)* [Mathematical and Computer Modelling of Natural Science and Social Problems: Proceedings of the Tenth International Conference MCM-2016 (23–27 May, 2016)], Penza, PGU, 2016, pp. 83–92 (in Russian).
8. Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. *Funktsionalnyi analiz* [Functional Analysis], Moscow, Nauka, 1977, 720 p. (in Russian).

Received 30 November, 2018

SHALVA S. KHUBEZHITY

North Ossetian State University,

Professor of the Department of Mathematical Analysis

44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia;

Southern Mathematical Institute VSC RAS,

Leading Researcher of the Department of Mathematical Modeling

22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia

E-mail: shalva57@rambler.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

А. В. АБАНИНУ — 65 ЛЕТ

6 февраля 2020 г. исполнилось 65 лет известному российскому математику, профессору, доктору физико-математических наук, заведующему кафедрой математического анализа и геометрии Института математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича Южного Федерального университета, заведующему отделом математического анализа Южного математического института ВЦ РАН Александру Васильевичу Абанину.



Сын офицера Советской Армии Василия Федоровича и учительницы Лидии Степановны Абаниных, он унаследовал от своих родителей лучшие черты родового характера — цельность, целеустремленность, упорство в достижении поставленных целей, исключительную порядочность.

Переход в 9-м классе в ростовскую математическую школу № 5 стал, по признанию самого Александра Васильевича, «поворотным пунктом» в его профессиональной жизни, поскольку привел молодого человека «в мир увлеченности наукой». Директор школы и замечательный математик, Анна Владимировна Мардиросова, учительница физики Анна Васильевна Артемова, их коллеги в немалой степени способствовали тому, что в школе сложилась атмосфера дружеской конкуренции, а у обычных, в общем-то, подростков успешно формировались увлеченность наукой, стремление к постижению нового и самостоятельное творческое мышление.

В 1972 г., после окончания школы, А. В. Абанин поступает на отделение математики механико-математического факультета Ростовского государственного университета. «Для меня мехмат стал как бы продолжением школы на новом уровне, вспоминал будущий ученый. — С одной стороны — высококлассные требовательные преподаватели, и с другой — ориентированные на учебу студенты». Александр Васильевич с теплом и благодарностью рассказывает о том, как вели занятия известные математики и талантливые педагоги К. К. Мокрищев, М. Г. Хапланов, Ю. Ф. Коробейник, В. С. Рогожин, В. И. Юдович, М. М. Драгилев, С. Г. Самко, В. П. Захарюта, В. Б. Дыбин, Е. Л. Литвер, И. М. Мельник, какие великолепные спецкурсы, «в которых учили самым современным методам математического анализа, теории функций и функционального анализа» читали М. М. Драгилев, Ю. Ф. Коробейник, В. П. Захарюта, О. В. Епифанов, В. В. Моржаков, В. А. Богачев.

Традиционно на мехмате младшекурсников привлекали к работе в научно-образовательных кружках, где разбирались некоторые разделы математики, не входившие в основную программу. На одном из них, посвященном рядам Дирихле, начинающий ученый

выполнил свою первую «полуисследовательскую» работу по преобразованию Мёбиуса, и это обусловило выбор для дальнейшей специализации кафедры теории функций и функционального анализа — ее как раз возглавлял руководитель кружка профессор Михаил Григорьевич Хапланов, ставший первым научным руководителем Александра Васильевича.

Студенческая, как и школьная, жизнь проявила лучшие черты характера А. В. Абанина, став гармоничным соединением отличной учебы, помощи однокурсникам, интенсивной исследовательской работы и активной жизненной позиции. А в 1977 г., стремясь «профессионально заниматься чистой математикой», Александр Васильевич поступает в очную аспирантуру. Сам он впоследствии вспоминал: «в день моего зачисления, 20 октября 1977 г., ушел из жизни мой первый учитель Михаил Григорьевич Хапланов, и через какое-то время встал вопрос о выборе нового научного руководителя. Мне посоветовали обратиться к Юрию Фёдоровичу Коробейнику. Он в то время решил вернуться из Института механики и прикладной математики, где руководил отделом, на факультет и стал заведующим кафедрой математического анализа. В будущем о своем выборе мне не пришлось жалеть, несмотря на то, что первоначальные требования, предъявленные Юрием Фёдоровичем, были, хотя и справедливыми, но весьма жесткими».

В середине 70-х годов XX в. Ю. Ф. Коробейник начал развивать теорию представляющих систем. В 1975 г. вышли две его фундаментальных работы в «Математическом сборнике», в которых были изложены начала этой теории — и именно ей увлекся аспирант Абанин. После защиты в 1981 г. кандидатской диссертации «Некоторые свойства представляющих систем и базисов» (выполненной под руководством Ю. Ф. Коробейника) Александр Васильевич продолжил исследования в данном направлении. В 1980–2014 гг. им было проведено систематическое исследование (слабо) достаточных множеств в различных по структуре пространствах целых функций одной и многих переменных, разработаны приложения к теории представляющих систем и уравнениям свертки и теория абсолютно представляющих систем подпространств в спектрах локально выпуклых пространств. Среди основных результатов — доказательство совпадения классов слабо достаточных и эффективных по Ийеру множеств, геометрический критерий распределения на плоскости показателей абсолютно представляющих систем экспонент в пространствах голоморфных в выпуклой области функций, новые методы изучения свойств слабо достаточных множеств и абсолютно представляющих систем в многомерном случае. В 1995 г. в Екатеринбурге прошла блестящая защита докторской диссертации «Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы».

Следует отметить, что научные интересы Александра Васильевича всегда отличались значительным разнообразием.

В 90-е годы он разработал новые методы изучения порождающих идеалов в нерадикальных классах весовых пространств целых функций, предложил геометрическую характеристику нулевых множеств образующих порождающих идеалов. В это же время он получил интересные результаты в области теории ультрадифференцируемых функций и распределений (полное описание пространств ультрадифференцируемых функций, допускающих аналоги теоремы Уитни о продолжении, и теория ультрараспределений, содержащая все предшествующие классические теории). Итогом данной работы стала монография «Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения», вышедшая в издательстве «Наука» в 2007 г. Задача, поставленная автором — «на сравнительно небольшом по объему и разнообразию рассматриваемых вопросов материале обозначить некоторые достигнутые в последнее время результаты, разработанные при этом методы и возможности их использования» — была решена весьма успешно.

В 2009–2013 гг. Александр Васильевич Абанин проводил совместные исследования (связанные с уравнениями свертки и теоремами деления) с вьетнамским математиком Ле Хай Хоем и японцем Р. Ишимурой. Были установлены критерии разрешимости уравнений свертки в пространстве голоморфных в выпуклой области функций полиномиального роста, доказано существование экспоненциально-полиномиального базиса в ядре соответствующего оператора. Кроме того, был получен критерий справедливости теоремы деления в пространстве целых функций с двучленными асимптотиками роста и разработано его приложение к разрешимости уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций (2010; совместно с Д. А. Абаниной).

В эти же годы, исследуя двойственность функциональных пространств, ученый в совместных с Ле Хай Хоем работах установил взаимную двойственность пространств голоморфных функций полиномиального роста и пространств Фреше голоморфных функций заданной граничной гладкости. Кроме того, были развиты методы описания сопряженных пространств для индуктивных пределов последовательностей банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций и проективных спектров таких пространств (2006; совместно с И. А. Филиппевым).

В последние годы Александр Васильевич успешно ведет исследования в области общей теории весовых пространств голоморфных функций. Им установлено далеко идущее обобщение классической теоремы Л. Хермандера о продолжении целых функций с оценками роста, разработаны ее приложения к описанию канонических систем весов, установлены критерии принадлежности весовых пространств голоморфных функций к компактным спектрам, найдена непосредственная связь между топологической и алгебраической структурами индуктивных пределов весовых пространств голоморфных функций и их проективных оболочек, развиты новые методы исследования непрерывности, компактности и описания инвариантных подпространств классических операторов. Все эти результаты получены совместно с вьетнамским математиком Фам Чонг Тиеном, защитившим кандидатскую диссертацию под руководством А. В. Абанина в 2013 г.

Почти за 45 лет активной научной деятельности он опубликовал более 200 научных работ, большинство которых — в высокорейтинговых научных журналах (Доклады АН, Известия АН, Математические заметки, Сибирский математический журнал, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Studia Mathematica, Comptes Rendus. Mathematique. Academie des Sciences, Arkiv for Matematik, Journal of Approximation Theory, Mathematische Annalen, Mathematische Nachrichten, Proceedings of the American Mathematical Society).

Педагогическая карьера Александра Васильевича Абанина началась 1 ноября 1979 г., когда он перевелся в заочную аспирантуру и стал сотрудником кафедры математического анализа РГУ. За 40 прошедших лет, пройдя путь от ассистента до профессора, он пережил с кафедрой все реформы. Приняв эстафету у Ю. Ф. Коробейника, А. В. Абанин возглавил кафедру в 2000-м г., сохранил традиции добросовестного профессионализма, сделал кафедру базовой для возглавляемого им отдела математического анализа ЮМИ ВНИЦ РАН. В течение пятнадцати лет сотрудничества с ЮМИ ВНИЦ РАН ежегодно издавались сборники научных работ, проводились международные и молодежные научные конференции, выполнен совместный научный проект «Синтетические методы изучения операторов и уравнений в функциональных пространствах» (2012–2013 гг.) в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России». В 2018 г., после объединения старейших университетских кафедр — геометрии и математического анализа — в единую кафедру математического анализа и геометрии

А. В. Абанин был избран ее заведующим и, сохранив все лучшее, сформировал крепкий работоспособный коллектив.

Среди курсов, которые А. В. Абанин читал в разные годы — «Геометрическая теория функций комплексного переменного», «Целые функции», « \bar{D} -задача», «Функции многих комплексных переменных», «Избранные главы вещественного анализа», «Элементы теории двойственности», «Функциональные пространства», «Анализ на метрических пространствах», «Линейные задачи анализа». В настоящее время профессор Абанин увлеченно открывает первокурсникам азы математического анализа, успешно продолжая дело своих учителей. Блестяще подготовленные лекции, честность, принципиальность и педагогический талант приносят ему заслуженное признание и уважение и коллег, и студентов, часто оставляющих свои отзывы на различных сайтах: «Александр Васильевич создал на своих занятиях атмосферу, в которой мы воспринимали математику как искусство»... «Классный Математик! И очень хороший и справедливый преподаватель!»... «Великолепный преподаватель, настоящий профессионал!» — и подобных откликов немало.

Достаточно рано (по его собственной оценке) Александр Васильевич Абанин начал заниматься «подготовкой учеников на уровне руководства дипломными работами», и со временем создал крепкую научную школу. Одиннадцать человек защитили под его руководством кандидатские диссертации; последняя защита состоялась в мае 2019 г., а сейчас получившая диплом кандидата физико-математических наук Т. М. Андреева успешно работает и на кафедре математического анализа и геометрии, и в отделе математического анализа ЮМИ РАН. Сам ученый подчеркивает, что дело, в общем-то, и не в количестве или квалификационном уровне работ моих учеников. Важно то, что они заставляют меня держать себя в профессиональном тоне, находиться в постоянном поиске новых тем, идей и методов». Можно добавить, что многие ученики Александра Васильевича — аспиранты, магистранты, специалисты — являются сегодня преподавателями различных вузов Ростова и Ростовской области, в полной мере следуя основным принципам учителя, таким как высокая требовательность к себе и своим ученикам, преданность делу, добросовестность, большая самоотдача и высокий профессионализм.

Наряду с активной педагогической и научной деятельностью А. В. Абанин активно участвует в организации научной и учебной работы в университете. Он возглавляет специализированный совет Д 212.208.29 по защите докторских диссертаций, входит в состав редколлегии «Владикавказского математического журнала» и «Известий высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки» — ведущих журналов по математике на юге России.

Александр Васильевич ведет активные совместные исследования с математиками из Наньянского технологического университета (Сингапур), входящего в первую сотню ведущих университетов мира, и Национального университета Вьетнама. Он постоянно участвует в работе организационных комитетов различных международных конференций, регулярно выступает с докладами на Международных и Всероссийских конференциях, симпозиумах, школах. В качестве научного руководителя и одного из основных исполнителей ученый принимал участие в выполнении проектов, поддержанных РФФИ и Министерством образования и науки РФ по Федеральной целевой программе «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

Те, кому удавалось хоть недолго общаться с Александром Васильевичем, не могли не заметить таких определяющих особенностей характера как надежность, неприятие любой разновидности лжи, уступчивость в мелочах и при этом поразительная цельность и порядочность. Именно неравнодушные, педагогический талант, огонек в глазах и не

изменившаяся со студенческих лет активная жизненная позиция приводят к тому, что даже среди немногочисленных нынче студентов-математиков находятся люди, которых не отпугивает требовательность и принципиальность, которые именно благодаря Александру Васильевичу начинают понимать, «что значит красиво решить задачу и получить эстетическое наслаждение от красивого решения».

Всегда рядом с Александром Васильевичем и самые близкие ему люди, полностью разделяющие и научные интересы, и гражданскую позицию (жена, Татьяна Иванова — доцент кафедры информационных систем в строительстве (ДГТУ), дочь, Дарья Александровна — доцент кафедры математического анализа ЮФУ, сын, Дмитрий Александрович — профессор физики Женевского университета).

От всей души поздравляем Александра Васильевича и желаем ему здоровья, радости в жизни, новых творческих достижений, понимающих учеников!

*А. О. Ватульян, М. И. Карякин, С. Б. Климентов, Ю. Ф. Коробейник,
А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе, Ю. С. Налбандян*

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Общие положения

1. Периодическое издание «Владикавказский математический журнал» публикует оригинальные научные статьи отечественных и зарубежных авторов, содержащие новые математические результаты по функциональному и комплексному анализу, алгебре, геометрии, дифференциальным уравнениям и математической физике. По заказу редакционной коллегии журнал также публикует обзорные статьи. Журнал предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре выпуска в год. «Владикавказский математический журнал» публикует статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более 2 усл.п.л. (17 страниц формата А4). Работы, превышающие 2 усл.п.л., принимаются к публикации по специальному решению Редколлегии журнала. Срок рассмотрения статей обычно не превышает 8 месяцев. При подготовке статей для ускорения их рассмотрения и публикации следует соблюдать правила для авторов.

2. К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Результаты иных авторов, использованные в статье, следует должным образом отразить в ссылках. Направляя статью в журнал, авторы тем самым подтверждают, что для нее выполнены указанные требования.

3. Направляя статью в журнал, каждый из авторов подтверждает, что статья соответствует наивысшим стандартам публикационной этики для авторов и соавторов, разработанным COPE (Committee on Publication Ethics), см. <http://publicationethics.org/about>.

4. Все материалы, поступившие для публикации в журнале, подлежат регистрации с указанием даты поступления рукописи в редакцию журнала. Решение о публикации, отказе в публикации или направлении рукописи автору для доработки должно быть принято главным редактором и сообщено автору не позднее 4 месяцев со дня поступления рукописи в редакцию журнала. Подробнее см. в разделе Рецензирование.

5. Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего окончательный макет статьи в формате PDF направляется автору на корректуру.

6. Условием публикации статей, принятых к печати, является подписанием авторами договора о передаче авторских прав. Бланк договора можно скачать по ссылке.

7. Полнотекстовые версии статей, публикуемых в журнале, размещаются в Интернете в свободном доступе на официальном сайте журнала <http://www.vlmj.ru>, а также на сайтах Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка».

8. Публикации в журнале для авторов бесплатны.

Подготовка и представление рукописи статьи

1. Все материалы предоставляются в редакцию в электронном виде. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая рисунки, таблицы и список литературы, следует пронумеровать.

2. Работа должна быть подготовлена на компьютере в издательской системе LaTeX. Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX, не рассматриваются. Файлы статьи *.tex и *.ps (*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте rio@smath.ru.

3. В тексте статьи указывается индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся аннотации на русском и английском языках (объемом не менее 200 слов, достаточную для понимания содержания статьи), даются списки ключевых слов на русском и английском языках, а также коды согласно Mathematics Subjects Classifications (2010). Далее в файле приводятся полностью Фамилия, Имя, Отчество каждого автора, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты и ORCID.

4. Датой поступления статьи считается дата поступления электронной копии статьи на официальный e-mail журнала. Текст электронного сообщения должен быть оформлен как сопроводительное письмо, из текста которого ясно следует, что авторы направляют свою статью во Владикавказский математический журнал. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

5. В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

6. При подготовке файла статьи особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макроязыка LaTeX. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела.

7. Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков. Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова «Рис. » с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отформатированной слева надписью «Таблица» с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

8. Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы печатается в конце текста статьи, оформленные в соответствии с правилами издания, на основании требований, предусмотренных действующими ГОСТами. В нем должны быть указаны: для статей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

9. Список литературы полностью дублируется на английском языке, приводится полностью отдельным блоком в конце статьи, повторяя список литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются в списке, готовящемся в романском алфавите. Список References используется международными библиографическими базами (Scopus, WoS и др.) для учета цитирования авторов.

Примечание: более подробную информацию можно найти на официальном сайте журнала <http://www.vlmj.ru>.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 22

Выпуск 1

Зав. редакцией В. В. Бозрова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

Подписано в печать 20.03.2020. Дата выхода в свет 27.03.2020.
Формат бумаги $60 \times 84^{1/8}$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 11,59. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный научный центр «Владикавказский научный центр
Российской академии наук» (ВНЦ РАН)

Издатель:

Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»

Адрес издателя:

362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

