

УДК 517.9

DOI 10.46698/b9762-8415-3252-n

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ПО НЕТОЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ НА КОМПАКТЕ

Е. О. Сивкова^{1,2}

¹ Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;

² НИУ «Московский энергетический институт»,
Россия, 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14

E-mail: e.o.sivkova@mail.ru

Аннотация. Для однопараметрического семейства линейных непрерывных операторов $T(t): L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, $0 \leq t < \infty$, рассматривается задача об оптимальном восстановлении значений оператора $T(\tau)$ на всем пространстве по приближенной информации о значениях операторов $T(t)$, где t пробегает некоторый компакт $K \subset \mathbb{R}_+$ и $\tau \notin K$. Найдено семейство оптимальных методов восстановления значений оператора $T(\tau)$. Каждый из этих методов использует приближенные измерения не более, чем в двух точках из K и линейно зависит от этих измерений. В качестве следствия найдены семейства оптимальных методов восстановления решения уравнения теплопроводности в данный момент времени по неточным его измерениям в другие промежутки времени и решения задачи Дирихле для полупространства на гиперплоскости по неточным его измерениям на других гиперплоскостях. Задача оптимального восстановления значений оператора $T(\tau)$ по указанной информации сводится, в основной своей части, к нахождению значения некоторой экстремальной задачи на максимум с континуумом ограничений типа неравенств, т. е. к нахождению точной верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях. Эта, довольно сложно устроенная задача, редуцируется, в свою очередь, к бесконечномерной задаче линейного программирования на векторном пространстве всех конечных вещественных мер на σ -алгебре измеримых по Лебегу множеств в \mathbb{R}^d . Данную задачу уже удастся решить, используя некоторое обобщение теоремы Каруша — Куна — Таккера, и ее значение совпадает со значением исходной задачи.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, оптимальный метод, экстремальная задача, преобразование Фурье, уравнение теплопроводности, задача Дирихле.

AMS Subject Classification: 34K29, 65K10, 90C25.

Образец цитирования: Сивкова Е. О. Оптимальное восстановление семейства операторов по неточным измерениям на компакте // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 2.—С. 124–135. DOI: 10.46698/b9762-8415-3252-n.

1. Введение

В работе рассматривается одно специальное однопараметрическое семейство линейных непрерывных операторов из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и для него ставится задача об оптимальном восстановлении оператора при данном значении параметра по приближенной информации об операторах с другими значениями параметров, пробегающих некоторый компакт. Одной из важных мотиваций такой постановки является задача о восстановлении решения эволюционного уравнения в данный момент времени по приближенно

известным его значениям в другие моменты. Для рассматриваемого семейства найдены явные выражения для оптимальных методов восстановления. Эти методы линейны и используют не всю имеющуюся информацию, а лишь информацию о не более двух измерениях, причем предварительно ее «сглаживая». В качестве непосредственных следствий доказанного результат получены оптимальные методы восстановления решения уравнения теплопроводности и решения задачи Дирихле для полупространства.

2. Формулировка основного результата и его доказательство

Удобно сформулировать задачу оптимального восстановления сначала для абстрактного однопараметрического семейства операторов. Пусть X — вещественное или комплексное нормированное пространство с элементами f, g, \dots , и пусть $T(t), 0 \leq t < \infty$, — семейство линейных непрерывных операторов, отображающих X в себя. Мы ставим следующую задачу: восстановить (по возможности, наилучшим образом) значения оператора $T(\tau)$ на X по приближенным значениям операторов $T(t)$, где t принадлежит некоторому компакту K на полупрямой \mathbb{R}_+ и $\tau \notin K$.

Точная постановка такова. Пусть о каждом элементе $f \in X$ нам известны отображение $g: K \rightarrow X$, сопоставляющее $t \in K$ элемент $g_t \in X$, и положительная функция $\delta: K \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$\|T(t)f - g_t\|_X \leq \delta(t) \quad (\forall t \in K),$$

т. е. для каждого $t \in K$ мы имеем возможность «измерить» с точностью до $\delta(t)$ значение оператора $T(t)$ на некотором элементе (который, вообще говоря, нам неизвестен).

По этой информации мы хотим восстановить значения оператора $T(\tau)$ на X .

Обозначим через $G(K, X)$ множество всех отображений $g: K \rightarrow X$. Под методом восстановления понимаем любое отображение $\varphi: G(K, X) \rightarrow X$. Погрешность этого метода определим по формуле

$$e(T(\tau), K, \delta(\cdot), \varphi) = \sup_{f \in X} \sup_{\substack{g \in G(K, X), \\ \|T(t)f - g_t\|_X \leq \delta(t), t \in K}} \|T(\tau)f - \varphi(g)\|_X.$$

Нас интересует величина

$$E(T(\tau), K, \delta(\cdot)) = \inf_{\varphi} e(T(\tau), K, \delta(\cdot), \varphi),$$

где нижняя грань берется по всем методам $\varphi: G(K, X) \rightarrow X$, которую называем *погрешностью оптимального восстановления* и те методы $\hat{\varphi}$, на которых нижняя грань достигается, т. е. такие методы, что

$$E(T(\tau), K, \delta(\cdot)) = e(T(\tau), K, \delta(\cdot), \hat{\varphi}).$$

Эти методы будем называть *оптимальными методами восстановления*.

Такая общая постановка мотивирована, в основном, задачей о восстановлении решения эволюционного уравнения (определяемое однозначно начальным условием, которое, вообще говоря, нам неизвестно — элемент f в общей постановке) в фиксированный момент времени по приближенно известным его значениям в другие моменты.

В данной работе мы рассматриваем специальное семейство операторов и для него до конца решаем поставленную задачу, т. е. находим погрешность оптимального восстановления и явные выражения для оптимальных методов. В качестве следствий получим

оптимальные методы восстановления решений уравнения теплопроводности и задачи Дирихле.

Пусть $a(\cdot)$ — непрерывная функция на \mathbb{R}^d такая, что $a(0) = 0$, $a(\xi) \geq c|\xi|^\alpha$, для некоторых $c > 0$, $\alpha > 0$ и достаточно больших по модулю ξ , $a(\xi) \rightarrow +\infty$, при $|\xi| \rightarrow +\infty$ и $a(\xi_1) \leq a(\xi_2)$, если $|\xi_1| \leq |\xi_2|$, где $|\cdot|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^d .

Пусть F — преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Определим семейство операторов $T_a(t): L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, $t \geq 0$, действующих в образах Фурье по формулам

$$F[T_a(t)f(\cdot)](\xi) = e^{-ta(\xi)}F[f(\cdot)](\xi) \quad \text{для п. в. } \xi \in \mathbb{R}^d \quad (\forall f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)).$$

Далее будем иметь дело именно с этим семейством операторов. Это, очевидно, линейные операторы из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Непрерывность сразу следует из теоремы Планшереля. Действительно, для любого $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\begin{aligned} \|T_a f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |T_a f(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |F[T_a f(\cdot)](\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2ta(\xi)} |F[f(\cdot)](\xi)|^2 d\xi \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |F[f(\cdot)](\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

В общих определениях выше, заменяя X на $L_2(\mathbb{R}^d)$, получаем для данного семейства определения метода восстановления, его погрешности, погрешности оптимального восстановления и оптимального метода.

Далее будем предполагать, что функция $\delta: K \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

Перед формулировкой основного результата приведем некоторые определения. На двумерной плоскости рассмотрим множество (см. рис. 1), представляющее собой алгебраическую сумму выпуклой оболочки множества в фигурных скобках и положительной полупрямой.

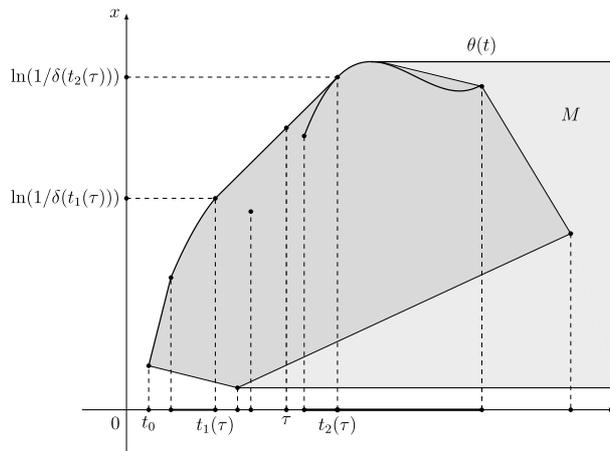


Рис. 1.

$$M = \text{co} \{ (t, \ln(1/\delta(t))), t \in K \} + (\mathbb{R}_+, 0),$$

Заметим, что M — выпуклое замкнутое множество. Действительно, множество в фигурных скобках компактно как непрерывный образ компакта, выпуклая оболочка данного компакта есть компакт, и поэтому M , как алгебраическая сумма двух выпуклых замкнутых множеств, одно из которых компактно, выпукло и замкнуто.

Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[t_0, +\infty)$, где $t_0 = \min\{t \in \mathbb{R} : t \in K\}$, по правилу $\theta(t) = \max\{x \in \mathbb{R} : (t, x) \in M\}$. Ясно, что $\theta(\cdot)$ — вогнутая неубывающая функция.

Пусть $\tau \notin K$. Тогда существует интервал V , содержащий τ , который не принадлежит K . На этом интервале функция $\theta(\cdot)$, очевидно, совпадает с некоторой линейной функцией $p(t) = ct + d$, $t \in \mathbb{R}$, где $c \geq 0$. Обозначим через $t_1(\tau) = \max\{t \in K : t < \tau, \theta(t) = p(t)\}$ и $t_2(\tau) = \min\{t \in K : t > \tau, \theta(t) = p(t)\}$, считая, что $t_2(\tau) = +\infty$, если множество в фигурных скобках пусто.

Пусть $\tau \notin K$ и $t_2(\tau) < +\infty$. Положим

$$\lambda_1(\tau) = \frac{t_2(\tau) - \tau}{t_2(\tau) - t_1(\tau)} \left(\frac{\delta(t_1(\tau))}{\delta(t_2(\tau))} \right)^{-\frac{2(\tau-t_1(\tau))}{t_2(\tau)-t_1(\tau)}},$$

$$\lambda_2(\tau) = \frac{\tau - t_1(\tau)}{t_2(\tau) - t_1(\tau)} \left(\frac{\delta(t_1(\tau))}{\delta(t_2(\tau))} \right)^{\frac{2(t_2(\tau)-\tau)}{t_2(\tau)-t_1(\tau)}}.$$

Легко видеть, что это положительные числа и $\lambda_1(\tau) < 1$. Определим еще множество

$$B(\tau) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d : a(\xi) \leq -\frac{\ln \lambda_1(\tau)}{2(\tau - t_1(\tau))} \right\}.$$

Теорема. *Справедливы следующие утверждения.*

1) Для любого $\tau \notin K$

$$E(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)) = e^{-\theta(\tau)}.$$

2) Если $\tau \notin K$ и $t_2(\tau) < +\infty$, то множество измеримых функций $\omega(\cdot)$ на \mathbb{R}^d , равных нулю вне $B(\tau)$ и таких, что

$$\frac{|e^{-(\tau-t_1(\tau))a(\xi)} - \omega(\xi)e^{-(t_2(\tau)-t_1(\tau))a(\xi)}|^2}{\lambda_1(\tau)} + \frac{|\omega(\xi)|^2}{\lambda_2(\tau)} \leq 1 \quad (1)$$

для п. в. $\xi \in B(\tau)$, не пусто, и для каждой такой функции $\omega(\cdot)$ метод $\widehat{\varphi}_\omega$, определенный формулой

$$\widehat{\varphi}_\omega(g(\cdot))(\cdot) = (R_1 * g_{t_1(\tau)})(\cdot) + (R_2 * g_{t_2(\tau)})(\cdot), \quad (2)$$

где $F[R_1(\cdot)](\xi) = e^{-(\tau-t_1(\tau))a(\xi)} - \omega(\xi)e^{-(t_2(\tau)-t_1(\tau))a(\xi)}$ и $F[R_2(\cdot)](\xi) = \omega(\xi)$ для п. в. $\xi \in B(\tau)$, является оптимальным.

3) Если $\tau \notin K$ и $t_2(\tau) = \infty$, то метод $\widehat{\varphi}$, определенный формулой $\widehat{\varphi}(g(\cdot))(\cdot) = (R * g_{t_1(\tau)})(\cdot)$, где $F[R(\cdot)](\xi) = e^{-(\tau-t_1(\tau))a(\xi)}$ для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, является оптимальным.

Сделаем два замечания по поводу сформулированной теоремы.

1. Формулы для оптимальных методов определены корректно. Действительно, функции $\omega(\cdot)$, очевидно, ограничены на ограниченном множестве $B(\tau)$ и равны нулю вне этого множества, и поэтому они принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$. Следовательно, ядра R_1 и R_2 принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$.

2. Оптимальные методы линейны и используют не более двух измерений, которые предварительно «сглаживают».

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Начнем с доказательства того, что для любого $\tau \notin K$ справедливо неравенство

$$E(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)) \geq e^{-\theta(\tau)}. \quad (3)$$

Пусть $\tau \notin K$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\|T_a(\tau)f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \sup, \quad \|T_a(t)f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta(t), \quad t \in K, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad (4)$$

и обозначим через $S(T_a(\tau), K, \delta(\cdot))$ ее значение, т. е. верхнюю грань максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Покажем, что

$$E(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)) \geq S(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)). \quad (5)$$

Далее, для краткости записи, пишем f вместо $f(\cdot)$, и аналогично для других функций. Пусть функция f_0 допустима в задаче (4) (т. е. удовлетворяет ограничениям этой задачи). Тогда, очевидно, функция $-f_0$ также допустима, и мы имеем для любого метода $\varphi: G(K, L_2(\mathbb{R}^d)) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} 2\|T_a(\tau)f_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \|T_a(\tau)f_0 - \varphi(0) - (T_a(\tau)(-f_0) - \varphi(0))\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|T_a(\tau)f_0 - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|T_a(\tau)(-f_0) - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{f \in L_2(\mathbb{R}^d), \\ \|T_a(t)f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta(t), t \in K}} \|T_a(\tau)f - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{f \in L_2(\mathbb{R}^d), g \in G(K, L_2(\mathbb{R}^d)), \\ \|T_a(t)f - g_t\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta(t), t \in K}} \|T_a(\tau)f - \varphi(g_t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 2e(T_a(\tau), K, \delta, \varphi). \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в задаче (4), а затем справа к нижней грани по всем методам φ , получим, что

$$\sup_{\substack{f \in L_2(\mathbb{R}^d), \\ \|T_a(t)f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta(t), t \in K}} \|T_a(\tau)f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq E(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)),$$

т. е. справедливо неравенство (5).

Покажем теперь, что

$$S(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)) \geq e^{-\theta(\tau)}. \quad (6)$$

Рассмотрим сначала ситуацию, когда $t_2(\tau) < +\infty$. Далее, для краткости, будем часто писать t_1 и t_2 вместо $t_1(\tau)$ и $t_2(\tau)$.

Как сказано выше, на отрезке $[t_1, t_2]$ функция $\theta(\cdot)$ совпадает с линейной функцией, которая в данном случае, очевидно, имеет вид

$$p(t) = \frac{\ln(1/\delta(t_2)) - \ln(1/\delta(t_1))}{t_2 - t_1}(t - t_1) + \ln \frac{1}{\delta(t_1)} = \ln(\delta(t_1))^{\frac{t-t_2}{t_2-t_1}} (\delta(t_2))^{\frac{t_1-t}{t_2-t_1}}. \quad (7)$$

Ясно, что если $(t, x) \in M$, то $p(t) \geq x$ и, в частности, $p(t) \geq \ln \delta^{-1}(t)$, если $t \in K$.

По построению, функция $\theta(\cdot)$ не убывает и поэтому коэффициент при $(t - t_1)$ в выражении для $p(\cdot)$ неотрицателен. Следовательно, по свойствам функции $a(\cdot)$, найдется вектор $\xi_0 = (\xi_{01}, \dots, \xi_{0d}) \in \mathbb{R}^d$ такой, что

$$a(\xi_0) = \frac{\ln(1/\delta(t_2)) - \ln(1/\delta(t_1))}{t_2 - t_1}. \quad (8)$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через \square_k куб в \mathbb{R}^d , образованный векторами $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, для которых $\xi_{0i} \leq \xi_i \leq \xi_{0i} + 1/k$, если $\xi_{0i} \geq 0$ и $\xi_{0i} - 1/k \leq \xi_i \leq \xi_{0i}$, если $\xi_{0i} < 0$.

Определим функции $\psi_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, по формулам

$$\psi_k(\xi) = \begin{cases} (2\pi k)^{d/2} (\delta(t_1))^{\frac{t_2}{t_2-t_1}} (\delta(t_2))^{\frac{-t_1}{t_2-t_1}}, & \xi \in \square_k; \\ 0, & \xi \notin \square_k. \end{cases}$$

Ясно, что эти функции принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $\varphi_k = F^{-1}[\psi_k]$, где F^{-1} — обратное преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$, и покажем, что функции φ_k , $k \in \mathbb{N}$, допустимы в задаче (4).

Действительно, если $\xi \in \square_k$, то легко видеть, что $|\xi_0| \leq |\xi| \leq |\xi_0| + \sqrt{d}/k$ и тогда, учитывая, что $e^{-2ta(\xi)} \leq e^{-2ta(\xi_0)}$, формулу (8) и то, что $p(t) \geq \ln \delta^{-1}(t)$, если $t \in K$, будем иметь по теореме Планшереля для любого $t \in K$

$$\begin{aligned} \|T_a(t)\varphi_k\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2ta(\xi)} |F[\varphi_k](\xi)|^2 d\xi \\ &= k^d (\delta(t_1))^{\frac{2t_2}{t_2-t_1}} (\delta(t_2))^{\frac{-2t_1}{t_2-t_1}} \int_{\square_k} e^{-2ta(\xi)} d\xi \leq (\delta(t_1))^{\frac{2t_2}{t_2-t_1}} (\delta(t_2))^{\frac{-2t_1}{t_2-t_1}} e^{-2ta(\xi_0)} \\ &= (\delta(t_1))^{2\frac{t_2-t}{t_2-t_1}} (\delta(t_2))^{2\frac{t-t_1}{t_2-t_1}} = e^{-2p(t)} \leq e^{-2\ln \delta^{-1}(t)} = \delta^2(t), \end{aligned}$$

т. е. функции φ_k , $k \in \mathbb{N}$, допустимы в задаче (4).

Значение максимизируемого функционала в (4) на этих функциях не больше значения самой задачи и поэтому снова, используя теорему Планшереля и формулу (8), получим, что

$$\begin{aligned} S^2(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)) &\geq \|T_a(\tau)\varphi_k\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\tau a(\xi)} |F[\varphi_k](\xi)|^2 d\xi \\ &= k^d (\delta(t_1))^{\frac{2t_2}{t_2-t_1}} (\delta(t_2))^{\frac{-2t_1}{t_2-t_1}} \int_{\square_k} e^{-2\tau a(\xi)} d\xi \\ &\geq (\delta(t_1))^{\frac{2t_2}{t_2-t_1}} (\delta(t_2))^{\frac{-2t_1}{t_2-t_1}} e^{-2\tau a(\xi_0)} e^{-2\tau\sqrt{d}/k} = e^{-2p(\tau)} e^{-2\tau\sqrt{d}/k}. \quad (9) \end{aligned}$$

Выражение справа стремится к величине $e^{-2p(\tau)} = e^{-2\theta(\tau)}$ при $k \rightarrow \infty$ и тем самым доказана оценка (6), что вместе с (5) доказывает неравенство (3) для случая $t_2(\tau) < +\infty$.

Пусть $t_2(\tau) = +\infty$. Ясно, что в этой ситуации на луче $[t_1(\tau), +\infty)$ функция $\theta(\cdot)$ совпадает с горизонтальной прямой $p(t) = \ln \delta^{-1}(t_1)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда, полагая $\xi_0 = 0$, $\psi_k(\xi) = (2\pi k)^{d/2} \delta(t_1)$, если $\xi \in \square_k$ и $\psi_k(\xi) = 0$, если $\xi \notin \square_k$, будем иметь для любого $t \in K$ (учитывая, что $a(0) = 0$ и $p(t) \geq \ln \delta^{-1}(t)$, если $t \in K$)

$$\begin{aligned} \|T_a(t)\varphi_k\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2ta(\xi)} |F[\varphi_k](\xi)|^2 d\xi \\ &= k^d \delta^2(t_1) \int_{\square_k} e^{-2ta(\xi)} d\xi \leq \delta^2(t_1) e^{-2ta(0)} = \delta^2(t_1) = e^{-2\ln \delta^{-1}(t_1)} \\ &= e^{-2p(t)} \leq e^{-2\ln \delta^{-1}(t)} = \delta^2(t), \end{aligned}$$

т. е. функции φ_k , $k \in \mathbb{N}$, допустимы в задаче (4).

Далее, проводя те же оценки, что и в (9), получаем для данного случая, что $S(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)) \geq e^{-\theta(\tau)}$. Вместе с (5) это доказывает неравенство (3) при $t_2(\tau) = +\infty$. Таким образом, неравенство (3) справедливо для всех $\tau \notin K$,

Противоположное неравенство для всех $\tau \in K$ докажем одновременно с оптимальностью методов из второго и третьего утверждений теоремы.

Пусть $t_2(\tau) < +\infty$. Покажем, что множество функций, удовлетворяющих условию (1), не пусто. Для этого предварительно докажем, что

$$\lambda_1(\tau)e^{-2(t_1-\tau)a(\xi)} + \lambda_2(\tau)e^{-2(t_2-\tau)a(\xi)} - 1 \geq 0 \quad (10)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = \lambda_1(\tau)e^{-2(t_1-\tau)\alpha} + \lambda_2(\tau)e^{-2(t_2-\tau)\alpha} - 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Эта функция выпукла, как сумма выпуклых функций, и дифференцируема. Несложная проверка показывает, что если $\alpha_0 = a(\xi_0)$ (см. (8)), то $f(\alpha_0) = f'(\alpha_0) = 0$, откуда следует, что $f(\alpha) \geq 0$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Действительно, по неравенству Иенссена для выпуклых функций (см. [1]) имеем для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и $0 < \gamma < 1$

$$f(\alpha_0 + \gamma(\alpha - \alpha_0)) = f((1 - \gamma)\alpha_0 + \gamma\alpha) \leq (1 - \gamma)f(\alpha_0) + \gamma f(\alpha) = \gamma f(\alpha).$$

Деля обе части этого неравенства на γ и переходя к пределу при $\gamma \rightarrow 0$, получаем, что $f(\alpha) \geq f'(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) = 0$. Следовательно, неравенство (10) справедливо для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Выделяя полный квадрат, нетрудно убедиться, что соотношение (1) равносильно следующему неравенству:

$$\begin{aligned} & \left| \omega(\xi) - \frac{\lambda_2(\tau)e^{-(\tau-t_1)a(\xi)}}{\lambda_1(\tau)e^{(t_2-t_1)a(\xi)} + \lambda_2(\tau)e^{-(t_2-t_1)a(\xi)}} \right| \\ & \leq \frac{\sqrt{\lambda_1(\tau)\lambda_2(\tau)} e^{t_2a(\xi)}}{\lambda_1(\tau)e^{(t_2-t_1)a(\xi)} + \lambda_2(\tau)e^{-(t_2-t_1)a(\xi)}} \sqrt{\lambda_1(\tau)e^{-2t_1a(\xi)} + \lambda_2(\tau)e^{-2t_2a(\xi)} - e^{-2\tau a(\xi)}} \end{aligned}$$

для п. в. $\xi \in B(\tau)$, причем выражение под знаком корня неотрицательно, поскольку оно отличается от выражения слева в (10) на положительный множитель $e^{-2\tau a(\xi)}$. Отсюда, очевидно, следует, что множество измеримых функций $\omega(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству (1), не пусто.

Перейдем теперь к доказательству оптимальности методов, определенных во втором утверждении теоремы. Пусть измеримая функция $\omega(\cdot)$ удовлетворяет неравенству (1) для п. в. $\xi \in B(\tau)$ и равна нулю вне $B(\tau)$. Оценим погрешность метода $\widehat{\varphi}_\omega$.

Для любых $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $g \in G(K, L_2(\mathbb{R}^d))$ таких, что $\|T_a(t)f - g_t\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta(t)$, $t \in K$, имеем по теореме Планшереля

$$\begin{aligned} & \|T_a(\tau)f - \widehat{\varphi}_\omega(g)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \|T_a(\tau)f - (R_1 * g_{t_1}) - (R_2 * g_{t_2})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-\tau a(\xi)} F[f](\xi) - \left(e^{-(\tau-t_1)a(\xi)} - \omega(\xi)e^{-(t_2-t_1)a(\xi)} \right) \right. \\ & \times \left. F[g_{t_1}](\xi) - \omega(\xi)F[g_{t_2}](\xi) \right|^2 d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \left(e^{-(\tau-t_1)a(\xi)} - \omega(\xi)e^{-(t_2-t_1)a(\xi)} \right) \right. \\ & \times \left. \left(e^{-t_1a(\xi)} F[f](\xi) - F[g_{t_1}](\xi) \right) + \omega(\xi) \left(e^{-t_2a(\xi)} F[f](\xi) - F[g_{t_2}](\xi) \right) \right|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим

$$\omega_1(\xi) = e^{-(\tau-t_1)a(\xi)} - \omega(\xi)e^{-(t_2-t_1)a(\xi)}$$

и

$$z_i(\xi) = e^{-t_i a(\xi)} F[f](\xi) - F[g_{t_i}](\xi), \quad i = 1, 2.$$

Тогда оценивая по неравенству Коши — Буняковского выражение под интегралом справа в (11), будем иметь для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} |\omega_1(\xi)z_1(\xi) + \omega(\xi)z_2(\xi)|^2 &= \left| \frac{\omega_1(\xi)}{\sqrt{\lambda_1(\tau)}} \sqrt{\lambda_1(\tau)} z_1(\xi) + \frac{\omega(\xi)}{\sqrt{\lambda_2(\tau)}} \sqrt{\lambda_2(\tau)} z_2(\xi) \right|^2 \\ &\leq \left(\frac{|\omega_1(\xi)|^2}{\lambda_1(\tau)} + \frac{|\omega(\xi)|^2}{\lambda_2(\tau)} \right) (\lambda_1(\tau)|z_1(\xi)|^2 + \lambda_2(\tau)|z_2(\xi)|^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно (1) первый множитель в правой части этого неравенства не превосходит единицы для п. в. $\xi \in B(\tau)$. Если же $\xi \notin B(\tau)$, то $\omega(\cdot) = 0$, и тогда этот множитель равен $e^{-2(\tau-t_1)a(\xi)}/\lambda_1(\tau)$. Но так как $\xi \notin B(\tau)$, то $a(\xi) > -\ln \lambda_1(\tau)/2(\tau-t_1(\tau))$, а это равносильно тому, что $e^{-2(\tau-t_1)a(\xi)}/\lambda_1(\tau) < 1$. Таким образом, первый множитель в правой части (12) не превосходит единицы для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Учитывая это обстоятельство и то, что в силу теоремы Планшереля

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |z_i(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |e^{-t_i a(\xi)} F[f](\xi) - F[g_{t_i}](\xi)|^2 d\xi \\ &= \|T_a(t_i)f - g_{t_i}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \delta^2(t_i), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

выражение справа в (11) не превосходит величины $\lambda_1(\tau)\delta^2(t_1) + \lambda_2(\tau)\delta^2(t_2)$.

Простой подсчет показывает, что

$$\lambda_1(\tau)\delta^2(t_1) + \lambda_2(\tau)\delta^2(t_2) = (\delta(t_1))^{\frac{2(t_2-\tau)}{t_2-t_1}} (\delta(t_2))^{\frac{2(\tau-t_1)}{t_2-t_1}}.$$

Но в силу (7) правая часть этого равенства равна $e^{-2p(\tau)} = e^{-2\theta(\tau)}$. Тогда отсюда и из (11) следует, что для любых $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $g \in G(K, L_2(\mathbb{R}^d))$ таких, что $\|T_a(t)f - \varphi(g_t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta(t)$, $t \in K$, справедлива оценка

$$\|T_a(\tau)f - \widehat{\varphi}_\omega(g)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq e^{-2\theta(\tau)}$$

и значит,

$$e(T_a(\tau), K, \delta(\cdot), \widehat{\varphi}_\omega) \leq e^{-\theta(\tau)}. \quad (13)$$

Эта оценка получена для случая, напомним, когда $t_2(\tau) < +\infty$. Из нее и доказанного неравенства (3) заключаем, что

$$e^{-\theta(\tau)} \leq E(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)) \leq e(T_a(\tau), K, \delta(\cdot), \widehat{\varphi}_\omega) \leq e^{-\theta(\tau)} \quad (14)$$

и тем самым $E(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)) = e^{-\theta(\tau)}$ и $E(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)) = e(T_a(\tau), K, \delta(\cdot), \widehat{\varphi}_\omega)$.

Таким образом, если $t_2(\tau) < +\infty$, то первое и второе утверждения теоремы доказаны.

Пусть $t_2(\tau) = +\infty$. Покажем, что для погрешности метода $\widehat{\varphi}$ из третьего утверждения теоремы справедлива оценка (13). Рассуждая также как и в (11), получим, что

$$\begin{aligned} \|T_a(\tau)f - \widehat{\varphi}(g)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \|T_a(\tau)f - (R * g_{t_1})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-\tau a(\xi)} F[f](\xi) - e^{-(\tau-t_1(\tau))a(\xi)} F[g_{t_1}](\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-(\tau-t_1)a(\xi)} \left(e^{-t_1 a(\xi)} F[f](\xi) - F[g_{t_1}](\xi) \right) \right|^2 d\xi \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \left(e^{-t_1 a(\xi)} F[f](\xi) - F[g_{t_1}](\xi) \right) \right|^2 d\xi \\ &= \|T_a(t_1)f - g_{t_1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \delta^2(t_1) = e^{-2 \ln \delta^{-1}(t_1)} = e^{-2\theta(\tau)}. \end{aligned}$$

Отсюда, как и выше, следует, что справедлива оценка (13) для данного метода. Поскольку неравенство (3) доказано для всех $\tau \notin K$, то соотношение (14) имеет место и для случая $t_2(\tau) = +\infty$. Таким образом, доказано первое утверждение теоремы для всех $\tau \notin K$ и оптимальность метода из третьего утверждения теоремы, т. е. теорема полностью доказана. \triangleright

3. Примеры

Рассмотрим теперь в качестве примера задачу об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности в \mathbb{R}^d . Распространение тепла на \mathbb{R}^d описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

(Δ — оператор Лапласа в \mathbb{R}^d и $(t, x) \mapsto u(t, x)$ — функция на $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$) с начальным распределением температуры $u(0, \cdot) = f(\cdot)$.

Мы предполагаем, что $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Единственное решение данной задачи дается для всех $t > 0$, как хорошо известно, интегралом Пуассона

$$u(t, x) = u(t, x; f(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy$$

и при этом $u(t, \cdot; f(\cdot)) \rightarrow f(\cdot)$ при $t \rightarrow 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Таким образом, мы имеем семейство операторов $T(t): L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, $T(t)f(\cdot) = u(t, \cdot)$ и, как хорошо известно, преобразование Фурье решения уравнения теплопроводности имеет вид

$$F[T(t)f(\cdot)](\xi) = F[u(t, x; f(\cdot))](\xi) = e^{-t|\xi|^2} F[f(\cdot)](\xi) \text{ для п.в. } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Следовательно, решение задачи об оптимальном восстановлении температуры в \mathbb{R}^d в момент времени τ по ее приближенным измерениям в точках некоторого компакта дается доказанной теоремой при $\alpha(\xi) = |\xi|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

В качестве второго примера рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(\cdot, 0) = f(\cdot), \end{cases}$$

где Δ — оператор Лапласа в \mathbb{R}^{d+1} и $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot, \cdot)$ в верхнем полупространстве $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : y > 0\}$ такую, что $u(\cdot, y) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ для любого $y > 0$, $\sup_{y>0} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} < \infty$ и $u(\cdot, y) \rightarrow f(\cdot)$ при $y \rightarrow 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

В этом случае решение задачи Дирихле единственно и выражается интегралом Пуассона (см. [2])

$$u(x, y) = u(x, y; f) = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{yf(t)}{(|x-t|^2 + y^2)^{(d+1)/2}} dt.$$

Как и в предыдущем примере, мы имеем семейство операторов $T(y): L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, $T(y)f(\cdot) = u(\cdot, y)$, которые в образах Фурье имеют вид

$$F[T(y)f](\xi) = F[u(x, y; f)](\xi) = e^{-y|\xi|} F[f](\xi).$$

Если поставить задачу об оптимальном восстановлении значений гармонической функции на гиперплоскости $y = Y$ по ее приближенным измерениям на гиперплоскостях $y = y_j$, где y_j пробегают некоторый компакт $K \subset \mathbb{R}_+$ и $Y \notin K$, то ее решение дается доказанной здесь теоремой, когда $\alpha(\xi) = |\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

4. Заключение

Рассмотренная в данной работе задача относится к тому разделу теории приближений, который занимается задачами оптимального восстановления значений линейных функционалов и операторов на классах множеств, элементы которых известны приближенно. Это направление возникло в шестидесятые годы прошлого века, начиная с работы С. А. Смоляка [3], и с тех пор достаточно активно развивается в самых разных направлениях. Отметим здесь обзоры [4–6], монографию [7] и статьи [8–10]. Что касается тематики данной работы, то задача об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности в \mathbb{R}^d , когда компакт K состоит из конечного числа точек, была решена в [9], и там построен только один оптимальный метод. Для рассмотренного здесь семейства операторов и когда K состоит из двух точек задача решена в работе [11]. Задача Дирихле для полупространства, приведенная здесь в качестве примера, решена в работе [12] для случая, когда K состоит из конечного числа точек.

Благодарность. Автор благодарен Г. Г. Магарил-Ильяеву за полезные обсуждения.

Литература

1. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. Изд. 5-ое. доп.—М.: УРСС, 2020.—176 с.
2. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.—М.: Мир, 1974.—331 с.
3. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дисс. . . к.ф.-м.н.—М.: МГУ, 1965.

4. Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory / Eds. C. A. Micchelli and T. J. Rivlin.—N. Y.: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.
5. Melkman A. A., Micchelli C. A. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM Journal on Numerical Analysis.—1979.—Vol. 16, № 1.—P. 87–105. DOI: 10.1137/0716007.
6. Micchelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on Optimal Recovery // Numerical Analysis Lancaster / Eds. Turner P. R.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—P. 21–93.—(Lecture Notes in Mathematics; Vol. 1129). DOI: 10.1007/BFb0075157.
7. Traub J. F., Woźniakowski H. A General Theory of Optimal Algorithms.—N. Y.: Academic Press, 1980.
8. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функци. анализ и его прил.—2003.—Т. 37, № 3.—С. 51–64. DOI: 10.4213/faa157.
9. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб.—2009.—Т. 200, № 5.—С. 37–54. DOI: 10.4213/sm7301.
10. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функци. анализ и его прил.—2010.—Т. 44.—С. 76–79. DOI: 10.4213/faa2999.
11. Magaril-Ilyayev G. G., Sivkova E. O. Optimal recovery of the semi-group operators from inaccurate data // Eurasian Math. J.—2019.—Vol. 10, № 4.—P. 75–84. DOI: 10.32523/2077-9879-2019-10-4-75-84.
12. Абрамова Е. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле для полупространства по неточным измерениям // Журнал вычисл. матем. и матем. физ.—2020.—Т. 60, № 10.—С. 1711–1720. DOI: 10.31857/S0044466920100038.

Статья поступила 15 июля 2022 г.

Сивкова Елена Олеговна
 Южный математический институт — филиал ВНИЦ РАН,
 научный сотрудник отдела функционального анализа
 РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;
 НИУ «Московский энергетический институт»,
 доцент кафедры высшей математики
 РОССИЯ, 111250, Москва, Красноказарменная ул., 14
 E-mail: e.o.sivkova@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-0365-4320>

*Vladikavkaz Mathematical Journal
 2023, Volume 25, Issue 2, P. 124–135*

OPTIMAL RECOVERY OF A FAMILY OF OPERATORS FROM INACCURATE MEASUREMENTS ON A COMPACT

Sivkova, E. O. ^{1,2}

¹ Southern Mathematical Institute VSC RAS,
 53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia;

² NRU “Moscow Power Engineering Institute”,
 14 Krasnokazarmennaya St., Moscow 111250, Russia

E-mail: e.o.sivkova@mail.ru

Abstract. For a one-parameter family of linear continuous operators $T(t): L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, $0 \leq t < \infty$, we consider the problem of optimal recovery of the values of the operator $T(\tau)$ on the whole space by approximate information about the values of the operators $T(t)$, where t runs through some compact set $K \subset \mathbb{R}_+$ and $\tau \notin K$. A family of optimal methods for recovering the values of the operator $T(\tau)$ is found. Each of these methods uses approximate measurements at no more than two points from K and depends linearly on these measurements. As a consequence, families of optimal methods are found for restoring the solution of the heat equation at a given moment of time from its inaccurate measurements on other time intervals and for solving the Dirichlet problem for a half-space on a hyperplane from its inaccurate measurements on

other hyperplanes. The problem of optimal recovery of the values of the operator $T(\tau)$ from the indicated information is reduced to finding the value of some extremal problem for the maximum with a continuum of inequality-type constraints, i. e., to finding the least upper bound of the a functional under these constraints. This rather complicated task is reduced, in its turn, to the infinite-dimensional problem of linear programming on the vector space of all finite real measures on the σ -algebra of Lebesgue measurable sets in \mathbb{R}^d . This problem can be solved using some generalization of the Karush–Kuhn–Tucker theorem, and its the value coincides with the value of the original problem.

Keywords: optimal recovery, optimal method, extremal problem, Fourier transform, heat equation, Dirichlet problem.

AMS Subject Classification: 34K29, 65K10, 90C25.

For citation: Sivkova, E. O. Optimal Recovery of a Family of Operators from Inaccurate Measurements on a Compact // *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 2, pp. 124–135 (in Russian). DOI: 10.46698/b9762-8415-3252-n.

References

1. Magaril-Il'yaev, G. G. and Tikhomirov, V. M. *Vypuklyy Analiz i ego Prilozheniy* [Convex Analysis and its Applications], Moscow, URSS, 2020, 176 p. (in Russian).
2. Stein, E. M. and Weiss, G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Mathematical Series, vol. 1, New Jersey, Princeton University Press, 1971.
3. Smolyak, S. A. *Ob optimal'nom vosstanovlenii funktsii i funkcionalov ot nikh. Diss.* [On Optimal Recovery of Functions and Functionals from them. PhD], Moscow, MSU, 1965 (in Russian).
4. Micchelli, C. A. and Rivlin, T. J. A Survey of Optimal Recovery, *Optimal Estimation in Approximation Theory*, C. A. Micchelli and T. J. Rivlin (eds.), New York, Plenum Press, 1977, pp. 1–54.
5. Melkman, A. A. and Micchelli, C. A. Optimal Estimation of Linear Operators in Hilbert Spaces from Inaccurate Data, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1979, vol. 16, no. 1, pp. 87–105. DOI: 10.1137/0716007.
6. Micchelli, C. A. and Rivlin, T. J. Lectures on Optimal Recovery, *Numerical Analysis Lancaster*, Turner P. R. (ed.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1129, Berlin, Springer-Verlag, 1985, pp. 21–93. DOI: 10.1007/BFb0075157.
7. Traub, J. F. and Woźniakowski, H. *A General Theory of Optimal Algorithms*, New York, Academic Press, 1980.
8. Magaril-Il'yaev, G. G. and Osipenko, K. Yu. Optimal Recovery of Functions and Their Derivatives from Inaccurate Information about the Spectrum and Inequalities for Derivatives, *Functional Analysis and Its Applications*, 2003, vol. 37, no. 3, pp. 203–214. DOI: 10.1023/A:1026084617039.
9. Magaril-Il'yaev, G. G. and Osipenko, K. Yu. Optimal Recovery of the Solution of the Heat Equation from Inaccurate Data, *Sbornik: Mathematics*, 2009, vol. 200, no. 5, pp. 665–682. DOI: 10.1070/SM2009v200n05ABEH004014.
10. Magaril-Il'yaev, G. G. and Osipenko, K. Yu. On Optimal Harmonic Synthesis from Inaccurate Spectral Data, *Functional Analysis and Its Applications*, 2010, vol. 44, no. 3, pp. 223–225. DOI: 10.1007/s10688-010-0029-7.
11. Magaril-Il'yaev, G. G. and Sivkova, E. O. Optimal Recovery of the Semi-Group Operators from Inaccurate Data, *Eurasian Mathematical Journal*, 2019, vol. 10, no. 4, pp. 75–84. DOI: 10.32523/2077-9879-2019-10-4-75-84.
12. Abramova, E. V., Magaril-Il'yaev, G. G. and Sivkova, E. O. Best Recovery of the Solution of the Dirichlet Problem in a Half-Space from Inaccurate Data, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, vol. 60, no. 10, pp. 1656–1665. DOI: 10.1134/S0965542520100036.

Received July 15, 2022

ELENA O. SIVKOVA

Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Researcher;

NRU “Moscow Power Engineering Institute”,
14 Krasnokazarmennaya St., Moscow 111250, Russia,
Assistant Professor

E-mail: e.o.sivkova@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-0365-4320>