

УДК 512.5

DOI 10.46698/s0378-3993-5022-o

ВОССТАНОВЛЕНИЕ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ МЛАДШЕГО  
КОЭФФИЦИЕНТА И ИСТОЧНИКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
ПО ЧАСТИЧНОЙ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ<sup>#</sup>

В. Б. Левенштам<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> Южный федеральный университет,  
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 А;

<sup>2</sup> Математический институт им. В. А. Стеклова,  
Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8;

<sup>3</sup> Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,  
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: vlevenshtam@yandex.ru

**Аннотация.** Рассмотрена задача Коши для одномерного гиперболического уравнения, младший коэффициент и правая часть которого осциллируют по времени с большой частотой, причем амплитуда младшего коэффициента мала. Исследован вопрос о восстановлении не зависящих от пространственной переменной сомножителей этих быстро осциллирующих функций по заданной в некоторой точке пространства частичной асимптотике решения. Для различных эволюционных уравнений многочисленные задачи об определении неизвестных источника и коэффициентов без предположения их быстрой осцилляции исследованы в классической теории обратных задач, где в дополнительном условии (условии переопределения) фигурирует точное решение прямой задачи. Вместе с тем уравнения с быстро осциллирующими данными нередко встречаются при моделировании физических, химических и других процессов, протекающих в средах, подверженных высокочастотному воздействию электромагнитных, акустических, вибрационных и т. п. полей. Это свидетельствует об актуальности задач теории возмущений о восстановлении неизвестных функций в высокочастотных уравнениях. В работе используется неклассический алгоритм решения такого рода задач, который лежит на стыке двух дисциплин — асимптотические методы и обратные задачи. В условии переопределения при этом участвует не (точное) решение, как в классике, а лишь его частичная асимптотика определенной длины.

**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение, быстро осциллирующие данные, асимптотические методы, обратная задача.

**AMS Subject Classification:** 35B40.

**Образец цитирования:** Левенштам В. Б. Восстановление быстро осциллирующих младшего коэффициента и источника гиперболического уравнения по частичной асимптотике решения // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 3.—С. 111–122. DOI: 10.46698/s0378-3993-5022-o.

## Введение

В работе поставлена и решена асимптотическая задача о (точном) восстановлении неизвестных, не зависящих от пространственной переменной сомножителей быстро осциллирующих по времени источника и младшего коэффициента одномерного волнового уравнения с младшим членом по частичной асимптотике решения.

---

<sup>#</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 20-11-20141.

© 2023 Левенштам В. Б.

Для различных эволюционных уравнений многочисленные задачи об определении неизвестных источника и коэффициентов без предположения их быстрой осцилляции исследованы в теории обратных задач (об этой теории см., например, [1–3]), где в дополнительном условии (условии переопределения) фигурирует точное решение прямой задачи. Вместе с тем уравнения с быстро осциллирующими данными нередко встречаются при моделировании физических, химических и других процессов, протекающих в средах, подверженных высокочастотному воздействию электромагнитных, акустических, вибрационных и т. п. полей. Например, уравнение теплопроводности для стержня, через который пропускается высокочастотный электрический ток, вследствие чего в нем возникают высокочастотные тепловые источники; уравнение колебаний струны или стержня при воздействии на них высокочастотных внешних сил (см. задачу В. Н. Челомея о высокочастотных сжатиях-растяжениях стержня, стабилизирующих его прямолинейную форму); уравнение переноса вещества в несжимаемой жидкости при наличии высокочастотных источников; уравнение тепловой конвекции жидкости в сосуде при его высокочастотных вибрациях (см. [4–6]) и т. д. Все это свидетельствует об актуальности задач теории возмущений о точном восстановлении неизвестных функций в высокочастотном уравнении с помощью нескольких первых членов асимптотики его решения.

В данной работе рассматривается задача Коши для одномерного гиперболического уравнения, младший коэффициент и правая часть которого осциллируют по времени с большой частотой  $\omega$ , причем амплитуда младшего коэффициента мала — пропорциональна  $\omega^{-1}$ . Исследован вопрос о восстановлении этих быстро осциллирующих функций (точнее, их не зависящих от пространства высокочастотных сомножителей) по заданной в некоторой точке пространства четырехчленной асимптотике решения. Используется неклассический алгоритм решения такого рода задач, который применялся нами в случае параболических и гиперболических уравнений с неизвестным источником [7–9]. Этот алгоритм лежит на стыке двух дисциплин — асимптотические методы и обратные задачи. В связи с этим решение задачи о восстановлении неизвестных разбивается на две части, относящиеся к соответствующим дисциплинам, и нужно следить за согласованностью (например, в смысле гладкости функций) указанных частей. В условии переопределения при этом участвует не (точное) решение, как в классике, а лишь его частичная асимптотика определенной длины; при этом необходимая информация задается не для всех коэффициентов этой асимптотики, а лишь для некоторых «базисных» функций, которые являются либо соответствующими коэффициентами указанной асимптотики, либо их быстрыми составляющими. Так, в данной работе в постановке задачи о восстановлении (в условии переопределения) участвуют коэффициенты четырехчленной асимптотики, вычисленные в фиксированной точке пространства — это функции  $q_0(t)$ ,  $q_1(t)$ ,  $q_2(t) + \lambda_1(t, \omega t)$  и  $q_3(t) + \lambda_2(t, \omega t)$ , но непосредственно задаются лишь функции  $q_0(t)$ ,  $q_1(t)$ ,  $\lambda_1(t, \tau)$  и  $\lambda_2(t, \tau)$ . Остальные функции произвольным образом задавать нельзя, так как они зависят от заданных. При такой постановке неизвестные быстро осциллирующие функции исходной задачи однозначно и эффективно определяются.

Результаты данной работы без доказательств изложены, в основном, в [10].

## 1. Построение асимптотики (прямая задача)

Пусть  $T > 0$ ,  $\Pi = \{(x, t) : x \in R, t \in [0; T]\}$ ,  $\Omega = \{(x, t, \tau) : (x, t) \in \Pi, \tau \in [0, \infty)\}$ . В полосе  $\Pi$  рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения с младшим членом

и большим параметром  $\omega$  вида

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\omega} a(x, t, \omega t) u = f(x, t, \omega t); \\ u(x, 0) = d_0(x); \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = d_1(x). \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь функции  $f(x, t, \tau)$  и  $a(x, t, \tau)$  определены на множестве  $\Omega$  и  $2\pi$ -периодичны по  $\tau$ , а функции  $d_0(x)$  и  $d_1(x)$  определены на прямой  $R$ . Все рассматриваемые в работе функции считаются вещественными.

Для того чтобы описать условия гладкости, налагаемые на функции  $a$  и  $f$ , определим следующие линеалы. Для любого целого неотрицательного числа  $m$  символом  $C^m(\Pi)$  будем обозначать пространство заданных на  $\Pi$  непрерывных функций  $u(x, t)$ , обладающих непрерывными на  $\Pi$  производными  $\frac{\partial^{i+j} u(x, t)}{\partial x^i \partial t^j}$ ,  $0 \leq i + j \leq m$ . Символом  $C^{m,0}(\Omega)$  будем обозначать линейное пространство заданных на  $\Omega$  непрерывных функций  $v(x, t, \tau)$ , имеющих непрерывные на  $\Omega$  производные  $\frac{\partial^{i+j} v(x, t, \tau)}{\partial x^i \partial t^j}$ ,  $0 \leq i + j \leq m$ . Будем еще рассматривать аналогичный линеал  $C^m(R)$ . Отметим, что функции из указанных линеалов и их производные могут быть неограниченными.

Функции  $f$  и  $a$  представим в виде:

$$f(x, t, \tau) = F(x, t) + \phi(x, t, \tau), \quad a(x, t, \tau) = A(x, t) + b(x, t, \tau),$$

выделив в них средние относительно  $\tau$  (на периоде):

$$F(x, t) = \langle f(x, t, \tau) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, t, \tau) d\tau, \quad A(x, t) = \langle a(x, t, \tau) \rangle.$$

Пусть  $A, A_t, A_{tx} \in C^4(\Pi)$ ,  $A_{x^2} \in C^2(\Pi)$ ,  $F, F_t F_{tx} \in C^4(\Pi)$ ,  $F_{x^2} \in C^2(\Pi)$ ,  $b, b_{tx} \in C^{4,0}(\Omega)$ ,  $\phi, \phi_{tx} \in C^{4,0}(\Omega)$ ,  $d_0 \in C^5(R)$ ,  $d_1 \in C^4(R)$ . Частичную асимптотику по  $\omega \gg 1$  решения  $u_\omega(x, t)$  задачи (1.1) будем строить в виде:

$$\begin{aligned} w_\omega^4(x, t) &= u_0(x, t) + \frac{1}{\omega} u_1(x, t) + \frac{1}{\omega^2} (u_2(x, t) + v_2(x, t, \omega t)) \\ &\dots + \frac{1}{\omega^4} (u_4(x, t) + v_4(x, t, \omega t)) + \frac{1}{\omega^5} v_5(x, t, \omega t), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где функции  $u_k(x, t)$  и  $v_k(x, t, \tau)$  определены на множествах  $\Pi$  и  $\Omega$ , а также дважды непрерывно дифференцируемы по  $x$  и  $t$  и по  $x$  и  $t, \tau$  соответственно, причем  $v_k(x, t, \tau)$  являются  $2\pi$ -периодическими по  $\tau$  с нулевым средним.

В дальнейшем часто будем обращаться к следующим двум простейшим типам линейных однозначно разрешимых задач. К первому отнесем задачу о  $2\pi$ -периодических решениях обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка вида

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 s(x, t, \tau)}{\partial \tau^2} = \psi(x, t, \tau); \\ s(x, t, \tau + 2\pi) = s(x, t, \tau); \\ \langle s(x, t, \tau) \rangle = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

где  $\psi(x, t, \tau)$  — определенная на множестве  $\Omega$  функция,  $2\pi$ -периодическая по  $\tau$ . Решение

задачи (1.3), как известно, имеет вид:

$$s(x, t, \tau) = \int_0^\tau \left( \int_0^z \psi(x, t, s) ds - \left\langle \int_0^\tau \psi(x, t, s) ds \right\rangle \right) dz - \left\langle \int_0^\tau \left( \int_0^z \psi(x, t, s) ds - \left\langle \int_0^\tau \psi(x, t, s) ds \right\rangle \right) dz \right\rangle.$$

Ко второму типу отнесем задачу Коши для волнового уравнения в полосе  $\Pi$  вида

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = g(x, t); \\ u(x, t)|_{t=0} = h_1(x); \\ u_t(x, t)|_{t=0} = h_2(x), \end{cases} \quad (1.4)$$

где функции  $g(x, t)$  и  $h_1(x), h_2(x)$  определены в  $\Pi$  и на  $R$  соответственно, причем  $g(x, t)$  и  $h_2(x)$  непрерывно дифференцируемы по  $x$  и  $h_1(x)$  дважды непрерывно дифференцируема ( $g, g_x \in C^0(\Pi)$ ,  $h_2 \in C^1(R)$ ,  $h_1 \in C^2(R)$ ). Решение задачи (1.4) выражается, как известно, формулой Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(h_1(x-t) + h_1(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h_2(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} g(\xi, s) d\xi.$$

При этом, если для некоторого натурального  $n$  имеют место соотношения:  $g, g_x \in C^{n-1}(\Pi)$ ,  $h_2 \in C^n(R)$ ,  $h_1 \in C^{n+1}(R)$ , то решение задачи (1.4)  $u \in C^{n+1}(\Pi)$ .

Для любого положительного числа  $M$  определим прямоугольник  $\Pi_M = \{(x, t) : |x| \leq M, t \in [0; T]\}$ , а также введем в рассмотрение  $(k+1)$ -членную,  $k = 3, 4$ , асимптотику решения  $u_\omega$  задачи (1.1):

$$u_\omega^k(x, t) = u_0(x, t) + \omega^{-1}u_1(x, t) + \sum_{s=2}^k \omega^{-s}(u_s(x, t) + v_s(x, t, \omega t)). \quad (1.5)$$

**Теорема 1.** Для каждого  $M > 0$  имеет место асимптотическая формула:

$$\left\| u_\omega(x, t) - u_\omega^3(x, t) \right\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-4}), \quad \omega \rightarrow \infty,$$

где  $u_i(x, t)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ ,  $v_j(x, t, \tau)$ ,  $j = 2, 3$ , являются решениями задач вида (1.4) и (1.3) соответственно.

Здесь  $C(\Pi_M)$  — обычное банахово пространство непрерывных в прямоугольнике  $\Pi_M$  функций с  $\max$ -нормой.

**Замечание 1.** В теореме 1 речь идет о четырехчленной асимптотике решения  $u_\omega$ , поскольку именно эта частичная асимптотика требуется в § 2, и она обеспечена указанными выше требованиями гладкости данных задачи (1.1). При увеличении гладкости данных можно строить асимптотики соответствующих более высоких порядков. При бесконечной гладкости результат, аналогичный теореме 1, справедлив для полной асимптотики решения  $u_\omega$ .

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Подставим функцию  $w_\omega^4(x, t)$  (см. (1.2)) в равенства (1.1). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\omega$  и воспользуемся операцией усреднения по  $\tau = \omega t$ . В результате получим следующий набор задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} = F(x, t); \\ u_0(x, 0) = d_0(x); \\ \frac{\partial u_0(x, 0)}{\partial t} = d_1(x), \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \tau^2} = \phi(x, t, \tau); \\ v_2(x, t, \tau + 2\pi) = v_2(x, t, \tau); \\ \langle v_2(x, t, \tau) \rangle = 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} = -A(x, t)u_0(x, t); \\ u_1(x, 0) = 0; \\ \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{\partial v_2(x, t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{t, \tau=0}, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} = -2\frac{\partial^2 v_2(x, t, \tau)}{\partial t \partial \tau} - b(x, t, \tau)u_0(x, t); \\ v_3(x, t, \tau + 2\pi) = v_3(x, t, \tau); \\ \langle v_3(x, t, \tau) \rangle = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} = -A(x, t)u_1(x, t); \\ u_2(x, t) \Big|_{t=0} = -v_2(x, t, \tau) \Big|_{t, \tau=0}; \\ \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{\partial v_2(x, t, \tau)}{\partial t} \Big|_{t, \tau=0} - \frac{\partial v_3(x, t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{t, \tau=0}, \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_4}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 v_2(x, t, \tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_2(x, t, \tau)}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2 v_3(x, t, \tau)}{\partial t \partial \tau} - b(x, t, \tau)u_1(x, t); \\ v_4(x, t, \tau + 2\pi) = v_4(x, t, \tau); \\ \langle v_4(x, t, \tau) \rangle = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial x^2} = -A(x, t)u_2(x, t) - \langle b(x, t, \tau)v_2(x, t, \tau) \rangle; \\ u_3(x, t) \Big|_{t=0} = -v_3(x, t, \tau) \Big|_{t, \tau=0}; \\ \frac{\partial u_3(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{\partial v_3(x, t, \tau)}{\partial t} \Big|_{t, \tau=0} - \frac{\partial v_4(x, t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{t, \tau=0}, \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_5}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 v_3(x, t, \tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_3(x, t, \tau)}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2 v_4(x, t, \tau)}{\partial t \partial \tau} - b(x, t, \tau)u_2(x, t) \\ - A(x, t)v_2(x, t, \tau) - (b(x, t, \tau)v_2(x, t, \tau) - \langle b(x, t, \tau)v_2(x, t, \tau) \rangle); \\ v_5(x, t, \tau + 2\pi) = v_5(x, t, \tau); \\ \langle v_5(x, t, \tau) \rangle = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_4(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_4(x, t)}{\partial x^2} = -A(x, t)u_3(x, t) - \langle b(x, t, \tau)v_3(x, t, \tau) \rangle; \\ u_4(x, t) \Big|_{t=0} = -v_4(x, t, \tau) \Big|_{t, \tau=0}; \\ \frac{\partial u_4(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{\partial v_4(x, t, \tau)}{\partial t} \Big|_{t, \tau=0} - \frac{\partial v_5(x, t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{t, \tau=0}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Отметим, что (1.6), (1.8), (1.10), (1.12) и (1.14) — задачи вида (1.4), а (1.7), (1.9), (1.11) и (1.13) — задачи вида (1.3). Нетрудно проверить, что требуемая для их однозначной

разрешимости гладкость данных, о которой говорилось при описании задач (1.3) и (1.4), выполнена в силу условий, наложенных на функции  $a(x, t, \tau)$ ,  $f(x, t, \tau)$ ,  $d_0(x)$  и  $d_1(x)$ . Резюмируя сказанное, придем к задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2(w_\omega^4(x,t))}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w_\omega^4(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\omega} a(x, t, \omega t) w_\omega^4(x, t) = f(x, t, \omega t) - z(x, t, \omega t, \omega); \\ w_\omega^4(x, 0) = d_0(x) - \frac{1}{\omega^5} v_5(x, 0, 0); \\ \frac{\partial w_\omega^5(x, 0)}{\partial t} = d_1(x) - \frac{1}{\omega^5} \frac{\partial v_5(x, 0, 0)}{\partial t}, \end{cases} \quad (1.15)$$

где

$$\begin{aligned} z(x, t, \tau, \omega) = \frac{1}{\omega^4} \left[ \frac{\partial^2 v_4}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_4}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v_5}{\partial t \partial \tau} + A v_3 + (b v_3 - \langle b v_3 \rangle) \right] \\ + \frac{1}{\omega^5} \left[ a(u_4 + v_4) + \frac{\partial^2 v_5}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_5}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{\omega^6} a v_5. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Зафиксируем произвольное положительное число  $M$ . Из представления (1.16) функции  $z(x, t, \tau, \omega)$  и равенств (1.6)–(1.14) вытекает асимптотическая формула:

$$\|z(x, t, \tau, \omega)\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-4}), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (1.17)$$

Положим  $W = u_\omega - w_\omega^4$  и вычтем из равенств (1.1) соответствующие равенства (1.15). Придем к задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{1}{\omega} a W + z; \\ W(x, 0, 0) = \frac{1}{\omega^5} C_0(x); \\ \frac{\partial W(x, 0, 0)}{\partial t} = \frac{1}{\omega^5} C_1(x), \end{cases} \quad (1.18)$$

где  $C_0(x) = v_5(x, 0, 0)$ ,  $C_1(x) = \frac{\partial v_5(x, 0, 0)}{\partial t}$ . Считая правую ее часть известной, будем смотреть на (1.18), как на задачу вида (1.4), а потому по формуле Даламбера получим

$$\begin{aligned} W(x, t, \tau) = \frac{1}{2\omega^5} [C_0(x-t) + C_0(x+t)] + \frac{1}{2\omega^5} \int_{x-t}^{x+t} C_1(\xi) d\xi \\ - \frac{1}{2\omega} \int_0^t ds \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} (aW)(\xi, s, \omega s) d\xi + \frac{1}{2\omega} \int_0^t ds \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} z(\xi, s, \omega s, \omega) d\xi. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Для краткости обозначим предпоследнее слагаемое в правой части (1.20) через  $h(x, t, \omega)$ . Ясно, что для  $M > 0$  найдется такое число  $\omega_M > 0$ , что при  $\omega > \omega_M$

$$\|h(x, t, \omega)\|_{C(\Pi_M)} \leq \frac{1}{2} \|W(x, t, \omega)\|_{C(\Pi_M)}. \quad (1.20)$$

Из соотношений (1.19), (1.20), (1.17), (1.18) вытекает асимптотическая формула

$$\|u_\omega - w_\omega^4\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-5}), \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Указанная в теореме 1 оценка следует теперь из неравенства треугольника:

$$\|u_\omega - \overset{3}{u}_\omega\|_{C(\Pi_M)} \leq \|u_\omega - \overset{4}{w}_\omega\|_{C(\Pi_M)} + \|\overset{4}{w}_\omega - \overset{3}{u}_\omega\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-4}), \quad \omega \rightarrow \infty. \triangleright$$

## 2. Обратная задача

Пусть  $T > 0$ ,  $\Pi = \{(x, t) : x \in R, t \in [0, T]\}$ ,  $Q = \{(t, \tau) : t \in [0, T], \tau \in [0; \infty)\}$ .

В полосе  $\Pi$  рассмотрим задачу Коши вида (частный случай (1.1)):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\omega} B(x, t) \rho(t, \omega t) u = F(x, t) r(t, \omega t); \\ u(x, 0) = d_0(x); \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = d_1(x). \end{cases} \quad (2.1)$$

Фигурирующие здесь функции  $B(x, t)$ ,  $F(x, t)$  и  $d_0(x)$ ,  $d_1(x)$  определены в полосе  $\Pi$  и на прямой  $R$  соответственно и удовлетворяют условиям (определения используемых здесь линеалов см. в § 1):  $B, B_t, B_{tx} \in C^4(\Pi)$ ,  $B_{x^2} \in C^2(\Pi)$ ,  $F, F_{x^2} \in C^2(\Pi)$ ,  $F_t, F_x, F_{tx} \in C^4(\Pi)$ ,  $d_0 \in C^5(R)$ ,  $d_1 \in C^4(R)$ . Эти функции предполагаются известными. Положим далее

$$\rho(t, \tau) = \rho_0(t) + \rho_1(t, \tau), \quad r(t, \tau) = r_0(t) + r_1(t, \tau), \quad (2.2)$$

где  $\rho_0(t) = \langle \rho(t, \tau) \rangle$ ,  $r_0 = \langle r(t, \tau) \rangle$  — средние функций  $\rho$  и  $r$  по  $\tau$  на периоде. В этом параграфе функции  $\rho_0$ ,  $r_0$ ,  $\rho_1$  и  $r_1$  неизвестны, но обладают заданной гладкостью:  $\rho_0 \in C^2(R)$ ,  $\rho_1 \in C^{5,0}(Q)$ ,  $r_0 \in C^2(R)$ ,  $r_1 \in C^{5,0}(Q)$ . Здесь линеал  $C^{n,0}(Q)$  состоит из функций  $s(t, \tau)$ ,  $(t, \tau) \in Q$ , обладающих непрерывными в  $Q$  производными по  $t$  вплоть до  $n$ -го порядка.

В данном параграфе будут описаны дополнительные условия (условия переопределения), а затем сформулирована и решена задача о восстановлении указанных неизвестных функций.

Для того чтобы получить условия переопределения, предположим временно, что функции  $\rho_0$ ,  $r_0$ ,  $\rho_1$  и  $r_1$  известны. Тогда данные задачи (2.1) позволяют рассматривать ее как частный случай задачи (1.1), для которой справедлива теорема 1. Так что для решения  $u_\omega(x, t)$  задачи (2.1) при фиксированном  $M > 0$  справедлива асимптотическая формула:

$$\left\| u_\omega(x, t) - \left[ u_0(x, t) + \frac{1}{\omega} u_1(x, t) + \sum_{k=2}^3 \omega^{-k} (u_k(x, t) + v_k(x, t, \omega t)) \right] \right\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-4}), \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

где функции  $u_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , и  $v_j$ ,  $j = 2, 3$ , являются решениями следующих задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = F(x, t) r_0(t); \\ u_0(x, 0) = d_0(x); \\ \frac{\partial u_0(x, 0)}{\partial t} = d_1(x), \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \tau^2} = F(x, t) r_1(t, \tau); \\ v_2(x, t, \tau + 2\pi) = v_2(x, t, \tau); \\ \langle v_2(x, t, \tau) \rangle = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -B(x, t) \rho_0(t) u_0(x, t); \\ u_1(x, 0) = 0; \\ \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\partial v_2(x, 0, 0)}{\partial \tau}, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} = -2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t \partial \tau} - B(x, t) \rho_1(t, \tau) u_0(x, t); \\ v_3(x, t, \tau + 2\pi) = v_3(x, t, \tau); \\ \langle v_3(x, t, \tau) \rangle = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = -B(x, t) \rho_0(t) u_1(x, t); \\ u_2(x, 0) = -v_2(x, 0, 0); \\ \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\partial v_2(x, 0, 0)}{\partial t} - \frac{\partial v_3(x, 0, 0)}{\partial \tau}, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_4}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t \partial \tau} - B(x, t) \rho_1(t, \tau) u_1(x, t); \\ v_4(x, t, \tau + 2\pi) = v_4(x, t, \tau); \\ \langle v_4(x, t, \tau) \rangle = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = -B(x, t) \rho_0(t) u_2(x, t) - B(x, t) \langle \rho_1(t, \tau) v_2(x, t, \tau) \rangle; \\ u_3(x, 0) = -v_3(x, 0, 0); \\ \frac{\partial u_3(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\partial v_3(x, 0, 0)}{\partial t} - \frac{\partial v_4(x, 0, 0)}{\partial \tau}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Далее функции  $\rho_0$ ,  $r_0$ ,  $\rho_1$  и  $r_1$  вновь будем считать неизвестными, принадлежащими указанным выше классам. Перейдем к формулировке условий переопределения. Для этого введем в рассмотрение следующие объекты:

(1)  $x_0 \in R$  — точка, в которой выполнены следующие условия:  $F(x_0, t) \neq 0$ ,  $B(x_0, t) \neq 0$  при всех  $t \in [0; T]$ ,  $d_0(x_0) \neq 0$  (существование такой точки здесь предполагается);

(2)  $q_0 \in C^5([0, T])$  — функция такая, что  $q_0(t) \neq 0$  при всех  $t \in [0; T]$ ,  $q_0(0) = d_0(x_0)$ ,  $q'_0(0) = d'_1(x_0)$ ;

(3)  $\lambda_1(t, \tau)$  — определенная и непрерывная на множестве  $Q$  функция,  $2\pi$ -периодическая по  $\tau$  с нулевым средним, имеющая производные  $\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \tau^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial t \partial \tau} \in C^{5,0}(Q)$ ;

(4)  $q_1 \in C^4([0, T])$  — функция, для которой  $q_1(0) = 0$ ,  $q'_1(0) = -\frac{\partial \lambda_1(0, 0)}{\partial \tau}$ ;

(5)  $\lambda_2(t, \tau)$  — определенная и непрерывная на множестве  $Q$  функция,  $2\pi$ -периодическая по  $\tau$  с нулевым средним, и имеющая вторую производную по  $\tau$ :  $\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \tau^2} \in C^{5,0}(Q)$ .

Для формулировки условия переопределения нам остается указать еще два объекта (две функции), но для этого понадобятся некоторые простые утверждения, которые опишем в виде леммы.

**Лемма 1.** *Справедливы следующие результаты:*

1) задача (2.4) с неизвестной функцией  $r_0$  при дополнительном условии  $u_0(x_0, t) = q_0(t)$  однозначно разрешима относительно  $(r_0, u_0)$ ;

2) задачи (2.5) и (2.7) с неизвестными функциями  $r_1$  и  $\rho_1$  и заданной  $u_0$  при дополнительных условиях  $v_2(x_0, t, \tau) = \lambda_1(t, \tau)$  и  $v_3(x_0, t, \tau) = \lambda_2(t, \tau)$  соответственно однозначно разрешимы относительно  $(r_1, v_2)$  и  $(\rho_1, v_3)$ ;

3) задача (2.6) с неизвестной функцией  $\rho_0$  и заданными  $u_0$  и  $v_2$  при дополнительном условии  $u_1(x_0, t) = q_1(t)$  однозначно разрешима относительно  $(\rho_0, u_1)$ .

Доказательство леммы приведем ниже, а пока введем два последних объекта, необходимых для формулировки условий переопределения.

(6)  $q_2$  — функция, определенная на отрезке  $t \in [0, T]$  равенством  $q_2(t) = u_2(x_0, t)$ , где  $u_2$  — решение задачи (2.8) с уже известными, в силу леммы 1, функциями  $\rho_0$ ,  $u_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$ .

(7)  $q_3$  — функция, определенная на отрезке  $t \in [0, T]$  равенством  $q_3 = u_3(x_0, t)$ , где  $u_3$  — решение задачи (2.10) с известными функциями  $\rho_0$ ,  $\rho_1$ ,  $u_2$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  и  $v_4$ , последняя из которых является единственным решением (2.9).



Задача о восстановлении функций  $\rho$  и  $r$  состоит в нахождении функций  $\rho(t, \tau)$  и  $r(t, \tau)$  вида (2.2), где функции  $\rho_0, r_0, \rho_1$  и  $r_1$  принадлежат указанным выше функциональным классам, при которых решение  $u_\omega(x, t)$  задачи (2.1) удовлетворяет асимптотической формуле (условию переопределения):

$$\left\| u_\omega(x_0, t) - \left[ q_0(t) + \frac{1}{\omega} q_1(t) + \frac{1}{\omega^2} (q_2(t) + \lambda_1(t, \omega t)) + \frac{1}{\omega^3} (q_3(t) + \lambda_2(t, \omega t)) \right] \right\|_{C([0, T])} = O(\omega^{-4}), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

**Теорема 2.** *Задача о восстановлении функций  $\rho$  и  $r$  однозначно разрешима.*

**Замечание 2.** Решение задачи о восстановлении функций  $\rho$  и  $r$  сводится (посредством арифметических операций, а также операций дифференцирования и интегрирования) к решению двух уравнений Вольтерра 2-го рода.

Прежде чем доказывать теорему, докажем сформулированную выше лемму.

< ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1 разобьем на пункты в соответствии с пунктами ее формулировки.

(1) Функция  $r_0 \in C^2([0, T])$ , входящая в (2.4), при дополнительном условии  $u_0(x_0, t) = q_0(t)$  согласно формуле Даламбера удовлетворяет равенству

$$q_0(t) = \frac{1}{2} [d_0(x_0 - t) + d_0(x_0 + t)] + \frac{1}{2} \int_{x_0-t}^{x_0+t} d_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{x_0-t+s}^{x_0+t-s} F(\xi, s) r_0(s) d\xi. \quad (2.12)$$

Дифференцируя его дважды по  $t$ , получим уравнение Вольтерра 2-го рода (относительно неизвестной  $r_0$ ):

$$r_0(t) + \frac{1}{2F(x_0, t)} \int_0^t [F'_x(x_0 + t - s, s) - F'_x(x_0 - t + s, s)] r_0(s) ds - \frac{1}{F(x_0, t)} \left( q_0''(t) - \frac{1}{2} [d_0''(x_0 + t) + d_0''(x_0 - t)] - \frac{1}{2} [d_1'(x_0 + t) + d_1'(x_0 - t)] \right). \quad (2.13)$$

В силу условий, наложенных выше на функции  $F, d_0, d_1$  и  $q_0$ , уравнение (2.12) эквивалентно (2.13), а последнее имеет единственное решение  $r_0 \in C^2([0, T])$ . При известной  $r_0$  функция  $u_0(x, t)$  однозначно находится из (2.4).

(2) Функция  $r_1 \in C^{5,0}$ , которая входит в (2.5), при дополнительном условии  $v_2(x_0, t, \tau) = \lambda_1(t, \tau)$ , очевидно имеет вид  $r_1 = \frac{1}{F(x_0, t)} \frac{\partial^2 \lambda_1(t, \tau)}{\partial \tau^2}$ . Функция  $v_2(x, t, \tau)$  при известной  $r_1(t, \tau)$  однозначно находится из (2.5) (см. задачу (1.3) выше). Аналогично доказывается и второе утверждение этого пункта леммы, касающееся функций  $\rho_1, v_3$ . При этом

$$\rho_1(t, \tau) = -\frac{1}{B(x_0, t) q_0(t)} \left[ 2 \frac{\partial^2 \lambda_1(t, \tau)}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 \lambda_2(t, \tau)}{\partial \tau^2} \right].$$

(3) Рассмотрим задачу (2.6) с неизвестными функциями  $u_1, \rho_0$  при дополнительном условии  $u_1(x_0, t) = q_1(t)$ , где  $q_1(0) = 0, q_1'(0) = -\frac{\partial v_2(x_0, 0, 0)}{\partial \tau}$ . Согласно формуле Даламбера имеем

$$q_1(t) = -\frac{1}{2} \int_{x_0-t}^{x_0+t} \frac{\partial v_2(\xi, 0, 0)}{\partial \tau} d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{x_0-t+s}^{x_0+t-s} B(\xi, s) u_0(\xi, s) \rho_0(s) d\xi. \quad (2.14).$$

Дважды дифференцируя последнее равенство по  $t$ , получим эквивалентное равенство

$$q_1''(t) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 v_2(x_0 + t, 0, 0)}{\partial x \partial \tau} - \frac{\partial^2 v_2(x_0 - t, 0, 0)}{\partial x \partial \tau} \right] - B(x_0, t) q_0(t) \rho_0(t) - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial C(x_0, t, s)}{\partial t} \rho_0(s) ds, \quad (2.15)$$

где  $C(x_0, t, s) = B(x_0 + t - s, s) u_0(x_0 + t - s, s) + B(x_0 - t + s, s) u_0(x_0 - t + s, s)$ . Из уравнения Вольтерра 2-го рода находим функцию  $\rho_0$ , а после этого из (2.6) определяем  $u_1(x, t)$ .  $\triangleright$

$\triangleleft$  ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Предположим, что теорема 2 доказана и найдены функции  $\rho(t, \tau)$  и  $r(t, \tau)$ , принадлежащие указанным выше классам. Тогда решение  $u_\omega(x, t)$  задачи (2.1) согласно теореме 1 удовлетворяет асимптотической формуле (2.3), в которой функции  $u_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ ,  $v_j$ ,  $j = 2, 3$ , являются единственными решениям соответствующих задач (2.4)–(2.10). Из соотношений (2.3) и (2.11) следуют равенства:

$$\begin{aligned} u_i(x_0, t) &= q_i(t), \quad t \in [0, T], \quad i = 0, 1, 2, 3; \\ v_k(x_0, t, \tau) &= \lambda_k(t, \tau), \quad (t, \tau) \in Q, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Таким образом, условия (2.16) являются необходимыми для выполнения асимптотической формулы (2.11). С другой стороны, неизвестные функции  $\rho(t, \tau)$  и  $r(t, \tau)$  однозначно определены именно из соотношений (2.16), причем, как следует из предыдущих рассуждений данного параграфа при этих  $\rho$ ,  $r$  однозначно определены коэффициенты  $u_i(x, t)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  и  $v_k(x, t, \tau)$ ,  $k = 2, 3$ , для которых справедлива формула (2.3). Из (2.3) и (2.16) вытекает формула (2.11).  $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Задача о восстановлении функций  $\rho$  и  $r$  может быть однозначно решена и при несколько меньших требованиях гладкости, налагаемых на функции  $B$ ,  $\rho$ ,  $F$  и  $r$ . Действительно, доказательство теоремы 2, по существу, не изменится, если в теореме 1, на которую оно опирается, порядок малости  $O(\omega^{-4})$  (см. формулировку теоремы 1) будет заменен на  $o(\omega^{-3})$ ,  $\omega \rightarrow \infty$ . Для доказательства же теоремы 1 в последнем случае требуется меньшая гладкость данных. Отмеченное обстоятельство в данной работе незначительно, поэтому мы остановились на первом варианте, доказательство которого немного короче.

## Литература

1. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики.—М.: Наука, 1984.—262 с.
2. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач.—М.: Изд-во МГУ, 1994.—208 с.
3. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи.—Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2008.
4. Симоненко И. Б. Обоснование метода усреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений // Матем. сб.—1972.—Т. 87 (129), № 2.—С. 236–253.
5. Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование задачи о вибрационной конвекции // Дифференц. уравнения.—1998.—Т. 34, № 4.—С. 523–532.
6. Левенштам В. Б. Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2000.—Т. 40, № 9.—С. 1416–1424.
7. Бабич П. В., Левенштам В. Б. Восстановление быстро осциллирующего свободного члена в многомерном гиперболическом уравнении // Матем. заметки.—2018.—Т. 104, № 4.—С. 505–515. DOI: 10.4213/mzm12151.
8. Бабич П. В., Левенштам В. Б., Прика С. П. Восстановление быстроосциллирующего источника в уравнении теплопроводности по асимптотике решения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2017.—Т. 57, № 12.—С. 1955–1965. DOI: 10.7868/S0044466917120079.

9. Левенштам В. Б. Параболические уравнения с большим параметром. Обратные задачи // Мат. заметки.—2020.—Т. 107, № 3.—С. 412–425. DOI: 10.4213/mzm12245.
10. Левенштам В. Б. Гиперболическое уравнение с быстро осциллирующими данными. Восстановление малого младшего коэффициента и правой части по частичной асимптотике решения // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.—2022.—Т. 502.—С. 34–36. DOI: 10.31857/S2686954322010088.

*Статья поступила 12 марта 2022 г.*

ВАЛЕРИЙ БОРИСОВИЧ ЛЕВЕНШТАМ  
Южный федеральный университет,  
профессор  
РОССИЯ, Ростов-на-Дону, 344090, ул. Мильчакова, 8 А;  
Математический институт им. В. А. Стеклова,  
ведущий научный сотрудник  
РОССИЯ, 119991, Москва, ул. Губкина, 8;  
Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,  
ведущий научный сотрудник  
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53  
E-mail: vlevenshtam@yandex.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-2438-5307>

*Vladikavkaz Mathematical Journal*  
2023, Volume 25, Issue 3, P. 111–122

## RECONSTRUCTION OF A RAPIDLY OSCILLATING LOWEST COEFFICIENT AND THE SOURCE OF A HYPERBOLIC EQUATION FROM THE PARTIAL ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION

Levenshtam, V. B.<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> South Federal University, 8 A Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia;

<sup>2</sup> Steklov Mathematical Institute of RAS, 8 Gubkina St., Moscow 119991, Russia;

<sup>3</sup> Southern Mathematical Institute VSC RAS, 53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: vlevenshtam@yandex.ru

**Abstract.** The Cauchy problem is considered for a one-dimensional hyperbolic equation, the junior coefficient and the right part of which oscillate in time with a high frequency, and the amplitude of the junior coefficient is small. The question of reconstructing the cofactors of these rapidly oscillating functions independent of the spatial variable according to the partial asymptotics of the solution given at some point in space is investigated. For various evolutionary equations, numerous problems of determining unknown sources and coefficients without assuming their rapid oscillations are studied in the classical theory of inverse problems, where the exact solution of the direct problem appears in the additional condition (redefinition condition). At the same time, equations with rapidly oscillating data are often encountered in modeling physical, chemical, and other processes occurring in media subjected to high-frequency electromagnetic, acoustic, vibrational, etc. effects fields. This testifies to the topicality of perturbation theory problems on the reconstruction of unknown functions in high-frequency equations. The paper uses a non-classical algorithm for solving such problems, which lies at the intersection of two disciplines — asymptotic methods and inverse problems. In this case, the redefinition condition involves not the (exact) solution, as in the classics, but only its partial asymptotics of a certain length.

**Keywords:** hyperbolic equation, rapidly oscillating data, asymptotic methods, inverse problem.

**AMS Subject Classification:** 35B40.

**For citation:** *Levenshtam, V. B.* Reconstruction of a Rapidly Oscillating Junior Coefficient and the Source of a Hyperbolic Equation from the Partial Asymptotics of the Solution, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 3, pp. 111–122 (in Russian). DOI: 10.46698/s0378-3993-5022-o.

## References

1. Romanov, V. G. *Obratnye zadachi matematicheskoy fiziki* [Inverse Problems of Mathematical Physics], Moscow, Nauka, 1984, 262 p. (in Russian).
2. Denisov, A. M. *Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Problems], Moscow, MSU Press, 1994, 208 p. (in Russian).
3. Kabanikhin, S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and Ill-Posed Problems], Novosibirsk, Sibirskoe Nauchnoe Izdatel'stvo, 2008 (in Russian).
4. Simonenko, I. B. A Justification of the Averaging Method for a Problem of Convection in a Field of Rapidly Oscillating Forces and for Other Parabolic Equations, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1972, vol. 16, no. 2, pp. 245–263. DOI: 10.1070/SM1972v016n02ABEH001424.
5. Levenshtam, V. B. Asymptotic Integration of a Vibration Convection Problem, *Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 4, pp. 522–531 (in Russian).
6. Levenshtam, V. B. Asymptotic Expansion of the Solution to the Problem of Vibrational Convection, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2000, vol. 40, no. 9, pp. 1357–1365.
7. Babich, P. V. and Levenshtam, V. B. Recovery of a Rapidly Oscillating Absolute Term in the Multidimensional Hyperbolic Equation, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 104, no. 4, pp. 489–497. DOI: 10.1134/S000143461809016X.
8. Babich, P. V., Levenshtam, V. B. and Prika, S. P. Recovery of a Rapidly Oscillating Source in the Heat Equation from Solution Asymptotics, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, pp. 1908–1918. DOI: 10.1134/S0965542517120065.
9. Levenshtam, V. B. Parabolic Equations with Large Parameter. Inverse Problems, *Mathematical Notes*, 2020, vol. 107, no. 3, pp. 452–463. DOI: 10.1134/S0001434620030098.
10. Levenshtam, V. B. Hyperbolic Equation with Rapidly Oscillating Data: Reconstruction of the Small Lowest Order Coefficient and the Right-Hand Side from Partial Asymptotics of the Solution, *Doklady Mathematics*, 2022, vol. 105, pp. 28–30. DOI: 10.1134/S1064562422010082.

Received March 12, 2022

VALERIY B. LEVENSHTAM

South Federal University,  
8 A Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,  
Professor;

Steklov Mathematical Institute of RAS,  
8 Gubkina St., Moscow 119991, Russia,  
Leading Researcher;

Southern Mathematical Institute VSC RAS,  
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,  
Leading Researcher

E-mail: vlevenshtam@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0003-2438-5307>