Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 2, С. 113–121

УДК 517.956
DOI 10.46698/m1855-1369-1428-v

ОБ ИНВАРИАНТАХ ЛАПЛАСА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

И. В. Рахмелевич[1]

[1] Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

E-mail: `igor-kitpd@yandex.ru`

80-летию проф. Г. Г. Магарил-Ильяева посвящается

Аннотация. Исследуется двумерное нелинейное гиперболическое уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, левая часть которого содержит квадратичные нелинейности по искомой функции и ее производным. Рассматривается множество линейных мультипликативных преобразований неизвестной функции, сохраняющих вид исходного уравнения. Аналогично линейным уравнениям, инварианты Лапласа определяются как инварианты этого преобразования. Получены выражения для инвариантов Лапласа через коэффициенты уравнения и их первые производные. При этом рассмотрен как общий случай, так и случаи, когда некоторые коэффициенты уравнения равны нулю. Доказана основная теорема, согласно которой два нелинейных гиперболических уравнения рассматриваемого вида могут быть связаны с помощью линейного мультипликативного преобразования искомой функции в том и только в том случае, если инварианты Лапласа для обоих этих уравнений имеют одни и те же значения. Для рассматриваемого уравнения найдены эквивалентные системы уравнений первого порядка, содержащие инварианты Лапласа, в общем случае и в случае, когда некоторые коэффициенты уравнения равны нулю. Получены дополнительные условия на инварианты Лапласа и коэффициенты уравнения, при выполнении которых может быть получено решение исходного уравнения в квадратурах.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, гиперболическое уравнение, инвариант Лапласа, линейное мультипликативное преобразование, квадратичная нелинейность.

AMS Subject Classification: 35G20.

Образец цитирования: *Рахмелевич И. В.* Об инвариантах Лапласа гиперболического уравнения со смешанной производной и квадратичными нелинейностями // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 2.—С. 113–121. DOI: 10.46698/m1855-1369-1428-v.

Введение

При исследовании свойств симметрии и классификации линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами весьма эффективным является подход, основанный на использовании инвариантов Лапласа [1, с. 66–67], [2, с. 175–180]. Как известно, инварианты Лапласа — это функции коэффициентов уравнения и их производных, которые являются инвариантными относительно линейного мультипликативного преобразования, которое переводит исходное дифференциальное уравнение в уравнение того же вида. Первоначально эти инварианты были найдены для двумерного линейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами:

$$u''_{xy} + a(x,y)u'_x + b(x,y)u'_y + c(x,y)u = 0. \tag{0.1}$$

Здесь и ниже приняты обозначения $u'_x \equiv \partial u/\partial x$, $u'_y \equiv \partial u/\partial y$, $u''_{xy} \equiv \partial^2 u/\partial x \partial y$ и т. д. Для данного уравнения инварианты Лапласа имеют вид

$$h = a'_x + ab - c, \quad k = b'_y + ab - c. \tag{0.2}$$

В дальнейшем инварианты Лапласа были найдены для различных типов линейных уравнений как второго, так и более высоких порядков [3–6]. Также в ряде работ инварианты Лапласа и их обобщения применялись к исследованию некоторых классов нелинейных уравнений в частных производных [7–9]. Целью данной работы является нахождение инвариантов Лапласа для двумерного нелинейного гиперболического уравнения второго порядка со смешанной старшей производной и переменными коэффициентами, содержащего квадратичные нелинейности по искомой функции и ее первым производным.

1. Постановка задачи. Вычисление инвариантов Лапласа

Рассмотрим нелинейное гиперболическое уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $u = u(x,y)$:

$$u''_{xy} + b_{11}u'_x u'_y + b_{01}uu'_x + b_{02}uu'_y + b_{00}u^2 + a_1 u'_x + a_2 u'_y + a_0 u = 0. \tag{1.1}$$

Левая часть уравнения (1.1) представляет собой полином второй степени по неизвестной функции и ее производным, причем коэффициенты полинома предполагаются заданными функциями независимых переменных $a_i = a_i(x,y)$, $b_{ij} = b_{ij}(x,y)$.

Применим к уравнению (1.1) мультипликативное преобразование искомой функции, которое имеет вид

$$u(x,y) = \lambda(x,y)v(x,y). \tag{1.2}$$

Подставив (1.2) в уравнение (1.1), после дифференцирования и элементарных преобразований получаем уравнение относительно новой неизвестной функции $v(x,y)$:

$$v''_{xy} + \tilde{b}_{11}v'_x v'_y + \tilde{b}_{01}vv'_x + \tilde{b}_{02}vv'_y + \tilde{b}_{00}v^2 + \tilde{a}_1 v'_x + \tilde{a}_2 v'_y + \tilde{a}_0 v = 0. \tag{1.3}$$

Здесь и всюду далее знаком «тильда» отмечены величины, относящиеся к преобразованному уравнению. Найдем, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты уравнений (1.1), (1.3), чтобы одно из этих уравнений можно было привести к другому с помощью преобразования (1.2).

Коэффициенты преобразованного уравнения (1.3) определяются выражениями:

$$\begin{gathered} \tilde{b}_{11} = \lambda b_{11}, \quad \tilde{b}_{01} = \lambda b_{01} + \lambda'_y b_{11}, \quad \tilde{b}_{02} = \lambda b_{02} + \lambda'_x b_{11}, \\ \tilde{b}_{00} = \lambda b_{00} + \lambda'_x b_{01} + \lambda'_y b_{02} + \frac{\lambda'_x \lambda'_y}{\lambda} b_{11}. \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\tilde{a}_1 = a_1 + \frac{\lambda'_y}{\lambda}, \quad \tilde{a}_2 = a_2 + \frac{\lambda'_x}{\lambda}, \quad \tilde{a}_0 = a_0 + \frac{\lambda'_x}{\lambda}a_1 + \frac{\lambda'_y}{\lambda}a_2 + \frac{\lambda''_{xy}}{\lambda}. \tag{1.5}$$

Из формул (1.5) получаем

$$\frac{\lambda'_x}{\lambda} = \tilde{a}_2 - a_2, \quad \frac{\lambda'_y}{\lambda} = \tilde{a}_1 - a_1. \tag{1.6}$$

Из соотношений (1.6) находим

$$\lambda''_{xy} = \big((\tilde a_2 - a_2)'_y + (\tilde a_1 - a_1)(\tilde a_2 - a_2)\big)\,\lambda, \tag{1.7 а}$$

$$\lambda''_{yx} = \big((\tilde a_1 - a_1)'_x + (\tilde a_1 - a_1)(\tilde a_2 - a_2)\big)\,\lambda. \tag{1.7 б}$$

На основании теоремы о равенстве смешанных производных из (1.7 а, б) следует

$$(\tilde a_1 - a_1)'_x = (\tilde a_2 - a_2)'_y. \tag{1.8}$$

Далее, подставляя (1.6), (1.7 б) в (1.5), получаем

$$\tilde a_0 - a_0 = (\tilde a_1 - a_1)'_x + (\tilde a_1 - a_1)(\tilde a_2 - a_2) + a_1(\tilde a_2 - a_2) + a_2(\tilde a_1 - a_1). \tag{1.9}$$

После некоторых элементарных преобразований (1.9) приводится к виду

$$\tilde a_0 - a_0 = (\tilde a_1 - a_1)'_x + (\tilde a_1 \tilde a_2 - a_1 a_2). \tag{1.10}$$

Преобразуем (1.10) так, чтобы в левой части были только слагаемые, относящиеся к исходному уравнению, а в правой части — относящиеся только к преобразованному уравнению:

$$a_1 a_2 - a_0 + a'_{1x} = \tilde a_1 \tilde a_2 - \tilde a_0 + \tilde a'_{1x}. \tag{1.11}$$

Из (1.11) следует, что функция

$$I_1 = a_1 a_2 - a_0 + a'_{1x} \tag{1.12}$$

не изменяется при преобразовании (1.2) и поэтому является инвариантом уравнения (1.1) относительно данного преобразования.

Далее, соотношение (1.9) с учетом (1.8) можно переписать в виде

$$\tilde a_0 - a_0 = (\tilde a_2 - a_2)'_y + (\tilde a_1 - a_1)(\tilde a_2 - a_2) + a_1(\tilde a_2 - a_2) + a_2(\tilde a_1 - a_1). \tag{1.13}$$

В результате рассуждений, аналогичных приведенным выше, (1.13) преобразуется к виду

$$a_1 a_2 - a_0 + a'_{2y} = \tilde a_1 \tilde a_2 - \tilde a_0 + \tilde a'_{2y}. \tag{1.14}$$

Из (1.14) следует, что функция

$$I_2 = a_1 a_2 - a_0 + a'_{2y} \tag{1.15}$$

также является инвариантом уравнения (1.1) относительно преобразования (1.2). Инварианты I_1, I_2 уравнения (1.1), определяемые формулами (1.12), (1.15), с точностью до обозначений совпадают с инвариантами (0.2) линейного гиперболического уравнения (0.1).

Далее рассмотрим преобразование коэффициентов нелинейной части уравнения (1.1) по формулам (1.4).

Случай 1. $b_{11} \neq 0$.

Тогда из (1.4) получаем

$$\frac{\tilde b_{01}}{\tilde b_{11}} = \frac{b_{01}}{b_{11}} + \frac{\lambda'_y}{\lambda}, \quad \frac{\tilde b_{02}}{\tilde b_{11}} = \frac{b_{02}}{b_{11}} + \frac{\lambda'_x}{\lambda}. \tag{1.16}$$

Введем следующие обозначения:

$$\beta_i = \frac{b_{0i}}{b_{11}}, \quad \tilde{\beta}_i = \frac{\tilde{b}_{0i}}{\tilde{b}_{11}}, \quad i = 0, 1, 2. \tag{1.17}$$

Учитывая (1.17), соотношения (1.16) перепишем в виде

$$\frac{\lambda'_y}{\lambda} = \tilde{\beta}_1 - \beta_1, \quad \frac{\lambda'_x}{\lambda} = \tilde{\beta}_2 - \beta_2. \tag{1.18}$$

Разделив почленно четвертое равенство (1.4) на первое и используя обозначения (1.17), имеем

$$\tilde{\beta}_0 = \beta_0 + \frac{\lambda'_x}{\lambda}\beta_1 + \frac{\lambda'_y}{\lambda}\beta_2 + \frac{\lambda'_x\lambda'_y}{\lambda^2}. \tag{1.19}$$

Подставляя (1.18) в (1.19), после некоторых элементарных преобразований получаем

$$\beta_1\beta_2 - \beta_0 = \tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_0. \tag{1.20}$$

С учетом (1.17), из (1.20) следует, что функция

$$I_3 = \frac{b_{01}b_{02} - b_{00}b_{11}}{b_{11}^2} \tag{1.21}$$

также является инвариантом уравнения (1.1) относительно преобразования (1.2).

Для нахождения остальных инвариантов необходимо учесть, что функция $\lambda(x, y)$, входящая в преобразование (1.2), должна удовлетворять одновременно уравнениям (1.6) и (1.18). Сравнивая эти уравнения, находим

$$\tilde{a}_1 - a_1 = \tilde{\beta}_1 - \beta_1, \quad \tilde{a}_2 - a_2 = \tilde{\beta}_2 - \beta_2$$

или

$$\tilde{a}_1 - \tilde{\beta}_1 = a_1 - \beta_1, \quad \tilde{a}_2 - \tilde{\beta}_2 = a_2 - \beta_2. \tag{1.22}$$

Из (1.22) получаем, что функции

$$I_4 = a_1 - \frac{b_{01}}{b_{11}}, \quad I_5 = a_2 - \frac{b_{02}}{b_{11}} \tag{1.23}$$

также являются инвариантами уравнения (1.1) относительно преобразования (1.2).

Случай 2. $b_{11} = 0$, $b_{01}^2 + b_{02}^2 > 0$.

Без ограничения общности предположим, что $b_{01} \neq 0$. Тогда для коэффициентов нелинейной части преобразованного уравнения из (1.4) находим

$$\tilde{b}_{11} = 0, \quad \tilde{b}_{01} = \lambda b_{01}, \quad \tilde{b}_{02} = \lambda b_{02}, \quad \tilde{b}_{00} = \lambda b_{00} + \lambda'_x b_{01} + \lambda'_y b_{02}. \tag{1.24}$$

Разделив почленно третье уравнение (1.24) на второе, получаем

$$\frac{\tilde{b}_{02}}{\tilde{b}_{01}} = \frac{b_{02}}{b_{01}}. \tag{1.25}$$

Далее, преобразуем четвертое уравнение (1.24) с учетом (1.6) и второго уравнения (1.24):

$$\tilde{b}_{00} = \frac{\tilde{b}_{01}}{b_{01}}\big\{b_{00} + b_{01}(\tilde{a}_2 - a_2) + b_{02}(\tilde{a}_1 - a_1)\big\}. \tag{1.26}$$

Учитывая (1.25), уравнение (1.26) путем несложных преобразований приводим к виду

$$\frac{\tilde{b}_{00}}{\tilde{b}_{01}} - \frac{\tilde{b}_{02}}{\tilde{b}_{01}}\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 = \frac{b_{00}}{b_{01}} - \frac{b_{02}}{b_{01}}a_1 - a_2. \tag{1.27}$$

Из (1.25) и (1.27) следует, что функции

$$I_3^{(1)} = \frac{b_{02}}{b_{01}}, \quad I_4^{(1)} = \frac{b_{00}}{b_{01}} - \frac{b_{02}}{b_{01}}a_1 - a_2 \tag{1.28}$$

в рассматриваемом случае являются инвариантами уравнения (1.1) относительно преобразования (1.2).

Используя соотношения (1.6), нетрудно выразить функцию $\lambda(x,y)$, определяющую вид преобразования (1.2), через коэффициенты уравнений (1.1), (1.3):

$$\lambda(x,y) = \lambda_0 \exp\left\{\int \big((\tilde{a}_2 - a_2)dx + (\tilde{a}_1 - a_1)dy\big)\right\}, \tag{1.29}$$

где λ_0 — произвольная постоянная.

Итак, в результате проведенных рассуждений доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Уравнение* (1.1) *может быть приведено с помощью преобразования* (1.2) *к другому уравнению* (1.3) *того же вида в том и только в том случае, если:*

1) *при* $b_{11} \neq 0$ *инварианты* I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, *определяемые формулами* (1.12), (1.15), (1.21), (1.23), *одинаковы для обоих уравнений;*

2) *при* $b_{11} = 0$, $b_{01} \neq 0$ *инварианты* I_1, I_2, I_3, I_4, *определяемые формулами* (1.12), (1.15), (1.28), *одинаковы для обоих уравнений.*

При этом коэффициент $\lambda(x,y)$ *преобразования* (1.2) *определяется формулой* (1.29), *а для коэффициента уравнения* b_{11} *справедливо преобразование* $\tilde{b}_{11} = \lambda b_{11}$.

Замечание. В случае $b_{11} = 0$, $b_{02} \neq 0$ нетрудно получить выражения для инвариантов, которые аналогичны (1.28):

$$I_3^{(2)} = \frac{b_{01}}{b_{02}}, \quad I_4^{(2)} = \frac{b_{00}}{b_{02}} - a_1 - a_2\frac{b_{01}}{b_{02}}. \tag{1.30}$$

2. Эквивалентные системы уравнений

Теорема 2. 1. *В случае* $b_{11} \neq 0$ *уравнение* (1.1) *эквивалентно каждой из следующих систем уравнений относительно неизвестных функций* $u(x,y)$, $w(x,y)$*:*

$$\begin{cases} u'_y + a_1 u = w, \\ w'_x + (a_2 + b_{02}u + b_{11}u'_x)\, w = I_1 u + b_{11} I_4 u u'_x + (b_{11} I_3 + b_{02} I_4) u^2; \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} u'_x + a_2 u = w, \\ w'_y + \big(a_1 + b_{01}u + b_{11}u'_y\big)\, w = I_2 u + b_{11} I_5 u u'_y + (b_{11} I_3 + b_{01} I_5) u^2. \end{cases} \tag{2.2}$$

2. *В случае* $b_{11} = 0$, $b_{02} \neq 0$ *уравнение* (1.1) *эквивалентно следующей системе:*

$$\begin{cases} u'_y + a_1 u = w, \\ w'_x + (a_2 + b_{02}u)\, w = I_1 u - b_{02} I_3^{(2)} u u'_x - b_{02}\Big(a_2 I_3^{(2)} + I_4^{(2)}\Big) u^2. \end{cases} \tag{2.3}$$

3. *В случае* $b_{11} = 0$, $b_{01} \neq 0$ *уравнение* (1.1) *эквивалентно следующей системе:*

$$\begin{cases} u'_x + a_2 u = w, \\ w'_y + (a_1 + b_{01} u)\, w = I_2 u - b_{01} I_3^{(1)} u u'_y - b_{01} \Big(a_1 I_3^{(1)} + I_4^{(1)} \Big) u^2. \end{cases} \tag{2.4}$$

Инварианты $I_3^{(1,2)}$, $I_4^{(1,2)}$ *в правых частях систем уравнений* (2.3), (2.4) *определяются формулами* (1.28), (1.30).

◁ 1. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$P_1[u] = \left(\frac{\partial}{\partial x} + p_0 + p_1 u + p_2 u'_x \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \right) u + r_0 u + r_1 u u'_x + r_2 u^2, \tag{2.5}$$

где $p_{0,1,2}(x,y)$, $q(x,y)$, $r_{0,1,2}(x,y)$ — пока неопределенные коэффициенты, которые будут определены ниже. Раскрывая скобки, преобразуем оператор (2.5):

$$P_1[u] = u''_{xy} + p_2 u'_x u'_y + (r_1 + p_2 q) u u'_x + p_1 u u'_y + (r_2 + p_1 q) u^2 + q u'_x + p_0 u'_y + (r_0 + p_0 q + q'_x) u. \tag{2.6}$$

Приравнивая выражение (2.6) к левой части уравнения (1.1), получаем

$$p_0 = a_2, \quad q = a_1, \quad p_1 = b_{02}, \quad r_0 + p_0 q + q'_x = a_0, \tag{2.7 а}$$

$$p_2 = b_{11}, \quad r_1 + p_2 q = b_{01}, \quad p_1 = b_{02}, \quad r_2 + p_1 q = b_{00}. \tag{2.7 б}$$

Предполагаем, что $b_{11} \neq 0$. Тогда из (2.7 а, б) с учетом (1.12), (1.21), (1.23) находим

$$r_0 = -I_1, \quad r_1 = -b_{11} I_4, \quad r_2 = -b_{11} I_3 - b_{02} I_4. \tag{2.8}$$

Коэффициенты $p_{0,1,2}(x,y)$, $q(x,y)$, $r_{0,1,2}(x,y)$ найдены в предположении, что $P_1[u]$ совпадает с левой частью уравнения (1.1). Поэтому, если $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.1), то из (2.5), (2.7 а, б), (2.8) следует

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_2 + b_{02} u + b_{11} u'_x \right) \big(u'_y + a_1 u \big) = I_1 u + b_{11} I_4 u u'_x + (b_{11} I_3 + b_{02} I_4) u^2. \tag{2.9}$$

Далее, вводя новую неизвестную функцию

$$w(x,y) = u'_y + a_1 u,$$

получаем из (2.9), что функции $u(x,y)$, $w(x,y)$ удовлетворяют системе уравнений (2.1). Для нахождения системы (2.2) рассмотрим дифференциальный оператор

$$P_2[u] = \left(\frac{\partial}{\partial y} + p_0 + p_1 u + p_2 u'_y \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + q \right) u + r_0 u + r_1 u u'_y + r_2 u^2. \tag{2.10}$$

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше для оператора $P_1[u]$, находим

$$p_0 = a_1, \quad p_1 = b_{01}, \quad p_2 = b_{11}, \quad q = a_2, \tag{2.11}$$

$$r_0 = -I_2, \quad r_1 = -b_{11} I_5, \quad r_2 = -b_{11} I_3 - b_{01} I_5. \tag{2.12}$$

Коэффициенты $p_{0,1,2}(x,y)$, $q(x,y)$, $r_{0,1,2}(x,y)$ найдены в предположении, что $P_2[u]$ совпадает с левой частью уравнения (1.1). Поэтому, если $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.1), то из (2.10), (2.11), (2.12) следует

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_1 + b_{01} u + b_{11} u'_y \right) \big(u'_x + a_2 u \big) = I_2 u + b_{11} I_5 u u'_y + (b_{11} I_3 + b_{01} I_5) u^2. \tag{2.13}$$

Далее, вводя новую неизвестную функцию

$$w(x,y) = u'_x + a_2 u,$$

получаем из (2.13), что функции $u(x,y)$, $w(x,y)$ удовлетворяют системе уравнений (2.2).

2. Пусть $b_{11} = 0$, $b_{02} \neq 0$. В этом случае используем оператор $P_1[u]$, определяемый формулой (2.5). Тогда из (2.7 а, б) с учетом (1.30) находим

$$r_0 = -I_1, \quad r_1 = b_{02} I_3^{(2)}, \quad r_2 = b_{02}\Big(a_2 I_3^{(2)} + I_4^{(2)}\Big). \tag{2.14}$$

Далее, рассуждая аналогично п. 1 доказательства, из (2.6), (2.7 а, б), (2.14) получаем систему (2.3).

3. Пусть $b_{11} = 0$, $b_{01} \neq 0$. В этом случае используем оператор $P_2[u]$, определяемый формулой (2.10). Тогда из (2.11) с учетом (1.28) находим

$$r_0 = -I_2, \quad r_1 = b_{01} I_3^{(1)}, \quad r_2 = b_{01}\Big(a_1 I_3^{(1)} + I_4^{(1)}\Big). \tag{2.15}$$

Рассуждая аналогично п. 1 доказательства, из (2.10), (2.11), (2.15) получаем систему (2.4). $\triangleright$

В приведенных ниже примерах с помошью систем (2.1), (2.2) получено общее решение уравнения (1.1) в квадратурах в некоторых частных случаях.

Пример 1. $I_1 = I_3 = I_4 = 0$, $b_{02} = a_1 = 0$, $b_{11} = \mathrm{const} \neq 0$. Тогда, решая второе уравнение системы (2.1), находим

$$w(x,y) = V_0(y) \exp\left(-b_{11} u - \int a_2\, dx\right), \tag{2.16}$$

где $V_0(y)$ — произвольная функция. Подставляя (2.16) в первое уравнение системы (2.1), находим общее решение уравнения (1.1)

$$u(x,y) = \frac{1}{b_{11}} \ln\left\{b_{11}\left[U_0(x) + \int V_0(y) \exp\left(-\int a_2\, dx\right) dy\right]\right\}, \tag{2.17}$$

где $U_0(x)$, $V_0(y)$ — произвольные функции.

Пример 2. $I_2 = I_3 = I_5 = 0$, $b_{01} = a_2 = 0$, $b_{11} = \mathrm{const} \neq 0$. Тогда, решая второе уравнение системы (2.2), находим

$$w(x,y) = U_0(x) \exp\left(-b_{11} u - \int a_1 dy\right), \tag{2.18}$$

где $U_0(x)$ — произвольная функция. Подставляя (2.18) в первое уравнение системы (2.2), находим общее решение уравнения (1.1):

$$u(x,y) = \frac{1}{b_{11}} \ln\left\{b_{11}\left[V_0(y) + \int U_0(x) \exp\left(-\int a_1 dy\right) dx\right]\right\}, \tag{2.19}$$

где $U_0(x)$, $V_0(y)$ — произвольные функции.

Литература

1. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 3, ч. 1.—М.–Л.: ГИТТЛ, 1933.
2. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1957.

3. *Джохадзе О. М.* Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения.—2004.—Т. 40, № 1.—С. 58–68.
4. *Миронов А. Н., Миронова Л. Б.* Об инвариантах Лапласа для уравнения с доминирующей частной производной третьего порядка с двумя независимыми переменными // Матем. заметки.—2016.—Т. 99, № 1.—С. 89–96. DOI: 10.4213/mzm10613.
5. *Миронов А. Н., Миронова Л. Б.* Об инвариантах Лапласа для одного уравнения четвертого порядка с двумя независимыми переменными // Изв. вузов. Математика.—2014.—№ 10.—С. 27–34.
6. *Миронов А. Н., Миронова Л. Б.* К инвариантам Лапласа для одного уравнения с доминирующей частной производной с тремя независимыми переменными // Дифференц. уравнения.—2019.—Т. 55, № 1.—С. 67–73. DOI: 10.1134/S0374064119010072.
7. *Кузнецова М. Н.* Преобразование Лапласа и нелинейные гиперболические уравнения // Уфимский матем. журн.—2009.—Т. 1, № 3.—С. 87–96.
8. *Жибер А. В., Соколов В. В.* Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа // Успехи матем. наук.—2001.—Т. 56, № 1 (337).—С. 63–106. DOI: https://doi.org/10.4213/rm357.
9. *Старцев С. Я.* Об инвариантах Лапласа гиперболических уравнений, линеаризуемых дифференциальной подстановкой // Теор. и матем. физика.—1999.—Т. 120, № 2.—С. 237–247. DOI: 10.4213/tmf772.

Статья поступила 25 июля 2023 г.

Рахмелевич Игорь Владимирович
Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
доцент кафедры математического моделирования экономических процессов
РОССИЯ, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 2, P. 113–121

ON LAPLACE INVARIANTS OF A TWO-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION WITH MIXED DERIVATIVE AND QUADRATIC NONLINEARITIES

Rakhmelevich, I. V.[1]
[1] Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Abstract. We study two-dimensional nonlinear hyperbolic equation of the second order with variable coefficients. The left side of this equation contains quadratic nonlinearities on unknown function and its derivatives. We consider a set of linear multiplicative transformations of unknown function which keep a form of initial equation. By analogy with linear equations, the Laplace invariants are determined as the invariants of this transformation. Expressions for the Laplace invariants over the coefficients of the equation and their first derivatives are obtained. We consider both the general case and the case when some coefficients of the equation equals to zero. The main theorem about Laplace invariants is proved. According to this theorem, two nonlinear hyperbolic equations of the considering form can be connected with the help of linear multiplicative transformation if only if the Laplace invariants for both equations have the same values. We have found the equivalent systems of the first order equations, containing the Laplace invariants, for considering equation in general case and in the case when some coefficients of the equation equals to zero. It is shown that the solution of the initial equation can be received in quadratures if some additional conditions on the coefficients and on the Laplace invariants are fulfilled.

Keywords: partial differential equation, hyperbolic equation, Laplace invariant, linear multiplicative transformation, quadratic nonlinearity.

AMS Subject Classification: 35G20.

For citation: *Rakhmelevich, I. V.* On Laplace Invariants of Two-Dimensional Hyperbolic Equation with Mixed Derivative and Quadratic Nonlinearities, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 2, pp. 113–121 (in Russian). DOI: 10.46698/m1855-1369-1428-v.

References

1. *Goursat, E. Cours d'Analyse Mathematique*, Paris, 1933.
2. *Tricomi, F. Lectures on Partial Differential Equations*, Moscow, IL, 1957 (in Russian).
3. *Dzhokhadze, O. M.* Laplace Invariants for Some Classes of Linear Partial Differential Equations, *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 1, pp. 63–74. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000028714.62481.2d.
4. *Mironov, A. N. and Mironova, L. B.* On Laplace Invariants for Equations with Dominating Third-Order Partial Derivative and Two Independent Variables, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, no. 1–2, pp. 110–115. DOI: 10.1134/S0001434616010119.
5. *Mironov, A. N. and Mironova, L. B.* Laplace Invariants for a Fourth-Order Equation with Two Independent Variables, *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 10, pp. 22–28. DOI: 10.3103/S1066369X14100041.
6. *Mironov, A. N. and Mironova, L. B.* Laplace Invariants of an Equation with a Dominating Partial Derivative and Three Independent Variables, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 68–74. DOI: 10.1134/S0012266119010075.
7. *Kuznetsova, M. N.* Laplace Transformation and Nonlinear Hyperbolic Equations, *Ufimskii Matematicheskii Zhurnal*, 2009, vol. 1, no. 3, pp. 87–96 (in Russian).
8. *Zhiber, A. V. and Sokolov, V. V.* Exactly Integrable Hyperbolic Equations of Liouville Type, *Russian Mathematical Surveys*, 2001, vol. 56, no. 1, pp. 61–101. DOI: 10.1070/RM2001v056n01ABEH000357.
9. *Startsev, S. Y.* Laplace Invariants of Hyperbolic Equations Linearizable by a Differential Substitution, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1999, vol. 120, no. 2, pp. 1009–1018. DOI: 10.1007/BF02557408.

Received Jule 25, 2023

Igor V. Rakhmelevich
Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia,
Associate Professor
E-mail: `igor-kitpd@yandex.ru`