Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 2, С. 39–46

УДК 517.951
DOI 10.46698/j9246-8718-0030-f

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ ДВУХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА НА ТРЕХМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ

С. О. Гладков[1]

[1] Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет),
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4
E-mail: `sglad51@mail.ru`

Посвящается 80-летнему юбилею профессора Г. Г. Магарил-Ильяева.
Творческого подъема, долгих лет жизни и оптимизма!

Аннотация. Найдено решение двухмерного уравнения Лапласа на некотором заданном множестве трех независимых переменных в трехмерном евклидовом пространстве. Задача решается с помощью преобразования двухмерного уравнения Лапласа в уравнение, в которой искомая функция зависит от трех независимых переменных, что оказалось возможным осуществить путем введения сферической системы координат. Предлагаемый метод позволил найти решение двухмерного уравнения Лапласа в виде функции от трех независимых переменных. Как пример применения полученного решения, рассмотрена задача об обтекании потоком несжимаемой жидкости трехмерного тела, имеющего форму «утюга». Для этой задачи приведены подробные рассуждения, позволяющие свести трехмерное уравнение Лапласа, описывающее распределение скалярного потенциала скоростей потока вблизи поверхности тела и зависящего от трех независимых координат, к двухмерному уравнению Лапласа, решение которого строго аналитически обосновано в предлагаемой работе. Отмечено также, что аналогичные задачи встречаются не только в гидродинамике, но также в теории упругости и в теории электромагнетизма. Описанный прием, а именно возможность перехода от двух независимых переменных к трем с помощью заданного преобразования, позволяет находить чисто физические решения для широкого спектра задач из разных областей естественных наук.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, двухмерное уравнение Лапласа, сферические координаты, обыкновенные дифференциальные уравнения.

AMS Subject Classification: 35A08.

Образец цитирования: *Гладков С. О.* Об одном классе решений двухмерного уравнения Лапласа на трехмерном многообразии // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 2.—С. 39–46. DOI: 10.46698/j9246-8718-0030-f.

1. Введение

Вопрос, рассматриваемый в настоящей работе, относится к общим проблемам математики и, в частности, к задачам математической физики. Речь идет о двухмерном уравнении Лапласа $\Delta_2 f = 0$ трехмерного многообразия R^3, в котором обе независимые переменные принадлежат некоторому множеству $x, y \in D, L_D$, где L_D — граница области D. Подчеркнем еще раз, что функция $f = f(x, y, z)$ зависит от трех переменных, но подчиняется двухмерному уравнению Лапласа. Третья независимая переменная z является произвольной и ее область изменения может быть продиктована только конкретной постановкой задач гидродинамики или теории упругости. Фундаментальное решение этого уравнения имеет известный логарифмический вид (к примеру, см. [1–5]), который можно записать в виде бесконечного ряда

$$f = f_0 + A + B\ln\rho + C_i\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,\ln\rho + C_{ik}\,\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}\,\ln\rho + C_{ikl}\,\frac{\partial^3}{\partial x^i\partial x^k\partial x^l}\,\ln\rho + \ldots, \quad (1)$$

где $f_0 = a + b\ln\rho$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, a, b, A, B, C_i, C_{ik}, C_{ikl}, $\ldots$ — некоторые константы, $i,k,l,\ldots = 1,2$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Заметим, что определение (1) часто используется при решении некоторого класса двухмерных задач из гидродинамики (см., например, [6]). Конкретный пример приложения соотношения (1) приведен в конце этого сообщения.

В нашем случае, когда речь идет о трехмерном пространстве, все фигурирующие в соотношении (1) константы без ограничения общности должны быть функциями третьей независимой координаты z, т. е.

$$A = A(z),\ B = B(z),\ C_i = C_i(z),\ C_{ik} = C_{ik}(z),\ C_{ikl} = C_{ikl}(z),\ \ldots \quad (2)$$

Возникает вопрос: как вычислить все эти зависимости $A(z)$, $B(z)$, $\ldots$?

В том случае, если рассматривается решение стандартной задачи, т. е. искомая функция зависит только от двух независимых переменных, а именно, $f = f(x,y)$, общее решение двухмерного уравнения Лапласа описывается хорошо известным классом функций $f_0 = a + b\ln\rho$.

В случае же, если говорится о функции Грина, то она имеет вполне конкретный вид $G(\rho) = \frac{1}{2\pi}\ln\rho$, которая часто называется еще и фундаментальным решением (см., например, [1]), но удовлетворяет другому уравнению, а именно $\Delta_2 G = \delta(x-x', y-y')$, где $\delta(\rho-\rho')$ — дельта–функция, а двухмерный вектор $\rho = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\rho' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$.

Это уравнение нетрудно решить с помощью метода разложения его левой и правой частей в двухмерный интеграл Фурье, и получить ответ $G(\rho) = \frac{1}{2\pi}\ln\rho$.

В процессе решения некоторого класса задач гидродинамики (см. пример в конце этого сообщения) возникает необходимость вычисления скалярной функции, зависящей от трех независимых координат $f = f(x,y,z)$, но подчиняющейся двухмерному уравнению Лапласа $\Delta_2 f(x,y,z) = 0$. Чтобы решить такую задачу, нам необходимо наметить алгоритм вычисления всех зависимостей (2), что и представляет главную цель данной работы.

2. Постановка задачи и ее решение

Математическая суть постановки задачи заключается в решении двухмерного уравнения Лапласа, класс функций которого задан на некотором трехмерном многообразии R^3, и которые нам следует найти. Фактически ответ на этот вопрос заключается в вычислении функциональных зависимостей (2), однако, мы остановимся на выяснении вида только функций $A(z)$ и $B(z)$, поскольку вычисление векторных и тензорных функций $C_i = C_i(z)$, $C_{ik} = C_{ik}(z)$, $C_{ikl} = C_{ikl}(z)$, $\ldots$ должно быть продиктовано конкретной постановкой физической задачи (см., например, [6]). Считаем, поэтому, что $C_i = 0$, $C_{ik} = 0$, $C_{ikl} = 0$, $\ldots$

Ранее этому вопросу внимание почему-то особо не уделялось, однако, ответ на него поможет пролить свет на некоторый ряд задач из области теории упругости и гидродинамики [6, 7].

Что касается граничных условий, то в рамках решаемой абстрактной задачи они просто не нужны.

С целью нахождения общего фундаментального решения уравнения

$$\Delta_2 f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

удобно воспользоваться переходом к сферическим координатам

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{4}$$

В результате подстановки преобразований (4) в уравнение (3), после несложной процедуры дифференцирования приходим к уравнению вида

$$r^2\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r\big(1+\cos^2\theta\big)\,\frac{\partial f}{\partial r} + r^2\sin 2\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta} = 0. \tag{5}$$

Как это следует из (5), полученное уравнение является однородным относительно зависимостей $\frac{1}{r}$ и r^2. С помощью подстановок

$$f_1 = \frac{\Phi_1(\theta)}{r} \tag{6}$$

и

$$f_2 = r^2\Phi_2(\theta) \tag{7}$$

для угловых функций $\Phi_1(\theta)$, $\Phi_2(\theta)$ мы приходим к двум следующим уравнениям:

$$\Phi_1''\cos^2\theta + ctg\theta\big(1-4\sin^2\theta\big)\Phi_1' + \big(1-3\cos^2\theta\big)\Phi_1 = 0, \tag{8}$$

$$f_2 = r^2\Phi_2(\theta). \tag{9}$$

Первое частное решение уравнения (8) найти совсем несложно, и оно имеет вид

$$\Phi_1^{(1)} = \frac{1}{\cos\theta}. \tag{10}$$

Его второе независимое решение, используя определение вронскиана

$$W = W_0\,e^{-\int a_1(\theta)d\theta}, \tag{11}$$

где подынтегральная функция в (11) согласно (8) есть

$$a_1(\theta) = \frac{1-4\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}, \tag{12}$$

можно записать как

$$\Phi_1^{(2)} = \frac{\ln|tg\theta|}{\cos\theta}. \tag{13}$$

Поэтому согласно (10) и (13) общее решение уравнения (8) имеет вид

$$\Phi_1(\theta) = \frac{1}{\cos\theta}\big(C_1 + C_2\ln|tg\theta|\big), \tag{14}$$

где C_1, C_2 — константы интегрирования.

Что касается уравнения (9), то его первое частное решение есть

$$\Phi_2^{(1)} = -\cos^2\theta. \tag{15}$$

Решение (15) легко проверить непосредственной подстановкой в исходное уравнение (9).

Второе линейно-независимое решение в соответствии с (11)–(13) будет

$$\Phi_2^{(2)} = -\cos^2\theta \ln|tg\theta|. \tag{16}$$

В результате общее решение уравнения (9) становится таким

$$\Phi_2 = -\cos^2\theta\bigl(C_3 + C_4 \ln|tg\theta|\bigr), \tag{17}$$

где так же, как и в (14), C_3, C_4 — константы интегрирования.

Значит, с учетом (6), (7), (14) и (17) общее решение уравнения (3) можно записать в результате следующим образом:

$$f(r,\theta) = f_0 + \frac{1}{r\cos\theta}\bigl(C_1 + C_2\ln|tg\theta|\bigr) - r^2\cos^2\theta\bigl(C_3 + C_4\ln|tg\theta|\bigr), \tag{18}$$

где первое слагаемое представляет собой стандартное решение двухмерного уравнения Лапласа, т. е.

$$f_0 = f_0(\rho) = a + b\ln\rho, \tag{19}$$

a, b — просто константы, а остальные слагаемые в (18) отвечают на вопрос об искомой зависимости решения от координаты z.

Действительно, если воспользоваться обратным изоморфным преобразованием в соответствии с (4), то решение (18) преобразуется к следующему:

$$f(z,\rho) = f_0 + \frac{1}{z}\left(C_1 + C_2\ln\rho\right) - z^2(C_3 + C_4\ln\rho). \tag{20}$$

И окончательно при сравнении с (1) имеем

$$f(z,\rho) = f_0 + A(z) + B(z)\ln\rho, \tag{21}$$

где интересующий нас класс новых зависимостей есть

$$\begin{cases} A(z) = \dfrac{C_1}{z} - C_3 z^2, \\ B(z) = \dfrac{C_2}{z} - C_4 z^2. \end{cases} \tag{22}$$

Решения (21), (22) отвечают на поставленный вначале работы вопрос о возможном дополнительном классе решений двухмерного уравнения Лапласа на трехмерном многообразии R^3 при условии, что искомая функция зависит не от двух, а от трех независимых координат x, y, z.

Здесь стоит обратить внимание и на следующий важный момент. Как видно из общего формального решения (22), в предельных случаях, когда $z \to 0$ и $z \to \infty$ обе функции $A(z)$ и $B(z)$ стремятся к бесконечности. В этом, однако, нет ничего удивительного, поскольку при формулировке конкретной физической задачи всегда подразумевается, что искомое решение должно быть ограничено. Это означает, что накладываются вполне естественные условия на коэффициенты C_1, C_2, C_3, C_4. Действительно, если, например, нас интересует физическое решение вблизи нуля, то следует положить $C_1 = C_2 = 0$. А если мы интересуемся поведением какой-то физической системы на бесконечности, то тогда уже необходимо считать, что $C_3 = C_4 = 0$. В таком же контексте приводится решение и ряда задач по гидродинамике и теории упругости, приведенные в монографиях [6] и [7]. При этом все полученные решения автоматически оказываются конечными. Подчеркнем также, что помимо сказанного, существует еще и естественное ограничение решений, связанного с постановкой конкретных граничных условий.

На одном из физических примеров мы сейчас и проиллюстрируем все вышесказанное.

3. Пример приложения решения (21) к физическим задачам

В качестве конкретного приложения полученного решения рассмотрим такую задачу.

Предположим, что стационарный поток несжимаемой жидкости, направленный вдоль оси y и движущийся с постоянной скоростью $\mathbf{u}$, натекает на преграду, имеющую форму острого клина в виде носика утюга (трехмерное тело).

Считая течение потока потенциальным, можно записать это условие в виде формального равенства $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$. Это означает, что скорость $\mathbf{v} = -\nabla\varphi$, где скалярная функция $\varphi = \varphi(x, y, z)$ представляет собой потенциал скоростей, который благодаря условию несжимаемости жидкости $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ должен подчиняться трехмерному уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

Вблизи поверхности «утюга» проекция скорости v_z на ось z, направленную перпендикулярно его нижней плоскости, мала по сравнению с компонентами v_x, v_y (аналогичное явление имеет место и при выводе уравнения Прандтля, что весьма подробно описано в [6]). Это означает формальное выполнение условия

$$v_z \ll v_x, v_y, \tag{23}$$

или иначе

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right| \ll \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|. \tag{24}$$

Неравенство (24) позволяет представить уравнение Лапласа в приближенном виде, как

$$\Delta\varphi \approx \Delta_2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{25}$$

которое должно решаться при дополнительном граничном условии

$$v_n\big|_{\Sigma_V} = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\Sigma_V} = 0, \tag{26}$$

где v_n — нормальная к поверхности «утюга» скорость, а Σ_V — его поверхность.

Согласно решениям (21) и (22) решение уравнения (25) можно записать в общем виде, как

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0 + A(z) + B(z)\ln\rho, \tag{27}$$

где $\varphi_0 = a + b\ln\rho$ представляет собой общее решение.

Полагая $a = 0$, $b = 0$, $A(z) = 0$, приходим к следующей зависимости:

$$\varphi(x, y, z) = B(z)\ln\rho. \tag{28}$$

В зависимости от соотношения между линейными размерами «утюга» с учетом граничного условия (26) и при дополнительном условии возможного манипулирования константами C_2, C_4, мы приходим к интересующему нас чисто физическому решению поставленной задачи.

Ее дальнейший подробный анализ не входит в цели настоящей статьи, а носит чисто ознакомительный характер возможного приложения полученных выше математических решений (18)–(22). Некоторый класс других примеров применения формальных математических решений к конкретным физическим задачам приведен, например, в работах [8–10].

4. Заключение

Основные результаты данной работы сформулированы кратко в следующих четырех пунктах.

1. Найдено общее решение двухмерного уравнения Лапласа в трехмерном случае.

2. Предложен алгоритм решения подобного типа задач, главная идея которого заключается в переходе к другой трехмерной координатной системе (в нашем случае — к сферической), что может представлять определенный интерес при решении некоторого класса задач из теории упругости и гидродинамики.

3. Приведен конкретный физический пример, когда полученным решением можно просто воспользоваться.

4. Предложен новый класс решений двухмерного уравнения Лапласа в соответствии с зависимостью (21).

Литература

1. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики.—М.: Высш. шк., 1970.—710 с.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1981.—512 с.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 2004.—800 с.
4. *Михайлов В. П.* Лекции по уравнениям математической физики.—М.: Физматлит, 2001.—208 с.
5. *Боговский М. Е.* Уравнения математической физики.—М.: МФТИ, 2019.—105 с.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. Т. 6.—М.: Наука, 1988.—733 с.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. Т. 7.—М.: Наука, 2002.—286 с.
8. *Gladkov S. O.* About one method of calculation in the arbitrary curvilinear basis of the Laplace operator and curl from the vector function // Appl. Math. Nonlin. Sci.—2021.—Vol. 7, № 2.—P. 1–9. DOI: 10.2478/amns.2021.2.00002.
9. *Gladkov S. O.* To the question of Gauss's curvature in n-dimensional Eeuclidian space // J. Math. Research.—2020.—Vol. 12, № 6.—P. 93–99. DOI: 10.5539/jmr.v12n6p93.
10. *Gladkov S. O.* On a transversality condition for one variation problem with moving boundary // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.—2019.—Vol. 12, № 1.—P. 125–129. DOI: 10.17516/1997-1397-2019-12-1-125-129.

Статья поступила 28 октября 2023 г.

Гладков Сергей Октябринович
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет),
профессор
РОССИЯ, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4
E-mail: sglad51@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-2755-9133

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 2, P. 39–46

ON A CLASS OF SOLUTIONS OF LAPLACE'S TWO-DIMENSIONAL EQUATION ON A THREE-DIMENSIONAL MANIFOLD

Gladkov, S. O.[1]

[1] Moscow Aviation Institute (National Research University),
4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russia

E-mail: `sglad51@mail.ru`

Abstract. The solution of the two-dimensional Laplace equation on a given set of three independent variables in three-dimensional Euclidean space is found. The problem is solved by converting the two-dimensional Laplace equation into an equation in which the desired function depends on three independent variables. This turns out to be possible by introducing a spherical coordinate system. The proposed method made it possible to find a solution to the two-dimensional Laplace equation in the form of a function of three independent variables. As an example of the application of the obtained solution the problem of an incompressible fluid flow around a three-dimensional body shaped an " iron" is considered. For this problem detailed reasoning is given that makes it possible to reduce the three-dimensional Laplace equation which describes the distribution of the scalar potential of the flow velocities near the surface of the body and depends on three independent coordinates to the two-dimensional Laplace equation the solution of which was strictly analytically substantiated in the proposed work. It's also noted that similar problems arise not only in hydrodynamics but also in the theory of elasticity and in the theory of electromagnetism. The described technique, namely, the possibility of moving from two independent variables to three ones using a given transformation enables us to find purely physical solutions for a wide range of problems from different fields of natural sciences.

Keywords: partial differential equations, two-dimensional Laplace equation, spherical coordinates, ordinary differential equations.

AMS Subject Classification: 35A08.

For citation: *Gladkov, S. O.* On a Class of Solutions of Laplace's Two-Dimensional Equation on a Three-Dimensional Manifold, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 2, pp. 39–46 (in Russian). DOI: 10.46698/j9246-8718-0030-f.

References

1. *Koshlyakov, N. S., Gliner, E. B.* and *Smirnov, M. M. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki* [Partial Differential Equation in Mathematical Physics], Moscow, Vysshaya Shkola, 1970, 710 p. (in Russian).
2. *Vladimirov, V. S. Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Moscow, Nauka, 1981, 512 p. (in Russian).
3. *Tikhonov, A. N.* and *Samarskiy, A. A. Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Moscow, Nauka, 2004, 800 p. (in Russian).
4. *Mikhaylov, V. P. Lekcii po uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Lectures on Equations of Mathematical Physics], Moscow, Fizmatlit, 2001, 208 p. (in Russian).
5. *Bogovskiy, M. E. Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Moscow, MFTI, 2019, 105 p. (in Russian).
6. *Landau, L. D.* and *Lifshic, E. M. Gidrodinamika. T.* 6 [Hydrodynamics. Vol. 6], Moscow, Nauka, 1988, 733 p. (in Russian).
7. *Landau, L. D.* and *Lifshic, E. M. Teoriya uprugosti. T.* 7 [Theory of Elasticity. Vol. 7], Moscow, Nauka, 2002, 286 p. (in Russian).
8. *Gladkov, S. O.* About One Method of Calculation in the Arbitrary Curvilinear Basis of the Laplace Operator and Curl From the Vector Function, *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 2021, vol. 7, no. 2, pp. 1–9. DOI: 10.2478/amns.2021.2.00002.

9. *Gladkov S. O.* To the Question of Gauss's Curvature in n-Dimensional Euclidian Space, *Journal of Mathematics Research*, 2020, vol. 12, no. 6, pp. 93–99. DOI: 10.5539/jmr.v12n6p93.
10. *Gladkov, S. O.* On a Transversality Condition for One Variation Problem with Moving Boundary, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2019, vol. 12, no. 1, pp. 125–129. DOI: 10.17516/1997-1397-2019-12-1-125-129.

Received October 28, 2023

Sergey O. Gladkov
Moscow Aviation Institute
(National Research University),
4 Volokolamskoe Shosse, 125993 Moscow, Russia,
Professor
E-mail: `sglad51@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-2755-9133