*Владикавказский математический журнал*
*2024, Том 26, Выпуск 2, С. 54–69*

**УДК** 512.816.3
**DOI** 10.46698/a9077-8757-4946-m

# О ЛОКАЛЬНОМ РАСШИРЕНИИ ГРУППЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНОСОВ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II

**В. А. Кыров**[1]

[1] Горно-Алтайский государственный университет,
Россия, 649000, Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

*Посвящается 80-летию профессора*
*Георгия Георгиевича Магарил-Ильяева*

**Аннотация.** В данной статье решается проблема локального расширения группы параллельных переносов трехмерного пространства до локально ограниченно точно дважды транзитивной группы Ли преобразований того же пространства. Локально ограниченно точная дважды транзитность означает существование единственного преобразования, которое переводит произвольную пару несовпадающих точек из некоторой открытой окрестности почти в любую пару точек из той же окрестности. Поставленная задача решается для четырех случаев, связанных с жордановыми формами матриц третьего порядка. С помощью этих жордановых матриц записываются системы линейных дифференциальных уравнений, решения которых приводят к базисным операторам шестимерного линейные пространства. Требуя замкнутости коммутаторов базисных операторов, находим алгебры Ли. Проверяя условие ограниченно точной дважды транзитивности, получаем алгебры Ли искомых групп Ли преобразований. В конце работы доказывается, что эти алгебры Ли либо разрешимы, либо представимы в виде прямой суммы разрешимого идеала и подалгебры, изоморфной $sl(2,R)$. При этом разрешимые алгебры Ли разлагаются в прямую суммы нильпотентного идеала и разрешимой подалгебры. В конце устанавливается изоморфизм некоторых алгебр Ли из числа найденных выше.

**Ключевые слова:** группа Ли преобразований, локально ограниченно точно дважды транзитивная группа Ли преобразований, алгебра Ли, жорданова форма матрицы.

**AMS Subject Classification:** 22F99.

**Образец цитирования:** *Кыров В. А.* О локальном расширении группы параллельных переносов в трехмерном пространстве. II // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 2.—С. 54–69. DOI: 10.46698/a9077-8757-4946-m.

## 1. Введение

Данная статья является продолжением работы [1], в которой были найдены алгебры Ли некоторых локально ограниченно точно дважды транзитивных групп Ли преобразований пространства $R^3$, являющимися расширениями группы параллельных переносов этого пространства. Базис таких алгебр Ли состоит из операторов вида: $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_3 = \partial_z$, $Y_i = A_i(x,y,z)\partial_x + B_i(x,y,z)\partial_y + C_i(x,y,z)\partial_z$, $i = 1,2,3$. Для нахождения явных выражений операторов $Y_1, Y_2, Y_3$ сначала по условию замкнутости коммутаторов $[X_i, Y_j] = (\alpha_i)^k_j X_k + (\beta_i)^k_j Y_k$, $i,j,k = 1,2,3$, записываются три системы дифференциальных уравнений (0.1) из [1], решая которые, находим ограничения на компоненты этих операторов. Исследуя на замкнутость остальные коммутаторы, получаем окончательные выражения для $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$.

В работе [2] доказано, что матрицы $T_1$, $T_2$, $T_3$ коэффициентов системы (0.1) из [1] взаимно коммутативны и матрица $T_1$ в подходящем базисе алгебры Ли приводится к жордановой форме. Далее вычисляя коммутаторы $[T_1, T_2]$, $[T_1, T_3]$ и $[T_2, T_3]$ и приравнивая их к нулю, получаем следующие выражения ненулевых матриц $T_1$, $T_2$, $T_3$:

**1.** $$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & 0\\ 0 & \mu_2 & 0\\ 0 & 0 & \mu_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\nu_1 & 0 & 0\\ 0 & \nu_2 & 0\\ 0 & 0 & \nu_3\end{pmatrix};$$

**2.** $$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_3 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_3 & 0\\ 0 & \mu_1 & 0\\ 0 & 0 & \mu_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_3 & 0\\ 0 & \nu_1 & 0\\ 0 & 0 & \nu_2\end{pmatrix}, \quad \lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2 \neq 0;$$

**3.** $$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \mu_3\\ 0 & \mu_1 & \mu_2\\ 0 & 0 & \mu_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & \nu_3\\ 0 & \nu_1 & \nu_2\\ 0 & 0 & \nu_1\end{pmatrix}, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 \neq 0;$$

**4.** $$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & 0\\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2 & 0\\ -\mu_2 & \mu_1 & 0\\ 0 & 0 & \mu_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & 0\\ -\nu_2 & \nu_1 & 0\\ 0 & 0 & \nu_3\end{pmatrix}, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 \neq 0;$$

**5.** $$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu & 0 & \mu_2\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\nu & \nu_1 & \nu_2\\ 0 & \nu & 0\\ 0 & 0 & \nu\end{pmatrix}, \quad \mu_2 \neq 0;$$

**6.** $$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu & 0 & \mu_2\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 1 & \mu\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\nu & \nu_1 & \mu_2\\ 0 & \nu & 0\\ 0 & 1 & \nu\end{pmatrix}.$$

В данной статье рассматривается случай с матрицами **1**–**4** (случай с матрицами **5** и **6** был рассмотрен в [1]).

В последнее время актуальной является задача расширения транзитивного действия группы Ли. Так в работе [3] приводится определение расширения транзитивной группы Ли $G$, действующей в многообразии $M$: *расширением транзитивной группы Ли $G$ называется группа Ли $G_1$, содержащая $G$ в виде подгруппы Ли и тоже транзитивная на $M$, причем ограничение этого транзитивного действия на $G$ дает исходное транзитивное действие группы Ли $G$.* Классическим примером расширения группы параллельных переносов пространства $R^n$ является группа аффинных преобразований этого же пространства.

Следуя монографии Г. Г. Михайличенко [4], можно говорить, что локально точно транзитивная группа Ли преобразований пространства $R^3$ задает феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга $(2, 2)$, а локально ограниченно точно дважды транзитивная группа Ли преобразований пространства $R^3$ задает феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга $(3, 2)$. Первым множеством является пространство $R^3$, а вторым — группа Ли $G$.

Результаты, получаемые в данной работе, можно применить для классификации ограниченно точно дважды транзитивных групп Ли преобразований пространства $R^3$ (феноменологически симметричных геометрий двух множеств [4]), поэтому требуется поиск всех алгебр Ли групп преобразований, о которых говорилось вначале. Применяемый в этой работе метод исследования апробирован в статьях [1] и [5].

**Основные определения.** Определения 1, 2 и 3 из статьи [1] полностью переносятся в данную работу, поэтому их формулировки здесь не приводятся.

**Теорема 1** [1, 2]**.** *Локальное действие* $\pi\colon R^3\times G\to R^3$ *с операторами ее алгебры Ли* (1.2) *из* [1] *локально ограниченно точно дважды транзитивно тогда и только тогда, когда матрица*

$$K(b)-K(a)$$

*невырождена, где*

$$K(a)=\begin{pmatrix} A_1(x_a,y_a,z_a) & B_1(x_a,y_a,z_a) & C_1(x_a,y_a,z_a)\\ A_2(x_a,y_a,z_a) & B_2(x_a,y_a,z_a) & C_2(x_a,y_a,z_a)\\ A_3(x_a,y_a,z_a) & B_3(x_a,y_a,z_a) & C_3(x_a,y_a,z_a)\end{pmatrix},$$

*причем* $a=(x_a,y_a,z_a)\in U(a)\subset W\subset R^3$.

**Следствие.** *Действие* $\pi\colon R^3\times G\to R^3$ *с операторами алгебры Ли вида*

$$\begin{cases} X_1=\partial_x,\ X_2=\partial_y,\ X_3=\partial_z,\ Y_1=A_1(x,y,z)\partial_x+B_1(x,y,z)\partial_y,\\ Y_2=B_2(x,y,z)\partial_x+B_2(x,y,z)\partial_y,\ Y_3=A_3(x,y,z)\partial_x+B_3(x,y,z)\partial_y\end{cases}$$

*не является локально ограниченно точно дважды транзитивным.*

Алгебра Ли обладает важным свойством — замкнутость относительно коммутационных соотношений, т. е. коммутаторы $[X_j,Y_k]$, где $j,k=1,2,3$, принадлежат этой же алгебре Ли [6]. Тогда, учитывая (1.2) из [1], приходим к системе дифференциальных уравнений (0.1) из [1] на коэффициенты $A_i$, $B_i$, $C_i$.

Везде ниже используются обозначения:

$$(\lambda_1,r)=\lambda_1x+\mu_1y+\nu_1z,\quad (\lambda_2,r)=\lambda_2x+\mu_2y+\nu_2z,\quad (\lambda_3,r)=\lambda_3x+\mu_3y+\nu_3z,$$

$$(g_1,r)=g_3^1x+p_3^1y+q_3^1z,\quad (g_2,r)=g_3^2x+p_3^2y+q_3^2z,\quad (g_3,r)=g_3^3x+p_3^3y+q_3^3z,$$

$$(p_1,r)=g_2^1x+p_2^1y+q_2^1z,\quad (p_2,r)=g_2^2x+p_2^2y+q_2^2z,\quad (p_3,r)=g_2^3x+p_2^3y+q_2^3z,$$

$$(q_1,r)=g_1^1x+p_1^1y+q_1^1z,\quad (q_2,r)=g_1^2x+p_1^2y+q_1^2z,\quad (q_3,r)=g_1^3x+p_1^3y+q_1^3z,$$

$$\overrightarrow{\xi}=(1,0,0)^T,\quad \overrightarrow{\eta}=(0,1,0)^T,\quad \overrightarrow{\zeta}=(0,0,1)^T,$$

$$\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & A_3\end{pmatrix}^T,\ \overrightarrow{B}=\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & B_3\end{pmatrix}^T,\ \overrightarrow{C}=\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & C_3\end{pmatrix}^T.$$

## 2. Алгебры Ли, определяемые матрицами 1

**Предложение 1.** *Система дифференциальных уравнений* (0.1) *из* [1] *с одновременно ненулевыми матрицами* $T_1$, $T_2$ *и* $T_3$, *принимающих вид* **1** *из введения, в подходящем базисе и с точностью до переобозначения координат имеет три решения:*
*при* $\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2\neq0$, $\lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2\neq0$ *и* $\lambda_3^2+\mu_3^2+\nu_3^2\neq0$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}&=(c_1^1e^{(\lambda_1,r)}+a_1^1)\overrightarrow{\xi}+(c_2^1e^{(\lambda_2,r)}+a_2^1)\overrightarrow{\eta}+(c_3^1e^{(\lambda_3,r)}+a_3^1)\overrightarrow{\zeta},\\ \overrightarrow{B}&=(c_1^2e^{(\lambda_1,r)}+a_1^2)\overrightarrow{\xi}+(c_2^2e^{(\lambda_2,r)}+a_2^2)\overrightarrow{\eta}+(c_3^2e^{(\lambda_3,r)}+a_3^2)\overrightarrow{\zeta},\\ \overrightarrow{C}&=(c_1^3e^{(\lambda_1,r)}+a_1^3)\overrightarrow{\xi}+(c_2^3e^{(\lambda_2,r)}+a_2^3)\overrightarrow{\eta}+(c_3^3e^{(\lambda_3,r)}+a_3^3)\overrightarrow{\zeta};\end{aligned}$$

*при* $\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2\neq 0$, $\lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2\neq 0$ *и* $\lambda_3^2+\mu_3^2+\nu_3^2=0$*:*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}&=(c_1^1e^{(\lambda_1,r)}+a_1^1)\overrightarrow{\xi}+(c_2^1e^{(\lambda_2,r)}+a_2^1)\overrightarrow{\eta}+((g_1,r)+c_3^1)\overrightarrow{\zeta},\\ \overrightarrow{B}&=(c_1^2e^{(\lambda_1,r)}+a_1^2)\overrightarrow{\xi}+(c_2^2e^{(\lambda_2,r)}+a_2^2)\overrightarrow{\eta}+((g_2,r)+c_3^2)\overrightarrow{\zeta},\\ \overrightarrow{C}&=(c_1^3e^{(\lambda_1,r)}+a_1^3)\overrightarrow{\xi}+(c_2^3e^{(\lambda_2,r)}+a_2^3)\overrightarrow{\eta}+((g_3,r)+c_3^3)\overrightarrow{\zeta};\end{aligned}$$

*при* $\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2\neq 0$, $\lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2=0$ *и* $\lambda_3^2+\mu_3^2+\nu_3^2=0$*:*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}&=(c_1^1e^{(\lambda_1,r)}+a_1^1)\overrightarrow{\xi}+((p_1,r)+c_2^1)\overrightarrow{\eta}+((g_1,r)+c_3^1)\overrightarrow{\zeta},\\ \overrightarrow{B}&=(c_1^2e^{(\lambda_1,r)}+a_1^2)\overrightarrow{\xi}+((p_2,r)+c_2^2)\overrightarrow{\eta}+((g_2,r)+c_3^2)\overrightarrow{\zeta},\\ \overrightarrow{C}&=(c_1^3e^{(\lambda_1,r)}+a_1^3)\overrightarrow{\xi}+((p_3,r)+c_2^3)\overrightarrow{\eta}+((g_3,r)+c_3^3)\overrightarrow{\zeta},\end{aligned}$$

*где* $c_i^j$, $g_j^i$, $q_j^i$, $p_j^i$, $a_j^i$ *— постоянные,* $i,j=1,2,3$.

$\lhd$ Доказательство сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (0.1) из [1] с матрицами коэффициентов **1** из введения. $\rhd$

Из решений, содержащихся в предложении 1, ниже будут выделены алгебры Ли.

По решениям, найденным в предложении 1, запишем базисные операторы (1.2) из [1] *шестимерных линейных пространств*, при этом операторы $Y_1$, $Y_2$ и $Y_3$ комбинируем с операторами $X_1$, $X_2$ и $X_3$ так, чтобы исчезли свободные члены:

$$\begin{gathered}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\quad Y_1=e^{(\lambda_1,r)}\left(c_1^1\partial_x+c_1^2\partial_y+c_1^3\partial_z\right),\\ Y_2=e^{(\lambda_2,r)}\left(c_2^1\partial_x+c_2^2\partial_y+c_2^3\partial_z\right),\quad Y_3=e^{(\lambda_3,r)}\left(c_3^1\partial_x+c_3^2\partial_y+c_3^3\partial_z\right);\end{gathered}\tag{1}$$

$$\begin{gathered}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\quad Y_1=e^{(\lambda_1,r)}\left(c_1^1\partial_x+c_1^2\partial_y+c_1^3\partial_z\right),\\ Y_2=e^{(\lambda_2,r)}\left(c_2^1\partial_x+c_2^2\partial_y+c_2^3\partial_z\right),\quad Y_3=(g_1,r)\partial_x+(g_2,r)\partial_y+(g_3,r)\partial_z;\end{gathered}\tag{2}$$

$$\begin{gathered}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\quad Y_1=e^{(\lambda_1,r)}\left(c_1^1\partial_x+c_1^2\partial_y+c_1^3\partial_z\right),\\ Y_2=(p_1,r)\partial_x+(p_2,r)\partial_y+(p_3,r)\partial_z,\quad Y_3=(g_1,r)\partial_x+(g_2,r)\partial_y+(g_3,r)\partial_z.\end{gathered}\tag{3}$$

Запишем определитель матрицы $K(b)-K(a)$ из теоремы 1 для базисных операторов (1), (2), (3):

$$|K(b)-K(a)|=\left(e^{(\lambda_1,r_b)}-e^{(\lambda_1,r_a)}\right)\left(e^{(\lambda_2,r_b)}-e^{(\lambda_2,r_a)}\right)\left(e^{(\lambda_3,r_b)}-e^{(\lambda_3,r_a)}\right)\begin{vmatrix}c_1^1&c_1^2&c_1^3\\ c_2^1&c_2^2&c_2^3\\ c_3^1&c_3^2&c_3^3\end{vmatrix};\tag{4}$$

$$\begin{gathered}|K(b)-K(a)|=\left(e^{(\lambda_1,r_b)}-e^{(\lambda_1,r_a)}\right)\left(e^{(\lambda_2,r_b)}-e^{(\lambda_2,r_a)}\right)\\ \times\begin{vmatrix}c_1^1&c_1^2&c_1^3\\ c_2^1&c_2^2&c_2^3\\ g_3^1x_{ba}+p_3^1y_{ba}+q_3^1z_{ba}&g_3^2x_{ba}+p_3^2y_{ba}+q_3^2z_{ba}&g_3^3x_{ba}+p_3^3y_{ba}+q_3^3z_{ba}\end{vmatrix};\end{gathered}\tag{5}$$

$$\begin{gathered}|K(b)-K(a)|=\left(e^{(\lambda_1,r_b)}-e^{(\lambda_1,r_a)}\right)\\ \times\begin{vmatrix}c_1^1&c_1^2&c_1^3\\ g_2^1x_{ba}+p_2^1y_{ba}+q_2^1z_{ba}&g_2^2x_{ba}+p_2^2y_{ba}+q_2^2z_{ba}&g_2^3x_{ba}+p_2^3y_{ba}+q_2^3z_{ba}\\ g_3^1x_{ba}+p_3^1y_{ba}+q_3^1z_{ba}&g_3^2x_{ba}+p_3^2y_{ba}+q_3^2z_{ba}&g_3^3x_{ba}+p_3^3y_{ba}+q_3^3z_{ba}\end{vmatrix},\end{gathered}\tag{6}$$

где $x_{ba}=x_b-x_a$, $y_{ba}=y_b-y_a$, $z_{ba}=z_b-z_a$. В силу теоремы 1 матрицы коэффициентов

$$\begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \end{pmatrix}$$

соответственно в операторах (1), (2) и (3) имеют ранги равные 3, 2, 1. Поэтому в этих операторах вводим такую линейную замену координат, чтобы

$$c_1^1\partial_x+c_1^2\partial_y+c_1^3\partial_z=\partial_{x'},\quad c_2^1\partial_x+c_2^2\partial_y+c_2^3\partial_z=\partial_{y'},\quad c_3^1\partial_x+c_3^2\partial_y+c_3^3\partial_z=\partial_{z'},$$

после чего комбинируем $X_1$, $X_2$ и $X_3$, затем возвращаемся к прежним обозначениям координат, операторов и постоянных (в новых обозначениях неравенства на коэффициенты сохраняются). Записываем только операторы $Y_1$, $Y_2$ и $Y_3$, помня, что в каждой системе $X_1=\partial_x$, $X_2=\partial_y$ и $X_3=\partial_z$:

$$Y_1=e^{(\lambda_1,r)}\partial_x,\quad Y_2=e^{(\lambda_2,r)}\partial_y,\quad Y_3=e^{(\lambda_3,r)}\partial_z; \tag{7}$$

$$Y_1=e^{(\lambda_1,r)}\partial_x,\quad Y_2=e^{(\lambda_2,r)}\partial_y,\quad Y_3=(g_1,r)\partial_x+(g_2,r)\partial_y+(g_3,r)\partial_z; \tag{8}$$

$$\begin{gathered} Y_1=e^{(\lambda_1,r)}\partial_x,\quad Y_2=(p_1,r)\partial_x+(p_2,r)\partial_y+(p_3,r)\partial_z,\\ Y_3=(g_1,r)\partial_x+(g_2,r)\partial_y+(g_3,r)\partial_z, \end{gathered} \tag{9}$$

где $\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2\neq 0$, $\lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2\neq 0$, $\lambda_3^2+\mu_3^2+\nu_3^2\neq 0$.

Далее воспользуемся условием замкнутости коммутаторов алгебры Ли, согласно которому любой коммутатор является линейной комбинацией базисных операторов $X_1$, $X_2$, $X_3$, $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$. Очевидна замкнутость коммутаторов $[X_1,Y_1]$, $[X_1,Y_2]$, $[X_1,Y_3]$, $[X_2,Y_1]$, $[X_2,Y_2]$, $[X_2,Y_3]$, $[X_3,Y_1]$, $[X_3,Y_2]$, $[X_3,Y_3]$.

В системе операторов (7) вычисляем коммутаторы $[Y_1,Y_2]$, $[Y_1,Y_3]$ и $[Y_2,Y_3]$:

$$[Y_1,Y_2]=\lambda_2e^{(\lambda_1+\lambda_2)x+(\mu_1+\mu_2)y+(\nu_1+\nu_2)z}\partial_y-\mu_1e^{(\lambda_1+\lambda_2)x+(\mu_1+\mu_2)y+(\nu_1+\nu_2)z}\partial_x,$$

$$[Y_1,Y_3]=\lambda_3e^{(\lambda_1+\lambda_3)x+(\mu_1+\mu_3)y+(\nu_1+\nu_3)z}\partial_z-\nu_1e^{(\lambda_1+\lambda_3)x+(\mu_1+\mu_3)y+(\nu_1+\nu_3)z}\partial_x,$$

$$[Y_2,Y_3]=\mu_3e^{(\lambda_2+\lambda_3)x+(\mu_2+\mu_3)y+(\nu_2+\nu_3)z}\partial_z-\nu_2e^{(\lambda_2+\lambda_3)x+(\mu_2+\mu_3)y+(\nu_2+\nu_3)z}\partial_y.$$

Замкнутость этих коммутаторов означает либо равенство нулю коэффициентов перед экспонентами, либо равенство нулю показателей этих экспонент. Поэтому возможны следующие случаи:

1) Все три коммутатора не равны нулю, поэтому $(\lambda_1+\lambda_2)x+(\mu_1+\mu_2)y+(\nu_1+\nu_2)z=0$, $(\lambda_1+\lambda_3)x+(\mu_1+\mu_3)y+(\nu_1+\nu_3)z=0$, $(\lambda_2+\lambda_3)x+(\mu_2+\mu_3)y+(\nu_2+\nu_3)z=0$, откуда следует $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\mu_1=\mu_2=\mu_3=\nu_1=\nu_2=\nu_3=0$, что невозможно, поскольку тогда базисные операторы $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$ линейно выражаются через $X_1$, $X_2$, $X_3$.

2) Все три коммутатора равны нулю, тогда $\lambda_2=\lambda_3=\mu_1=\mu_3=\nu_1=\nu_2=0$ и поэтому получаем систему операторов

$$Y_1=e^{\lambda_1x}\partial_x,\quad Y_2=e^{\mu_2y}\partial_y,\quad Y_3=e^{\nu_3z}\partial_z. \tag{10}$$

3) Два коммутатора равны нулю, например, $[Y_1,Y_2]=[Y_1,Y_3]=0$. Тогда $\lambda_2=\lambda_3=\mu_1=\nu_1=0$, $(\mu_2+\mu_3)y+(\nu_2+\nu_3)z=0$, т. е. $\mu_2=-\mu_3$, $\nu_2=-\nu_3$, поэтому получаем

$$Y_1=e^{\lambda_1x}\partial_x,\quad Y_2=e^{-\mu_3y-\nu_3z}\partial_y,\quad Y_3=e^{\mu_3y+\nu_3z}\partial_z. \tag{11}$$

Заметим, что равенство нулю остальных пар коммутаторов приводит, с точностью до переобозначения координат и операторов, к этим же выражениям.

4) Остается рассмотреть случай равенства нулю одного, например, первого коммутатора, тогда $\lambda_2=\mu_1=0$, $(\lambda_1+\lambda_3)x+\mu_3 y+(\nu_1+\nu_3)z=0$, $\lambda_3 x+(\mu_2+\mu_3)y+(\nu_2+\nu_3)z=0$, т. е. $\nu_1=\nu_2=-\nu_3$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$, в результате получаем операторы

$$Y_1=e^{-\nu_3 z}\partial_x,\quad Y_2=e^{-\nu_3 z}\partial_y,\quad Y_3=e^{\nu_3 z}\partial_z. \tag{12}$$

Как и выше, равенство нулю остальных коммутаторов приводит, с точностью до переобозначения координат и операторов, к таким же выражениям.

Теперь приступаем к исследованию системы (8). Вычисляем коммутатор $[Y_1,Y_2]$:

$$[Y_1,Y_2]=\lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x+(\mu_1+\mu_2)y+(\nu_1+\nu_2)z}\partial_y-\mu_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x+(\mu_1+\mu_2)y+(\nu_1+\nu_2)z}\partial_x.$$

Сначала рассмотрим случай равенства его нулю, т. е. $\lambda_2=\mu_1=0$. Вычисляя остальные коммутаторы, получаем

$$\begin{aligned}[Y_1,Y_3]&=e^{\lambda_1 x+\nu_1 z}(g_3^1\partial_x+g_3^2\partial_y+g_3^3\partial_z\\&\qquad-\lambda_1(g_3^1x+p_3^1y+q_3^1z)\partial_x-\nu_1(g_3^3x+p_3^3y+q_3^3z)\partial_x)=\alpha_1Y_1+\alpha_2Y_2,\\ [Y_2,Y_3]&=e^{\mu_2 y+\nu_2 z}(p_3^1\partial_x+p_3^2\partial_y+p_3^3\partial_z\\&\qquad-\mu_2(g_3^2x+p_3^2y+q_3^2z)\partial_y-\nu_2(g_3^3x+p_3^3y+q_3^3z)\partial_y)=\beta_1Y_1+\beta_2Y_2.\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты слева и справа, получаем соотношения

$$\begin{gathered}g_3^3=0,\quad p_3^3=0,\quad \lambda_1g_3^1=0,\quad \lambda_1p_3^1=0,\\ \lambda_1q_3^1+\nu_1q_3^3=0,\quad \mu_2g_3^2=0,\quad \mu_2p_3^2=0,\quad \mu_2q_3^2+\nu_2q_3^3=0.\end{gathered}$$

Из полученной системы следует, что если $\lambda_1=0$, то $\nu_1\neq 0$ и поэтому $q_3^3=0$, что невозможно ввиду следствия из теоремы 1. Аналогичный вывод справедлив и при $\mu_2=0$. Тогда $\lambda_1\neq 0$ и $\mu_2\neq 0$, поэтому $g_3^1=p_3^1=g_3^2=p_3^2=0$, $q_3^1=-\nu_1q_3^3/\lambda_1$, $p_3^2=-\nu_2q_3^3/\mu_2$, следовательно получаем операторы

$$Y_1=e^{\lambda_1x+\nu_1z}\partial_x,\quad Y_2=e^{\mu_2y+\nu_2z}\partial_y,\quad Y_3=-q_3^3z\left(\frac{\nu_1}{\lambda_1}\partial_x+\frac{\nu_2}{\mu_2}\partial_y-\partial_z\right), \tag{13}$$

где $\lambda_1\neq 0$, $\mu_2\neq 0$. Теперь рассмотрим случай отличия от нуля коммутатора $[Y_1,Y_2]$, т. е. $\lambda_2^2+\mu_1^2\neq 0$, поэтому $\lambda_2=-\lambda_1$, $\mu_2=-\mu_1$, $\nu_2=-\nu_1$. Вычисляя остальные коммутаторы, имеем

$$\begin{aligned}[Y_1,Y_3]&=e^{\lambda_1x+\mu_1y+\nu_1z}\Big(g_3^1\partial_x+g_3^2\partial_y+g_3^3\partial_z-\lambda_1\big(g_3^1x+p_3^1y+q_3^1z\big)\partial_x\\&\qquad-\mu_1\big(g_3^2x+p_3^2y+q_3^2z\big)\partial_x-\nu_1\big(g_3^3x+p_3^3y+q_3^3z\big)\partial_x\Big),\\ [Y_2,Y_3]&=e^{-\lambda_1x-\mu_1y-\nu_1z}\Big(p_3^1\partial_x+p_3^2\partial_y+p_3^3\partial_z+\lambda_1\big(g_3^1x+p_3^1y+q_3^1z\big)\partial_y\\&\qquad+\mu_1\big(g_3^2x+p_3^2y+q_3^2z\big)\partial_y+\nu_1\big(g_3^3x+p_3^3y+q_3^3z\big)\partial_y\Big).\end{aligned}$$

Из условия замкнутости этих коммутаторов получаем соотношения

$$g_3^3=p_3^3=p_3^1=g_3^2=0,\quad \lambda_1g_3^1=0,\quad \mu_1p_3^2=0,\quad \lambda_1q_3^1+\mu_1q_3^2+\nu_1q_3^3=0.$$

Полагая $\mu_1 \neq 0$, находим операторы

$$\begin{gathered}Y_1 = e^{\lambda_1 x+\mu_1 y+\nu_1 z}\partial_x, \quad Y_2 = e^{-\lambda_1 x-\mu_1 y-\nu_1 z}\partial_y,\\ Y_3 = \left(g_3^1 x + q_3^1 z\right)\partial_x - \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}q_3^1 + \frac{\nu_1}{\mu_1}q_3^3\right) z\partial_y + q_3^3 z\partial_z, \quad q_3^3 \neq 0,\ \mu_1 \neq 0.\end{gathered} \tag{14}$$

Заметим, что если $\lambda_1 \neq 0$ в предыдущих равенствах, то с точностью до переобозначения координат и коэффициентов, получаем эти же операторы.

Наконец, исследуем систему операторов (9). Для этого вычисляем коммутаторы $[Y_1, Y_2]$ и $[Y_1, Y_3]$, а затем учитывая их замкнутость и отличие от нуля определителя (6), получаем

$$\begin{gathered}Y_1 = e^{\lambda_1 x+\mu_1 y+\nu_1 z}\partial_x, \quad Y_2 = (p_2^2 y + q_2^2 z)\left(-\frac{\mu_1}{\lambda_1}\partial_x + \partial_y\right) + (p_2^3 y + q_2^3 z)\left(-\frac{\nu_1}{\lambda_1}\partial_x + \partial_z\right),\\ Y_3 = (p_3^2 y + q_3^2 z)\left(-\frac{\mu_1}{\lambda_1}\partial_x + \partial_y\right) + (p_3^3 y + q_3^3 z)\left(-\frac{\nu_1}{\lambda_1}\partial_x + \partial_z\right).\end{gathered}$$

Далее вводим линейную замену координат: $x' = \lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z,\ y' = y,\ z' = z$, в результате предыдущая система в прежних обозначениях координат принимает вид:

$$Y_1 = e^x\partial_x, \quad Y_2 = \left(p_2^2 y + q_2^2 z\right)\partial_y + \left(p_2^3 y + q_2^3 z\right)\partial_z, \quad Y_3 = \left(p_3^2 y + q_3^2 z\right)\partial_y + \left(p_3^3 y + q_3^3 z\right)\partial_z.$$

Исследуя на замкнутость коммутатор $[Y_2, Y_3]$ и применяя результаты статьи [5], получаем операторы

$$Y_1 = e^x\partial_x, \quad Y_2 = y\partial_y, \quad Y_3 = z\partial_z, \tag{15}$$

$$Y_1 = e^x\partial_x, \quad Y_2 = y\partial_y + rz\partial_z, \quad Y_3 = z\partial_y, \quad r \neq 0, \tag{16}$$

$$Y_1 = e^x\partial_x, \quad Y_2 = y\partial_y + z\partial_z, \quad Y_3 = z\partial_y - y\partial_z, \tag{17}$$

$$Y_1 = e^x\partial_x, \quad Y_2 = y\partial_y, \quad Y_3 = y\partial_z. \tag{18}$$

В системах (10)–(18) делаем подходящую замену координат, переходя к новым координатам $x'$, $y'$, $z'$, после чего линейно комбинируем базисные операторы и возвращаемся к прежним обозначениям координат. При этом через $X_1$, $X_2$, $X_3$ обозначаем либо операторы дифференцирования $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ (если в системе они присутствуют), либо три взаимно коммутативных оператора (если хотя бы один из операторов дифференцирования в системе отсутствует). Остальные операторы обозначим через $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$. Также учитываем теорему 1, т. е. для этих операторов вычисляем определители (4)–(6).

Для системы (10) вводим замену координат $x' = e^{-\lambda_1 x}$, $y' = e^{-\mu_2 y}$, $z' = e^{-\nu_3 z}$, после чего линейно комбинируя операторы, в прежних обозначениях координат и операторов получаем

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = x\partial_x, \quad Y_2 = y\partial_y, \quad Y_3 = z\partial_z. \tag{19}$$

Для (12) вводим замену координат $x' = x$, $y' = y$, $z' = e^{-\nu_3 z}$, затем линейно комбинируя операторы, в прежних обозначениях координат и операторов получаем

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = z\partial_x, \quad Y_2 = z\partial_y, \quad Y_3 = z\partial_z. \tag{20}$$

Для системы (11) осуществляем замену координат $x' = e^{-\lambda_1 x}$, $y' = e^{\mu_3 y}$, $z' = e^{-\nu_3 z}$, после чего линейно комбинируя операторы, в прежних обозначениях координат и операторов имеем

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_y, \quad X_3 = z\partial_z, \quad Y_1 = x\partial_x, \quad Y_2 = z\partial_y, \quad Y_3 = y\partial_z. \tag{21}$$

Для системы (13) вводим замену координат $x' = e^{-\lambda_1 x - \nu_1 z}$, $y' = e^{-\mu_2 y - \nu_2 z}$, $z' = z$, получаем (19).

Для системы (14) вводим замену координат $y' = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z}$, $x' = x$, $z' = z'$, после чего оператор $Y_3$ делим на ненулевой множитель $q_3^3$, затем переобозначаем коэффициенты, в результате, в прежних обозначениях координат, операторов и коэффициентов будем иметь

$$Y_1 = y\partial_x, \quad Y_2 = y\partial_y, \quad Y_3 = \big(g_3^1 x + q_3^1 z\big)\partial_x + \lambda_1 g_3^1 xy\partial_y + z\partial_z.$$

Вычисляя коммутаторы и исследуя их на замкнутость, получаем $\lambda_1 g_3^1 = 0$, следовательно, с точностью до переобозначения коэффициентов, имеем систему

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = y\partial_x, \quad Y_2 = y\partial_y, \quad Y_3 = (ax + bz)\partial_x + z\partial_z. \tag{22}$$

В системах (15)–(18) вводим замену координат $x' = e^{-x}$, $y' = y$, $z' = y$, затем переобозначая координаты и операторы, получаем

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = x\partial_x, \quad Y_2 = y\partial_y + rz\partial_z, \quad Y_3 = z\partial_y, \quad r \neq 0; \tag{23}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = x\partial_x, \quad Y_2 = y\partial_y + z\partial_z, \quad Y_3 = z\partial_y - y\partial_z; \tag{24}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, Y_1 = x\partial_x, \quad Y_2 = y\partial_y, \quad Y_3 = y\partial_z, \tag{25}$$

причем система (15) совпадает с (19).

Нами доказана теорема 1.

**Теорема 2.** *Алгебра Ли, определяемая матрицами* **1**, *локально ограниченно точно дважды транзитивной группы Ли преобразований пространства $R^3$, полученной расширением группы параллельных переносов этого же пространства, изоморфна одной из алгебр Ли из списка* (19)–(25).

## 3. Алгебры Ли, определяемые матрицами 2

**Предложение 2.** *Система дифференциальных уравнений* (0.1) *из* [1] *с одновременно ненулевыми матрицами $T_1$, $T_2$ и $T_3$, принимающих вид* **2** *из введения, в подходящем базисе имеет четыре решения:*
*при* $\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 \neq 0$, $\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 \neq 0$ *и* $\lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2 \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A} &= \Big(\big(c_1^1 + c_2^1(\lambda_3, r)\big)e^{(\lambda_1, r)} + a_1^1\Big)\overrightarrow{\xi} + \Big(c_2^1 e^{(\lambda_1, r)} + a_2^1\Big)\overrightarrow{\eta} + \Big(c_3^1 e^{(\lambda_2, r)} + a_3^1\Big)\overrightarrow{\zeta},\\
\overrightarrow{B} &= \Big(\big(c_1^2 + c_2^2(\lambda_3, r)\big)e^{(\lambda_1, r)} + a_1^2\Big)\overrightarrow{\xi} + \Big(c_2^2 e^{(\lambda_1, r)} + a_2^2\Big)\overrightarrow{\eta} + \Big(c_3^2 e^{(\lambda_2, r)} + a_3^2\Big)\overrightarrow{\zeta},\\
\overrightarrow{C} &= \Big(c_1^3 + c_2^3(\lambda_3, r)\Big)e^{(\lambda_1, r)} + a_1^3\overrightarrow{\xi} + \Big(c_2^3 e^{(\lambda_1, r)} + a_2^3\Big)\overrightarrow{\eta} + \Big(c_3^3 e^{(\lambda_2, r)} + a_3^3\Big)\overrightarrow{\zeta};
\end{aligned}$$

*при* $\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 \neq 0$, $\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 = 0$ *и* $\lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2 \neq 0:$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A} &= \Big(\big(c_1^1 + c_2^1(\lambda_3, r)\big)e^{(\lambda_1, r)} + a_1^1\Big)\overrightarrow{\xi} + \Big(c_2^1 e^{(\lambda_1, r)} + a_2^1\Big)\overrightarrow{\eta} + \Big((g_1, r) + c_3^1\Big)\overrightarrow{\zeta},\\
\overrightarrow{B} &= \Big(\big(c_1^2 + c_2^2(\lambda_3, r)\big)e^{(\lambda_1, r)} + a_1^2\Big)\overrightarrow{\xi} + \Big(c_2^2 e^{(\lambda_1, r)} + a_2^2\Big)\overrightarrow{\eta} + \Big((g_2, r) + c_3^2\Big)\overrightarrow{\zeta},\\
\overrightarrow{C} &= \Big(\big(c_1^3 + c_1^3(\lambda_3, r)\big)e^{(\lambda_1, r)} + a_1^3\Big)\overrightarrow{\xi} + \Big(c_2^3 e^{(\lambda_1, r)} + a_2^3\Big)\overrightarrow{\eta} + \Big((g_3, r) + c_3^3\Big)\overrightarrow{\zeta};
\end{aligned}$$

*при* $\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=0$, $\lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2\neq 0$ *и* $\lambda_3^2+\mu_3^2+\nu_3^2\neq 0$:

$$\overrightarrow{A}=\Big(\lambda_3 g_2^1 x^2/2+\mu_3 p_2^1 y^2/2+\nu_3 q_2^1 z^2/2+\mu_3 g_2^1 xy+\nu_3 g_2^1 xz+\nu_3 p_2^1 yz + (q_1,r)+c_1^1\Big)\overrightarrow{\xi}+\Big((p_1,r)+c_2^1\Big)\overrightarrow{\eta}+\Big(c_3^1 e^{(\lambda_2,r)}+a_3^1\Big)\overrightarrow{\zeta},$$
$$\overrightarrow{B}=\Big(\lambda_3 g_2^2 x^2/2+\mu_3 p_2^2 y^2/2+\nu_3 q_2^2 z^2/2+\mu_3 g_2^2 xy+\nu_3 g_2^2 xz+\nu_3 p_2^2 yz + (q_2,r)+c_1^2\Big)\overrightarrow{\xi}+\Big((p_2,r)+c_2^2\Big)\overrightarrow{\eta}+\Big(c_3^2 e^{(\lambda_2,r)}+a_3^2\Big)\overrightarrow{\zeta},$$
$$\overrightarrow{C}=\Big(\lambda_3 g_2^3 x^2/2+\mu_3 p_2^3 y^2/2+\nu_3 q_2^3 z^2/2+\mu_3 g_2^3 xy+\nu_3 g_2^3 xz+\nu_3 p_2^3 yz + (q_3,r)+c_1^3\Big)\overrightarrow{\xi}+\Big((p_3,r)+c_2^3\Big)\overrightarrow{\eta}+\Big(c_3^3 e^{(\lambda_2,r)}+a_3^3\Big)\overrightarrow{\zeta};$$

*при* $\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=0$, $\lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2=0$ *и* $\lambda_3^2+\mu_3^2+\nu_3^2\neq 0$ :

$$\overrightarrow{A}=\Big(\lambda_3 g_2^1 x^2/2+\mu_3 p_2^1 y^2/2+\nu_3 q_2^1 z^2/2+\mu_3 g_2^1 xy+\nu_3 g_2^1 xz+\nu_3 p_2^1 yz +(q_1,r)+c_1^1\Big)\overrightarrow{\xi}+\Big((p_1,r)+c_2^1\Big)\overrightarrow{\eta}+\Big((g_1,r)+c_3^1\Big)\overrightarrow{\zeta},$$
$$\overrightarrow{B}=\Big(\lambda_3 g_2^2 x^2/2+\mu_3 p_2^2 y^2/2+\nu_3 q_2^2 z^2/2+\mu_3 g_2^2 xy+\nu_3 g_2^2 xz+\nu_3 p_2^2 yz +(q_2,r)+c_1^2\Big)\overrightarrow{\xi}+\Big((p_2,r)+c_2^2\Big)\overrightarrow{\eta}+\Big((g_2,r)+c_3^2\Big)\overrightarrow{\zeta},$$
$$\overrightarrow{C}=\Big(\lambda_3 g_2^3 x^2/2+\mu_3 p_2^3 y^2/2+\nu_3 q_2^3 z^2/2+\mu_3 g_2^3 xy+\nu_3 g_2^3 xz+\nu_3 p_2^3 yz +(q_3,r)+c_1^3\Big)\overrightarrow{\xi}+\Big((p_3,r)+c_2^3\Big)\overrightarrow{\eta}+\Big((g_3,r)+c_3^3\Big)\overrightarrow{\zeta},$$

где $c_i^j$, $g_j^i$, $q_j^i$, $p_j^i$, $a_j^i$ — *постоянные*, $i,j=1,2,3$, $\lambda_3 p_2^1=\mu_3 g_2^1$, $\lambda_3 q_2^1=\nu_3 g_2^1$, $\mu_3 q_2^1=\nu_3 p_2^1$, $\lambda_3 p_2^2=\mu_3 g_2^2$ $\lambda_3 q_2^2=\nu_3 g_2^2$, $\mu_3 q_2^2=\nu_3 p_2^2$, $\lambda_3 p_2^3=\mu_3 g_2^3$, $\lambda_3 q_2^3=\nu_3 g_2^3$, $\mu_3 q_2^3=\nu_3 p_2^3$.

Из решений, содержащихся в предложении 2, ниже будут выделены алгебры Ли. По найденным решениям запишем базисные операторы (1.2) из [1] *шестимерных линейных пространств*, при этом операторы $Y_1$, $Y_2$ и $Y_3$ комбинируем с операторами $X_1$, $X_2$ и $X_3$ так, чтобы исчезли свободные члены:

$$\begin{gathered} X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\\ Y_1=e^{(\lambda_1,r)z}\left(c_1^1\partial_x+c_1^2\partial_y+c_1^3\partial_z+(\lambda_3,r)\big(c_2^1\partial_x+c_2^2\partial_y+c_2^3\partial_z\big)\right),\\ Y_2=e^{(\lambda_1,r)}\left(c_2^1\partial_x+c_2^2\partial_y+c_2^3\partial_z\right),\ Y_3=e^{(\lambda_2,r)}\left(c_3^1\partial_x+c_3^2\partial_y+c_3^3\partial_z\right); \end{gathered}\tag{26}$$

$$\begin{gathered} X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\\ Y_1=e^{(\lambda_1,r)}\left(c_1^1\partial_x+c_1^2\partial_y+c_1^3\partial_z+(\lambda_3,r)\big(c_2^1\partial_x+c_2^2\partial_y+c_2^3\partial_z\big)\right),\\ Y_2=e^{(\lambda_1,r)}\left(c_2^1\partial_x+c_2^2\partial_y+c_2^3\partial_z\right),\quad Y_3=(g_1,r)\partial_x+(g_2,r)\partial_y+(g_3,r)\partial_z; \end{gathered}\tag{27}$$

$$\begin{gathered} X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\\ Y_1=\left((\lambda_3,r)(p_1,r)/2+(q_1,r)\right)\partial_x+\left((\lambda_3,r)(p_2,r)/2+(q_2,r)\right)\partial_y\\ +\left((\lambda_3,r)(p_3,r)/2+(q_3,r)\right)\partial_z,\\ Y_2=(p_1,r)\partial_x+(p_2,r)\partial_y+(p_3,r)\partial_z,\quad Y_3=e^{(\lambda_3,r)}\left(c_3^1\partial_x+c_3^2\partial_y+c_3^3\partial_z\right); \end{gathered}\tag{28}$$

$$\begin{gathered} X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\\ Y_1=((\lambda_3,r)(p_1,r)/2+(q_1,r))\partial_x+((\lambda_3,r)(p_2,r)/2+(q_2,r))\partial_y\\ +((\lambda_3,r)(p_3,r)/2+(q_3,r))\partial_z,\\ Y_2=(p_1,r)\partial_x+(p_2,r)\partial_y+(p_3,r)\partial_z,\quad Y_3=(g_1,r)\partial_x+(g_2,r)\partial_y+(g_3,r)\partial_z. \end{gathered}\tag{29}$$

Далее, как и в предыдущем случае, требование невырожденности матрицы $K(b) - K(a)$ приводит к упрощению систем (26)–(27), которые запишем без операторов $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_3 = \partial_z$:

$$Y_1 = e^{(\lambda_1, r)}\left(\partial_x + (\lambda_3, r)\partial_y\right), \quad Y_2 = e^{(\lambda_1, r)}\partial_y, \quad Y_3 = e^{(\lambda_2, r)}\partial_z; \tag{30}$$

$$Y_1 = e^{(\lambda_1, r)}\left(\partial_x + (\lambda_3, r)\partial_y\right), \quad Y_2 = e^{(\lambda_1, r)}\partial_y, \quad Y_3 = (g_1, r)\partial_x + (g_2, r)\partial_y + (g_3, r)\partial_z; \tag{31}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = \left(x(p_1, r)/2 + (q_1, r)\right)\partial_x + \left(x(p_2, r)/2 + (q_2, r)\right)\partial_y + \left(x(p_3, r)/2 + (q_3, r)\right)\partial_z, \\ Y_2 = (p_1, r)\partial_x + (p_2, r)\partial_y + (p_3, r)\partial_z, \quad Y_3 = e^{(\lambda_2, r)}\left(c_3^1\partial_x + c_3^2\partial_y + c_3^3\partial_z\right); \end{gathered} \tag{32}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = (x(p_1, r)/2 + (q_1^1, r))\partial_x + (x(p_2, r)/2 + (q_2, r))\partial_y + (x(p_3, r)/2 + (q_3, r))\partial_z, \\ Y_2 = (p_1, r)\partial_x + (p_2, r)\partial_y + (p_3, r)\partial_z, \quad Y_3 = (g_1, r)\partial_x + (g_2, r)\partial_y + (g_3, r)\partial_z, \end{gathered} \tag{33}$$

где $\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 \neq 0$, $\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 \neq 0$, $\lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2 \neq 0$.

Потом воспользуемся условием замкнутости коммутаторов $[X_1, Y_1]$, $[X_2, Y_1]$, $[X_3, Y_1]$, $[Y_1, Y_2]$, $[Y_1, Y_3]$ и $[Y_2, Y_3]$ и теоремой 1 для выделения нужных шестимерных алгебр Ли, после чего переходим к подходящим координатам и линейно комбинируем оператора $X_1$, $X_2$, $X_3$, $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$. В результате в прежних обозначениях операторов, координат и подходящих обозначений для коэффициентов, будем иметь

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = e^x\left(\partial_x + (y + az)\partial_y\right),\ Y_2 = e^x\partial_y,\ Y_3 = e^{-x}\partial_z; \tag{34}$$

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = e^x\left(\partial_x + y\partial_y\right),\ Y_2 = e^x\partial_y,\ Y_3 = z\partial_z; \tag{35}$$

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = x^2\partial_x + x\partial_y,\ Y_2 = x\partial_x,\ Y_3 = z\partial_z; \tag{36}$$

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = x\partial_x + (x^2 + ay)\partial_y,\ Y_2 = x\partial_y,\ Y_3 = z\partial_z; \tag{37}$$

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = (x^2 + ay)\partial_y + (bx + cz)\partial_z,\ Y_2 = x\partial_y, \\ Y_3 = x\partial_x + 2y\partial_y + z\partial_z; \end{gathered} \tag{38}$$

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = (x^2 + ay + bz)\partial_y + 2z\partial_z,\ Y_2 = x\partial_y, \\ Y_3 = x\partial_x + 2y\partial_y + 2z\partial_z; \end{gathered} \tag{39}$$

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z, \\ Y_1 = (x^2 + 2y + az)\partial_y + 2z\partial_z,\ Y_2 = x\partial_y,\ Y_3 = x\partial_x + (2y + bz)\partial_y + 2z\partial_z; \end{gathered} \tag{40}$$

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = (x^2 + ay)\partial_y + bz\partial_z,\ Y_2 = x\partial_y, \\ Y_3 = x\partial_x + 2y\partial_y + cz\partial_z; \end{gathered} \tag{41}$$

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = x\partial_x + ((a + 1)y + bz)\partial_y + az\partial_z,\ Y_2 = x\partial_y, \\ Y_3 = x^2\partial_y + x\partial_z; \end{gathered} \tag{42}$$

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = x\partial_x + (x^2 + ay + bz)\partial_y + cz\partial_z, \\ Y_2 = x\partial_y,\ Y_3 = x\partial_z; \end{gathered} \tag{43}$$

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z, \\ Y_1 = 2x\partial_x + (x^2 + 2ay + bz)\partial_y + (a + 1)z\partial_z,\ Y_2 = x\partial_y,\ Y_3 = z\partial_y + x\partial_z; \end{gathered} \tag{44}$$

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = 2x\partial_x + (x^2 + ay)\partial_y + 2z\partial_z, \\ Y_2 = x\partial_y,\ Y_3 = (bx + z)\partial_z; \end{gathered} \tag{45}$$

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z, \\ Y_1 = 2x\partial_x + (x^2 + ay + bz)\partial_y + (y + cz)\partial_z,\ Y_2 = x\partial_y,\ Y_3 = x\partial_z. \end{gathered} \tag{46}$$

Нами доказана теорема 2.

**Теорема 3.** *Алгебра Ли, определяемая матрицами* **2**, *локально ограниченно точно дважды транзитивной группы Ли преобразований пространства* $R^3$, *полученной расширением группы параллельных переносов этого же пространства, изоморфна одной из алгебр Ли из списка* (34)–(46).

## 4. Алгебры Ли, определяемые матрицами 3

**Предложение 3.** *Система дифференциальных уравнений* (0.1) *из* [1] *с одновременно ненулевыми матрицами* $T_1$, $T_2$ *и* $T_3$, *принимающих вид* **3** *из введения, в подходящем базисе имеет два решения:*
*при* $\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2\neq 0$ *и* $\lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2\neq 0$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= \left((c_1^1+c_2^1(\lambda_2,r)+c_3^1(\lambda_3,r)+c_3^1(\lambda_2,r)^2/2)e^{(\lambda_1,r)}+a_1^1\right)\overrightarrow{\xi}\\ &\quad+\left((c_2^1+c_3^1(\lambda_2,r))e^{(\lambda_1,r)}+a_2^1\right)\overrightarrow{\eta}+\left(c_3^1e^{(\lambda_1,r)}+a_3^1\right)\overrightarrow{\zeta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B} &= \left((c_1^2+c_2^2(\lambda_2,r)+c_3^2(\lambda_3,r)+c_3^2(\lambda_2,r)^2/2)e^{(\lambda_1,r)}+a_1^2\right)\overrightarrow{\xi}\\ &\quad+\left((c_2^2+c_3^2(\lambda_2,r))e^{(\lambda_1,r)}+a_2^2\right)\overrightarrow{\eta}+\left(c_3^2e^{(\lambda_1,r)}+a_3^2\right)\overrightarrow{\zeta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C} &= \left((c_1^3+c_2^3(\lambda_2,r)+c_3^3(\lambda_3,r)+c_3^3(\lambda_2,r)^2/2)e^{(\lambda_1,r)}+a_1^3\right)\overrightarrow{\xi}\\ &\quad+\left((c_2^3+c_3^3(\lambda_2,r))e^{(\lambda_1,r)}+a_2^3\right)\overrightarrow{\eta}+\left(c_3^3e^{(\lambda_1,r)}+a_3^3\right)\overrightarrow{\zeta};\end{aligned}$$

*при* $\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=0$ *и* $\lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2\neq 0$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= \left((\lambda_2,r)^2(g_1,r)/6+(\lambda_2,r)(p_1,r)/2+(\lambda_3,r)(g_1,r)/2+(q_1,r)+c_1^1\right)\overrightarrow{\xi}\\ &\quad+\left((\lambda_2,r)(g_1,r)/2+(p_1,r)+c_2^1\right)\overrightarrow{\eta}+\left((g_1,r)+c_3^1\right)\overrightarrow{\zeta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B} &= \left((\lambda_2,r)^2(g_2,r)/6+(\lambda_2,r)(p_2,r)/2+(\lambda_3,r)(g_2,r)/2+(q_2,r)+c_1^2\right)\overrightarrow{\xi}\\ &\quad+\left((\lambda_2,r)(g_2,r)/2+(p_2,r)+c_2^2\right)\overrightarrow{\eta}+\left((g_2,r)+c_3^2\right)\overrightarrow{\zeta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C} &= \left((\lambda_2,r)^2(g_3,r)/6+(\lambda_2,r)(p_3,r)/2+(\lambda_3,r)(g_3,r)/2+(q_3,r)+c_1^3\right)\overrightarrow{\xi}\\ &\quad+\left((\lambda_2,r)(g_3,r)/2+(p_3,r)+c_2^3\right)\overrightarrow{\eta}+\left((g_3,r)+c_3^3\right)\overrightarrow{\zeta},\end{aligned}$$

*где* $c_i^j$, $g_j^i$, $q_j^i$, $p_j^i$, $a_j^i$ *— постоянные,* $i,j=1,2,3$, $\lambda_3p_2^3=\mu_3g_2^3$, $\lambda_3q_2^3=\nu_3g_2^3$, $\mu_3q_2^3=\nu_3p_2^3$.

Из решений, содержащихся в предложении 3, выделяются алгебры Ли, при этом используется метод, апробированный в предыдущих разделах. В итоге получаем

$$\begin{gathered}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\quad Y_1=e^x\left(\partial_x+y\partial_y+(z+y^2/2)\partial_z\right),\\ Y_2=e^x\left(\partial_y+y\partial_z\right),\quad Y_3=e^x\partial_z;\end{gathered}\tag{47}$$

$$\begin{gathered}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\\ Y_1=6x\partial_x+(x^3+ay+bz)\partial_y+(3x^2+cx+(a-6)z)\partial_z,\\ Y_2=x^2\partial_y+2x\partial_z,\;\; Y_3=x\partial_y;\end{gathered}\tag{48}$$

$$\begin{gathered}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\\ Y_1=x\partial_x+(x^3/6+\beta xz+(3-2\beta)y+bz)\partial_y+(x^2/2+cx+(2-\beta)z)\partial_z,\\ Y_2=(x^2/2+\beta z)\partial_y+x\partial_z,\quad Y_3=x\partial_y;\end{gathered}\tag{49}$$

$$\begin{gathered}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\\ Y_1=6x^2\partial_x+(x^3+6xy)\partial_y+x\partial_z,\quad Y_2=4x\partial_x+(x^2+2y)\partial_y,\quad Y_3=x\partial_y;\end{gathered}\tag{50}$$

$$\begin{gathered}X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \\ Y_1 = -(3x^2 + 18y)\partial_x + (x^3 + 6xy)\partial_y + (3x^2 + 18y)\partial_z, \\ Y_2 = -2x\partial_x + (x^2 + 2y)\partial_y + 2x\partial_z, \quad Y_3 = x\partial_y.\end{gathered} \tag{51}$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы

**Теорема 4.** *Алгебра Ли, определяемая матрицами* **3**, *локально ограниченно точно дважды транзитивной группы Ли преобразований пространства* $R^3$, *полученной расширением группы параллельных переносов этого же пространства, изоморфна одной из алгебр Ли из списка* (47)–(51).

## 5. Алгебры Ли, определяемые матрицами 4

**Предложение 4.** *Система дифференциальных уравнений* (0.1) *из* [1] *с одновременно ненулевыми матрицами* $T_1$, $T_2$ *и* $T_3$, *принимающих вид* **4** *из введения, в подходящем базисе имеет два решения:*
*при* $\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 \neq 0$ *и* $\lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2 \neq 0$ :

$$\begin{gathered}\overrightarrow{A} = \left((c_1^1 \cos(\lambda_2, r) + c_2^1 \sin(\lambda_2, r))e^{(\lambda_1, r)} + a_1^1\right) \overrightarrow{\xi} \\ + \left((-c_1^1 \sin(\lambda_2, r) + c_2^1 \cos(\lambda_2, r))e^{(\lambda_1, r)} + a_2^1\right) \overrightarrow{\eta} + \left(c_3^1 e^{(\lambda_3, r)} + a_3^1\right) \overrightarrow{\zeta}, \\ \overrightarrow{B} = \left((c_1^2 \cos(\lambda_2, r) + c_2^2 \sin(\lambda_2, r))e^{(\lambda_1, r)} + a_1^2\right) \overrightarrow{\xi} \\ + \left((-c_1^2 \sin(\lambda_2, r) + c_2^2 \cos(\lambda_2, r))e^{(\lambda_1, r)} + a_2^2\right) \overrightarrow{\eta} + \left(c_3^2 e^{(\lambda_3, r)} + a_3^2\right) \overrightarrow{\zeta}, \\ \overrightarrow{C} = \left((c_1^3 \cos(\lambda_2, r) + c_2^3 \sin(\lambda_2, r))e^{(\lambda_1, r)} + a_1^3\right) \overrightarrow{\xi} \\ + \left((-c_1^3 \sin(\lambda_2, r) + c_2^3 \cos(\lambda_2, r))e^{(\lambda_1, r)} + a_2^3\right) \overrightarrow{\eta} + \left(c_3^3 e^{(\lambda_3, r)} + a_3^3\right) \overrightarrow{\zeta};\end{gathered}$$

*при* $\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 \neq 0$ *и* $\lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2 = 0$*:*

$$\begin{gathered}\overrightarrow{A} = \left((c_1^1 \cos(\lambda_2, r) + c_2^1 \sin(\lambda_2, r))e^{(\lambda_1, r)} + a_1^1\right) \overrightarrow{\xi} \\ + \left((-c_1^1 \sin(\lambda_2, r) + c_2^1 \cos(\lambda_2, r)\right) e^{(\lambda_1, r)} + a_2^1) \overrightarrow{\eta} + \left((g_1, r) + c_3^1\right) \overrightarrow{\zeta}, \\ \overrightarrow{B} = \left((c_1^2 \cos(\lambda_2, r) + c_2^2 \sin(\lambda_2, r))e^{(\lambda_1, r)} + a_1^2\right) \overrightarrow{\xi} \\ + \left((-c_1^2 \sin(\lambda_2, r) + c_2^2 \cos(\lambda_2, r))e^{(\lambda_1, r)} + a_2^2\right) \overrightarrow{\eta} + \left((g_2, r) + c_3^2\right) \overrightarrow{\zeta}, \\ \overrightarrow{C} = \left((c_1^3 \cos(\lambda_2, r) + c_2^3 \sin(\lambda_2, r))e^{(\lambda_1, r)} + a_1^3\right) \overrightarrow{\xi} \\ + \left((-c_1^3 \sin(\lambda_2, r) + c_2^3 \cos(\lambda_2, r))e^{(\lambda_1, r)} + a_2^3\right) \overrightarrow{\eta} + \left((g_3, r) + c_3^3\right) \overrightarrow{\zeta},\end{gathered}$$

*где* $c_i^j$, $g_j^i$, $q_j^i$, $p_j^i$, $a_j^i$ *— постоянные*, $i, j = 1, 2, 3$.

Из решений, содержащихся в предложении 4, выделяются алгебры Ли. Для этого по найденным решениям запишем базисные операторы (0.2) из [1] *шестимерных линейных пространств*, причем операторы $Y_1$, $Y_2$ и $Y_3$ комбинируем с операторами $X_1$, $X_2$ и $X_3$ так, чтобы исчезли свободные члены (здесь и везде ниже записываем только операторы $Y_1$, $Y_2$ и $Y_3$ помня, что системы операторов всегда содержат $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_3 = \partial_z$), после чего исследуя на замкнутость коммутаторы этих операторов и учитывая следствие из теоремы 1, получаем

$$\begin{gathered}Y_1 = \cos(-\mu_1 x + \lambda_1 y)\partial_x + \sin(-\mu_1 x + \lambda_1 y)\partial_y, \\ Y_2 = -\sin(-\mu_1 x + \lambda_1 y)\partial_x + \cos(-\mu_1 x + \lambda_1 y)\partial_y, \quad Y_3 = e^{\nu_3 z}\partial_z;\end{gathered} \tag{52}$$

$$\begin{gathered}Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \left(\cos(-\mu_1 x + \lambda_1 y)\partial_x + \sin(-\mu_1 x + \lambda_1 y)\partial_y\right), \\ Y_2 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \left(-\sin(-\mu_1 x + \lambda_1 y)\partial_x + \cos(-\mu_1 x + \lambda_1 y)\partial_y\right), \quad Y_3 = e^{\nu_3 z}\partial_z;\end{gathered} \tag{53}$$

$$\begin{gathered} Y_1=\cos(-\mu_1 x+\lambda_1 y+\nu_2 z)\partial_x+\sin(-\mu_1 x+\lambda_1 y+\nu_2 z)\partial_y, \\ Y_2=-\sin(-\mu_1 x+\lambda_1 y+\nu_2 z)\partial_x+\cos(-\mu_1 x+\lambda_1 y+\nu_2 z)\partial_y, \\ Y_3=q_3^1 z\partial_x+q_3^2 z\partial_y+q_3^3 z\partial_z, \quad -\mu_1 q_3^1+\lambda_1 q_3^2+q_3^3\nu_2=0; \end{gathered} \tag{54}$$

$$\begin{gathered} Y_1=e^{\lambda_1 x+\mu_1 y+\nu_1 z}\left(\cos(-\mu_1 x+\lambda_1 y+\nu_2 z)\partial_x+\sin(-\mu_1 x+\lambda_1 y+\nu_2 z)\partial_y\right), \\ Y_2=e^{\lambda_1 x+\mu_1 y+\nu_1 z}\left(-\sin(-\mu_1 x+\lambda_1 y+\nu_2 z)\partial_x+\cos(-\mu_1 x+\lambda_1 y+\nu_2 z)\partial_y\right), \\ Y_3=q_3^1 z\partial_x+q_3^2 z\partial_y+q_3^3 z\partial_z, \quad \lambda_1 q_3^1+\mu_1 q_3^2+q_3^3\nu_1=0, \quad -\mu_1 q_3^1+\lambda_1 q_3^2+q_3^3\nu_2=0, \end{gathered} \tag{55}$$

причем $\lambda_1^2+\mu_1^2\neq 0$.

В системах (52) и (53) вводим замену $x'=x$, $y'=y$, $z'=e^{-\nu_3 z}$, в результате их включаем соответственно в (54) и (55).

Далее в (54) и (55) при $\lambda_1\neq 0$ вводим замену координат $x'=\lambda_1 x+\mu_1 y$, $y'=-\mu_1 x+\lambda_1 y+\psi$, $z'=z$, $\lambda_1=R\cos\psi$, $\mu_1=R\sin\psi$, затем линейно комбинируем базисные операторы:

$$\begin{gathered} Y_1=\cos(y+\nu_2 z)\partial_x+\sin(y+\nu_2 z)\partial_y, \\ Y_2=-\sin(y+\nu_2 z)\partial_x+\cos(y+\nu_2 z)\partial_y, \quad Y_3=-\nu_1 z\partial_x-\nu_2 z\partial_y+z\partial_z; \end{gathered} \tag{56}$$

$$\begin{gathered} Y_1=e^{x+\nu_1 z}\left(\cos(y+\nu_2 z)\partial_x+\sin(y+\nu_2 z)\partial_y\right), \\ Y_2=e^{x+\nu_1 z}\left(-\sin(y+\nu_2 z)\partial_x+\cos(y+\nu_2 z)\partial_y\right), \quad Y_3=-\nu_1 z\partial_x-\nu_2 z\partial_y+z\partial_z. \end{gathered} \tag{57}$$

Если $\lambda_1=0$, то в (54) и (55) вводя замену $x'=\mu_1 y$, $y'=-\mu_1 x$, $z'=z$, получаем (56) и (57) соответственно.

И, наконец, вводя замену $x'=x+\nu_1 z$, $y'=y+\nu_2 z$, $z'=z$, а затем в первом случае замену — $x=\ln\frac{x'^2}{1+y'^2}$, $y=\operatorname{arctg}\frac{2y'}{1-y'^2}$, $z'=z$ и еще одну — $x'=1/x$, $y'=y/x$, $z'=z$, а во втором случае другую замену — $x'=e^{-x}\cos y$, $y'=e^{-x}\sin y$, после линейной комбинации операторов, в прежних обозначениях для координат, окончательно будем иметь

$$X_1=x\partial_y, \quad X_2=y\partial_x, \quad X_3=\partial_z, \quad Y_1=x\partial_x, \quad Y_2=y\partial_y, \quad Y_3=z\partial_z; \tag{58}$$

$$X_1=\partial_x, \quad X_2=\partial_y, \quad X_3=\partial_z, \quad Y_1=x\partial_x+y\partial_y, \quad Y_2=-y\partial_x+x\partial_y, \quad Y_3=z\partial_z. \tag{59}$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы

**Теорема 5.** *Алгебра Ли, определяемая матрицами* **4**, *локально ограниченно точно дважды транзитивной группы Ли преобразований пространства $R^3$, полученной расширением группы параллельных переносов этого же пространства, изоморфна одной из алгебр Ли из списка* (58), (59).

### 6. Исследование найденных алгебр Ли

Сначала приводятся определения по работе [6]. Идеал $L^{(1)}=[L,L]$ называется первым коммутантом алгебры Ли $L$, $L^{(2)}=[L^{(1)},L^{(1)}]$ — вторым коммутантом алгебры Ли $L$, а $L^{(k+1)}=[L^{(k)},L^{(k)}]$ — $(k+1)$-ым коммутантом алгебры Ли $L$. В итоге возникает ряд коммутатнов:

$$L\supset L^{(1)}\supset L^{(2)}\supset\cdots\supset L^{(k)}\supset\cdots$$

Алгебра Ли $L$ называется *разрешимой*, если ее ряд коммутатнов заканчивается нулевым идеалом. Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости теоремы:

**Теорема 6.** *Алгебры Ли* (19), (20), (22), (23), (24), (25), (34), (35), (37), (38), (39), (40), (41), (42), (43), (44), (45), (46), (47), (48), (49), (59) *разрешимы, причем разлагаются* *в прямую сумму идеала $N$ и разрешимой подалгебры $S$: $L = N \oplus S$. При этом для* (19), (20), (22), (23), (24), (25) $N = \{X_1, X_2, X_3\}$ *— коммутативный идеал,* $S = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$*; для* (34), (35), (47), (59) $N = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ *— коммутативный идеал,* $S = \{X_1, X_2, X_3\}$ *— коммутативная подалгебра; для* (37), (38), (39) $N = \{X_1, X_2, Y_2\}$ *— нильпотентный идеал, изоморфный алгебре Гейзенберга,* $S = \{X_3, Y_1, Y_3\}$*; для* (40), (41) $N = \{X_1, X_2, X_3, Y_2\}$ *— нильпотентный идеал,* $S = \{Y_1, Y_3\}$ *— коммутативная подалгебра; для* (42), (43), (44), (45), (46), (48), (49) $N = \{X_1, X_2, X_3, Y_2, Y_3\}$ *— нильпотентный идеал,* $S = \{Y_1\}$.

Отметим, что результат теоремы 6 можно получить и иначе, воспользовавшись полной классификацией шестимерных разрешимых вещественных алгебр Ли [7–10]. На практике это означает нахождение представлений векторными полями уже известных разрешимых алгебра Ли. Данная задача является технически сложной и долгой.

Несложно установить, что алгебры Ли (21), (36), (50), (51) и (58) не разрешимые и не полупростые. Следующая теорема описывает структуру этих алгебр Ли.

**Теорема 7.** *Алгебры Ли* (21), (36), (50), (51) *и* (58) *представимы в виде прямой суммы разрешимого идеала $N$ и подалгебры $S$, изоморфной $sl(2, R)$: $L = N \oplus S$, причем для алгебр* (21), (50) *и* (58) *идеал $N$ коммутативен, для алгебры* (36) *— изоморфен алгебре Ли с образующими: $e_1, e_2, e_3, [e_1, e_2] = e_1$, для алгебры* (51) *— изоморфен алгебре Ли Гейзенберга $ut(3, R)$; для алгебр* (21), (36) *и* (58) *подалгебра $S$ является идеалом. При этом для* (21) $N = \{X_1, Y_1, X_3\}$, *а* $S = \{Y_2, Y_3, X_3 - X_2\}$*; для* (36) $N = \{X_3, Y_3, 2X_2 - Y_2\}$, *а* $S = \{X_1, Y_1, 2Y_2 + X_2\}$*; для* (58) $N = \{X_3, Y_3, Y_1 + Y_2\}$, *а* $S = \{X_1, X_2, Y_1 - Y_2\}$*; для* (50) $N = \{X_2, X_3, Y_3\}$, *а* $S = \{Y_1, X_1 + Y_3/3, X_3 + 3Y_2\}$*; для* (51) $N = \{X_1 - Y_3/3, X_2, X_3 + 2Y_3/3\}$, *а* $S = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$.

Заметим, что структура этих алгебр Ли описана в работе [11].

**Следствие.** *Алгебры Ли* (21) *и* (58) *изоморфны.*

Доказательство этих теорем сводится к анализу коммутаторов базисных векторных полей исследуемых алгебр Ли.

**Заключение.** В данной работе решена задача локального расширения группы параллельных переносов пространства $R^3$ до локально ограниченно точно дважды транзитивной группы Ли преобразований этого же пространства для случая, когда матрицы $T_1$, $T_2$, $T_3$ одновременно ненулевые и принимают вид **1–4** из введения. Следующим этапом является нахождение действий групп Ли с выше найденными алгебрами Ли.

## Литература


1. *Кыров В. А.* О локальном расширении группы параллельных переносов в трехмерном пространстве // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.—2022.—Т. 32, № 1.—С. 62–80. DOI: 10.35634/vm220105.
2. *Кыров В. А.* К вопросу о локальном расширении группы параллельных переносов трехмерного пространства // Владикавк. матем. журн.—2021.—Т. 23, № 1.—С. 32–42. DOI: 10.46698/q6524-1245-2359-m.
3. *Gorbatsevich V. V.* Extension of transitive actions of Lie groups // Izv. Math.—2017.—Vol. 81, № 6.—С. 1143–1154. DOI: 10.4213/im8506.
4. *Михайличенко Г. Г.* Групповая симметрия физических структур.—Барнаул: Барн. гос. пед. ун-т, 2003.—203 с.
5. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Вложение аддитивной двуметрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга (2,2) в двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга (3,2) // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.—2018.—Т. 28, № 3.—С. 305–327. DOI: 10.20537/vm180304.
6. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978.—400 с.

7. *Морозов В. В.* Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка // Изв. вузов. Матем.—1958.—№ 4.—С. 161–171.
8. *Мубаракзянов Г. М.* О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Матем.—1963.—№ 1.—С. 114–123.
9. *Мубаракзянов Г. М.* Классификация разрешимых алгебр Ли шестого порядка с одним ненильпотентным базисным элементом // Изв. вузов. Матем.—1963.—№ 4.—С. 104–116.
10. *Turkowski P.* Solvable Lie algebras of dimension six // J. Math. Phys.—1990.—Vol. 31, № 6.—P. 1344–1350. DOI: 10.1063/1.528721.
11. *Turkowski P.* Lowdimensional real Lie algebras // J. Math. Phys.—1988.—Vol. 29, № 10.—P. 2139–2144. DOI: 10.1063/1.528140.


*Статья поступила 27 ноября 2023 г.*

Кыров Владимир Александрович
Горно-Алтайский государственный университет,
*доцент кафедры математики, физики и информатики*
РОССИЯ, 649000, Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1
E-mail: kyrovVA@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0001-5925-7706

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2024, Volume 26, Issue 2, P. 54–69*

# ON THE LOCAL EXTENSION OF THE GROUP OF PARALLEL TRANSLATIONS IN THREE-DIMENSIONAL SPACE. II

Kyrov, V. A.[1]

[1] Gorno-Altaisk State University,
1 Lenkina St., Gorno-Altaisk 649000, Russia
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

**Abstract.** This article solves the problem of local extension of the group of parallel translations of a three-dimensional space to a locally bounded exactly doubly transitive group of Lie transformations of the same space. Locally bounded exactly twice transitivity means the existence of a unique transformation that takes an arbitrary pair of non-coinciding points from some open neighborhood to almost any pair of points from the same neighborhood. The problem posed is solved for four cases related to Jordan forms of third-order matrices. Using these Jordan matrices, systems of linear differential equations are written, the solutions of which lead to the basis operators of a six-dimensional linear space. Requiring that the commutators of the basis operators be closed, we find Lie algebras. By checking the condition of bounded exactly twice transitivity, we obtain the Lie algebras of the required Lie transformation groups. At the end of the paper it is proved that these Lie algebras are either solvable or representable as a direct sum of a solvable ideal and a subalgebra isomorphic to $sl(2,R)$. In this case, solvable Lie algebras are decomposed into the direct sum of a nilpotent ideal and a solvable subalgebra. Finally, the isomorphism of some above found Lie algebras is established.

**Keywords:** Lie group of transformations, locally bounded exactly doubly transitive Lie group of transformations, Lie algebra, Jordan form of a matrix.

**AMS Subject Classification:** 22F99.

**For citation:** *Kyrov, V. A.* On the Local Extension of the Group of Parallel Translations in Three-Dimensional Space. II, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 2, pp. 54–69 (in Russian). DOI: 10.46698/a9077-8757-4946-m.

## References


1. *Kyrov, V. A.* On the Local Extension of the Group of Parallel Translations in Three-Dimensional Space, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki*, 2022, vol. 32, no. 1, pp. 62–80 (in Russian). DOI: 10.35634/vm220105.

2. *Kyrov, V. A.* On the Question of Local Extension of the Group of Parallel Translations of Three-Dimensional Space, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2021, vol. 23, no. 1, pp. 32–42 (in Russian). DOI: 10.46698/q6524-1245-2359-m.
3. *Gorbatsevich, V. V.* Extension of Transitive Actions of Lie Groups, *Izvestiya: Mathematics*, 2017, vol. 81, no. 6, pp. 38–51. DOI: 10.1070/im8506.
4. *Mikhailichenko, G. G. Group Symmetry of Physical Structures*, Barnaul, BGPU, 2003, 203 p. (in Russian).
5. *Kyrov, V. A. and Mikhailichenko, G. G.* Embedding of the Additive Two-Metric Phenomenologically Symmetric Geometry of Two Sets of Rank (2,2) into the Two-Metric Phenomenologically Symmetric Geometries of Two Sets of Rank $(3,2)$, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki*, 2018, vol. 28, no. 1, pp. 305–327 (in Russian). DOI: 10.20537/vm180304.
6. *Ovsyannikov, L. V. Group Analysis of Differential Equation*, Moscow: Nauka, 1978, 400 p. (in Russian).
7. *Morozov, V. V.* Classification of Nilpotent Lie Algebras of the Sixth Order, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1958, no. 4, pp. 161–171 (in Russian).
8. *Mubarakzyanov, G. M.* On Solvable Lie Algebras, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1963, no. 1, pp. 114–123 (in Russian).
9. *Mubarakzyanov, G. M.* Classification of Sixth-Order Solvable Lie Algebras with one Non-Nilpotent Basis Element, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1963, no. 4, pp. 104–116 (in Russian).
10. *Turkowski, P.* Solvable Lie Algebras of Dimension Six, *Journal of Mathematical Physics*, 1990, vol. 31, no. 6, pp. 1344–1350 (in Russian). DOI: 10.1063/1.528721.
11. *Turkowski P.* Lowdimensional Real Lie Algebras, *Journal of Mathematical Physics*, 1988, vol. 29, no. 10, pp. 2139–2144 (in Russian). DOI: 10.1063/1.528140.

*Received November 27, 2023*

Vladimir A. Kyrov
Gorno-Altaisk State University,
*Associate Professor*
1 Lenkina St., Gorno-Altaisk 659700, Russia
E-mail: `kyrovVA@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0001-5925-7706