Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 2, С. 82–94

УДК 517.988.63
DOI 10.46698/i3972-5395-8655-d

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННОЙ И ВОГНУТОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[#]

А. С. Петросян[1], Х. А. Хачатрян[2]

[1] Национальный аграрный университет Армении,
Армения, 0009, Ереван, ул. Теряна, 74;
[2] Ереванский государственный университет,
Армения, 0025, Ереван, ул. Алека Манукяна, 1
E-mail: haykuhi25@mail.ru, khachatur.khachatryan@ysu.am

Посвящается 80-летию профессора
Георгия Георгиевича Магарил-Ильяева

Аннотация. В работе исследуется бесконечная система алгебраических уравнений с монотонной и вогнутой нелинейностью. Данная система возникает в различных дискретных задачах математического естествознания. В частности системы такой структуры, при конкретных представлениях нелинейности и соответствующей бесконечной матрицы, встречаются в теории переноса излучения, в кинетической теории газов и в математической теории эпидемических заболеваний. При определенных условиях на элементы соответствующей бесконечной матрицы и на нелинейность доказываются теоремы существования и единственности по координатно неотрицательного нетривиального решения в пространстве ограниченных последовательностей. В ходе доказательства теоремы существования получается также равномерная оценка для соответствующих последовательных приближений. Доказывается также, что построенное решение в бесконечности стремится к положительной неподвижной точке функции, описывающей нелинейность данной системы, со скоростью l_1. Основными инструментами доказательства выше указанных фактов являются метод М. А. Красносельского о построении инвариантных конусных отрезков для соответствующего нелинейного оператора, методы теории дискретных сверточных операторов, а также некоторые геометрические неравенства для вогнутых и монотонных функций. В конце работы приводятся конкретные частные примеры соответствующей бесконечной матрицы и нелинейности удовлетворяющие всем условиям доказанных утверждений.

Ключевые слова: бесконечная система, вогнутость, монотонность, ограниченное решение, последовательные приближения.

AMS Subject Classification: 65R20.

Образец цитирования: *Петросян А. С., Хачатрян Х. А.* О разрешимости одной бесконечной системы алгебраических уравнений с монотонной и вогнутой нелинейностью // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 2.—С. 82–94. DOI: 10.46698/i3972-5395-8655-d.

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$x_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} G(x_j), \quad i \in \mathbb{Z}^+ := \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{1}$$

[#] Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-1A047

относительно искомого бесконечного вектора $\mathrm{x} = (x_0, x_1, \ldots)^T \in m$, координаты которой неотрицательные числа, где m пространство ограниченных последовательностей с нормой $\|x\|_m = \sup_{i\in\mathbb{Z}^+} |x_i|$, а T — знак транспонирования. В системе (1) элементы бесконечной матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ удовлетворяют следующим условиям:

a) $a_{ij} = a_{ji} > 0$, $i, j \in \mathbb{Z}^+$, $\sup_{i\in\mathbb{Z}^+} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = 1$, существует $i_0 \in \mathbb{Z}^+$ такое, что $\gamma_{i_0} > 0$, где

$$\gamma_i := 1 - \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad \text{причем} \quad \gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots)^T \in l_1;$$

b) существуют последовательности $\{b_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ и $\{\mu_j\}_{j=0}^{\infty}$ со свойствами:

$$d_1)\ \ b_i > 0,\ i \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=-\infty}^{\infty} |i| b_i < +\infty, \qquad d_2)\ \ \mu_j > 1,\ j \in \mathbb{Z}^+,\ \sum_{j=0}^{\infty} (\mu_j - 1) < +\infty$$

такие, что имеет место неравенство

$$a_{ij} \leqslant b_{i-j}\mu_j, \quad i, j \in \mathbb{Z}^+. \tag{2}$$

Нелинейность $y = G(u)$ обладает следующими свойствами:

I) $G \in C(\mathbb{R}^+)$, $G(0) = 0$ и существует число $\eta > 0$ такое, что $G(\eta) = \eta$, где $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$;

II) $y = G(u)$ монотонно возрастает и вогнута на множестве $\mathbb{R}^+$;

III) существует число $\alpha \in (0, 1)$ такое, что для всех $\sigma \in (0, 1)$ и $u \in [0, \eta]$ имеет место следующая оценка снизу:

$$G(\sigma u) \geqslant \sigma^{\alpha} G(u). \tag{3}$$

Основной целью настоящей работы является доказательство конструктивной теоремы существования и теоремы единственности в классе ограниченных последовательностей с неотрицательными элементами, а также исследование асимптотического поведения на бесконечности построенного решения.

1.2. Возможные применения, история вопроса. Система (1), при различных представлениях матрицы A и нелинейности G, имеет приложения во многих отраслях математической физики и биологии. В частности такие бесконечные системы возникают в дискретных задачах в теории переноса излучения в неоднородных средах, в кинетической теории газов и плазмы, а также в математической теории распространения эпидемических заболеваний (см. [1–5]). Системы вида (1) могут иметь применения в вопросах численного решения нелинейных псевдодифференциальных уравнений из динамической теории p-адических открытых и открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов (см. [6–8]). Кроме того, ограниченные решения системы (1) могут быть полезны в задаче построения нетривиального решения бесконечных систем нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на положительной полупрямой.

В том частном случае когда $a_{ij} = a_{i-j}$, $i, j \in \mathbb{Z}^+$, вопрос существования положительного и ограниченного решения системы (1) изучен в работах [9, 10]. В случае когда $a_{ij} = a_{i-j} - a_{i+j}$, $i, j \in \mathbb{Z}^+$, в работе [11] доказана конструктивная теорема существования нетривиального неотрицательного решения в пространстве m и исследовано асимптотическое поведение построенного решения на бесконечности. Следует также отметить, что когда нелинейность G зависит от индекса j и при этом $G_j(u)$ допускает следующее представление: $G_j(u) = u - \omega_j(u)$, $j = 0, 1, \ldots$, где $\omega_j(u) \downarrow$ по u на $[\delta, +\infty)$, $\delta > 0$, $\omega_j(u) \in C_M(\mathbb{R}^+) \cap L_1(\mathbb{R}^+)$, $j = 0, 1, \ldots$, а $a_{ij} = a_{i-j} - a_{i+j}$, $i, j \in \mathbb{Z}^+$, в работе [12] доказана существование однопараметрического семейства неотрицательных ограниченных или линейно растущих решений. В [12] исследованы также некоторые качественные свойства построенных решений: монотонность по индексу и по параметру, существование предела на бесконечности каждого решения, конструктивное описание множества параметров.

1.3. Сводка основных результатов. В настоящей работе, при условиях a), b), I)–III), мы займемся построением покоординатно положительного и ограниченного решения системы (1), а также будем исследовать асимптотическое поведения построенного решения на бесконечности и докажем единственность построенного решения.

Структура работы следующая. В параграфе 2 доказана основная ключевая лемма о сходимости ряда $\sum_{j=0}^{\infty}(G(x_j)-x_j)$. В параграфе 3 доказывается конструктивная теорема существования в пространстве m и исследуется асимптотическое поведение построенного решения на $+\infty$. Наконец, в параграфе 4 получается теорема единственности в классе (покоординатно) неотрицательных нетривиальных и ограниченных последовательностей, а также приводятся конкретные примеры бесконечной матрицы A и нелинейности G, удовлетворяющие соответственно условиям a), b) и I)–III).

2. Основная ключевая лемма

Имеет место следующая основная лемма

Лемма 1. *При условиях* a), b), I), II) *любое (покоординатно) неотрицательное нетривиальное решение* $\mathrm{x} = (x_0, x_1, \ldots)^T \in m$ *обладает следующими свойствами:*

$$p_1) \quad x_i \leqslant \eta,\ i \in \mathbb{Z}^+, \qquad p_2) \quad \sum_{i=0}^{\infty}(G(x_i) - x_i) < +\infty.$$

$\lhd$ Сперва докажем утверждение p_1). Обозначим через

$$c_0 = \sup_{i \in \mathbb{Z}^+} x_i < +\infty.$$

Тогда, учитывая условия a), I) и II), из системы (1) будем иметь

$$x_i \leqslant G(c_0) \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \leqslant G(c_0), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

откуда в силу определения супремума следует, что $c_0 \leqslant G(c_0)$. Заметим, что из последнего неравенства следует, что $c_0 \leqslant \eta$. Действительно, в противном случае, принимая во внимание условия I), II) (см. рис. 1) получим $\frac{G(c_0)}{c_0} < \frac{G(\eta)}{\eta} = 1$. Последнее неравенство противоречит оценке $c_0 \leqslant G(c_0)$. Следовательно, $x_i \leqslant c_0 \leqslant \eta$, $i \in \mathbb{Z}^+$. Из утверждения p_1) в частности следует, что

$$G(x_i) \geqslant x_i, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \tag{5}$$

ибо $\eta \geqslant x_i \geqslant 0$, $i \in \mathbb{Z}^+$.

Перейдем теперь к доказательству утверждения p_2). Пусть $N \in \mathbb{N}$ — произвольное число. Тогда, если учесть условия a), b), I) и II), а также утверждения p_1), из (1) будем иметь

$$\sum_{i=0}^{N}(\eta - x_i) = \sum_{i=0}^{N}\left(\eta\gamma_i + \eta\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} - \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} G(x_j)\right)$$

$$\leqslant \eta\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}(\eta-G(x_j))\leqslant \eta\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}a_{ij}(\eta-G(x_j))$$

$$+\eta\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=N+1}^{\infty}a_{ij}\leqslant \eta\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i+\sum_{j=0}^{N}(\eta-G(x_j))\sum_{i=0}^{\infty}a_{ji}+\eta\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=N+1}^{\infty}b_{i-j}\mu_j$$

$$\leqslant \eta\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i+\sum_{j=0}^{N}(\eta-G(x_j))+\eta\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=N+1}^{\infty}b_{i-j}(\mu_j-1)$$

$$+\eta\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=N+1}^{\infty}b_{i-j}\leqslant \eta\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i+\sum_{j=0}^{N}(\eta-G(x_j))+\eta\sum_{j=0}^{\infty}(\mu_j-1)\sum_{m=-j}^{N-j}b_m$$

$$+\eta\sum_{i=0}^{N}\sum_{m=N+1-i}^{\infty}b_{-m}\leqslant \eta\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i+\sum_{j=0}^{N}(\eta-G(x_j))+\eta\sum_{j=0}^{\infty}(\mu_j-1)\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m$$

$$+\eta\sum_{k=1}^{N+1}\sum_{m=k}^{\infty}b_{-m}\leqslant \eta\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i+\sum_{j=0}^{N}(\eta-G(x_j))+\eta\sum_{j=0}^{\infty}(\mu_j-1)\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m$$

$$+\eta\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}b_{-m}=\eta\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i+\sum_{j=0}^{N}(\eta-G(x_j))+\eta\sum_{j=0}^{\infty}(\mu_j-1)\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m$$

$$+\eta\sum_{m=1}^{\infty}mb_{-m}\leqslant \eta\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i+\sum_{j=0}^{N}(\eta-G(x_j))+\eta\sum_{j=0}^{\infty}(\mu_j-1)\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m+\eta\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|b_n,$$

из которого следует, что

$$\sum_{i=0}^{N}(G(x_i)-x_i)\leqslant \eta\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i+\eta\sum_{j=0}^{\infty}(\mu_j-1)\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m+\eta\sum_{m=-\infty}^{\infty}|m|b_m:=C<+\infty. \tag{6}$$

В неравенстве (6) устремив число N к бесконечности, получаем, что

$$\sum_{i=0}^{\infty}(G(x_i)-x_i)\leqslant C<+\infty. \tag{7}$$

Тем самым лемма полностью доказана. $\triangleright$

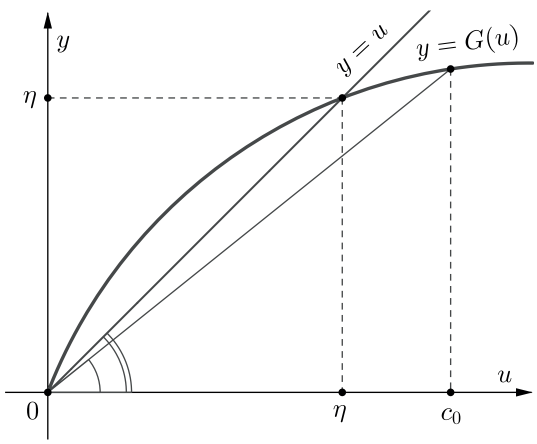

Рис. 1.

Замечание 1. Из доказанной леммы в частности следует, что

$$\lim_{i\to\infty}(G(x_i)-x_i)=0.$$

3. Существование нетривиального и ограниченного решения

Справедлива следующая

Теорема 1. *При условиях* a), b) *и* I)–III) *бесконечная система нелинейных алгебраических уравнений* (1) *в пространстве* m *имеет по компонентно неотрицательное и нетривиальное решение* $\mathrm{x}=(x_0,x_1,\ldots)^T$, *причем*

$$\sum_{i=0}^{\infty}(\eta-x_i)<+\infty. \tag{8}$$

Более того следующие последовательные приближения

$$x_i^{(p+1)}=\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}G\big(x_j^{(p)}\big),\quad x_i^{(0)}\equiv\eta,\ p=0,1,\ldots,\ i=0,1,\ldots \tag{9}$$

сходятся к решению $\mathrm{x}:\lim_{p\to\infty}x_i^{(p)}=x_i$, $i\in\mathbb{Z}^+$, *при этом существует число* $\sigma_0\in(0,1)$ *такое, что*

$$\left|x_i^{(p)}-x_i^{(p+1)}\right|\leqslant\eta\alpha^p\ln\frac{1}{\sigma_0},\quad i\in\mathbb{Z}^+,\ p\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

$\lhd$ Сперва заметим, что индукцией по p несложно проверить выполнение следующих утверждений:

$$1)\ x_i^{(p)}>0,\quad i,p\in\mathbb{Z}^+,$$

$$2)\ x_i^{(p)}\downarrow\ \text{ по }\ p,i\in\mathbb{Z}^+.$$

Докажем, что

$$3)\ \lim_{i\to+\infty}x_i^{(p)}=\eta,\quad p=0,1,2,\ldots.$$

При $p=0$ предельное соотношение 3) немедленно следует из (9). Пусть 3) выполняется при некотором $p\in\mathbb{N}$. Тогда из (9) с учетом условий I), II), a) и b) будем иметь

$$0\leqslant\eta-x_i^{(p+1)}=\eta\gamma_i+\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}\left(\eta-G\left(x_j^{(p)}\right)\right)\leqslant\eta\gamma_i+\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}\left(\eta-x_j^{(p)}\right)$$

$$\leqslant\eta\gamma_i+\sum_{j=0}^{\infty}b_{i-j}\mu_j\left(\eta-x_j^{(p)}\right)\leqslant\eta\gamma_i+\eta\sum_{j=0}^{\infty}b_{i-j}(\mu_j-1)+\sum_{j=0}^{\infty}b_{i-j}\left(\eta-x_j^{(p)}\right)\to0$$

при $i\to+\infty$, ибо $\gamma_i\to0$, $i\to+\infty$,

$$\lim_{i\to+\infty}\sum_{j=0}^{\infty}b_{i-j}(\mu_j-1)=\lim_{j\to+\infty}(\mu_j-1)\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m=0,$$

$$\lim_{i\to+\infty}\sum_{j=0}^{\infty}b_{i-j}\left(\eta-x_j^{(p)}\right)=\lim_{j\to+\infty}\left(\eta-x_j^{(p)}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m=0$$

(см. [13]).

Рассмотрим теперь последовательность $d_i := \frac{x_i^{(2)}}{x_i^{(1)}}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Из утверждений 1), 2) и 3) немедленно следует, что

$$0 < d_i < 1, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad \lim_{i \to +\infty} d_i = 1, \tag{11}$$

откуда заключаем, что существует $i_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при $i > i_0$

$$d_i \geqslant \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Обозначим через $\varepsilon := \min\{d_0, d_1, \ldots, d_{i_0}\}$. Тогда из (12) следует, что

$$d_i \geqslant \min\left\{\frac{1}{2}, \varepsilon\right\} > 0, \quad i \in \mathbb{Z}^+.$$

Следовательно,

$$1 > \sigma_0 := \inf_{i \in \mathbb{Z}^+} d_i \geqslant \min\left\{\frac{1}{2}, \varepsilon\right\} > 0, \quad i \in \mathbb{Z}^+.$$

Итак, имеем

$$\sigma_0 x_i^{(1)} \leqslant x_i^{(2)} \leqslant x_i^{(1)}, \quad i \in \mathbb{Z}^+.$$

Из условия II) немедленно следует, что

$$G\big(\sigma_0 x_i^{(1)}\big) \leqslant G\big(x_i^{(2)}\big) \leqslant G\big(x_i^{(1)}\big), \quad i \in \mathbb{Z}^+,$$

откуда, учитывая (3), получаем, что

$$\sigma_0^{\alpha} G\big(x_j^{(1)}\big) \leqslant G\big(\sigma_0 x_j^{(1)}\big) \leqslant G\big(x_j^{(2)}\big) \leqslant G\big(x_j^{(1)}\big), \quad j \in \mathbb{Z}^+. \tag{13}$$

Умножим обе части (13) на a_{ij}, $i, j \in \mathbb{Z}^+$, и просуммируем по всем $j = 0, 1, 2, \ldots$

Тогда, учитывая (9), получим

$$\sigma_0^{\alpha} x_i^{(2)} \leqslant x_i^{(3)} \leqslant x_i^{(2)}, \quad i \in \mathbb{Z}^+. \tag{14}$$

Снова, используя условия II), III), будем иметь

$$\sigma_0^{\alpha^2} G\big(x_j^{(2)}\big) \leqslant G\big(x_j^{(3)}\big) \leqslant G\big(x_j^{(2)}\big), \quad j \in \mathbb{Z}^+. \tag{15}$$

Опять, если умножим обе части (15) на a_{ij}, $i, j \in \mathbb{Z}^+$ и суммируем по всем $j = 0, 1, 2, \ldots$, получим

$$\sigma_0^{\alpha^2} x_i^{(3)} \leqslant x_i^{(4)} \leqslant x_i^{(3)}, \quad i \in \mathbb{Z}^+.$$

Повторяя этот процесс, на p-ом шаге приходим к оценкам

$$\sigma_0^{\alpha^{p-1}} x_i^{(p)} \leqslant x_i^{(p+1)} \leqslant x_i^{(p)}, \quad p = 1, 2, \ldots, \; i \in \mathbb{Z}^+. \tag{16}$$

Из (16) в частности следует, что

$$0 \leqslant x_i^{(p)} - x_i^{(p+1)} \leqslant x_i^{(p)}\big(1 - \sigma_0^{\alpha^{p-1}}\big) \leqslant \eta \alpha^{p-1} \ln \frac{1}{\sigma_0}, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \; p \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Итак, в силу (17), 1) и 2) заключаем, что последовательность бесконечных векторов $\mathrm{x}^{(p)} := (x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \ldots)^T$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, имеет предел когда $p \to \infty$: $\lim_{p \to \infty} x_i^{(p)} = x_i$,

$i \in \mathbb{Z}^+$, причем координаты предельного вектора $\mathrm{x} := (x_0, x_1, \ldots)^T$ удовлетворяют двойному неравенству

$$0 \leqslant x_i \leqslant \eta, \quad i \in \mathbb{Z}^+. \tag{18}$$

Докажем, что существует $\lim_{i\to\infty} x_i = \eta$. Во-первых, очевидно, что

$$x_i^{(N+1)} = x_i^{(0)} + \sum_{p=0}^{N} \left(x_i^{(p+1)} - x_i^{(p)} \right), \quad i \in \mathbb{Z}^+, \ N \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

откуда следует, что

$$x_i = \lim_{N\to\infty} x_i^{(N+1)} = x_i^{(0)} + \sum_{p=0}^{\infty} \left(x_i^{(p+1)} - x_i^{(p)} \right). \tag{20}$$

Так как ряд (20) в силу (17) сходится равномерно по $i \in \mathbb{Z}^+$, то учитывая предельное соотношение 3), из (20) получим, что существует

$$\lim_{i\to\infty} x_i = \eta + \sum_{p=0}^{\infty} \left(\lim_{i\to\infty} x_i^{(p+1)} - \lim_{i\to\infty} x_i^{(p)} \right) = \eta. \tag{21}$$

Поскольку

$$0 \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} G\big(x_j^{(p)}\big) \leqslant \eta \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \leqslant \eta, \quad i \in \mathbb{Z}^+,$$

а функция $G(u)$ непрерывна на $\mathbb{R}^+$, то снова используя (17), можно утверждать, что предельный вектор $\mathrm{x} := (x_0, x_1, \ldots)^T$ удовлетворяет системе (1). Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что ряд (8) сходиться. Из (21) и (18) немедленно следует, что существует индекс $i^* \in \mathbb{N}$ такой, что при $i \geqslant i^*$ имеет место оценка снизу:

$$x_i \geqslant \frac{\eta}{2}. \tag{22}$$

Следовательно, учитывая условия I), II), несложно проверить достоверность следующего неравенства (см. рис. 2):

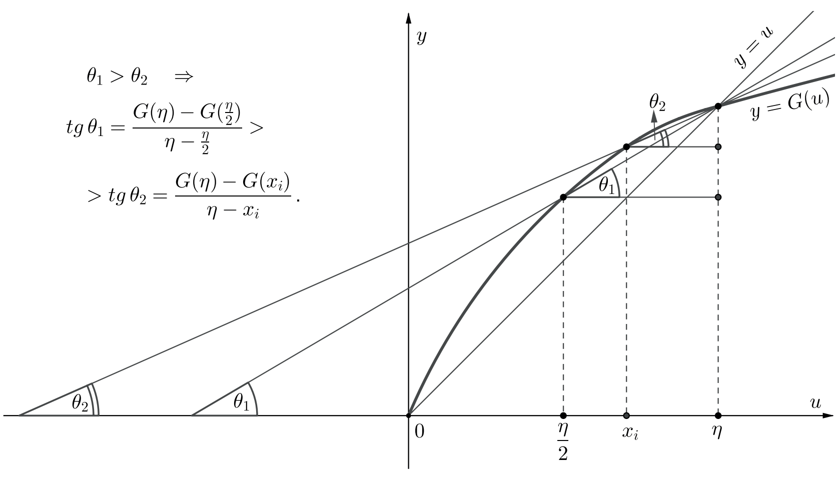

Рис. 2.

$$\eta - G(x_i) \leqslant (\eta - x_i)\left(\frac{\eta - G(\frac{\eta}{2})}{\frac{\eta}{2}}\right), \quad i = i^*, i^*+1, \dots \tag{23}$$

Принимая во внимание ключевую лемму и (23) для всех $N > i^*$, получим

$$\begin{gathered}\sum_{i=0}^{N}(\eta_i - x_i) = \sum_{i=0}^{i^*-1}(\eta_i - x_i) + \sum_{i=i^*}^{N}(\eta_i - x_i) \leqslant \sum_{i=0}^{i^*-1}(\eta_i - x_i)\\ + \frac{1}{1-\rho}\sum_{i=i^*}^{N}(G(x_i) - x_i) \leqslant \sum_{i=0}^{i^*-1}(\eta_i - x_i) + \frac{1}{1-\rho}\sum_{i=i^*}^{\infty}(G(x_i) - x_i) =: C^* < +\infty,\end{gathered} \tag{24}$$

где $\rho := \frac{\eta - G(\frac{\eta}{2})}{\frac{\eta}{2}}$.

В неравенстве (24) устремляя число $N \to \infty$, приходим к (8). Таким образом, теорема доказана. $\rhd$

Замечание 2. Доказанная теорема существования обобщает и дополняет соответствующий результат из работы [11] в одномерном случае.

Замечание 3. Несложно проверить, что если последовательности $\{\gamma_i\}_{i=0}^{\infty}$,$\{b_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ и $\{\mu_i\}_{i=0}^{\infty}$ удовлетворяют следующим более сильным (по сравнению с условиями $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots) \in l_1$, d_1) и d_2)) ограничениям:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\gamma_i < +\infty, \quad b_i > 0,\ i \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} i^2 b_i < +\infty, \quad \mu_i > 1,\ i \in \mathbb{Z}^+, \quad \sum_{i=0}^{\infty} i(\mu_i - 1) < +\infty,$$

то для решения $x := (x_0, x_1, \dots)^T$ ряд $\sum_{i=0}^{\infty} i(\eta - x_i)$ будет сходится.

4. Единственность решения. Примеры

Имеет место следующая теорема единственности.

Теорема 2. *При условиях теоремы* 1 *бесконечная система нелинейных алгебраических уравнений* (1) *в классе по координатно неотрицательных нетривиальных и ограниченных последовательностей имеет единственное решение.*

$\lhd$ Предположим, что система (1), кроме построенного (при помощи последовательных приближений (9)) решения $\mathrm{x} = (x_0, x_1, \dots)^T$, обладает также другим решением $\tilde{\mathrm{x}} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots)^T$, $\tilde{x}_j \geqslant 0$, $j \in \mathbb{Z}^+$, существует $j_0 \in \mathbb{Z}^+$ такое, что $\tilde{x}_{j_0} > 0$ в пространстве m. Сперва докажем, что тогда имеет место следующая оценка:

$$\tilde{x}_i \leqslant x_i, \quad i \in \mathbb{Z}^+. \tag{25}$$

Для доказательства (25) сначала индукцией по p проверим, что

$$\tilde{x}_i \leqslant x_i^{(p)}, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad p \in \mathbb{Z}^+. \tag{26}$$

Из утверждения p_1) (см. ключевую лемму) немедленно следует, что $\tilde{x}_i \leqslant \eta = x_i^{(0)}$, $i \in \mathbb{Z}^+$. Предположим, что (26) имеет место при некотором натуральном p. Тогда из (9), с учетом условий a) и II), получим

$$x_i^{(p+1)} \geqslant \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} G(\tilde{x}_j) = \tilde{x}_i, \quad i \in \mathbb{Z}^+.$$

В (26) устремляя число $p \to \infty$, приходим к (25). Докажем теперь, что на самом деле $\tilde{x}_i = x_i$, $i \in \mathbb{Z}^+$. Предположим обратное: тогда в силу (25) существует индекс $i_1 \in \mathbb{Z}^+$ такой, что $\tilde{x}_{i_1} < x_{i_1}$. Обозначим через $\mathscr{B}$ следующее множество индексов:

$$\mathscr{B} := \{i \in \mathbb{Z}^+ : \ \tilde{x}_{i_1} < x_{i_1}\}. \tag{27}$$

Поскольку по предположению $i_1 \in \mathscr{B}$, то $\mathscr{B} \neq \emptyset$. Принимая во внимание (25) из (1), будем иметь

$$0 \leqslant x_i - \tilde{x}_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}(G(x_j) - G(\tilde{x}_j)), \quad i \in \mathbb{Z}^+. \tag{28}$$

Убедимся теперь, что

$$\sum_{i=0}^{\infty}(G(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i) \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}(G(x_j) - G(\tilde{x}_j)) < +\infty. \tag{29}$$

Действительно, в силу условий a), I), II), неравенств $0 \leqslant x_j \leqslant \eta$, $0 \leqslant \tilde{x}_j \leqslant \eta$, $j \in \mathbb{Z}^+$, и утверждения p_2) вспомогательной леммы, имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty}(G(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i) \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}(G(x_j) - G(\tilde{x}_j))$$
$$\leqslant \eta \sum_{i=0}^{\infty}(G(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i) \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \leqslant \eta \sum_{i=0}^{\infty}(G(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i) < +\infty.$$

Умножим обе части (28) на $G(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i$ и в силу (29) просуммируем обе части полученного соотношения по всем $i = 0, 1, 2, \ldots$ В результате, принимая во внимание условия a), I) и II), имеем

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{\infty}(G(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i)(x_i - \tilde{x}_i) = \sum_{i=0}^{\infty}(G(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i) \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}(G(x_j) - G(\tilde{x}_j))$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}(G(x_j) - G(\tilde{x}_j)) \sum_{i=0}^{\infty} a_{ji}(G(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i) = \sum_{j=0}^{\infty}(G(x_j) - G(\tilde{x}_j)) \left(\tilde{x}_j - \sum_{i=0}^{\infty} a_{ji}\tilde{x}_i\right).$$

Обозначим через $Q(u)$ обратную функцию к функции $G(u)$. Тогда полученное равенство можно переписать в следующем виде:

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{\infty}(G(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i)(x_i - \tilde{x}_i) = \sum_{j=0}^{\infty}(G(x_j) - G(\tilde{x}_j)) \left(\tilde{x}_j - \sum_{i=0}^{\infty} a_{ji}Q(G(\tilde{x}_i))\right). \tag{30}$$

Поскольку

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{ji}Q(G(\tilde{x}_i)) \leqslant \eta, \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_{ji}G(\tilde{x}_i) \leqslant \eta, \quad 0 < \sum_{i=0}^{\infty} a_{ji} \leqslant 1, \quad j \in \mathbb{Z}^+, \tag{31}$$

то, используя неравенство Йенсена, будем иметь

$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ji}Q(G(\tilde{x}_i))}{\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ji}} \geqslant Q\left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ji}G(\tilde{x}_i)}{\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ji}}\right), \quad j \in \mathbb{Z}^+. \tag{32}$$

Используя легко проверяемое неравенство

$$vQ(u) \geqslant Q(uv), \quad v \in [0,1], \ u \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty), \tag{33}$$

из (32) и (1) приходим к неравенству

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{ji} Q(G(\tilde{x}_i)) \geqslant Q\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ji} G(\tilde{x}_i)\right) = Q(\tilde{x}_j), \quad j \in \mathbb{Z}^+. \tag{34}$$

Таким образом, учитывая (34) из (30), будем иметь

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} (G(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i)(x_i - \tilde{x}_i) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} (G(x_j) - G(\tilde{x}_j))(\tilde{x}_j - Q(\tilde{x}_j)). \tag{35}$$

В силу определения непустого множества $\mathscr{B}$ неравенство (35) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{i \in \mathscr{B}} (G(\tilde{x}_i) - G(Q(\tilde{x}_i))(x_i - \tilde{x}_i) - (G(x_i) - G(\tilde{x}_i))(\tilde{x}_i - Q(\tilde{x}_i))) \leqslant 0. \tag{36}$$

Заметим теперь, что $\tilde{x}_i > 0$, $i \in \mathbb{Z}^+$. Действительно, поскольку существует $i_0 \in \mathbb{Z}^+$ такое, что $\tilde{x}_{i_0} > 0$, то из (1) в силу условий a), II) будем иметь

$$\tilde{x}_i \geqslant a_{ii_0} G(\tilde{x}_{i_0}) > 0, \quad i \in \mathbb{Z}^+. \tag{37}$$

С другой стороны, из определения множества $\mathscr{B}$ и неравенства $x_i \leqslant \eta$, $i \in \mathbb{Z}^+$, следует, что

$$\tilde{x}_i < \eta, \quad i \in \mathscr{B}. \tag{38}$$

Следовательно, учитывая (37), (38) и условия I), II), оценку (36) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{i \in \mathscr{B}} (x_i - \tilde{x}_i)(\tilde{x}_i - Q(\tilde{x}_i)) \left(\frac{G(\tilde{x}_i) - G(Q(\tilde{x}_i))}{\tilde{x}_i - Q(\tilde{x}_i)} - \frac{G(x_i) - G(\tilde{x}_i)}{x_i - \tilde{x}_i} \right) \leqslant 0. \tag{39}$$

Поскольку (см. рис. 3)

$$\frac{G(\tilde{x}_i) - G(Q(\tilde{x}_i))}{\tilde{x}_i - Q(\tilde{x}_i)} > \frac{G(x_i) - G(\tilde{x}_i)}{x_i - \tilde{x}_i}, \quad i \in \mathscr{B},$$

$$\tilde{x}_i < x_i, \quad i \in \mathscr{B}, \quad \tilde{x}_i > Q(\tilde{x}_i), \quad i \in \mathscr{B},$$

то в (39) приходим к противоречию. Таким образом $\tilde{x}_i = x_i$, $i \in \mathbb{Z}^+$. Теорема доказана. $\triangleright$

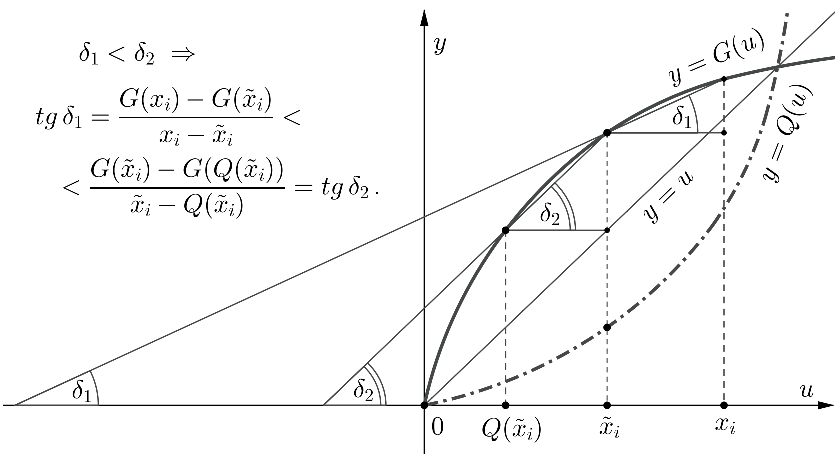

Рис. 3.

В конце работы приведем несколько наглядных примеров матрицы A и нелинейностей G. Сперва рассмотрим следующие примеры для $A=(a_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$:

$A_1)$ $a_{ij}=\tilde{a}_{i-j}\lambda_{ij}$, $(i,j)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$, где $0<\varepsilon_0\leqslant\lambda_{ij}\leqslant 1$, $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$, $(i,j)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$, причем

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(1-\inf_{j\in\mathbb{Z}^+}\lambda_{ij}\right)<+\infty,\quad 0<\tilde{a}_{-i}=\tilde{a}_i,\ i\in\mathbb{Z}^+,\quad \sum_{j=-\infty}^{\infty}\tilde{a}_j=1,\quad \sum_{i=0}^{\infty}i\tilde{a}_i<+\infty;$$

$A_2)$ $a_{ij}=\lambda_{ij}(\tilde{a}_{i-j}-\delta\tilde{a}_{i+j})$, $(i,j)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$, где $\{\lambda_{ij}\}_{i,j=0}^{\infty}$, $\{\tilde{a}_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяют условиям примера $A_1)$, при этом дополнительно $\tilde{a}_{i+1}<\tilde{a}_i$, $i\in\mathbb{Z}^+$, а $\delta\in(0,1)$ — числовой параметр;

$A_3)$ $a_{ij}=\frac{q_i+q_j}{2}(a_{i-j}+la_{i+j})$, $(i,j)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$, где $l\in(0,1)$ — числовой параметр, $\{\tilde{a}_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условиям примера $A_2)$, а последовательность $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$ следующим условиям:

$$0<\inf_{i\in\mathbb{Z}^+}q_i\leqslant q_i\leqslant 1,\quad i\in\mathbb{Z}^+,\quad \sum_{i=0}^{\infty}(1-q_i)<+\infty.$$

Приведем теперь примеры функции $G(u)$:

$g_1)$ $G(u)=u^{\alpha}$, $u\in\mathbb{R}^+$, $\alpha\in(0,1)$ — параметр,

$g_2)$ $G(u)=\frac{u^{\alpha^*}+u}{2}$, $u\in\mathbb{R}^+$, $\alpha^*\in(0,1)$ — параметр,

$g_3)$ $G(u)=\frac{u^{\tilde{\alpha}}+u^{\alpha^*}}{2}$, $u\in\mathbb{R}^+$, $\tilde{\alpha},\alpha^*\in(0,1)$, $\alpha^*>\tilde{\alpha}$.

Выполнение соответствующих условий для приведенных примеров $A_1)$–$A_3)$ и $g_1)$–$g_3)$ можно доказать прямой проверкой. Отметим лишь, что для примеров $g_2)$ и $g_3)$ в качестве показателя α можно выбрать соответственно следующие величины:

для примера $g_2)$: $\alpha=\frac{\alpha^*+1}{2}$,

для примера $g_3)$: $\alpha=\frac{\tilde{\alpha}+\alpha^*}{2}$.

Следует отметить также, что система (1) с нелинейностью $g_1)$ возникает в теории p-адических струн, а нелинейности $g_2)$ и $g_3)$ в теории переноса излучения и в кинетической теории газов (см. [1–3, 6].

Литература

1. *Енгибарян Н. Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика.—1966.—Т. 2, № 1.—С. 31–36.
2. *Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A.* Qualitative difference between solutions for a model of the Boltzmann equation in the linear and nonlinear cases // Theoret. and Math. Phys.—2012.—Vol. 172, № 3.—P. 1315–1320. DOI: 10.1007/s11232-012-0116-4.
3. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа.—М.: Наука, 1967.
4. *Diekmann O.* Threshold and travelling waves for the geographical spread of infection // J. Math. Biology.—1978.—Vol. 6.—P. 109–130. DOI: 10.1007/BF02450783.
5. *Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A.* On solvability of one infinite system of nonlinear functional equations in the theory of epidemics // Eurasian Math. J.—2020.—Vol. 11, № 2.—P. 52–64. DOI: 10.32523/2077-9879-2020-11-2-52-64.
6. *Владимиров В. С., Волович Я. И.* О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны // Теор. и матем. физика.—2004.—Т. 138, № 3.—С. 355–368. DOI: 10.4213/tmf36.
7. *Арефьева И. Я.* Скатывающиеся решения полевых уравнений на неэкстремальных бранах и в p-адических струнах // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова.—2004.—Т. 245.—С. 47–54.
8. *Владимиров В. С.* О нелинейных уравнениях p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн // Теор. и матем. физика.—2006.—Т. 149, № 3.—С. 354–367. DOI: 10.4213/tmf5522.
9. *Хачатрян Х. А.* Вопросы разрешимости некоторых нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с некомпактными операторами в критическом случае: Дисс.. . . д.-ф.м.н.—Ереван: Ереванский гос. ун-т, 2011.—231 с.

10. *Хачатрян Х. А., Броян М. Ф.* О некоторых нелинейных бесконечных систем алгебраических уравнений с матрицами типа Теплица — Ганкеля // Матем. вопросы кибернетики и выч. механики.—2012.—Т. 38, № 2.—С. 32–33.
11. *Khachatryan Kh. A., Andriyan S. M.* On the solvability of a class of discrete matrix equations with cubic nonlinearity // Ukr. Math. J.—2020.—Vol. 71, № 12.—P. 1910–1928. DOI: 10.1007/s11253-020-01755-4.
12. *Khachatryan Kh. A., Broyan M. F.* One-parameter family of positive solutions for a class of nonlinear infinite algebraic systems with Teoplitz–Hankel type matrices // J. Contemporary. Mathemat. Anal.—2013.—Vol. 48, № 5.—P. 209–220. DOI: 10.3103/S1068362313050026.
13. *Енгибарян Н. Б.* Уравнения восстановления на полуоси // Изв. РАН. Сер. матем.—1999.—Т. 63, № 1.—С. 61–76. DOI: 10.4213/im228.

Статья поступила 18 января 2024 г.

Петросян Айкануш Самвеловна
Национальный Аграрный университет Армении,
доцент кафедры высшей математики, физики и прикладной механики
АРМЕНИЯ, 0009, Ереван, ул. Теряна, 74
E-mail: haykuhi25@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-7172-4730

Хачатрян Хачатур Агавардович
Ереванский Государственный университет,
зав. кафедрой теории функций и дифференц. уравнений
АРМЕНИЯ, 0025, Ереван, ул. Алека Манукяна, 1
E-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am
https://orcid.org/0000-0002-4835-943X

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 2, P. 82–94

ON THE SOLVABILITY OF AN INFINITE SYSTEM OF ALGEBRAIC EQUATIONS WITH MONOTONE AND CONCAVE NONLINEARITY

Petrosyan, H. S.[1] and Khachatryan, Kh. A.[2]

[1] Armenian National Agrarian University,
74 Teryan St., Yerevan 0009, Armenia;
[2] Yerevan State University,
1 Alex Manoogian St., Yerevan 0025, Armenia

E-mail: haykuhi25@mail.ru, khachatur.khachatryan@ysu.am

Abstract. In this paper, we study an infinite system of algebraic equations with monotone and concave nonlinearity. This system arises in various discrete problems when studying mathematical models in the natural sciences. In particular, systems of such a structure, with specific representations of nonlinearity and the corresponding infinite matrix, are encountered in the theory of radiative transfer, in the kinetic theory of gases, and in the mathematical theory of epidemic diseases. Under certain conditions on the elements of the corresponding infinite matrix and on the non-linearity, existence and uniqueness theorems with respect to the coordinatewise non-negative non-trivial solution in the space of bounded sequences are proved. In the course of proving the existence theorem, we also obtain a uniform estimate for the corresponding successive approximations. It is also proved that the constructed solution tends at infinity to a positive fixed point of the function describing the nonlinearity of the given system with the speed l_1. The main tools for proving the above facts are the method of M. A. Krasnoselsky on the construction of invariant cone segments for the corresponding nonlinear operator, methods of the theory of discrete convolution operators, as well as some geometric inequalities for concave and monotonic functions. At the end of the paper, concrete particular examples of the corresponding infinite matrix and non-linearity are given that satisfy all the conditions of the proven statements.

Keywords: infinite system, concavity, monotonicity, bounded solution, successive approximations.

AMS Subject Classification: 65R20.

For citation: *Petrosyan, H. S. and Khachatryan, Kh. A.* On the Solvability of an Infinite System of Algebraic Equations with Monotone and Concave Nonlinearity, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 2, pp. 82–94 (in Russian). DOI: 10.46698/i3972-5395-8655-d.

References

1. *Engibaryan, N. B.* On a Problem in Nonlinear Radiative Transfer, *Astrophysics*, 1966, vol. 2, pp. 12–14. DOI: 10.1007/BF01014505.
2. *Khachatryan, A. Kh. and Khachatryan, Kh. A.* Qualitative Difference Between Solutions for a Model of the Boltzmann Equation in the Linear and Nonlinear Cases, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 172, no. 3, pp. 1315–1320. DOI: 10.1007/s11232-012-0116-4.
3. *Kogan, M. N. Rarefied Gas Dynamics*, New York, Plenum Press, 1969.
4. *Diekmann O.* Threshold and Travelling Waves for the Geographical Spread of Infection, *Journal of Mathematical Biology*, 1978, vol. 6, pp. 109–130. DOI: 10.1007/BF02450783.
5. *Khachatryan, A. Kh. and Khachatryan, Kh. A.* On Solvability of one Infinite System of Nonlinear Functional Equations in the Theory of Epidemics, *Eurasian Mathematical Journal*, 2020, vol. 11, no. 2, pp. 52–64. DOI: 10.32523/2077-9879-2020-11-2-52-64.
6. *Vladimirov, V. S. and Volovich, Y. I.* Nonlinear Dynamics Equation in p-Adic String Theory, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, vol. 138, no. 3, pp. 297–309. DOI: 10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29.
7. *Aref'eva, I. Ya.* Rolling Tachyon on Non-BPS Branes and p-Adic Strings, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2004, vol. 245, pp. 40–47.
8. *Vladimirov, V. S.* Nonlinear Equations for p-adic Open, Closed, and Open-Closed Strings, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2006, vol. 149, no. 3, pp. 1604–1616. DOI: 10.1007/s11232-006-0144-z.
9. *Khachatryan, Kh. A. Voprosy razreshimosti nekotoryh nelinejnyh integral'nyh i integro-differencial'nyh uravnenij s nekompaktnymi operatorami v kriticheskom sluchae* [Questions of solvability of some nonlinear integral and integro-differential equations with non-compact operators in the critical case], Doctoral Dissertation, Yerevan State University, 2011, 231 p. (in Russian).
10. *Khachatryan, Kh. A. and Broyan, M. F.* On Some Nonlinear Infinite Systems of Algebraic Equations with Toeplitz–Hankel Type Matrices, *Matematicheskie voprosy kibernetiki i vychislitel'noj mekhaniki* [Mathematical Issues of Cybernetics and Computational Mechanics], 2012, vol. 38, no. 2, pp. 32–33 (in Russian).
11. *Khachatryan, Kh. A. and Andriyan, S. M.* On the Solvability of a Class of Discrete Matrix Equations with Cubic Nonlinearity, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2020, vol. 71, no. 12, pp. 1910–1928. DOI: 10.1007/s11253-020-01755-4.
12. *Khachatryan, Kh. A. and Broyan, M. F.* One-Parameter Family of Positive Solutions for a Class of Nonlinear Infinite Algebraic Systems with Teoplitz–Hankel Type Matrices, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 2013, vol. 48, no. 5, pp. 209–220. DOI: 10.3103/S1068362313050026.
13. *Engibaryan, N. B.* Renewal Equations on the Semi-Axis, *Izvestiya: Mathematics*, 1999, vol. 63, no. 1, pp. 57–71. DOI: 10.1070/im1999v063n01ABEH000228.

Received January 18, 2024

Haykanush S. Petrosyan
Armenian National Agrarian University,
74 Teryan St., Yerevan 0009, Armenia,
Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Physics and Applied Mechanics
E-mail: haykuhi25@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-7172-4730

Khachatur A. Khachatryan
Yerevan State University,
1 Alex Manoogian St., Yerevan 0025, Armenia,
Head of the Department of Theory of Functions and Differential Equations
E-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am
https://orcid.org/0000-0002-4835-943X