Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 2, С. 103–112

УДК 517.968.220
DOI 10.46698/y7151-5493-5096-h

К ТЕОРИИ МОДЕЛЬНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ГРАНИЧНЫМИ ОСОБЫМИ, СЛАБО-ОСОБЫМИ И СИЛЬНО ОСОБЫМИ ЯДРАМИ

Л. Н. Раджабова[1], М. Б. Хушвахтзода[1]

[1] Таджикский национальный университет,
Таджикистан, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17
E-mail: lutfya62@mail.ru, muhuddin_93@mail.ru

80-летию профессора Г. Г. Магарил-Ильяева посвящается

Аннотация. В настоящей работе изучается трехмерное модельное интегральное уравнение типа Вольтерра с граничными слабо-особыми, особыми и сильно особыми ядрами в области $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leqslant a < x < \infty,\ 0 \leqslant b < y < b_0,\ 0 \leqslant c < z < c_0\}$, которую назовем прямоугольной трубой. В случае, когда коэффициенты уравнения связаны между собой, решение уравнения ищется в классе непрерывных функций в Ω, обращающихся в нуль с определенным асимптотическим поведением на особых областях. Доказано,что при выполнении определенных условий, задача о нахождении решения трехмерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными слабо-особыми, особыми и сильно особыми ядрами сводится к решению одномерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми граничными ядрами. Отметим, что при решении данного интегрального уравнения используются связи данных уравнений с дифференциальными уравнениями первого порядка со слабо-сингулярными, сингулярными и сильно-сингулярными коэффициентами. Устанавливается, что от полученного решения и правой части нет необходимости требовать дифференцируемости, достаточно в правой части трехмерного интегрального уравнения с граничными особыми, слабо-особыми и сильно-особыми ядрами требовать непрерывности и обращения в нуль с определенной асимптотикой на особых областях. Доказано, что в зависимости от знака коэффициентов уравнения, явное решение модельного трехмерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами может содержать от одного до трех произвольных функций двух переменных, также определен случай, когда решение интегрального уравнения единственно.

Ключевые слова: модельное уравнение, трехмерное интегральное уравнение, граничные особые ядра, произвольная функция.

AMS Subject Classification: 45D05.

Образец цитирования: *Раджабова Л. Н., Хушвахтзода М. Б.* К теории модельных трехмерных интегральных уравнений типа Вольтерра с граничными особыми, слабо-особыми и сильно особыми ядрами // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 2.—С. 103–112. DOI: 10.46698/y7151-5493-5096-h.

1. Введение

В работе изучается трехмерное модельное интегральное уравнение типа Вольтерра с граничной слабой особенностью, особенностью и сильной особенностью в ядре.

Отметим, что работы [1, 2] посвящены изучению одномерных сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши вида:

$$A(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \frac{K(t,\tau)}{t-\tau}\varphi(\tau)\,d\tau = f(t),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, Γ — некоторый замкнутый или разомкнутый контур в комплексной плоскости Z, $A(t)$, $K(x,t)$, $f(t)$ — заданные функции, $\varphi(t)$ — искомая функция.

Следует отметить, что в работах [3, 4] исследованы характеристические сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши в исключительном случае, получены условия разрешимости и явная формула представления решения, изучаются вопросы фредгольмовой разрешимости классических сингулярных уравнений с ядром Коши на гладком контуре Γ в пространствах Гёльдера $C^{\mu}(\Gamma)$ и $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Также рассмотрен обобщенный оператор Коши с матричным ядром, играющий важную роль в приложениях.

Интегральные уравнения Вольтерра первого и второго рода и связь уравнений Вольтерра с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и Гильберта изучены в работе [5].

Главным предметом исследования [6] являются сингулярные интегралы, распространенные по евклидовому пространству или по ляпуновскому многообразию без края, а также уравнения, содержащие такие интегралы, исследование которых проводится в функциональных пространствах L_p.

Работа [7] содержит основные сведения о современном состоянии методов численного решения интегральных уравнений и излагаются основы вычисления определенных, сингулярных и гиперсингулярных одномерных и двумерных интегралов, а также численного решения уравнений с ними.

Статья [8] посвящена решению одного класса уравнений Вольтерра I рода с переменными верхним и нижним пределами и демонстрируется метод получения искомого решения, развивающий метод шагов для одномерного случая.

В монографии [9] рассматриваются сингулярные интегральные уравнения, ядра которых имеют особенности логарифмического или степенного типа, а также одновременно слабые и сильные особенности в различных сочетаниях. Обсуждаются некоторые простые алгоритмы численного решения сингулярных интегральных уравнений, основанные на глобальном выделении особенностей из сингулярного интеграла.

Реализация алгоритмов численного решения сингулярных интегральных уравнений с постоянными коэффициентами и ядрами Коши, основанных на полученных спектральных соотношениях для характеристических операторов, изучено в работе [10].

Работа Н. Раджабова [11] посвящена исследованию одномерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными левым, правым и внутренним сингулярными или сверхсингулярными ядрами. В работах [12, 13] получены явные решения двумерных и некоторых случаев многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными граничными особыми и сильно-особыми линиями или областями, также со слабо-особыми ядрами на первом квадранте. Исследованию модельных и немодельных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями на полосе посвящены работы [14–18]. В настоящей работе получены явные решения модельного трехмерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами. В зависимости от знака параметров уравнения, решения данного интегрального уравнения может содержать от одного до трех произвольных функций, зависящих от двух независимых переменных и определен случай, когда решение трехмерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами единственно.

2. Основной результат

Через Ω обозначим $\Omega = \{(x,y,z) : 0 \leqslant a < x < \infty,\ 0 \leqslant b < y < b_0,\ 0 \leqslant c < z < c_0\}$. Пусть $D_1 = \{(x,y) : 0 \leqslant a < x < \infty,\ 0 \leqslant b < y < b_0,\ z = c\}$, $D_2 = \{(x,z) : 0 \leqslant a <$

$x < \infty,\ c < z < c_0,\ y = b\}$, $D_3 = \{(y,z) : 0 \leqslant b < y < b_0,\ c < z < c_0,\ x = \infty\}$, $\Im_1 = \{0 \leqslant a < x < \infty,\ z = c,\ y = b\}$, $\Im_2 = \{0 \leqslant b < y < b_0,\ x = \infty,\ z = c\}$, $\Im_3 = \{0 \leqslant c < z < c_0,\ x = \infty,\ y = b\}$. В области Ω рассмотрим трехмерное интегральное уравнение:

$$\varphi(x,y,z) + A\int\limits_x^\infty \frac{\varphi(t,y,z)}{(t-a)^\alpha}\,dt + B\int\limits_b^y \frac{\varphi(x,s,z)}{(s-b)^\beta}\,ds + C\int\limits_c^z \frac{\varphi(x,s,\tau)}{\tau-c}\,d\tau$$

$$+A_1\int\limits_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int\limits_b^y \frac{\varphi(t,y,z)}{(s-b)^\beta}\,ds + B_1\int\limits_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int\limits_c^z \frac{\varphi(x,s,\tau)}{\tau-c}\,d\tau + C_1\int\limits_b^y \frac{\varphi(t,y,z)}{(s-b)^\beta}\,ds \qquad (1)$$

$$\times\int\limits_c^z \frac{\varphi(x,s,\tau)}{\tau-c}\,d\tau + D\int\limits_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int\limits_b^y \frac{ds}{(s-b)^\beta}\int\limits_c^z \frac{\varphi(t,s,\tau)}{\tau-c}\,d\tau = f(x,y,z),$$

где $A,\ B,\ C,\ A_1,\ B_1,\ C_1,\ D$ — заданные постоянные, $f(x,y,z)$ — заданная функция, $\varphi(x,y,z)$ — искомая функция, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $\varphi(x,y,z) \in C(\overline{\Omega})$, обращающихся в нуль при $x \to \infty$, $y \to b$, $z \to c$ соответственно с асимптотическими поведениями:

$$\varphi(x,y,z) = o\left[x^{-\zeta_1}\right], \quad \zeta_1 > 1-\alpha,$$

$$\varphi(x,y,z) = o\left[(y-b)^{\gamma_1}\right], \quad \gamma_1 > \beta - 1,\ y \to b,$$

$$\varphi(x,y,z) = o\left[(z-c)^{\varepsilon}\right], \quad \varepsilon > 0,\ z \to c.$$

В данной работе находим решение трехмерного интегрального уравнения (1), когда коэффициенты уравнения связаны условиями

$$A_1 = AB, \quad B_1 = AC, \quad C_1 = BC, \quad D = AC_1. \qquad (2)$$

Интегральное уравнение (1) при помощи интегральных операторов представим в виде [12, 13]:

$$\begin{gathered}\varphi + AT_x^\infty(\varphi) + BT_b^y(\varphi) + CT_c^z(\varphi) + A_1T_x^\infty T_b^y(\varphi)\\ +B_1T_x^\infty T_c^z(\varphi) + C_1T_y^bT_z^c(\varphi) + DT_x^\infty T_b^y T_c^z(\varphi) = f,\end{gathered} \qquad (3)$$

где

$$T_x^\infty\varphi = \int\limits_x^\infty \frac{\varphi(t,y,z)}{(t-a)^\alpha}\,dt, \quad T_b^y\varphi = \int\limits_b^y \frac{\varphi(x,s,z)}{(s-b)^\beta}\,ds, \quad T_c^z\varphi = \int\limits_c^z \frac{\varphi(x,y,\tau)}{\tau-c}\,d\tau.$$

В случае, когда коэффициенты уравнения (3) между собой связаны равенствами (2), уравнение (1) представим в виде

$$L(\varphi) = \Pi_A^\infty \Pi_B^y \Pi_C^z(\varphi) = f(x,y,z), \qquad (4)$$

где

$$\Pi_A^\infty(\varphi) = \varphi + AT_x^\infty\varphi, \quad \Pi_y^B(\varphi) = \varphi + BT_b^y\varphi, \quad \Pi_C^z(\varphi) = \varphi + CT_c^z\varphi.$$

Если в (4) введем в рассмотрение неизвестные функции

$$\varphi_1(x,y,z) = \Pi_C^z(\varphi), \quad \varphi_2 = \Pi_B^y\varphi_1, \quad \Pi_A^\infty\varphi_2 = f,$$

придем к решению модельного двумерного интегрального уравнения вида

$$\Pi_A^\infty(\varphi_2) = f. \tag{5}$$

Согласно [12, 13], решение уравнения (5) при $A < 0$ выражается равенством

$$\varphi_2(x,y,z) = e^{-A\omega_\alpha^a(x)}\rho(y,z) + (\Pi_A^\infty)^{-1}(f), \tag{6}$$

где

$$(\Pi_A^\infty)^{-1}(f) = f(x,y,z) - A\int\limits_x^\infty e^{A\{\omega_\alpha^a(t)-\omega_\alpha^a(x)\}}\frac{f(t,y,z)}{(t-a)^\alpha}\,dt$$

и $\rho(y,z)$ — произвольная функция точек области D_3.

Соответственно при $A > 0$, решение уравнения (5) выражается равенством:

$$\varphi_2(x,y,z) = (\Pi_A^\infty)^{-1}(f).$$

В равенстве $\varphi_2 = \Pi_B^y\varphi_1$ при $A < 0$ вместо функции $\varphi_2(x,y,z)$, поставляя его значение из равенства (6), находим решение уравнения следующего вида:

$$\Pi_B^y\varphi_1 = e^{-A\omega_\alpha^a(x)}\rho(y,z) + (\Pi_A^\infty)^{-1}(f). \tag{7}$$

Согласно [12], решение интегрального уравнения (7) при $B < 0$ выражается равенством

$$\varphi_1(x,y,z) = e^{B\omega_b^\beta(y)}\psi(x,z) + e^{-A\omega_\alpha^a(x)}(\Pi_A^\infty)^{-1}\rho(y,z) + (\Pi_B^y)^{-1}(\Pi_A^\infty)^{-1}(f). \tag{8}$$

В равенстве $\varphi_1 = \Pi_C^z\varphi$ вместо функции $\varphi_1(x,y,z)$ подставляя ее значение из равенства (8), находим решение уравнения вида

$$\varphi(x,y,z) + AT_C^z = \varphi_1.$$

При выполнении всех вышеуказанных условий, общее решение уравнения (1) при $A < 0$, $B < 0$, $C < 0$ представимо в виде

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= (z-c)^{-C}\nu(x,y) + e^{-A\omega_\alpha^a(x)}(\Pi_C^z)^{-1}(\Pi_B^y)^{-1}\rho(y,z)\\ &+ e^{B\omega_b^\beta(y)}(\Pi_C^z)^{-1}\psi(x,z) + (\Pi_C^z)^{-1}(\Pi_B^y)^{-1}(\Pi_A^\infty)^{-1}(f).\end{aligned} \tag{9}$$

Из вышеприведенных рассуждений вытекают следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть в интегральном уравнении* (1) *коэффициенты удовлетворяют условиям* (2), $A < 0$, $B < 0$, $C < 0$. *Далее, пусть функция* $f(x,y,z) \in C(\overline{\Omega})$, $\lim_{x\to\infty} f(x,y,z) = 0$ *с асимптотическим поведением*

$$f(x,y,z) = o\left[e^{|A|\omega_a^\alpha(x)}x^{-\zeta_2}\right], \quad \zeta_2 > 1-\alpha,\ x\to\infty, \tag{10}$$

$\lim_{y\to\ b} f(x,y,z) = 0$ *с асимптотическим поведением*

$$f(x,y,z) = o\left[e^{B\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\gamma_2}\right], \quad \gamma_2 > \beta-1,\ y\to\ b, \tag{11}$$

$\lim_{z\to\ c} f(x,y,z) = 0$ *с асимптотическим поведением*

$$f(x,y,z) = o\left[(z-c)^{\eta_1}\right], \quad \eta_1 > |C|,\ z\to\ c. \tag{12}$$

Тогда интегральное уравнение (1) *в классе* $C(\overline{\Omega})$, *обращающееся в нуль на* D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, *всегда разрешимо, общее решение содержит три произвольные функции двух переменных и выражается равенством* (9), *где* $\rho(y,z) \in C(\bar{\Im}_1)$, $\psi(x,z) \in C(\bar{\Im}_2)$, $\nu(x,y) \in C(\bar{\Im}_3)$ — *произвольные функции точек* $\Im_1$, $\Im_2$, $\Im_3$, *причем* $\rho(b,c) = 0$ *с асимптотическим поведением*

$$\rho(y,z) = o\left[e^{B\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\gamma_3}(z-c)^{\eta_2}\right], \quad \gamma_3 > \beta - 1,\ \eta_2 > |C|,\ y \to\ b,\ z \to\ c, \tag{13}$$

$\psi(\infty, c) = 0$ *с асимптотическим поведением*

$$\psi(x,z) = o\left[e^{|A|\omega_a^{\alpha}(x)}x^{-\zeta_3}(z-c)^{\eta_3}\right], \quad \eta_3 > |C|,\ \zeta_3 > 1-\alpha,\ x \to \infty,\ z \to\ c, \tag{14}$$

$\nu(\infty, b) = 0$ *с асимптотическим поведением*

$$\nu(x,y) = o\left[e^{|A|\omega_a^{\alpha}(x)}x^{-\zeta_4}e^{B\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\gamma_4}\right], \quad \gamma_4 > \beta - 1,\ \zeta_4 > 1-\alpha,\ x \to \infty,\ y \to\ b. \tag{15}$$

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 1, *любое решение уравнения* (1) *из класса* $C(\overline{\Omega})$ *на* D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ *обращается в нуль и его поведение при* $x \to \infty$, $y \to\ b$, $z \to\ c$ *определяется из асимптотических формул*

$$\varphi(x,y,z) = o\left[e^{|A|\omega_a^{\alpha}(x)}x^{-\zeta_5}\right], \quad \zeta_5 > 1-\alpha, \tag{16}$$

$$\varphi(x,y,z) = o\left[e^{B\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\gamma_5}\right], \quad \gamma_5 > \beta - 1,\ y \to b, \tag{17}$$

$$\varphi(x,y,z) = o\left[(z-c)^{\eta_4}\right], \quad \eta_4 > |C|,\ z \to c. \tag{18}$$

Теорема 2. *Пусть в интегральном уравнении* (1) *коэффициенты удовлетворяют условиям* (2), $A < 0$, $B < 0$, $C > 0$. *Далее, пусть функция* $f(x,y,z) \in C(\overline{\Omega})$, $\lim_{x\to\infty} f(x,y,z) = 0$, $\lim_{y\to\ b} f(x,y,z) = 0$ *соответственно с асимптотическими поведениями* (10), (11) *и* $\lim_{z\to\ c} f(x,y,z) = 0$ *с асимптотическим поведением*

$$f(x,y,z) = o\left[(z-c)^{\varepsilon}\right], \quad \varepsilon > 0,\ z \to\ c. \tag{19}$$

Тогда интегральное уравнение (1) *в классе* $C(\overline{\Omega})$, *обращающееся в нуль на* D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, *всегда разрешимо, общее решение содержит две произвольные функции двух переменных и выражается равенством*

$$\begin{gathered}\varphi(x,y,z) = e^{-A\omega_{\alpha}^{a}(x)}(\Pi_C^z)^{-1}(\Pi_B^y)^{-1}\rho(y,z)\\ + e^{B\omega_b^{\beta}(y)}(\Pi_C^z)^{-1}\psi(x,z) + (\Pi_C^z)^{-1}(\Pi_B^y)^{-1}(\Pi_A^{\infty})^{-1}(f),\end{gathered} \tag{20}$$

где $\rho(y,z) \in C(\bar{\Im}_1)$, $\psi(x,z) \in C(\bar{\Im}_2)$ — *произвольные функции точек* $\Im_1$, $\Im_2$, *причем* $\rho(b,c) = 0$, $\psi(\infty, c) = 0$ *соответственно с асимптотическими поведениями* (13), (14).

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы* 2, *любое решение уравнения* (1) *из класса* $C(\overline{\Omega})$ *на* D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ *обращается в нуль и его поведение при* $x \to \infty$, $y \to\ b$, $z \to\ c$ *определяется из асимптотических формул* (16), (17),

$$\varphi(x,y,z) = o[(z-c)^{\varepsilon}], \quad \varepsilon > 0,\ z \to c. \tag{21}$$

Теорема 3. *Пусть в интегральном уравнении* (1) *коэффициенты удовлетворяют условиям* (2), $A < 0$, $B > 0$, $C < 0$. *Далее, пусть функция* $f(x,y,z) \in C(\overline{\Omega})$,

$\lim_{x\to\infty} f(x,y,z) = 0$, $\lim_{z\to\ c} f(x,y,z) = 0$ соответственно с асимптотическими поведениями (10), (12) и $\lim_{y\to\ b} f(x,y,z) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x,y,z) = o\left[(y-b)^{\gamma_6}\right], \quad \gamma_6 > \beta - 1,\ y \to\ b. \tag{22}$$

Тогда интегральное уравнение (1) в классе $C(\overline{\Omega})$, обращающееся в нуль на D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, всегда разрешимо, общее решение содержит две произвольные функции двух переменных и выражается равенством

$$\varphi(x,y,z) = (z-c)^{-C}\nu(x,y) + e^{-A\omega_\alpha^a(x)}(\Pi_C^z)^{-1}(\Pi_B^y)^{-1}\rho(y,z) + (\Pi_C^z)^{-1}(\Pi_B^y)^{-1}(\Pi_A^\infty)^{-1}(f),$$

где $\rho(y,z) \in C(\bar{\Im}_1)$, $\nu(x,y) \in C(\bar{\Im}_3)$ — произвольные функции точек $\Im_1$, $\Im_3$, причем $p(b,c) = 0$, $\nu(\infty,b) = 0$ соответственно с асимптотическими поведениями (13), (14).

Следствие 3. *При выполнении условий теоремы 3, любое решение уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega})$ на D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ обращается в нуль и его поведение при $x \to \infty$, $y \to\ b$, $z \to\ c$ определяется из асимптотических формул (16), (18),*

$$\varphi(x,y,z) = o\left[(y-b)^{\gamma_7}\right], \quad \gamma_7 > \beta - 1,\ y \to\ b. \tag{23}$$

Теорема 4. *Пусть в интегральном уравнении (1) коэффициенты удовлетворяют условиям (2), $A > 0$, $B > 0$, $C < 0$. Далее, пусть функция $f(x,y,z) \in C(\overline{\Omega})$ $\lim_{x\to\infty} f(x,y,z) = 0$, $\lim_{y\to\ b} f(x,y,z) = 0$, $\lim_{z\to\ c} f(x,y,z) = 0$, соответственно с асимптотическими поведениями*

$$f(x,y,z) = o\left[x^{-\zeta_6}\right], \quad \zeta_6 > 1 - \alpha,\ x \to \infty, \tag{24}$$

(22) и (12).

Тогда интегральное уравнение (1) в классе $C(\overline{\Omega})$, обращающееся в нуль на D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, всегда разрешимо, общее решение содержит одну произвольную функцию и выражается равенством

$$\varphi(x,y,z) = (z-c)^{-C}\nu(x,y) + (\Pi_C^z)^{-1}(\Pi_B^y)^{-1}(\Pi_A^\infty)^{-1}(f),$$

где $\nu(x,y) \in C(\bar{\Im}_3)$ — произвольные функции точек $\Im_3$, причем $\nu(\infty,b) = 0$ с асимптотическим поведением (15).

Следствие 4. *При выполнении условий теоремы 4, любое решение уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega})$ на D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ обращается в нуль и его поведение при $x \to \infty$, $y \to\ b$, $z \to\ c$ определяется из асимптотических формул (23), (18) и*

$$\varphi(x,y,z) = o\left[x^{-\zeta_7}\right], \quad \zeta_7 > 1 - \alpha. \tag{25}$$

Теорема 5. *Пусть в интегральном уравнении (1) коэффициенты удовлетворяют условиям (2), $A < 0$, $B > 0$, $C > 0$. Далее, пусть функция $f(x,y,z) \in C(\overline{\Omega})$, $\lim_{x\to\infty} f(x,y,z) = 0$, $\lim_{y\to\ b} f(x,y,z) = 0$, $\lim_{z\to\ c} f(x,y,z) = 0$, соответственно с асимптотическими поведениями (10), (22), (19).*

Тогда интегральное уравнение (1) в классе $C(\overline{\Omega})$, обращающееся в нуль на D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, всегда разрешимо, общее решение содержит одну произвольную функцию и выражается равенством

$$\varphi(x,y,z) = e^{-A\omega_\alpha^a(x)}(\Pi_C^z)^{-1}(\Pi_B^y)^{-1}\rho(y,z) + (\Pi_C^z)^{-1}(\Pi_B^y)^{-1}(\Pi_A^\infty)^{-1}(f),$$

где $\rho(y,z) \in C(\bar{\Im}_1)$ — произвольная функция точек $\Im_1$, причем $p(b,c) = 0$ с асимптотическим поведением (13).

Следствие 5. *При выполнении условий теоремы* 5, *любое решение уравнения* (1) *из класса* $C(\overline{\Omega})$ *на* D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ *обращается в нуль и его поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$, $z \to c$ *определяется из асимптотических формул* (18), (23) *и* (16).

Теорема 6. *Пусть в интегральном уравнении* (1) *коэффициенты удовлетворяют условиям* (2), $A > 0$, $B < 0$, $C > 0$. *Далее, пусть функция* $f(x, y, z) \in C(\overline{\Omega})$ $\lim_{x\to\infty} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{y\to b} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{z\to c} f(x, y, z) = 0$, *соответственно с асимптотическими поведениями* (24), (22), (12). *Тогда интегральное уравнение* (1) *в классе* $C(\overline{\Omega})$, *обращающееся в нуль на* D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, *всегда разрешимо, общее решение содержит одну произвольную функцию и выражается равенством*

$$\varphi(x, y, z) = (y - b)^{-B}(\Pi_C^z)^{-1}\psi(x, z) + (\Pi_C^z)^{-1}(\Pi_B^y)^{-1}(\Pi_A^\infty)^{-1}(f),$$

где $\psi(x, z) \in C(\bar{\Im}_2)$ — *произвольная функция точек* $\Im_2$, *причем* $\psi(\infty, c) = 0$ *с асимптотическим поведением* (14).

Следствие 6. *При выполнении условий теоремы* 6, *любое решение уравнения* (1) *из класса* $C(\overline{\Omega})$ *на* D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ *обращается в нуль и его поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$, $z \to c$ *определяется из асимптотических формул* (18), (23) *и* (25).

Теорема 7. *Пусть в интегральном уравнении* (1) *коэффициенты удовлетворяют условиям* (2), $A > 0$, $B < 0$, $C < 0$. *Далее, пусть функция* $f(x, y, z) \in C(\overline{\Omega})$, $\lim_{x\to\infty} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{y\to b} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{z\to c} f(x, y, z) = 0$ *соответственно с асимптотическими поведениями* (19), (11), (12).

Тогда интегральное уравнение (1) *в классе* $C(\overline{\Omega})$, *обращающееся в нуль на* D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, *всегда разрешимо, общее решение содержит две произвольные функции двух переменных и выражается равенством*

$$\varphi(x, y, z) = (z - c)^{-C}\nu(x, y) + e^{B\omega_b^\beta(y)}(\Pi_C^z)^{-1}\psi(x, z) + (\Pi_C^z)^{-1}(\Pi_B^y)^{-1}(\Pi_A^\infty)^{-1}(f),$$

где $\nu(x, y) \in C(\bar{\Im}_3)$, $\psi(x, z) \in C(\bar{\Im}_2)$ — *произвольные функции точек* $\Im_3$, $\Im_2$, *причем* $\nu(x, y)(\infty, b) = 0$, $\psi(\infty, c) = 0$ *соответственно с асимптотическими поведениями* (15) *и* (14).

Следствие 7. *При выполнении условий теоремы* 7 *любое решение уравнения* (1) *из класса* $C(\overline{\Omega})$ *на* D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ *обращается в нуль и его поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$, $z \to c$ *определяется из асимптотических формул* (25), (17) *и* (18).

Теорема 8. *Пусть в интегральном уравнении* (1) *коэффициенты удовлетворяют условиям* (2), $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$. *Далее, пусть функция* $f(x, y, z) \in C(\overline{\Omega})$, $\lim_{x\to\infty} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{y\to b} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{z\to c} f(x, y, z) = 0$ *соответственно с асимптотическими поведениями* (24), (22), (19).

Тогда интегральное уравнение (1) *в классе* $C(\overline{\Omega})$, *обращающееся в нуль на* D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, *имеет единственное решение, которое выражается равенством*

$$\varphi(x, y, z) = (\Pi_C^z)^{-1}(\Pi_B^y)^{-1}(\Pi_A^\infty)^{-1}(f).$$

Следствие 8. *При выполнении условий теоремы* 7, *любое решение уравнения* (1) *из класса* $C(\overline{\Omega})$ *на* D_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ *обращается в нуль и его поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$, $z \to c$ *определяется из асимптотических формул* (16), (18) *и* (23).

Литература

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—Москва: Наука, 1977.—640 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 3.—Москва: Наука, 1968.—512 с.

3. *Урбанович Т. М., Солдатов А. П.* Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика.—2011.—№ 17 (112), вып. 24.—С. 165–171.
4. *Абаполова Е. А., Солдатов А. П.* К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика.—2010.—№ 5 (76), вып. 18.—С. 6–20.
5. *Сабитов К. Б.* Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения.—М.: Высш. школа, 2005.—671 с.
6. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1962.—254 с.
7. *Довгий С. А., Лифанов И. К.* Методы решения интегральных уравнения.—Киев: Изд-во «Наукова Думка», 2002.—343 с.
8. *Антипина Е. Д.* Формулы обращения для трехмерного интегрального уравнения Вольтерра I рода с предысторией // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика.—2022.—Т. 41.—С. 69–84. DOI: 10.26516/1997-7670.2022.41.69.
9. *Плещинский Н.* Сингулярные интегральные уравнения со сложной особенностью в ядре.—Казань: 2018.—160 с.
10. *Расолько Г. А.* Численное решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши методом ортогональных многочленов.—Минск: БГУ, 2007.—293 с.
11. *Раджабов Н.* Интегральные уравнении типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх-сингулярными ядрами и их приложения.—Душанбе, 2007.—221 с.
12. *Раджабов Н., Раджабова Л. Н.* Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверх-сингулярными ядрами и их приложении.—LAP Lambert Academic Publ., 2011.—502 с.
13. *Раджабова Л. Н., Раджабов Н.* К теории одного класса двумерного слабо-сингулярного интегрального уравнения типа Вольтерра на первом квадранте // Докл. АН Респ. Таджикистан.—2014.—Т. 57.—С. 443–451.
14. *Раджабова Л. Н., Хушвахтов М. Б.* К теории особых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой // Докл. АН Респ. Таджикистан.—2018.—Т. 61, № 4.—С. 331–337.
15. *Раджабова Л. Н., Хушвахтов М. Б.* О некоторых случаях немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе // Докл. АН Респ. Таджикистан.—2019.—Т. 62, № 9–10.—С. 533–540.
16. *Rajabova L. N., Khushvakhtov M. B.* To the theory of non-model two-dimensional integral equations of Volterra type with a strongly singular and weakly singular line on a strip // Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian national University. Mathematics. Computer science. Mechanics series.—2019.—Vol. 129, № 4.—P. 67–72.
17. *Хушвахтов М. Б.* О некоторых случаях двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе // Вестн. Таджикского национального ун-та. Сер. Естеств. наук.—2019.—№ 1.—С. 44–49.
18. *Хушвахтов М. Б.* О некоторых случаях немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе // Междунар. научн. журн. «Молодой ученый».—2019.—Т. 287, № 49.—С. 1–4.

Статья поступила 15 января 2024 г.

Раджабова Лутфия Нусратовна
Таджикский национальный университет,
профессор кафедры матем. анализа и теории функций
Таджикистан, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17
E-mail: lutfya62@mail.ru
https://orcid.org/0009-0005-8238-9818

Хушвахтзода Мухидин Бурак
Таджикский национальный университет,
ассистент кафедры матем. анализа и теории функций
Таджикистан, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17
E-mail: muhuddin_93@mail.ru
https://orcid.org/0009-0000-6726-9977

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 2, P. 103–112

MODEL THREE-DIMENSIONAL VOLTERRA TYPE INTEGRAL EQUATIONS WITH BOUNDARY SINGULAR, WEAK SINGULAR AND STRONG SINGULAR KERNELS

Radjabova, L. N.[1] and Khushvakhtzoda, M. B.[1]

[1] Tajik National University,
17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Tajikistan
E-mail: lutfya62@mail.ru, muhuddin_93@mail.ru

Abstract. In this paper, we study a three-dimensional model Volterra type integral equation with boundary weakly special, special and strongly special kernels in the domain $\Omega = \{(x, y, z) : \ 0 \leqslant a < x < \infty, \ 0 \leqslant b < y < b_0, \ 0 \leqslant c < z < c_0\}$, which we will call a rectangular pipe. In the case when the coefficients of the equation are interconnected, the solution of the equation is sought in the class of continuous functions in Ω vanishing with a certain asymptotic behavior on special domains. It is proved that, under certain conditions, the problem of finding a solution to a three-dimensional integral equation of the Volterra type with boundary weakly special, special and strongly special kernels is reduced to solving one-dimensional integral equations of the Volterra type with special boundary kernels. Note that when solving this integral equation, connections of these equations with first-order differential equations with weakly singular, singular and strongly singular coefficients are used. Then it is established that there is no need to require differentiability from the obtained solution and the right-hand side, it is sufficient that the right-hand side of the three-dimensional integral equation with boundary special, weakly special, and strongly special kernels is continuous and vanishes with certain asymptotics on special domains. It is proved that, depending on the sign of the coefficients of the equation, the explicit solution of a three-dimensional Volterra-type model integral equation with special kernels can contain from one to three arbitrary functions of two variables, and the case is also determined when the solution of the integral equation is unique.

Keywords: model integral equation, three-dimensional integral equation, boundary singular kernels, arbitrary function.

AMS Subject Classification: 45D05.

For citation: *Radjabova, L. N. and Khushvakhtzoda, M. B.* Model Three-Dimensional Volterra Type Integral Equations with Boundary Singular, Weak Singular and Strong Singular Kernels, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 2, pp. 103–112 (in Russian). DOI: 10.46698/y7151-5493-5096-h.

References

1. *Gakhov, F. D. Boundary Value Problems*, Moscow, Nauka, 1977, 640 p. (in Russian).
2. *Muskhelishvili, N. I. Singular Integral Equations*, Publ. 3, Moscow, 1968, 512 p.
3. *Urbanovich, T. M. and Soldatov, A. P.* A Characteristic Singular Integral Equation with a Cauchy Kernel in the Exceptional Case, *Scientific Bulletin of the Belarusian State University. Ser. Mathematics. Physics*, 2011, no. 17 (112), issue 24, pp. 1–7 (in Russian).
4. *Abapolova, E. A. and Soldatov, A. P.* On the Theory of Singular Integral Equations on a Smooth Contour, *Scientific Bulletin of the Belarusian State University. Ser. Mathematics. Physics*, 2010, no. 5 (76), issue 18, pp. 6–20 (in Russian).
5. *Sabitov, K. B. Functional, Differential and Integral Equations*, Moscow, Higher School, 2005, 671 p. (in Russian).
6. *Mikhlin, C. G. Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*, Moscow, Fizmatgiz, 1962, 254 p. (in Russian).
7. *Dovgiy, C. A. and Lifanov, I. K. Methods for Solving Integral Equations*, Kiev, Publishing House «Naukova Dumka», 2002, 343 p. (in Russian).
8. *Antipina, E. D.* Inversion Formulas for the Three-Dimensional Volterra Integral Equation of the First Kind with a Prehistory, *Proceedings of Irkutsk State University. Ser. Mathematics*, 2022, vol. 41, pp. 69–84 (in Russian).

9. *Pleshchinsky, N. Singular Integral Equations with a Complex Singularity in the Core*, Kazan, 2018, 160 p. (in Russian).
10. *Rasolko, G. A. Numerical Solution of Some Singular Integral Equations with Cauchy Kernel by Orthogonal Polynomial Method*, Minsk, BSU, 2007, 293 p. (in Russian).
11. *Rajabov, N. Integral Equations of Volterra types with Fixed Boundary and Internal Singular and Super-Singular Kernels and their Applications*, Dushanbe, 2007, 221 p. (in Russian).
12. *Rajabov, N. and Rajabova, L. N. Introduction to the Theory of Multidimensional Integral Equations of the Type Volterra with Fixed Singular and Super-Singular Kernels and their Application*, LAP Lambert Academic Publ., 2011, 502 p. (in Russian).
13. *Rajabova, L. N. and Rajabov, N.* On the Theory of One Class of a Two-Dimensional Weakly Singular Integral Equation of Volterra Type on the First Quadrant, *Reports of the Academy of Sciences of Tajikistan*, 2014, vol. 57, pp. 443–451 (in Russian).
14. *Radjabova, L. N. and Khushvakhtov, M. B.* On the Theory of Special Two-Dimensional Integral Equations of the Type Volterra with a Special and Weakly-Special Line on the Strip in the Case when the Parameters of the Equation are not Related, *Reports of the Academy of Sciences of Tajikistan*, 2018, vol. 61, no. 4, pp. 331–337 (in Russian).
15. *Radjabova, L. N. and Khushvakhtov, M. B.* On Some Cases of Non-Model Two-Dimensional Volterra-Type Integral Equations with a Special and Weakly Special Line on the Strip, *Reports of the Academy of Sciences of Tajikistan*, 2019, vol. 62, no. 9–10, pp. 533–540 (in Russian).
16. *Rajabova, L. N. and Khushvakhtov, M. B.* To the Theory of Non-Model Two-Dimensional Integral Equations of Volterra Type with a Strongly Singular and Weakly Singular Line on a Strip, *Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University, Mathematics. Computer Science. Mechanics Series*, 2019, vol. 129, no. 4, pp. 67–72 (in English).
17. *Khushvakhtov, M. B.* On Some Cases of Two-Dimensional Volterra-Type Integral Equations with a Special and Weakly Special Line on the Strip, *Bulletin of the Tajik National University. Series of Natural Sciences*, 2019, no. 1, pp. 44–49 (in Russian).
18. *Khushvakhtov M.B.* On Some Cases of Non-Model Two-Dimensional Volterra-Type Integral Equations with a Strongly-Singular and Weakly-Singular Line on the Strip, *International Scientific Journal «Young Scientist»*, 2019, vol. 287, no. 49, pp. 1–4 (in Russian).

Received Junuary 15, 2024

Lutfya N. Rajabova
Tajik National University,
17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Tajikistan,
Professor of the Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions
E-mail: lutfya62@mail.ru
https://orcid.org/0009-0005-8238-9818

Mukhidin B. Khushvakhtzoda
Tajik National University,
17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Tajikistan,
Assistant of the Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions
E-mail: muhuddin_93@mail.ru
https://orcid.org/0009-0000-6726-9977