Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 3, С. 5–23

УДК 519.64
DOI 10.46698/l0699-2536-6844-a

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРНОСА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ РАЗНЫХ ПОРЯДКОВ И НЕЛОКАЛЬНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ

М. Х. Бештоков[1]

[1] Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Аннотация. Работа посвящена начально-краевым задачам для уравнения влагопереноса дробного порядка с нелокальным линейным источником и переменными коэффициентами. При предположении существования регулярного решения для каждой из рассмотренных первой и третьей начально-краевых задач получена априорная оценка в дифференциальной форме, откуда следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных исходной задачи. Каждой дифференциальной задаче ставится в соответствие разностная схемана равномерной сетке. В предположении существования решения для каждой разностной задачи получена априорная оценка в разностной форме, из чего следуют единственность и устойчивость решения разностной задачи по правой части и начальным данным. В силу линейности рассматриваемых начально-краевых задач полученные оценки в разностной форме позволяют утверждать сходимость решения каждой разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи (в предположении существования последнего в классе достаточно гладких функций) со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации. Проведены численные расчеты, иллюстрирующие полученные теоретические результаты в работе.

Ключевые слова: уравнение влагопереноса, краевые задачи, дробная производная Герасимова — Капуто, нелокальный источник, разностные схемы, устойчивость и сходимость разностных схем.

AMS Subject Classification: 65N06, 65N12, 65R20.

Образец цитирования: *Бештоков М. Х.* Начально-краевые задачи для уравнения влагоперноса с дробными производными разных порядков и нелокальным линейным источником // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 3.—С. 5–23. DOI: 10.46698/l0699-2536-6844-a.

1. Введение

Движение воды в капиллярно-пористых средах, к каковым относятся почвы, может происходить под воздействием самых разнообразных движущих сил. На основе анализа механизма диффузии в пористом массиве, когда учитывается возникновение потоков влаги под действием градиента капиллярного давления получено нелинейное уравнение (см. [1, с. 136])

$$W_t = (D(W)W_x)_x,$$

здесь W — влажность в долях единицы, x — глубина, t — время, $D(W)$ — коэффициент диффузивности почвенной влаги.

Диффузионная модель, предполагающая, что если в начальный момент задана неравномерная влажность, то должен возникнуть поток влаги из более влажных в менее влажные слои, часто не оправдывается. Объяснить, когда и при каких условиях происходит движение влаги в прямом и обратном направлении, можно с помощью модифицированного уравнения диффузии (или уравнения влагопереноса, уравнения Аллера [2]):

$$W_t = (D(W)W_x + AW_{xt})_x, \tag{$*$}$$

где A — положительная постоянная.

Вопросы моделирования переноса влаги в почвогрунтах [1, 2], течения жидкости в трещиновато-пористых средах [3, 4], движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах [5, 6], теплопроводности в двухтемпературных системах [7] и течения некоторых неньютоновских жидкостей [8] связано с необходимостью исследования краевых задач для уравнения вида ($*$).

Дифференциальные уравнения дробного порядка служат хорошим математическим аппаратом для более точного описания систем и процессов природы, для которых необходимо учитывать предысторию (память, наследственные свойства) процесса. Характеристиками, позволяющими учитывать память процесса в таких уравнениях, являются функции памяти, которые представляют собой ядра интегралов, определяющих операторы дробного интегро-дифференцирования. К примеру, такой функцией памяти может быть степенная функция. Показатель степенной функции памяти определяет порядок производной и связан с фрактальной размерностью среды, в которой протекает исследуемый процесс [9–12].

При рассмотрении вышеперечисленных процессов и явлений с эффектами памяти уместно использование производных дробного порядка. Именно по этой причине в настоящей работе рассматривается уравнение ($*$) с дробной производной по времени в смысле Герасимова — Капуто. Для описания более сложных процессов могут привлекаться функции памяти, более сложной структуры, чем степенная функция.

Так, в работе [13] предложены и исследованы математические модели водного режима в почвогрунтах с фрактальной структурой. В основе этих моделей лежат дифференциальные уравнения влагопереноса с дробной по времени производной. Математически обосновывается переход от уравнения с целочисленной производной к уравнению с дробной производной в смысле Герасимова — Капуто. Для задачи Коши выписывается единственное представление решения.

Численным методам решения различных краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка посвящены работы [14–19].

В настоящей работе исследуются начально-краевые задачи для уравнения влагопереноса дробного порядка с нелокальным линейным источником и переменными коэффициентами. Основным методом исследования является методом энергетических неравенств. При предположении существования регулярного решения для каждой из рассмотренных первой и третьей начально-краевых задач получена оценка в дифференциальной форме, откуда следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных исходной задачи. На равномерной сетке в соответствие каждой дифференциальной задаче ставится соответствующая разностная схема порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ при $\alpha = \beta$ и $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ при $\alpha \neq \beta$, где $0 < \alpha, \beta < 1$ — порядки дробных производных Герасимова — Капуто. Для каждой разностной задачи в предположении существования решения получена оценка в разностной форме, из чего следуют единственность и устойчивость решения разностной задачи по правой части и начальным данным. В силу линейности рассматриваемых начально-краевых задач полученные оценки в разностной форме позволяют утверждать сходимость решения каждой разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи (в предположении существования последнего в классе достаточно гладких функций) со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации. Проведены численные расчеты.

Настоящая работа является продолжением серии работ автора в этом направлении [19–24].

2. Постановка задачи и оценка в дифференциальной форме

В замкнутой области $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим следующую задачу для обобщенного уравнения влагопереноса:

$$\begin{gathered}\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \partial_{0t}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\\ -q(x,t)u(x,t) + \int\limits_0^l \rho(\xi,t)u(\xi,t)\,d\xi + f(x,t), \quad 0<x<l,\ 0<t\leqslant T,\end{gathered} \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

где

$$0 < c_0 \leqslant k(x,t), \quad \eta(x) \leqslant c_1, \quad |q(x,t)|, |r(x,t)|, |r_x(x,t)|, |k_x(x,t)|, |\rho(x,t)| \leqslant c_2, \tag{4}$$

$\partial_{0t}^{\gamma} u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\gamma}\,d\tau$ — дробная производная в смысле Герасимова — Капуто порядка γ, $0<\gamma<1$.

Отметим, что приведенная выше конструкция дробной производной введена [25] итальянским механиком М. Капуто в 1967 г. Поэтому за рубежом ее называют дробной производной Капуто. Однако правильнее называть ее дробной производной Герасимова — Капуто, так как еще в 1948 г. советский механик А. Н. Герасимов рассматривал [26] подобные выражения:

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\gamma}\,d\tau.$$

Присутствие в исследуемом дифференциальном уравнении нелокального источника в интегральной форме из физических соображений совершенно естественно и возникает при математическом моделировании в тех случаях, когда имеются источники (или стоки в зависимости от знака $\rho(\xi,t)$) и невозможно получить информацию о происходящем процессе с помощью непосредственных измерений или же когда возможно измерение лишь некоторых усредненных (интегральных) характеристик искомой величины.

Также отметим, что рассматриваемое нелокальное уравнение влагопереноса, ввиду присутствия интеграла по пространственной переменной и производной дробного порядка в смысле Герасимова — Капуто, относится к классу нагруженных уравнений [27].

Предположим, что решение задачи (1)–(3) существует и обладает нужными по ходу изложения производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым условиям гладкости, обеспечивающим нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

Обозначим через M_i $(i = 1, 2, \ldots)$ положительные постоянные числа, зависящие только от входных данных исходной задачи.

Для получения оценки решения задачи (1)–(3) в дифференциальной форме умножим уравнение (1) скалярно на u:

$$\begin{aligned}(\partial_{0t}^{\alpha} u, u) = ((k u_x)_x\,, u) + \left(\partial_{0t}^{\beta}\,(\eta(x) u_x)_x\,, u\right) + (r u_x(x,t), u)\\ - (q(x,t)u, u) + \left(\int\limits_0^l \rho(\xi, t,) u(\xi, t)\, d\xi, u\right) + (f(x,t), u)\,, \qquad (5)\end{aligned}$$

где $(u, v) = \int_0^l uv\, dx$, $(u, u) = \|u(\cdot, t)\|_0^2 = \|u\|_0^2$, где u, v — заданные на $[0, l]$ функции.

Лемма 1. *Для всякой функции $u(x)$, обращающейся в нуль при $x = 0$, справедлива оценка*

$$\|u\|_0^2 \leqslant \frac{l^2}{2} \|u_x\|_0^2.$$

$\lhd$ Действительно, в силу условия $u(0, t) = 0$ справедливо неравенство

$$u(x, t) = \int\limits_0^x u_x(x, t)\, dx.$$

Возведем в квадрат обе стороны, тогда на основании неравенства Коши — Буняковского получим

$$u^2(x, t) = \left(\int\limits_0^x u_x(x, t)\, dx\right)^2 \leqslant x \int\limits_0^x u_x^2(x, t)\, dx.$$

Проинтегрируем обе части по x от 0 до l, тогда по формуле Дирихле получим:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^l u^2(x, t)\, dx \leqslant \int\limits_0^l \left(x \int\limits_0^x u_\xi^2(\xi, t)\, d\xi\right)\, dx\\ = \frac{l^2}{2} \int\limits_0^l u_x^2(x, t)\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_0^l (x u_x(x, t))^2\, dx \leqslant \frac{l^2}{2} \int\limits_0^l u_x^2(x, t)\, dx.\end{aligned}$$

Следовательно, $\|u\|_0^2 \leqslant \frac{l^2}{2} \|u_x\|_0^2$. $\rhd$

Лемма 2. *Для всякой функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке*

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, \ldots, N,\ h = l/N,\ x_0 = 0,\ x_N = l\}$$

и обращающейся в нуль при $x = 0$, справедлива оценка

$$\|y\|_0^2 \leqslant l^2 \|y_{\bar{x}}]|_0^2.$$

$\lhd$ Действительно, в силу условия $y(0, t) = 0$ справедливо неравенство

$$y_i = y_0 + \sum_{s=1}^{i} y_{\bar{x}, s} h = \sum_{s=1}^{i} y_{\bar{x}, s} h.$$

Возведем в квадрат обе стороны, тогда на основании неравенства Коши — Шварца получим

$$y_i^2 = \left(\sum_{s=1}^{i} y_{\bar{x},s} h\right)^2 \leqslant \sum_{s=1}^{i} y_{\bar{x},s}^2 h \sum_{s=1}^{i} h = x_i \sum_{s=1}^{i} y_{\bar{x},s}^2 h.$$

Умножим теперь обе части на h и просуммируем по i от 1 до N

$$\sum_{i=1}^{N} y_i^2 h \leqslant \sum_{i=1}^{N} \left(x_i \sum_{s=1}^{i} y_{\bar{x},s}^2 h\right) h = \sum_{i=1}^{N} y_{\bar{x},i}^2 h \sum_{s=1}^{N} x_s h \leqslant \left(\frac{l^2}{2} + \frac{l}{2}h\right) \sum_{s=1}^{N} y_{\bar{x},s}^2 h \leqslant l^2 \|y_{\bar{x}}]|_0^2$$

для любого $h \in [0, l]$.

Следовательно,

$$\|y\|_0^2 \leqslant l^2 \|y_{\bar{x}}]|_0^2. \ \triangleright$$

Пользуясь неравенством Коши с ε [28, с. 100] и леммой 1 из [17], преобразуем интегралы, входящие в тождество (5):

$$(\partial_{0t}^{\alpha} u, u) \geqslant \frac{1}{2}\left(1, \partial_{0t}^{\alpha} u^2\right) = \frac{1}{2} \partial_{0t}^{\alpha} \|u\|_0^2, \tag{6}$$

$$\left((k u_x)_x, u\right) = \int_0^l u \,(k u_x)_x \, dx = u k u_x\big|_0^l - \int_0^l k u_x^2 \, dx, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\left(\partial_{0t}^{\beta} (\eta u_x)_x, u\right) &= \int_0^l u \partial_{0t}^{\beta} (\eta u_x)_x \, dx = \eta u \partial_{0t}^{\beta} u_x\big|_0^l - \int_0^l \eta(x) u_x \partial_{0t}^{\beta} u_x \, dx \\ &\leqslant \eta u \partial_{0t}^{\beta} u_x\big|_0^l - \frac{1}{2} \int_0^l \eta \partial_{0t}^{\beta} (u_x)^2 \, dx,\end{aligned} \tag{8}$$

$$(r u_x, u) = \int_0^l r u u_x \, dx \leqslant \frac{c_2^2}{4\varepsilon} \int_0^l u^2 \, dx + \varepsilon \int_0^l u_x^2 \, dx \leqslant M_1(\varepsilon) \|u\|_0^2 + \varepsilon \|u_x\|_0^2, \tag{9}$$

$$-\left(q(x,t) u, u\right) \leqslant c_2 \|u\|_0^2, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^l \rho(\xi,t) u(\xi,t) \, d\xi, u\right) = \int_0^l u \int_0^l \rho(\xi,t) u(\xi,t) \, d\xi \, dx \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + \left(\frac{1}{2}, \left(\int_0^l \rho(\xi,t) u(\xi,t) \, d\xi\right)^2\right) \leqslant \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + \left(\frac{1}{2}, \int_0^l \rho^2(\xi,t) \, d\xi \int_0^l u^2(\xi,t) \, d\xi\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + M_2 \int_0^l dx \int_0^l u^2(\xi,t) \, d\xi \leqslant M_3 \|u\|_0^2,\end{aligned} \tag{11}$$

$$(f, u) = \int_0^l f u \, dx \leqslant \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|f\|_0^2. \tag{12}$$

Учитывая преобразования (6)–(12), из (5) с учетом (2) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\beta}\int\limits_0^l \eta(u_x)^2\,dx+c_0\|u_x\|_0^2\leqslant \varepsilon\|u_x\|_0^2+M_3(\varepsilon)\|u\|_0^2+\frac{1}{2}\|f\|_0^2. \tag{13}$$

Выбирая $\varepsilon=\frac{c_0}{2}$, из (13) получаем

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\partial_{0t}^{\beta}\int\limits_0^l \eta(u_x)^2\,dx+\|u_x\|_0^2\leqslant M_4\|u\|_0^2+M_5\|f\|_0^2. \tag{14}$$

I случай. Пусть $\alpha>\beta$, тогда, применяя к обеим частям неравенства (14) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\|u\|_0^2+D_{0t}^{-(\alpha-\beta)}\|u_x\|_0^2\leqslant M_6D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2+M_7\left(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2+\|u_0(x)\|_0^2\right), \tag{15}$$

где $D_{0t}^{-\gamma}u=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t\frac{u\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\gamma}}$ — дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка γ, $0<\gamma<1$.

На основании [17, леммы 2] из (15) находим оценку

$$\|u\|_1^2\leqslant M_8\big(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2+\|u_0(x)\|_0^2\big), \tag{16}$$

где $\|u\|_1^2=\|u\|_0^2+D_{0t}^{-(\alpha-\beta)}\|u_x\|_0^2$.

II случай. Пусть $\alpha=\beta$, тогда, применяя к обеим частям неравенства (14) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\leqslant M_9D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2+M_{10}\left(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2+\|u_0(x)\|_0^2+\|u_0'(x)\|_0^2\right). \tag{17}$$

На основании [17, леммы 2] из (17) находим оценку

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2\leqslant M_{11}\left(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2+\|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2\right), \tag{18}$$

где $\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2=\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2$.

III случай. Пусть $\alpha<\beta$, тогда, применяя к обеим частям неравенства (14) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\beta}$, получаем

$$\|u_x\|_0^2+D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\|u\|_0^2\leqslant M_{12}D_{0t}^{-\beta}\|u\|_0^2+M_{13}\left(D_{0t}^{-\beta}\|f\|_0^2+\|u_0'(x)\|_0^2\right). \tag{19}$$

В силу леммы 1 из (19) получаем

$$\|u_x\|_0^2+D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\|u\|_0^2\leqslant M_{14}D_{0t}^{-\beta}\|u_x\|_0^2+M_{15}\left(D_{0t}^{-\beta}\|f\|_0^2+\|u_0'(x)\|_0^2\right). \tag{20}$$

На основании [17, леммы 2] из (20) находим оценку

$$\|u\|_2^2\leqslant M_{16}\left(D_{0t}^{-\beta}\|f\|_0^2+\|u_0'(x)\|_0^2\right), \tag{21}$$

где $\|u\|_2^2=\|u_x\|_0^2+D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\|u\|_0^2$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Если* $k(x,t) \in C^{1,0}(Q_T)$, $\eta(x) \in C^1[0,l]$, $r(x,t), q(x,t), \rho(x,t), f(x,t) \in C(Q_T)$, $u(x,t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) \in C(Q_T)$, $\partial_{0t}^{\alpha} u_{xx}(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$ *и выполнены условия* (4), *то для решения задачи* (1)–(3) *справедливы оценки:* (16) *в случае, когда* $\alpha > \beta$; (18) *в случае, когда* $\alpha = \beta$; (21) *в случае, когда* $\alpha < \beta$.

Из полученных оценок (16), (18), (21) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

3. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для приближенного решения задачи (1)–(3) применим метод конечных разностей. В замкнутой области $\overline{Q}_T$ введем равномерную сетку $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, где $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, \ldots, N,\ h = l/N\}$, $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, j_0,\ \tau = T/j_0\}$.

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ при $\alpha = \beta$ и $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ при $\alpha \neq \beta$:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \chi_i^j \left(a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right)_{x,i} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta} (\gamma_i y_{\bar{x}})_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}$$

$$- d_i^j y_i^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{N} p_s y_s^{(\sigma)} \hbar + \varphi_i^j, \quad (x,t) \in \omega_{h,\tau}, \tag{22}$$

$$y_0^{(\sigma)} = y_N^{(\sigma)} = 0, \tag{23}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{24}$$

где $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\gamma} y = \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{s=0}^{j} c_{j-s}^{(\gamma,\sigma)} y_t^s$ — дискретный аналог дробной производной Герасимова — Капуто порядка γ, $0 < \gamma < 1$, обеспечивающий порядок точности $O(\tau^{3-\gamma})$ при $\sigma = 1 - \frac{\gamma}{2}$, и $O(\tau^{2-\gamma})$ при $\sigma = 0.5$ [18],

$$a_0^{(\gamma,\sigma)} = \sigma^{1-\gamma}, \quad a_l^{(\gamma,\sigma)} = (l+\sigma)^{1-\gamma} - (l-1+\sigma)^{1-\gamma}, \quad l \geqslant 1,$$

$$b_l^{(\gamma,\sigma)} = \frac{1}{2-\gamma} \Big[(l+\sigma)^{2-\gamma} - (l-1+\sigma)^{2-\gamma} \Big] - \frac{1}{2} \Big[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\gamma} \Big], \quad l \geqslant 1,$$

при $j = 0$

$$c_0^{(\gamma,\sigma)} = a_0^{(\gamma,\sigma)};$$

при $j > 0$

$$c_s^{(\gamma,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\gamma,\sigma)} + b_1^{(\gamma,\sigma)}, & s = 0; \\ a_s^{(\gamma,\sigma)} + b_{s+1}^{(\gamma,\sigma)} - b_s^{(\gamma,\sigma)}, & 1 \leqslant s \leqslant j-1; \\ a_j^{(\gamma,\sigma)} - b_j^{(\gamma,\sigma)}, & s = j, \end{cases}$$

$\sigma = 1 - \frac{\gamma}{2}$, при $\alpha = \beta$ и $\sigma = 0.5$ при $\alpha \neq \beta$,

$$c_s^{(\gamma,\sigma)} > \frac{1-\gamma}{2}(s+\sigma)^{-\gamma} > 0, \quad y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j, \quad \hbar = \begin{cases} \frac{h}{2}, & s = 0, N, \\ h, & s \neq 0, N, \end{cases}$$

$$a_i^j = k\big(x_{i-0.5}, t_{j+\sigma}\big), \quad a^{(+1)} = a_{i+1}, \quad \gamma_i = \eta(x_{i-0.5}), \quad b_i^{\pm j} = \frac{r^{\pm j}(x, t_{j+\sigma})}{k(x_i, t_{j+\sigma})},$$

$$\varphi_i^j=f(x_i,t_{j+\sigma}),\quad d_i^j=q(x_i,t_{j+\sigma}),\quad \rho_i^j=p(x_i,t_{j+\sigma}),$$

$$r(x,t_{j+\sigma})=r^+(x,t_{j+\sigma})+r^-(x,t_{j+\sigma}),\quad |r(x,t_{j+\sigma})|=r^+(x,t_{j+\sigma})-r^-(x,t_{j+\sigma}),$$

$$r^+(x,t_{j+\sigma})=0.5\big(r(x,t_{j+\sigma})+|r(x,t_{j+\sigma})|\big)\geqslant 0,$$

$$r^-(x,t_{j+\sigma})=0.5\big(r(x,t_{j+\sigma})-|r(x,t_{j+\sigma})|\big)\leqslant 0,$$

$\chi(x_i,t_{j+\sigma})=\frac{1}{1+R(x_i,t_{j+\sigma})}$, $R(x_i,t_{j+\sigma})=\frac{0.5h|r(x_i,t_{j+\sigma})|}{k(x_i,t_{j+\sigma})}$ — разностное число Рейнольдса.

Оценку решения задачи (22)–(24) найдем методом энергетических неравенств, тогда введем скалярные произведения и норму в виде:

$$(u,v)=\sum_{i=1}^{N-1}u_iv_ih,\quad (u,v]=\sum_{i=1}^{N}u_iv_ih,\quad (u,u)=\big(1,u^2\big)=\|u\|_0^2.$$

Умножим теперь (22) скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\begin{aligned}\left(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y,y^{(\sigma)}\right)&=\left(\chi\left(ay_{\bar x}^{(\sigma)}\right)_x,y^{(\sigma)}\right)+\left(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\left(\gamma y_{\bar x}\right)_x,y^{(\sigma)}\right)+\left(b^-ay_{\bar x}^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)\\&+\left(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)-\left(dy^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)+\left(\sum_{s=0}^{N}p_sy_s^{(\sigma)}\hbar,y^{(\sigma)}\right)+\left(\varphi,y^{(\sigma)}\right).\end{aligned}\tag{25}$$

С учетом [18, леммы 1] преобразуем суммы, входящие в тождество (25), тогда получим

$$\left(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y,y^{(\sigma)}\right)\geqslant\frac12\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\|y\|_0^2;\tag{26}$$

$$\begin{aligned}\left(\chi(ay_{\bar x}^{(\sigma)})_x,y^{(\sigma)}\right)&=\chi ay_{\bar x}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big|_0^N-\left(ay_{\bar x}^{(\sigma)},(\chi y^{(\sigma)})_{\bar x}\right]=-\left(a\chi_{\bar x},y_{\bar x}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right]\\&-\left(a\chi^{(-1)},(y_{\bar x}^{(\sigma)})^2\right]\leqslant-\left(a\chi_{\bar x},y_{\bar x}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right]-\frac{1}{(1+hM_1)}\left(a\chi,(y_{\bar x}^{(\sigma)})^2\right];\end{aligned}\tag{27}$$

$$\begin{aligned}\left(\Delta^\beta_{0t_{j+\sigma}}\left(\gamma y_{\bar x}\right)_x,y^{(\sigma)}\right)&=\gamma y^{(\sigma)}\Delta^\beta_{0t_{j+\sigma}}y_{\bar x}|_0^N-\left(\gamma,y_{\bar x}^{(\sigma)}\Delta^\beta_{0t_{j+\sigma}}(y_{\bar x})\right]\\&\leqslant-\left(\frac{\gamma}{2},\Delta^\beta_{0t_{j+\sigma}}(y_{\bar x})^2\right]\leqslant-\frac{c_0}{2}\Delta^\beta_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar x}]|_0^2;\end{aligned}\tag{28}$$

$$-\left(dy^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)\leqslant c_2\big\|y^{(\sigma)}\big\|_0^2;$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{s=0}^{N}p_sy_s^{(\sigma)}\hbar,y^{(\sigma)}\right)&\leqslant\frac12\big\|y^{(\sigma)}\big\|_0^2+\left(\frac12,\left(\sum_{s=0}^{N}p_sy_s^{(\sigma)}\hbar\right)^2\right)\leqslant\frac12\big\|y^{(\sigma)}\big\|_0^2\\&+\left(\frac12,\sum_{s=0}^{N}p_s^2\hbar\sum_{s=0}^{N}(y_s^{(\sigma)})^2\hbar\right)\leqslant\frac12\big\|y^{(\sigma)}\big\|_0^2+\frac{c_2}{2}\sum_{s=0}^{N}\hbar\sum_{s=0}^{N}(y_s^{(\sigma)})^2\hbar\leqslant M_2\big\|y^{(\sigma)}\big\|_0^2;\end{aligned}\tag{29}$$

$$\left(\varphi,y^{(\sigma)}\right)\leqslant\frac12\big\|y^{(\sigma)}\big\|_0^2+\frac12\|\varphi\|_0^2.\tag{30}$$

Из (25) с учетом (26)–(30) получим

$$\begin{aligned}\frac12\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\|y\|_0^2+M_3\big\|y_{\bar x}^{(\sigma)}\big]|_0^2+\frac{c_0}{2}\Delta^\beta_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar x}]|_0^2&\leqslant-\left(a\chi_{\bar x},y_{\bar x}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right]+\left(b^-ay_{\bar x}^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)\\&+\left(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)+M_4\big\|y^{(\sigma)}\big\|_0^2+\frac12\|\varphi\|_0^2.\end{aligned}\tag{31}$$

Оценим первое, второе и третье слагаемые в правой части (31), тогда получаем

$$-\left(a\chi_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\right] + \left(b^{-}a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\right) + \left(b^{+}a^{(+1)} y_{x}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) \leqslant \varepsilon \| y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_5(\varepsilon) \| y^{(\sigma)} \|_0^2. \quad (32)$$

С учетом (32) при $\varepsilon = \frac{M_3}{2}$ из (31) находим

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \|y\|_0^2 + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta} \| y_{\bar{x}}]|_0^2 + \| y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \leqslant M_6 \| y^{(\sigma)} \|_0^2 + M_7 \|\varphi\|_0^2.$$

Перепишем последнее в другой форме:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \|y\|_0^2 + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta} \|y_{\bar{x}}]|_0^2 \leqslant M_8^{\sigma} \| y^{j+1} \|_0^2 + M_9^{\sigma} \| y^{j} \|_0^2 + M_7 \|\varphi\|_0^2. \quad (33)$$

I случай. Пусть $\alpha > \beta$, тогда на основании [22, леммы 7] из (33) получаем неравенство

$$\| y^{j+1} \|_0^2 \leqslant M_8 \left(\| y^0 \|_0^2 + \max_{0 \leqslant j' \leqslant j} \| \varphi^{j'} \|_0^2 \right). \quad (34)$$

II случай. Пусть $\alpha = \beta$, тогда в силу [22, лемма 7] из (33) получаем неравенство

$$\| y^{j+1} \|_{W_2^1(0,l)}^2 \leqslant M_9 \left(\| y^0 \|_{W_2^1(0,l)}^2 + \max_{0 \leqslant j' \leqslant j} \| \varphi^{j'} \|_0^2 \right), \quad (35)$$

где $\|y^0\|_{W_2^1(0,l)}^2 = \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0]|_0^2$.

III случай. Пусть $\alpha < \beta$, тогда в силу (23) и [22, лемма 2, лемма 7] из (33) получаем неравенство

$$\| y_{\bar{x}}^{j+1}]|_0^2 \leqslant M_9 \left(\| y_{\bar{x}}^0 \|_0^2 + \max_{0 \leqslant j' \leqslant j} \| \varphi^{j'} \|_0^2 \right). \quad (36)$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (4), *тогда существует такое малое* $\tau_0 = \tau_0(c_0, c_1,\ c_2, \alpha, \sigma)$, *что если* $\tau \leqslant \tau_0$, *то для решения разностной задачи* (22)–(24) *справедливы оценки:* (34) *в случае, когда* $\alpha > \beta$; (35) *в случае, когда* $\alpha = \beta$; (36) *в случае, когда* $\alpha < \beta$.

Исследуем вопрос о разрешимости задачи (22)–(24). Для этого рассмотрим однородную задачу ($\varphi = 0$, $u_0(x) = 0$), решение которой заведомо существует

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \chi_i^j \left(a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right)_{x,i} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta} \left(\gamma_i y_{\bar{x}} \right)_{x,i}$$

$$+\ b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - d_i^j y_i^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{N} p_s y_s^{(\sigma)} \hbar, \quad (x,t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (37)$$

$$y_0^{(\sigma)} = y_N^{(\sigma)} = 0, \quad y(x,0) = 0. \quad (38)$$

Пусть $y(x,t)$ — одно из решений однородной задачи (37)–(38). Из неравенства (34) следует, что $\|y^{j+1}\|_0^2 \leqslant 0$, из (35) — $\|y^{j+1}\|_1^2 \leqslant 0$, а из (36) — $\|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 \leqslant 0$, но $\|y^{j+1}\|_0^2 = 0$ и $\|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 = 0$ лишь при $y = 0$, $x \in \bar{w}_h$. Поэтому из оценок (34) при $\alpha > \beta$, (35) при $\alpha = \beta$, (36) при $\alpha < \beta$ следуют, что единственным решением однородной задачи (37)–(38) является $y = 0$. Тем самым решение задачи (22)–(24) при любых φ, $u_0(x)$ существует и единственно.

Таким образом, из оценок (34) при $\alpha > \beta$, (35) при $\alpha = \beta$, (36) при $\alpha < \beta$ следуют единственность и устойчивость решения задачи (22)–(24) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(3), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ — решение разностной задачи (22)–(24). Для оценки точности разностной схемы (22)–(24) рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения (22)–(24), получаем задачу для функции z :

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z=\chi_i^j\left(a_i^j z_{\bar x}^{(\sigma)}\right)_{x,i}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left(\gamma_i z_{\bar x}\right)_{x,i}+b_i^{-j}a_i^j z_{\bar x,i}^{(\sigma)}+b_i^{+j}a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)}$$
$$-d_i^j z_i^{(\sigma)}+\sum_{s=0}^{N}p_s z_s^{(\sigma)}\hbar+\Psi_i^j,\quad (x,t)\in\omega_{h,\tau},\tag{39}$$

$$z_0^{(\sigma)}=z_N^{(\sigma)}=0,\tag{40}$$

$$z(x,0)=0,\quad x\in\overline{\omega}_h,\tag{41}$$

где $\Psi=O\big(h^2+\tau^2\big)$ при $\alpha=\beta$ и $\Psi=O\big(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\big)$ при $\alpha\neq\beta$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1)–(3) разностной схемой (22)–(24) в классе решении $u=u(x,t)$ задачи (1)–(3).

В силу того, что задача (39)–(41) линейна, тогда

I случай. Пусть $\alpha>\beta$, тогда применяя оценку (34) к решению задачи (39)–(41), получаем неравенство

$$\left\|z^{j+1}\right\|_0^2\leqslant M\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left\|\Psi^{j'}\right\|_0^2.\tag{42}$$

II случай. Пусть $\alpha=\beta$, тогда применяя оценку (35) к решению задачи (39)–(41), получаем неравенство

$$\left\|z^{j+1}\right\|_{W_2^1(0,l)}^2\leqslant M\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left\|\Psi^{j'}\right\|_0^2.\tag{43}$$

III случай. Пусть $\alpha<\beta$, тогда применяя оценку (36) к решению задачи (39)–(41), получаем неравенство

$$\left\|z_{\overline{x}}^{j+1}\right]\!|_0^2\leqslant M\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left\|\Psi^{j'}\right\|_0^2.\tag{44}$$

Из полученных оценок (42)–(44) следует сходимость решения разностной задачи (22)–(24) к решению дифференциальной задачи (1)–(3) так, что существует такое τ_0, что при $\tau\leqslant\tau_0$ справедливы оценки:

1) в случае, когда $\alpha>\beta$: $\left\|y^{j+1}-u^{j+1}\right\|_0^2\leqslant M\left(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right)$;

2) в случае, когда $\alpha=\beta$: $\left\|y^{j+1}-u^{j+1}\right\|_{W_2^1(0,l)}^2\leqslant M\left(h^2+\tau^2\right)$;

3) в случае, когда $\alpha<\beta$: $\left\|y_{\overline{x}}^{j+1}-u_{\overline{x}}^{j+1}\right]\!|_0^2\leqslant M\left(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right)$,

где M — const >0, не зависящая от h и τ.

4. Постановка третьей краевой задачи

Второе краевое условие в (2) заменим условием третьего рода, тогда вместо условия (2) имеем

$$\begin{cases}u(0,t)=0,\\ -\Pi(l,t)=\beta(t)u(l,t)-\mu(t),\end{cases}\tag{45}$$

где

$$|\beta|\leqslant c_2,\quad \Pi(x,t)=k(x,t)\,u_x+\eta\partial_{0t}^{\alpha}u_x.\tag{46}$$

Из (5) с учетом (6)–(12) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\beta}\int\limits_0^l \eta(u_x)^2dx + c_0\|u_x\|_0^2 \leqslant u\Pi(x,t)\big|_0^l + \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_1(\varepsilon)\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|f\|_0^2. \quad (47)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (47) с учетом (45)

$$\begin{aligned} u\Pi(x,t)\big|_0^l &= \Pi(l,t)u(l,t) = u(l,t)\left(\mu(t) - \beta(t)u(l,t)\right) = -\beta(t)u^2(l,t) + \mu(t)u(l,t) \\ &\leqslant M_2u^2(l,t) + \frac{1}{2}\mu^2(t) \leqslant M_3(\varepsilon)\|u\|_0^2 + \varepsilon\|u_x\|_0^2 + \frac{1}{2}\mu^2(t). \end{aligned} \quad (48)$$

Из (47) с учетом (48) при $\varepsilon = \frac{c_0}{2}$ находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \partial_{0t}^{\beta}\int\limits_0^l \eta(u_x)^2dx + \|u_x\|_0^2 \leqslant M_4\|u\|_0^2 + M_5\left(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)\right). \quad (49)$$

I случай. Пусть $\alpha > \beta$, тогда, применяя к обеим частям неравенства (49) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-(\alpha-\beta)}\|u_x\|_0^2 \leqslant M_6D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 + M_7\Big(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)\right) + \|u_0(x)\|_0^2\Big). \quad (50)$$

На основании [17, леммы 2] из (50) находим оценку

$$\|u\|_1^2 \leqslant M_8\Big(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)\right) + \|u_0(x)\|_0^2\Big). \quad (51)$$

II случай. Пусть $\alpha = \beta$, тогда применяя к обеим частям неравенства (49) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \leqslant M_9D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 + M_{10}\Big(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)\right) + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2\Big). \quad (52)$$

На основании леммы 2 [17] из (52) находим оценку

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leqslant M_{11}\Big(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)\right) + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2\Big). \quad (53)$$

III случай. Пусть $\alpha < \beta$, тогда применяя к обеим частям неравенства (49) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\beta}$, получаем

$$\|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\|u\|_0^2 \leqslant M_{12}D_{0t}^{-\beta}\|u\|_0^2 + M_{13}\left(D_{0t}^{-\beta}\left(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)\right) + \|u_0'(x)\|_0^2\right). \quad (54)$$

В силу леммы 1 из (54) получаем

$$\|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\|u\|_0^2 \leqslant M_{14}D_{0t}^{-\beta}\|u_x\|_0^2 + M_{15}\left(D_{0t}^{-\beta}\left(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)\right) + \|u_0'(x)\|_0^2\right). \quad (55)$$

На основании леммы 2 [17] из (55) находим оценку

$$\|u\|_2^2 \leqslant M_{16}\left(D_{0t}^{-\beta}\left(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)\right) + \|u_0'(x)\|_0^2\right). \quad (56)$$

Теорема 3. *Если* $k(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x) \in C^1[0,l]$, $q(x,t), f(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u_{xx}(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$ *и выполнены условия* (4), (46), *то для решения задачи* (1), (3), (45) *справедливы оценки:* (51) *в случае, когда* $\alpha > \beta$*;* (53) *в случае, когда* $\alpha = \beta$*;* (56) *в случае, когда* $\alpha < \beta$.

Из полученных оценок (51), (53), (56) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

5. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1), (3), (45) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$ при $\alpha=\beta$ и $O(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ при $\alpha\neq\beta$:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y=\chi^j_i\left(a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right)_{x,i}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left(\gamma_i y_{\bar{x}}\right)_{x,i}+b^{-j}_i a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}+b^{+j}_i a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i}-d^j_i y^{(\sigma)}_i+\sum_{s=0}^{N}p_s y^{(\sigma)}_s\hbar+\varphi^j_i,\quad (x,t)\in\omega_{h,\tau},\tag{57}$$

$$y(0,t)=0,\quad t\in\overline{\omega}_\tau,\quad x=0,\tag{58}$$

$$-\left(\chi_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N}+\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left(\gamma_N y_{\bar{x},N}\right)\right)=\widetilde{\beta}y^{(\sigma)}_N+0.5h\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N-\sum_{s=0}^{N}p_s y^{(\sigma)}_s\hbar\right)-\widetilde{\mu},\quad x=l,\tag{59}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\tag{60}$$

где $\widetilde{\beta}^j=\beta^j+0.5hd^j_N$, $\widetilde{\mu}^j=\mu^j+0.5h\varphi^j_N$.

Найдем оценку методом энергетических неравенств, для этого умножим уравнение (57) скалярно на y. Тогда, учитывая (25)–(31), после нетрудных преобразований получаем

$$\begin{gathered}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,y^{(\sigma)}\right)+M_1\|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0+\frac{c_0}{2}\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|^2_0\leqslant\left(\chi^j_i a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left(\gamma_i y_{\bar{x}}\right)\right)y^{(\sigma)}\Big|^N_0\\+M_2\|y^{(\sigma)}]|^2_0+\left(b^{-j}_i a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x},i},y^{(\sigma)}\right)+\left(b^{+j}_i a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i},y^{(\sigma)}\right)\\-\left(dy^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)+\left(\sum_{s=0}^{N}p_s y^{(\sigma)}_s\hbar,y^{(\sigma)}\right)+\left(\varphi,y^{(\sigma)}\right),\end{gathered}\tag{61}$$

где $(u,v]=\sum_{i=1}^{N}u_i v_i\hbar$, $\hbar=\begin{cases}0.5h, & i=N;\\ h, & i\neq 0,N,\end{cases}$ $(u,u]=(1,u^2]=\|u]|^2_0$, $(u,v)=\sum_{i=1}^{N-1}u_i v_i h$.

Преобразуем первое слагаемое в правой части (61) с учетом (44)

$$\begin{gathered}\left(\chi^j_i a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left(\gamma_i y_{\bar{x}}\right)\right)y^{(\sigma)}\Big|^N_0=\left(\chi^j_N a y^{(\sigma)}_{\bar{x},N}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left(\gamma_i y_{\bar{x},N}\right)\right)y^{(\sigma)}_N\\=\left[\mu+0.5h\varphi^j_N-\beta y^{(\sigma)}_N-0.5hdy^{(\sigma)}_N-0.5h\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N-\sum_{s=0}^{N}p_s y^{(\sigma)}_s\hbar\right)\right]y^{(\sigma)}_N\\\leqslant-0.5hy^{(\sigma)}_N\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N+M_3(\varepsilon)\|y^{(\sigma)}]|^2_0+\varepsilon\|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0\\+M_4(\varepsilon)\mu^2+0.5hy^{(\sigma)}_N\varphi^j_N-0.5hd\left(y^{(\sigma)}_N\right)^2+0.5hy^{(\sigma)}_N\sum_{s=0}^{N}p_s y^{(\sigma)}_s\hbar.\end{gathered}\tag{62}$$

Учитывая (62) при $\varepsilon=\frac{M_1}{2}$, из (61) находим

$$\begin{gathered}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,y^{(\sigma)}\right]+\frac{M_1}{2}\|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0+\frac{c_0}{2}\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|^2_0\leqslant M_5\|y^{(\sigma)}]|^2_0+\left(b^{-j}_i a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x},i},y^{(\sigma)}\right)\\-\left(b^{+j}_i a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i},y^{(\sigma)}\right)-\left(d^j_i y^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right]+\left(\sum_{s=0}^{N}p_s y^{(\sigma)}_s\hbar,y^{(\sigma)}\right]+\frac{1}{2}\mu^2+\left(\varphi,y^{(\sigma)}\right].\end{gathered}\tag{63}$$

Из (63) после несложных преобразований с учетом неравенства Коши с ε получим

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y]|_0^2+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\overline{x}}]|_0^2+\left\|y_{\overline{x}}^{(\sigma)}\right]\Big|_0^2\leqslant M_6\left\|y^{(\sigma)}\right]\Big|_0^2+M_7\left(\|\varphi]|_0^2+\mu^2\right). \tag{64}$$

Перепишем (64) в другой форме:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y]|_0^2+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\overline{x}}]|_0^2\leqslant M_8^{\sigma}\left\|y^{j+1}\right]\Big|_0^2+M_9^{\sigma}\left\|y^{j}\right]\Big|_0^2+M_7\left(\|\varphi]|_0^2+\mu^2\right). \tag{65}$$

I случай. Пусть $\alpha>\beta$, тогда на основании [22, лемма 7] из (65) получаем

$$\left\|y^{j+1}\right]\Big|_0^2\leqslant M_{10}\left(\left\|y^{0}\right]\Big|_0^2+\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\|\varphi]|_0^2+\mu^2\right)\right). \tag{66}$$

II случай. Пусть $\alpha=\beta$, тогда на основании [22, лемма 7] из (65) получаем

$$\left\|y^{j+1}\right]\Big|^2_{W_2^1(0,l)}\leqslant M_{10}\left(\left\|y^{0}\right]\Big|^2_{W_2^1(0,l)}+\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\|\varphi]|_0^2+\mu^2\right)\right), \tag{67}$$

где $\|y^0]|^2_{W_2^1(0,l)}=\|y^0]|_0^2+\|y^0_{\overline{x}}]|_0^2$.

III случай. Пусть $\alpha<\beta$, тогда из (65) с учетом леммы 2 получаем неравенство

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y]|_0^2+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\overline{x}}]|_0^2\leqslant M_{11}^{\sigma}\left\|y_{\overline{x}}^{j+1}\right]\Big|_0^2+M_{12}^{\sigma}\left\|y_{\overline{x}}^{j}\right]\Big|_0^2+M_{15}\left(\|\varphi]|_0^2+\mu^2\right). \tag{68}$$

На основании [22, лемма 7] из (67) находим

$$\|y_{\bar{x}}]|_0^2\leqslant M_{13}\left(\left\|y_{\bar{x}}^{0}\right]\Big|_0^2+\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\left\|\varphi^{j'}\right]\Big|_0^2+\mu^2\right)\right). \tag{69}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (4), (46), *тогда существует такое малое* $\tau_0=\tau_0(c_0,c_1,\ c_2,\alpha,\sigma)$, *что если* $\tau\leqslant\tau_0$, *то для решения разностной задачи* (57)–(60) *справедливы оценки:* (66) *в случае, когда* $\alpha>\beta$; (67) *в случае, когда* $\alpha=\beta$; (69) *в случае, когда* $\alpha<\beta$.

Из оценок (66) при $\alpha>\beta$, (67) при $\alpha=\beta$, (69) при $\alpha<\beta$ следуют единственность и устойчивость решения задачи (57)–(60) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1), (3), (45) $y(x_i,t_j)=y_i^j$ — решение разностной задачи (57)–(60). Для оценки точности разностной схемы (57)–(60) рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения (57)–(60), получаем задачу для функции z :

$$\begin{aligned}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z=\chi_i^j\left(a_i^jz_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left(\gamma_iz_{\bar{x}}\right)_{x,i}+b_i^{-j}a_i^jz_{\bar{x},i}^{(\sigma)}+b_i^{+j}a_{i+1}^jz_{x,i}^{(\sigma)}\\-d_i^jz_i^{(\sigma)}+\sum_{s=0}^{N}p_sz_s^{(\sigma)}\hbar+\Psi_i^j,\quad (x,t)\in\omega_{h,\tau},\end{aligned} \tag{70}$$

$$z(0,t)=0,\quad t\in\overline{\omega}_{\tau},\quad x=0, \tag{71}$$

$$-\left(\chi_Na_Nz_{\bar{x},N}^{(\sigma)}+\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left(\gamma_Nz_{\bar{x},N}\right)\right)=\widetilde{\beta}z_N^{(\sigma)}+0.5h\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_N-\sum_{s=0}^{N}p_sz_s^{(\sigma)}\hbar\right)-\nu,\quad x=l, \tag{72}$$

$$z(x,0)=0,\quad x\in\overline{\omega}_h, \tag{73}$$

где $\Psi = O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\nu = O\big(h^2+\tau^2\big)$ при $\alpha=\beta$ и $\Psi = O\big(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\big)$, $\nu = O\big(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\big)$ при $\alpha\neq\beta$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1), (3), (45) разностной схемой (57)–(60) в классе решении $u=u(x,t)$ задачи (1), (3), (45).

В силу того, что задача (70)–(73) линейна:

I случай. Пусть $\alpha>\beta$, тогда применяя оценку (66) к решению задачи (70)–(73), получаем неравенство

$$\|z^{j+1}]|_0^2 \leqslant M \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\|\Psi^{j'}]|_0^2+\nu^2\right). \tag{74}$$

II случай. Пусть $\alpha=\beta$, тогда применяя оценку (67) к решению задачи (70)–(73), получаем неравенство

$$\|z^{j+1}]|_{W_2^1(0,l)}^2 \leqslant M \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\|\Psi^{j'}]|_0^2+\nu^2\right). \tag{75}$$

III случай. Пусть $\alpha<\beta$, тогда применяя оценку (68) к решению задачи (70)–(73), получаем неравенство

$$\|z_{\overline{x}}]|_0^2 \leqslant M \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\|\Psi^{j'}]|_0^2+\nu^2\right). \tag{76}$$

Из полученных оценок (74)–(76) следует сходимость решения разностной задачи (57)–(60) к решению дифференциальной задачи (1), (3), (45) так, что существует такое τ_0, что при $\tau\leqslant\tau_0$ справедливы оценки:

1) в случае, когда $\alpha>\beta$: $\|y^{j+1}-u^{j+1}]|_0^2 \leqslant M\left(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right)$;

2) в случае, когда $\alpha=\beta$: $\|y^{j+1}-u^{j+1}]|_{W_2^1(0,l)}^2 \leqslant M\left(h^2+\tau^2\right)$;

3) в случае, когда $\alpha<\beta$: $\|y_{\overline{x}}^{j+1}-u_{\overline{x}}^{j+1}]|_0^2 \leqslant M\left(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right)$,

где M — const >0, не зависящая от h и τ.

Замечание. Для проведения численных экспериментов для задачи (1)–(3) необходимо привести схему (22)–(24) к расчетному виду. Как видно, слагаемое $\sum_{s=0}^{N} p_s y_s^{(\sigma)}\hbar$ в (22) приводит к нарушению трехдиагональной структуры матрицы коэффициентов разностной схемы (22)–(24), решение данной системы возможно с помощью метода Гаусса или какого-либо итерационного метода. Однако, если брать значения искомой сеточной функции при вычислении указанной суммы с нижнего слоя, тогда схема (22)–(24) приводится к системе разностных уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов, решение данной системы возможно уже с помощью метода прогонки [28, с. 40].

6. Результаты численного эксперимента для задачи (1)–(3)

Коэффициенты уравнения и граничных условий задачи (1)–(3) подбираются таким образом, чтобы точным решением задачи была функция $u(x,t)=t^3(x^4-lx^3)$.

Ниже в таблице при различных значениях параметров $\alpha = 0.01; 0.5; 0.99$, $\beta = 0.01; 0.5; 0.99$ и уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z=y-u$) и порядок сходимости (ПС) в норме $\|[\cdot]\|_0$, когда $h=\tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации. Порядок сходимости будем определять по формуле ПС $=\log_2\frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$, где z_1 и z_2 — погрешности, соответствующие шагам $0,5h$, h.

Таблица 1

α	β	h	$\max\limits_{0<j<m} \|[z^j]\|_0$	ПС в $\|[\cdot]\|_0$
0.01	0.01	1/20	0.000714141	
		1/40	0.000178643	1.9991
		1/80	0.000044667	1.9998
		1/160	0.000011167	2.0000
0.5		1/20	0.000835511	
		1/40	0.000209953	1.9926
		1/80	0.000052735	1.9932
		1/160	0.000013260	1.9917
0.99		1/20	0.000821499	
		1/40	0.000206122	1.9948
		1/80	0.000051690	1.9955
		1/160	0.000012983	1.9933
0.01	0.5	1/20	0.001031277	
		1/40	0.000287001	1.8453
		1/80	0.000082060	1.8063
		1/160	0.000024206	1.7613
0.5		1/20	0.000746853	
		1/40	0.000186587	2.0010
		1/80	0.000046589	2.0018
		1/160	0.000011634	2.0016
0.99		1/20	0.001016075	
		1/40	0.000283307	1.8426
		1/80	0.000081198	1.8028
		1/160	0.000024024	1.7570
0.01	0.99	1/20	0.000810871	
		1/40	0.000211283	1.9403
		1/80	0.000057013	1.8898
		1/160	0.000016374	1.7999
0.5		1/20	0.000809828	
		1/40	0.000211435	1.9374
		1/80	0.000057191	1.8864
		1/160	0.000016464	1.7964
0.99		1/20	0.000766004	
		1/40	0.000191709	1.9984
		1/80	0.000047931	1.9999
		1/160	0.000011980	2.0003

7. Заключение

В работе рассмотрены начально-краевые задачи для одномерного по пространству уравнения влагопереноса с краевыми условиями первого и третьего родов с двумя операторами дробного дифференцирования разных порядков α и β и нелокальным линейным источником. Исследование начально-краевых задач проводится с помощью метода энергетических неравенств. При предположении существования регулярного решения для каждой из рассмотренных первой и третьей начально-краевых задач получены априорные оценки в дифференциальной форме при различных соотношениях α и β, откуда следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных исходной задачи. На равномерной сетке в соответствие каждой дифференциальной задаче ставится соответствующая разностная схема порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ при $\alpha = \beta$ и $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ при $\alpha \neq \beta$, где $0 < \alpha, \beta < 1$ — порядки дробных производных Герасимова — Капуто. Для каждой разностной задачи в предположении существования решения получена оценка в разностной форме, из чего следуют единственность и устойчивость решения разностной задачи по правой части и начальным данным. В силу линейности рассматриваемых начально-краевых задач полученные оценки в разностной форме позволяют утверждать сходимость решения каждой разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи (в предположении существования последнего в классе достаточно гладких функций) со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации. Проведены численные расчеты на ЭВМ, иллюстрирующие полученные теоретические результаты в работе.

Литература

1. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почв.—М.: Наука, 1976.—353 с.
2. *Hallaire M.* Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en regime de dessechement // L'Eau et la Production Vegetale. Paris: Institut National de la Recherche Agronomique.—1964.—Vol. 9.—P. 27–62.
3. *Баренблатт Г. И.* Движение жидкостей и газов в природных пластах.—М.: Недра, 1984.—447 с.
4. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравния.—1982.—Т. 18, № 4.—С. 689–699.
5. *Colton D. L.* On the analytic theory of pseudoparabolic equations // Quart. J. Math.—1972.—Vol. 23.—P. 179–192.
6. *Дзекцер Е. С.* Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР.—1975.—Т. 220, № 3.—С. 540–543.
7. *Chen P. J., Gurtin M. E.* On a theory of heat conduction involving two temperatures // Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP).—1968.—Vol. 19, № 4.—P. 614–627. DOI: 10.1007/BF01594969.
8. *Ting T. W.* Certain non-steady flows of second-order fluids // Arch. Ration. Mech. Anal.—1963.—Vol. 14.—P. 1–26.
9. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
10. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных.—Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008.—512 с.
11. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
12. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations.—San Diego: Acad. Press, 1999.—368 p.
13. *Беданокова С. Ю.* Уравнение движения почвенной влаги и математическая модель влагосодержания почвенного слоя, основанная на уравнении Аллера // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. 4: Естеств.-мат. и техн. науки.—2007.—Т. 4.—С. 68–71.
14. *Головизнин В. М., Киселев В. П., Короткий И. А.* Численные методы решения уравнения дробной диффузии с дробной производной по времени в одномерном случае.—М.: ИБРАЭ РАН, 2003.
15. *Лафишева М. М.* Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2008.—Т. 48, № 10.—С. 1878–1887.
16. *Diethelm K., Walz G.* Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation // Numerical Algorithms.—1997.—Vol. 16.—P. 231–253. DOI: 10.1023/a:1019147432240.
17. *Алиханов А. А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения.—2010.—Т. 46, № 5.—С. 658–664.
18. *Alikhanov A. A.* A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. Comput. Phys.—2015.—Vol. 280.—P. 424–438. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.09.031.
19. *Бештоков М. Х.* Краевые задачи для уравнения соболевского типа дробного порядка с эффектом памяти // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2022.—Т. 26, № 4.—С. 607–629.
20. *Бештоков М. Х.* Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся уравнений Соболевского типа с нелокальным источником в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференц. уравнения.—2018.—Т. 54, № 2.—С. 249–266. DOI: 10.1134/S0374064118020115.
21. *Beshtokov M. Kh.* The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.—2016.—Vol. 158, № 1.—P. 1–6. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012019.
22. *Бештоков М. Х., Водахова В. А.* Нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные наукифиз.—2019.—Т. 29, № 4.—С. 459–482. DOI: 10.20537/vm190401.
23. *Бештоков М. Х.* Численное исследование начально-краевых задач для уравнения соболевского типа с дробной по времени производной // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2019.—Т. 59, № 2.—С. 185–202. DOI: 10.1134/S0044466919020054.

24. *Бештоков М. Х.* Краевые задачи для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного по времени порядка с оператором Бесселя и разностные методы их решения // Вестн. Удмурт. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.—2020.—Т. 30, № 2.—С. 158–175.
25. *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent–II // Geophysical Journal International.—1967.—Vol. 13, № 5.—P. 529–539. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x.
26. *Герасимов А. Н.* Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // Прикл. матем. и механика.—1948.—Т. 12, № 3.—С. 251–260.
27. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение.—М.: Наука, 2012.—231 с.
28. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—617 с.

Статья поступила 28 марта 2023 г.

Бештоков Мурат Хамидбиевич
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов,
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 3, P. 5–23

INITIAL-BOUNDARY PROBLEMS FOR THE MOISTURE TRANSFER EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVES OF DIFFERENT ORDERS AND A NON-LOCAL LINEAR SOURCE

Beshtokov, M. Kh.[1]

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 a Shortanova St., Nalchik 360004, Russia
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Abstract. The work is devoted to initial-boundary value problems for the fractional order moisture transfer equation with a non-local linear source and variable coefficients. Under the assumption of the existence of a regular solution for each of the considered first and third boundary value problems, an a priori estimate in differential form is obtained, which implies the uniqueness and continuous dependence of the solution on the input data of the original problem. With each differential problem associate a difference scheme on a uniform grid. Assuming the existence of a solution for each difference problem, an a priori estimate in a difference form is obtained, which implies the uniqueness and stability of the solution to the difference problem with respect to the right-hand side and initial data. Due to the linearity of the initial-boundary value problems under consideration, the obtained estimates in difference form allow us to state the convergence of the solution of each difference problem to the solution of the original differential problem (assuming the existence of the latter in the class of sufficiently smooth functions) at a rate equal to the order of the approximation error. Numerical calculations are carried out, illustrating the theoretical results obtained in the work.

Keywords: moisture transfer equation, boundary value problems, Gerasimov–Caputo fractional derivative, non-local source, difference schemes, stability and convergence of difference schemes.

AMS Subject Classification: 65N06, 65N12, 65R20.

For citation: *Beshtokov, M. Kh.* Initial-Boundary Problems for the Moisture Transfer Equation with Fractional Derivatives of Different Orders and a Non-Local Linear Source, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 3, pp. 5–23 (in Russian). DOI: 10.46698/l0699-2536-6844-a.

References

1. *Chudnovskiy, A. F. Teplofizika pochv* [Thermal Physics of Soils], Moscow, Nauka, 1976, 353 p. (in Russian).
2. *Hallaire, M.* Le Potentiel Efficace de L'Eau Dans le Sol en Regime de Dessechement, *L'Eau et la Production Vegetale. Paris: Institut National de la Recherche Agronomique*, 1964, vol. 9, pp. 27–62.

3. *Barenblatt, G. I. Dvizheniye zhidkostey i gazov v prirodnykh plastakh* [Movement of Liquids and Gases in Natural Reservoirs], Moscow, Nedra, 1984, 447 p. (in Russian).
4. *Shkhanukov, M. Kh.* Some Boundary Value Problems for a Third-Order Equation That Arise in the Modeling of the Filtration if a Fluid in Porous Media, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1982, vol. 18, no 4, pp. 689–700 (in Russian).
5. *Colton, D. L* On the Analytic Theory of Pseudoparabolic Equations, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1972, vol. 23, pp. 179–192.
6. *Dzektser, E. S.* Equations of Motion of Groundwater with a Free Surface in Multilayer Media, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1975, vol. 220, no. 3, pp. 540–543. (in Russian).
7. *Chen, P. J. and Gurtin, M. E.* On a Theory of Heat Conduction Involving Two Temperatures, *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 1968, vol. 19, no. 4, pp. 614–627. DOI: 10.1007/BF01594969.
8. *Ting, T. W.* Certain Non-Steady Flows of Second-Order Fluids, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1963, vol. 14, pp. 1–26.
9. *Nakhushev, A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and its Application], Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 p. (in Russian).
10. *Uchaykin, V. V. Metod drobnykh proizvodnykh* [Method of Fractional Derivatives], Ul'yanovsk, Izdatel'stvo Artishok, 2008, 512 p. (in Russian).
11. *Samko, S. G., Kilbas, A. A., and Marichev, O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications], Minsk, Nauka i Tekhnika, 1987, 688 p. (in Russian).
12. *Podlubny, I. Fractional Differential Equations*, San Diego, Academic Press, 1999, 368 p.
13. *Bedanokova, S. Yu.* The Equation of Soil Moisture Movement and the Mathematical Model of Moisture Content of the Soil Layer, Based on the Hallaire's Equation, *Vestnik Adygeyskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya 4: Yestestvenno-Matematicheskiye i Tekhnicheskiye Nauki*, 2007, vol. 4, pp. 68–71. (in Russian).
14. *Goloviznin, V. M., Kiselev, V. P. and Korotkij, I. A. Chislennye metody resheniya uravneniya drobnoj diffuzii s drobnoj proizvodnoj po vremeni v odnomernom sluchae* [Computational Methods for One-Dimensional Fractional Diffusion Equations], Moscow, Nuclear Safety Institute of the Russian Academy of Sciences, 2003, 35 p. (in Russian).
15. *Lafisheva, M. M.* Difference Methods for Solving Boundary Value Problems for Differential Equations of Fractional Order, *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 2008, vol. 48, no. 10, pp. 1878–1887 (in Russian).
16. *Diethelm, K. and Walz, G.* Numerical Solution of Fractional Order Differential Equations by Extrapolation, *Numerical Algorithms*, 1997, vol. 16, pp. 231–253. DOI: 10.1023/a:1019147432240.
17. *Alikhanov, A. A.* A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 660–666. DOI: 10.1134/S00166110050058.
18. *Alikhanov, A. A.* A New Difference Scheme for the Time Fractional Diffusion Equation, *Journal of Computational Physics*, 2015, vol. 280, pp. 424–438. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.09.031.
19. *Beshtokov, M. Kh.* Boundary Value Problems for a Sobolev Type Equation of Fractional Order with Memory Effect, *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2022, vol. 26, no. 4, pp. 607–629. DOI: 10.14498/vsgtu1942.
20. *Beshtokov, M. Kh.* Boundary Value Problems for Degenerating and Non-Degenerating Sobolev-Type Equations with a Nonlocal Source in Differential and Difference Forms, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 250–267. DOI: 10.1134/S0012266118020118.
21. *Beshtokov, M. Kh.* The Third Boundary Value Problem for Loaded Differential Sobolev Type Equation and Grid Methods of Their Numerical Implementation, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2016, vol. 58, no. 1, pp. 1–6. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012019.
22. *Beshtokov, M. Kh. and Vogahova, V. A.* Nonlocal Boundary Value Problems for the Fractional Order Convection-Diffusion Equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 459–482. DOI: 10.20537/vm190401.
23. *Beshtokov, M. Kh.* Numerical Analysis of Initial-Boundary Value Problem for a Sobolev-Type Equation with a Fractional-Order Time Derivative, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, no. 2, pp. 175–192. DOI:10.1134/S0965542519020052.
24. *Beshtokov, M. Kh.* Boundary Value Problems for a Loaded Modified Time-Fractional Moisture Transfer Equation with a Bessel Operator and Difference Methods for Their Solution, *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyye nauki*, 2020, vol. 30, no. 2, pp. 158–175 (in Russian).
25. *Caputo, M.* Linear Models of Dissipation whose Q is almost Frequency Independent–II, *Geophysical Journal International*, 1967, vol. 13, no. 5, pp. 529–539. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x.

26. *Gerasimov A. N.* Generalization of Linear Deformation Laws and their Application to Problems of Internal Friction, *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1948, vol. 12, pp. 251–260 (in Russian).
27. *Nakhushev, A. M. Nagruzhennyye uravneniya i ikh primeneniye* [Loaded Equations and their Application], Moscow, Nauka, 2012, 231 p. (in Russian).
28. *Samarskii, A. A. Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1983, 616 p. (in Russian).

Received March 28, 2023

Murat Kh. Beshtokov
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 a Shortanova Str., Nalchik 360000, Russia,
Leading Researcher Computational Methods Department
E-mail: `beshtokov-murat@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211