*Владикавказский математический журнал*
*2024, Том 26, Выпуск 3, С. 24–32*

**УДК** $514 + 517.926$
**DOI** 10.46698/d7752-5993-6789-y

# РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННОЙ С АФФИННОЙ ГРУППОЙ

**Р. А. Богданова**[1], **В. А. Кыров**[1]

[1] Горно-Алтайский государственный университет,
Россия, 649000, Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1

E-mail: `bog-rada@yandex.ru`, `kyrovVA@yandex.ru`

**Аннотация.** Решение задачи вложения двуметрической феноменологически симметричной геометрии ранга $(3,2)$ с функцией $g(x,y,\xi,\eta) = (g^1, g^2) = (x\xi + y\mu, x\eta + y\nu)$ в аффинную двуметрическую феноменологически симметричную геометрию ранга (4,2) с функцией $f(x,y,\xi,\eta,\mu,\nu) = (f^1, f^2) = (x\xi + y\mu + \rho, x\eta + y\nu + \tau)$ приводит к проблеме установления существования у соответствующей системы $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}) = \chi(g(x,y,\xi,\eta),\mu,\nu)$ двух функциональных уравнений невырожденных решений. Данная система решается исходя из того, что функции $g$ и $f$ ранее известны. В явном виде эта система записывается так: $\bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\mu} + \bar{\rho} = \chi^1(x\xi + y\mu, x\eta + y\nu, \mu, \nu)$, $\bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} + \bar{\tau} = \chi^2(x\xi + y\mu, x\eta + y\nu, \mu, \nu)$. Основная задача данной работы — нахождение общего невырожденного решения этой системы. Чтобы решить проблему сначала дифференцируем по переменным $x$, $y$ и $\xi$, $\eta$, $\mu$, $\nu$, в результате получаем систему дифференциальных уравнений с матрицей коэффициентов $A$ общего вида.Доказывается, что матрицу $A$ можно привести к жордановому виду. Затем решается система дифференциальных уравнений с такой жордановой матрицей. Возвращаясь к исходной системе функциональных уравнений, находятся дополнительные ограничения. В итоге получается невырожденное решение исходной системы функциональных уравнений.

**Ключевые слова:** геометрия двух множеств, жорданова форма матрицы, система функциональных уравнений, система дифференциальных уравнений.

**AMS Subject Classification:** 51K99, 34K99.

**Образец цитирования:** *Богданова Р. А., Кыров В. А.* Решение системы функциональных уравнений, связанной с аффинной группой // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 3.—С. 24–32. DOI: 10.46698/d7752-5993-6789-y.

## 1. Введение

Двуметрическая феноменологически симметричная геометрия двух множеств (ДФС ГДМ) ранга $(n+1,2)$, где $n \in \mathbb{N}$, задается на двумерном и $2n$-мерном дифференцируемых многообразиях $M$ и $N$ дифференцируемой функцией (двухкомпонентной функцией) $f : M \times N \to R^2$ с открытой и плотной областью определения в $M \times N$, сопоставляющей паре точек два действительных числа [1, 2]. В координатной записи для этой функции $f = (f^1, f^2)$ имеем

$$f = f\left(x, y, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{2n}\right),$$

где $(x, y)$ и $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{2n})$ — локальные координаты в многообразиях $M$ и $N$ соответственно.

© 2024 Богданова Р. А., Кыров В. А.

Дополнительно выполняются две аксиомы:

**Аксиома 1.** Координатное представление функции $f$ невырождено относительно двух координат $x$, $y$ и $2n$ координат $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{2n}$.

Невырожденность функции $f$ в ее координатном представлении выражается необращением в нуль якобианов:

$$\frac{\partial\left(f^1(i,\alpha), f^2(i,\alpha)\right)}{\partial\left(x_i, y_i\right)} \neq 0,$$

$$\frac{\partial\left(f^1(i_1,\alpha), f^2(i_1,\alpha), \ldots, f^1(i_n,\alpha), f^2(i_n,\alpha)\right)}{\partial\left(\xi^1_\alpha, \xi^2_\alpha, \ldots, \xi^{2n}_\alpha\right)} \neq 0,$$

где $(x_i, y_i)$ — координаты точки $i \in M$, а $(\xi^1_\alpha, \xi^2_\alpha, \ldots, \xi^{2n}_\alpha)$ — координаты точки $\alpha \in N$.

**Аксиома 2.** Для плотного и открытого множества точек $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}, \alpha_1, \alpha_2) \in M^{n+1} \times N^2$ все $4(n+1)$ значений функции $f$ связаны уравнением

$$\Phi\left(f^1(i_1,\alpha_1), f^2(i_1,\alpha_1), \ldots, f^1(i_{n+1},\alpha_2), f^2(i_{n+1},\alpha_2)\right) = 0,$$

где $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ — двухкомпонентная регулярная функция $4(n+1)$ переменных.

Двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств появились в работах Ю. И. Кулакова и Г. Г. Михайличенко [3, 4]. Г. Г. Михайличенко получена классификация этих геометрий, которую можно найти в работах [1, 2, 5–7]. Эта классификация содержит две геометрии, которые с точностью до замены координат в многообразиях и преобразования $\chi(f) \to f$ задаются функциями:

для $n = 2$:

$$f^1 = x\xi^1 + y\xi^2, \quad f^2 = x\eta^1 + y\eta^2;$$

для $n = 3$:

$$f^1 = x\xi^1 + y\xi^2 + \xi^3, \quad f^2 = x\eta^1 + y\eta^2 + \eta^3.$$

Заметим, что вторая система функций задает аффинную группу преобразований, а первая — ее подгруппу.

Пусть функция $g = \left(g^1, g^2\right) = g(x, y; \xi^1, \ldots, \xi^{2n})$ задает ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$, а функция $f = (f^1, f^2) = f(x', y'; \eta^1, \ldots, \eta^{2n}, \eta^{2n+1}, \eta^{2n+2})$ задает ДФС ГДМ ранга $(n+2, 2)$, где $n = 1, 2, 3$.

Определение [5]. Будем говорить, что *ДФС ГДМ ранга* $(n+1, 2)$ *вложена в ДФС ГДМ ранга* $(n+2, 2)$, если выполняется функциональное соотношение

$$f\left(x', y'; \eta^1, \ldots, \eta^{2n}, \eta^{2n+1}, \eta^{2n+2}\right) = \chi\left(g\left(x, y; \xi^1, \ldots, \xi^{2n}\right), \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}\right),$$

где $\chi = \chi\left(g^1, g^2, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}\right)$, $x' = \lambda^1(x, y)$, $y' = \lambda^2(x, y)$, $\eta^1 = \tau^1\left(\xi^1, \ldots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}\right), \ldots$, $\eta^{2n} = \tau^{2n}(\xi^1, \ldots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2})$, $\eta^{2n+1} = \tau^{2n+1}\left(\xi^1, \ldots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}\right)$, $\eta^{2n+2} = \tau^{2n+2}(\xi^1, \ldots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2})$ — дифференцируемые функции, причем выполняются неравенства:

$$\Delta = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \Box = \frac{\partial\left(\eta^1, \ldots, \eta^{2n+2}\right)}{\partial\left(\xi^1, \ldots, \xi^{2n+2}\right)} \neq 0.$$

В работе [5] доказано, что *в каждую ДФС ГДМ ранга* $(n+2, 2)$ *вложена по крайней мере одна из ДФС ГДМ ранга* $(n+1, 2)$, *где* $n = 1, 2, 3$.

В данной статье ставится задача о нахождении всех возможных вложений ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$ с двухкомпонентной функцией

$$g^1 = x\xi + y\mu, \quad g^2 = x\eta + y\nu$$

в ДФС ГДМ ранга $(4,2)$ с двухкомпонентной функцией

$$f^1 = x\xi + y\mu + \rho, \quad f^2 = x\eta + y\nu + \tau.$$

Решение этой задачи сводится к решению системы функциональных уравнений.

В работе [8] была решена подобная задача о вложении аддитивной ДФС ГДМ ранга $(2,2)$ с двухкомпонентной функцией

$$g^1 = x + \xi, \quad g^2 = y + \eta$$

в мультипликативную ДФС ГДМ ранга $(3,2)$ с двухкомпонентной функцией

$$f^1 = x\xi + y\mu, \quad f^2 = x\eta + y\nu;$$

в работе [7] решена задача вложения мультипликативной ДФС ГДМ ранга (2,2)

$$g^1 = (x + \xi)y, \quad g^2 = (x + \xi)\eta$$

в мультипликативную ДФС ГДМ ранга $(3,2)$

$$f^1 = x\xi + y\mu, \quad f^2 = x\eta + y\nu,$$

а в работе [9] решена задача вложения ДФС ГДМ ранга (3,2), связанных с комплексными, двойными и дуальными числами

$$g^1 = x\xi + \varepsilon y\eta + \mu, \quad g^2 = x\eta + y\xi + \nu, \quad \varepsilon = -1, 1, 0$$

в аффинную ДФС ГДМ ранга $(4,2)$

$$f^1 = x\xi + y\mu + \rho, \quad f^2 = x\eta + y\nu + \tau.$$

В последующем изложении используются более удобные обозначения для координат и функций.

## 2. Постановка задачи

Выше сформулированная задача нахождения всех вложений ДФС ГДМ ранга (3,2) с двухкомпонентной функцией $g(x,y,\xi,\eta) = (g^1,g^2) = (x\xi + y\mu, x\eta + y\nu)$ (эта запись означает, что $g^1 = x\xi + y\mu$, $g^2 = x\eta + y\nu$) в ДФС ГДМ ранга (4,2) с двухкомпонентной функцией $f(x,y,\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau) = (f^1,f^2) = (x\xi + y\mu + \rho, x\eta + y\nu + \tau)$ сводится к решению системы двух функциональных уравнений

$$\bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\mu} + \bar{\rho} = \chi^1(x\xi + y\mu, x\eta + y\nu, \rho, \tau), \quad \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} + \bar{\tau} = \chi^2(x\xi + y\mu, x\eta + y\nu, \rho, \tau),$$

где $\bar{x} = \bar{x}(x,y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x,y)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau)$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau)$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau)$, $\bar{\nu} = \bar{\nu}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau)$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau)$, $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau)$, $\chi^1 = \chi^1(u,v,\rho,\tau)$, $\chi^2 = \chi^2(u,v,\rho,\tau)$ — дифференцируемые функции, $u = x\xi + y\mu$, $v = x\eta + y\nu$.

Введем матричные обозначения, которые будут использоваться ниже:

$$\bar{\Xi} = \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \bar{\mu} \\ \bar{\eta} & \bar{\nu} \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} \xi & \mu \\ \eta & \nu \end{pmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\tau} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

причем $a_{ij} = a_{ij}(\rho, \tau)$, $b_i = b_i(\rho, \tau)$ — дифференцируемые функции, $i, j = 1, 2$. С учетом этих обозначений, исходная система функциональных уравнений принимает следующий вид:

$$\bar{\Xi}\bar{X} + \bar{R} = \chi. \tag{1}$$

Вложение оказывается возможным, если система (1) имеет хотя бы одно *невырожденное* решение, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\Delta = \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \Box = \frac{\partial(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\rho}, \bar{\tau})}{\partial(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau)} \neq 0. \tag{2}$$

Далее находим невырожденные решения системы (1). Отметим, что матрица $\bar{\Xi}$ невырождена, поскольку иначе $\bar{\xi}\bar{\nu} - \bar{\eta}\bar{\mu} = 0$, что противоречит неравенству $\Box \neq 0$ в (2).

Дифференцируем уравнения в системе (1) по переменным $x$, $y$, $\xi$, $\eta$, $\mu$, $\nu$:

$$\bar{\Xi}\bar{X}_x = \xi\chi_u + \eta\chi_v, \tag{3}$$

$$\bar{\Xi}\bar{X}_y = \mu\chi_u + \nu\chi_v, \tag{4}$$

$$\bar{\Xi}_\xi\bar{X} + \bar{R}_\xi = x\chi_u, \quad \bar{\Xi}_\eta\bar{X} + \bar{R}_\eta = x\chi_v, \quad \bar{\Xi}_\mu\bar{X} + \bar{R}_\mu = y\chi_u, \quad \bar{\Xi}_\nu\bar{X} + \bar{R}_\nu = y\chi_v. \tag{5}$$

Далее, исключая в полученных соотношениях производные $\chi_u, \chi_v$, имеем:

$$\bar{\Xi}x\bar{X}_x = \left(\xi\bar{\Xi}_\xi + \eta\bar{\Xi}_\eta\right)\bar{X} + \xi\bar{R}_\xi + \eta\bar{R}_\eta, \quad \bar{\Xi}y\bar{X}_x = \left(\xi\bar{\Xi}_\mu + \eta\bar{\Xi}_\nu\right)\bar{X} + \xi\bar{R}_\mu + \eta\bar{R}_\nu, \tag{6}$$

$$\bar{\Xi}x\bar{X}_y = \left(\mu\bar{\Xi}_\xi + \nu\bar{\Xi}_\eta\right)\bar{X} + \mu\bar{R}_\xi + \nu\bar{R}_\eta, \quad \bar{\Xi}y\bar{X}_y = \left(\mu\bar{\Xi}_\mu + \nu\bar{\Xi}_\nu\right)\bar{X} + \mu\bar{R}_\mu + \nu\bar{R}_\nu, \tag{7}$$

Основной результат этой статьи сформулируем в виде теоремы:

**Теорема.** *Общее невырожденное решение системы* (1) *функциональных уравнений может быть представлено в следующем виде:*

$$\bar{X} = \Lambda X + A_1, \quad \bar{\Xi} = \Omega\Xi\Lambda^{-1}, \quad \bar{R} = B_1 - \Omega\Xi\Lambda^{-1}A_1, \quad \chi = \Omega\Xi X + B_1, \tag{8}$$

*причем* $\Lambda = \text{const}$, $A_1 = \text{const}$.

$\lhd$ Рассмотрим сначала случай $\bar{X}_x = \text{const}$.

**Лемма.** $\bar{X}_x = \text{const}$ *тогда и только тогда, когда* $\bar{X}_y = \text{const}$.

$\lhd$ Действительно, если $\bar{X}_x = \text{const}$, то дифференцируя по $x$ первое уравнение в (7), а затем фиксируя переменные $\xi$, $\eta$, $\mu$, $\nu$, $\rho$, $\tau$, получаем $\bar{X}_y = \text{const}$. Аналогично доказываем и в обратную сторону. Лемма доказана. $\rhd$

Итак, согласно лемме $\bar{X}_x = \text{const}$ и $\bar{X}_y = \text{const}$, следовательно $\bar{X} = \Lambda X + A_1$, $\Lambda = \text{const}$, $A_1 = \text{const}$, причем по первому неравенству из (2) матрица $\Lambda$ невырождена. Из равенств (3) и (4) тогда вытекает

$$\chi_u = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(\rho, \tau) \\ a_{21}(\rho, \tau) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \chi_v = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}(\rho, \tau) \\ a_{22}(\rho, \tau) \end{pmatrix},$$

следовательно

$$\chi = \Omega\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + B_1 = \Omega\Xi X + B_1,$$

причем, как несложно установить, матрица $\Omega$ невырождена. С найденным возвращаясь в (3) и (4), получаем $\bar{\Xi} = \Omega\Xi\Lambda^{-1}$. Из (1) тогда получим $\bar{R} = B_1 - \Omega\Xi\Lambda^{-1}A_1$. Таким образом, получено решение (8) исходной системы функциональных уравнений.

Далее доказываем теорему, когда $\bar{X}_x \neq \mathrm{const}$.

Первое равенство в (6) можно разрешить относительно $x\bar{X}_x$. Фиксируя затем переменные $\xi$, $\eta$, $\mu$, $\nu$, $\rho$, $\tau$, получаем систему дифференциальных уравнений для функций $\bar{x} = \bar{x}(x,y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x,y)$:

$$x\bar{X}_x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\bar{X} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \bar{A}\bar{X} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Заметим, что $\bar{A} = \bar{\Xi}^{-1}\left(\xi\bar{\Xi}_\xi + \eta\bar{\Xi}_\eta\right)$.

Произведем допустимое структурой функциональных уравнений системы (1) преобразование

$$\bar{X}' = U\bar{X} \Rightarrow \bar{X} = U^{-1}\bar{X}',$$

$$\bar{X}'_x = U\bar{X}_x = UA\bar{X} + U\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = UAU^{-1}\bar{X}' + U\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = A'\bar{X}' + \begin{pmatrix} \alpha' \\ \gamma' \end{pmatrix}$$

с невырожденной матрицей $U$ второго порядка.

Система дифференциальных уравнений (9) в прежних обозначениях принимает следующий вид:

$$x\bar{X}_x = UAU^{-1}\bar{X} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно (см. [10, с. 485],), что матрица $A$ второго порядка с вещественными элементами преобразованием $A \to UAU^{-1}$ может быть приведена к одной из пяти вещественных форм:

$$1)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad 2)\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\quad 3)\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},\quad 4)\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},\quad 5)\ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где в том же порядке: 2) $a \neq 0$, 3) $a$ — любое, 4) $a \neq d$, 5) $b \neq 0$. Решения системы уравнений (9), связанные с формулами (10), будут следующими:

$$1)\ \bar{x} = \alpha\ln x + \widehat{x}(y),\ \bar{y} = \gamma\ln x + \widehat{y}(y),\ \alpha^2 + \gamma^2 \neq 0; \tag{11}$$

$$2)\ \bar{x} = \widehat{x}(y)x^a - \frac{\alpha}{a},\ \bar{y} = \widehat{y}(y)x^a - \frac{\gamma}{a}; \tag{12}$$

$$3.1)\ \bar{x} = \widehat{x}(y)x^a - \frac{\alpha}{a},\ \bar{y} = (\widehat{x}(y)\ln x + \widehat{y}(y))x^a - \frac{\gamma}{a} + \frac{\alpha}{a^2}; \tag{13}$$

$$3.2)\ \bar{x} = \widehat{x}(y) + \alpha\ln x,\ \bar{y} = \frac{\alpha(\ln x)^2}{2} + \gamma\ln x + \widehat{x}(y)\ln x + \widehat{y}(y); \tag{14}$$

$$4.1)\ \bar{x} = \widehat{x}(y)x^a - \frac{\alpha}{a},\ \bar{y} = \widehat{y}(y)x^d - \frac{\gamma}{d}; \tag{15}$$

$$4.2)\ \bar{x} = \widehat{x}(y)x^a - \frac{\alpha}{a},\ \bar{y} = \gamma\ln x + \widehat{y}(y); \tag{16}$$

$$4.3)\ \bar{x} = \alpha\ln x + \widehat{x}(y),\ \bar{y} = \widehat{y}(y)x^d - \frac{\gamma}{d}; \tag{17}$$

$$5)\ \begin{cases} \bar{x} = (\widehat{x}(y)\sin(b\ln x) + \widehat{y}(y)\cos(b\ln x))x^a - \frac{a\alpha - b\beta}{a^2+b^2}, \\ \bar{y} = (\widehat{x}(y)\cos(b\ln x) - \widehat{y}(y)\sin(b\ln x))x^a - \frac{a\beta + b\alpha}{a^2+b^2}. \end{cases} \tag{18}$$

Далее функции (11)–(18) подставляем в уравнения из (6) и (7).

Случай 1). В матричном виде систему (11) записываем так:

$$\bar{X} = \ln x \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{x}(y) \\ \widehat{y}(y) \end{pmatrix}.$$

Тогда второе уравнение из (6) принимает следующий вид:

$$\frac{y}{x} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \bar{\Xi}^{-1} \left( \xi \bar{\Xi}_\mu + \eta \bar{\Xi}_\nu \right) \left( \ln x \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{x}(y) \\ \widehat{y}(y) \end{pmatrix} \right) + \bar{\Xi}^{-1}(\xi \bar{R}_\mu + \eta \bar{R}_\nu),$$

следовательно $\alpha = \gamma = 0$, что недопустимо, т. е. случай 1) не дает невырожденное решение исходной системы функциональных уравнений.

Случай 2). Рассуждаем как и выше. В матричном виде система (12) записывается так:

$$\bar{X} = x^a \begin{pmatrix} \widehat{x}(y) \\ \widehat{y}(y) \end{pmatrix} - \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Значит второе уравнение из (6) принимает следующий вид:

$$ayx^{a-1} \begin{pmatrix} \widehat{x}(y) \\ \widehat{y}(y) \end{pmatrix} = \bar{\Xi}^{-1} \left( \xi \bar{\Xi}_\mu + \eta \bar{\Xi}_\nu \right) \left( x^a \begin{pmatrix} \widehat{x}(y) \\ \widehat{y}(y) \end{pmatrix} - \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \right) + \bar{\Xi}^{-1}(\xi \bar{R}_\mu + \eta \bar{R}_\nu).$$

При $a \neq 1$ получаем $\widehat{x}(y) = \widehat{y}(y) = 0$, что недопустимо ввиду первого неравенства из (2). При $a = 1$ имеем

$$\bar{\Xi}^{-1} \left( \xi \bar{\Xi}_\mu + \eta \bar{\Xi}_\nu \right) \begin{pmatrix} \widehat{x}(y) \\ \widehat{y}(y) \end{pmatrix} = 0,$$

следовательно последняя система принимает вид:

$$y \begin{pmatrix} \widehat{x}(y) \\ \widehat{y}(y) \end{pmatrix} = -\bar{\Xi}^{-1} \left( \xi \bar{\Xi}_\mu + \eta \bar{\Xi}_\nu \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + \bar{\Xi}^{-1}(\xi \bar{R}_\mu + \eta \bar{R}_\nu).$$

Фиксируя далее переменные $\xi$, $\eta$, $\mu$, $\nu$, $\rho$, $\tau$, получаем $\widehat{x}(y) = \frac{\beta}{y}$, $\widehat{y}(y) = \frac{\delta}{y}$, следовательно для (12) имеем $\bar{x} = \beta \frac{x}{y} - \alpha$, $\bar{y} = \delta \frac{x}{y} - \gamma$. В таком случае легко заметить, что первое неравество в (2) не выполняется. Противоречие.

Аналогичными рассуждениями получаем противоречия в случаях 3.1), 3.2), 4.1), 4.2), 4.3).

Осталось проверить случай 5). (18) записываем в матричном виде

$$\bar{X} = x^a \begin{pmatrix} \sin b \ln x & \cos b \ln x \\ \cos b \ln x & -\sin b \ln x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{x}(y) \\ \widehat{y}(y) \end{pmatrix} - \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Значит второе уравнение из (6) принимает следующий вид:

$$ayx^{a-1} \begin{pmatrix} \sin b \ln x & \cos b \ln x \\ \cos b \ln x & -\sin b \ln x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{x}(y) \\ \widehat{y}(y) \end{pmatrix} + byx^{a-1} \begin{pmatrix} \cos b \ln x & -\sin b \ln x \\ -\sin b \ln x & -cos b \ln x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{x}(y) \\ \widehat{y}(y) \end{pmatrix}$$
$$= \bar{\Xi}^{-1} \left( \xi \bar{\Xi}_\mu + \eta \bar{\Xi}_\nu \right) \left( x^a \begin{pmatrix} \sin b \ln x & \cos b \ln x \\ \cos b \ln x & -\sin b \ln x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{x}(y) \\ \widehat{y}(y) \end{pmatrix} - \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \right)$$
$$+ \bar{\Xi}^{-1}(\xi \bar{R}_\mu + \eta \bar{R}_\nu).$$

Легко заметить, что $\widehat{x}(y) = \widehat{y}(y) = 0$, что недопустимо ввиду первого неравенства из (2). Противоречие.

Теорема доказана полностью. $\rhd$

## 3. Заключение

Сформулированная выше задача вложения полностью решена. Можно также сформулировать и решить задачу вложения и для других вариантов геометрий двух множеств, например, для ДФС ГДМ ранга (3,2) с двухкомпонентной функцией

$$f^1 = x\xi^1 + \xi^2, \quad f^2 = x\eta^1 + y(\xi^1)^c + \eta^2, \quad c \neq 0$$

в ДФС ГДМ ранга (4,2) с двухкомпонентной функцией

$$f^1 = x\xi^1 + y\xi^2 + \xi^3, \quad f^2 = x\eta^1 + y\eta^2 + \eta^3.$$

## Литература

1. *Михайличенко Г. Г.* Групповая симметрия физических структур.—Барнаул: Барн. гос. пед. ун-т, 2003.—203 с.
2. *Михайличенко Г. Г.* Двуметрические феноменологические структуры ранга $(n+1, 2)$ // Сиб. матем. журн.—1993.—Т. 34, № 3.—С. 132–143.
3. *Кулаков Ю. И.* Математическая формулировка теории физических структур // Сиб. матем. журн.—1971.—Т. 12, № 5.—С. 1142–1145.
4. *Михайличенко Г. Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР.—1972.—Т. 206, № 5.—С. 1056–1058.
5. *Кыров В. А.* О вложении двуметрических феноменологически симметричных геометрий // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.—2018.—№ 56.—С. 5–16. DOI: 10.17223/19988621/56/1.
6. *Богданова Р. А., Михайличенко Г. Г., Мурадов Р. М.* Последовательное по рангу $(n+1, 2)$ вложение двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств // Изв. вузов. Матем.—2020.—№ 6.—С. 9–14. DOI: 10.26907/0021-3446-2020-6-9-14.
7. *Кыров В. А.* Невырожденные канонические решения некоторой системы функциональных уравнений // Владикавк. матем. журн.—2022.—Т. 24, № 1.—С. 44–53. DOI: 10.46698/u7680-5193-0172-d.
8. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Невырожденные канонические решения одной системы функциональных уравнений // Изв. вузов. Матем.—2021.—№ 8.—С. 46–55. DOI: 10.26907/0021-3446-2021-6-46-55.
9. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Решение трех систем функциональных уравнений, связанных с комплексными, двойными и дуальными числами // Изв. вузов. Матем.—2023.—№ 7.—С. 42–51. DOI: 10.26907/0021-3446-2023-7-42-51.
10. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.—М.: Наука, 1977.—495 с.

*Статья поступила 25 декабря 2023 г.*

Богданова Рада Александровна
Горно-Алтайский государственный университет,
*доцент кафедры математики, физики и информатики*
РОССИЯ, 649000, Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1
E-mail: `bog-rada@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0002-1306-6426

Кыров Владимир Александрович
Горно-Алтайский государственный университет,
*доцент кафедры математики, физики и информатики*
РОССИЯ, 649000, Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1
E-mail: `kyrovVA@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0001-5925-7706

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2024, Volume 26, Issue 3, P. 24–32*

# SOLUTION OF A SYSTEM OF FUNCTIONAL EQUATIONS ASSOCIATED WITH AN AFFINE GROUP

Bogdanova, R. A.[1] and Kyrov, V. A.[1]

[1] Gorno-Altaisk State University,
1 Lenkin St., Gorno-Altaisk 649000, Russia

E-mail: `bog-rada@yandex.ru`, `kyrovVA@yandex.ru`

**Abstract.** Solution of the embedding problem for a two-metric phenomenologically symmetric geometry of rank $(3, 2)$ with the function $g(x, y, \xi, \eta) = (g^1, g^2) = (x\xi + y\ mu, x\eta + y\nu)$ into an affine two-metric phenomenologically symmetric geometry of rank (4,2) with the function $f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu) = (f^1, f^2) = (x\xi + y\mu + \rho, x\eta + y\nu + \tau)$ leads to the problem of establishing the existence of non-degenerate solutions to the corresponding system $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}) = \chi(g(x, y, \xi, \eta), \mu, \nu)$ of two functional equations. This system is solved based on the fact that the functions $g$ and $f$ are previously known. This system is written explicitly as follows: $\bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\mu} + \bar{\rho} = \chi^1(x\xi + y\mu, x\eta + y\nu, \mu, \nu)$, $\bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} + \bar{\tau} = \chi^2(x\xi + y\mu, x\eta + y\nu, \mu, \nu)$. The main goal of this work is to find a general non-degenerate solution to this system. To solve the problem, we first differentiate with respect to the variables $x$, $y$ and $\xi$, $\eta$, $\mu$, $\nu$, as a result we obtain a system of differential equations with a matrix of coefficients $A$ of the general form. It is proved that the matrix $A$ can be reduced to Jordan form. Then a system of differential equations with such a Jordan matrix is solved. Returning to the original original system of functional equations, we find the additional restrictions. As a result, we arrive at a non-degenerate solution to the original system of functional equations.

**Keywords:** geometry of two sets, Jordan form of a matrix, system of functional equations, system of differential equations.

**AMS Subject Classification:** 51K99, 34K99.

**For citation:** *Bogdanova, R. A. and Kyrov, V. A.* Solution of a System of Functional Equations Associated with an Affine Group, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 3, pp. 24–32. (in Russian). DOI: 10.46698/d7752-5993-6789-y.

## References

1. *Mikhailichenko, G. G. Gruppovaya simmetriya fizicheskih struktur* [Group Symmetry of Physical Structures], Barnaul, 2003. 203 p. (in Russian).
2. *Mikhailichenko, G. G.* Bimetric Physical Structures of Rank $(n + 1, 2)$, *Siberian Mathematical Journal*, 1993, vol. 34, no. 3, pp. 513–522. DOI: 10.1007/BF00971227.
3. *Kulakov, Yu. I.* A Mathematical Formulation of the Theory of Physical Structures, *Siberian Mathematical Journal*, 1971, vol. 12, no. 5, pp. 822–824. DOI:10.1007/BF00966522.
4. *Mikhailichenko, G. G.* The Solution of Functional Equations in the Theory of Physical Structures, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1972, vol. 206, no. 5, pp. 1056–1058 (in Russian).
5. *Kyrov, V. A.* On the Embedding of Two-Dimetric Phenomenologically Symmetric Geometries, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2018, no. 56, pp. 5–16 (in Russian). DOI 10.17223/19988621/56/1.
6. *Bogdanova, R. A., Mikhailichenko, G. G. and Muradov R. M.* Successive in Rank $(n+1, 2)$ Embedding of Dimetric Phenomenologically Symmetric Geometries of Two Sets, *Russian Mathematics*, 2020, vol. 64, no. 6, pp. 6–10. DOI: 10.3103/S1066369X2006002X.
7. *Kyrov, V. A.* Nondegenerate Canonical Solutions of Some System of Functional Equations, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2022, vol. 24, no. 1, pp. 44–53 (in Russian). DOI: 10.46698/u7680-5193-0172-d.
8. *Kyrov, V. A. and Mikhailichenko, G. G.* Nondegenerate Canonical Solutions of one System of Functional Equations, *Russian Mathematics*, 2021, vol. 65, no. 8, pp. 40–48. DOI: 10.3103/S1066369X21080053.

9. *Kyrov, V. A. and Mikhailichenko, G. G.* Solving Three Systems of Functional Equations Associated with Complex, Double, and Dual Numbers, *Russian Mathematics*, 2023, vol. 67, no. 7, pp. 34–42. DOI: 10.3103/S1066369X23070058.
10. *Kostrikin, A. I. Vvedenie v algebru* [Introduction to Algebra], Moscow, Nauka, 1977, 495 p. (in Russian).

*Received December 25, 2023*

Rada A. Bogdanova
Gorno-Altaisk State University,
1 Lenkin St., Gorno-Altaisk 649000, Russia,
*Associate Professor of the Department of Mathematics, Physics and Informatics*
E-mail: bog-rada@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-1306-6426

Vladimir A. Kyrov
Gorno-Altaisk State University,
1 Lenkin St., Gorno-Altaisk 649000, Russia,
*Associate Professor of the Department of Mathematics, Physics and Informatics*
E-mail: kyrovVA@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0001-5925-7706