*Владикавказский математический журнал*
*2024, Том 26, Выпуск 3, С. 33–46*

**УДК** 517.929.4
**DOI** 10.46698/v9056-4395-2233-f

# НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕМЕННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ[#]

**А. О. Ватульян[1], С. А. Нестеров[2]**

[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: aovatulyan@sfedu.ru, 1079@list.ru

**Аннотация.** Представлены новые постановки и решения задач оптимизации переменного коэффициента теплопроводности для неоднородной трубы и плоской стенки со смешанными граничными условиями. В качестве функционалов качества выступают либо средняя температура, либо максимальная температура, а в качестве ограничения — либо условие постоянства интегрального коэффициента теплопроводности, либо априорная информация об изменении коэффициента теплопроводности в известном диапазоне. Для решения задач для трубы применяются два метода оптимизации: 1) вариационный подход, основанный на введении сопряженных функций и построении расширенного функционала Лагранжа; 2) принцип максимума Понтрягина. Для решения задачи оптимизации для плоской стенки в предположении о слабой неоднородности материала применяется метод разложения по малому физическому параметру. В качестве четвертой задачи рассмотрена оптимизация переменного коэффициента теплопроводности неоднородной плоской стенки с граничными условиями первого рода. Решение сингулярной задачи оптимизации находится среди ломанных экстремалей. На конкретных примерах проведено сравнение значений минимизируемых функционалов для тел с постоянным коэффициентом теплопроводности и оптимальным переменным коэффициентом. Оценен выигрыш от оптимизации.

**Ключевые слова:** оптимизация, коэффициент теплопроводности, функционально-градиентный материал, плоская стенка, труба, вариационный метод Лагранжа, принцип макимума Понтрягина, метод разложения по малому параметру, сингулярная задача.

**AMS Subject Classification:** 80M30, 80M50.

**Образец цитирования:** *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Некоторые аналитические решения в задачах оптимизации переменного коэффициента теплопроводности // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 3.—С. 33–46. DOI: 10.46698/v9056-4395-2233-f.

## 1. Введение

Долгое время для повышения термопрочности изделий, находящихся в областях с высокотемпературным окружением, применялись однородные и слоистые теплозащитные покрытия, недостатком которых является высокая концентрация напряжений в области сопряжения покрытия и подложки [1]. В настоящее время для преодоления этого

[#] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265, https://rscf.ru/project/22-11-00265/ в Южном федеральном университете.

недостатка широко используются функционально-градиентные материалы (ФГМ) — металлокерамические композиты различной структуры с контролируемым профилем распределения по объему металлической и керамической фаз [2].

Задача создания желаемых распределений температуры (обычно минимальных) в твердом теле посредством граничных тепловых потоков, либо распределения внутри тела источников тепла или теплофизических характеристик — очень важная задача в технике, особенно в металлургии и системах охлаждения [3–6]. Структуры ФГМ с заданными переменными теплофизическими свойствами можно достичь различными методами, например, физическим и химическим осаждением слоев, методами порошковой металлургией, аддитивными технологиями [7–10]. Так, в случае использования порошковой металлургии технологический процесс состоит из ряда этапов, таких, как спекание, плавление, послойное прессование, напыление.

В настоящий момент проведено достаточно большое число исследований, касающихся проектирования тепловых процессов посредством оптимизации формы [11–16]. Среди фундаментальных работ, посвященных оптимальному проектированию конструкций, можно выделить в первую очередь, монографию Баничука Н. В. [17], где систематически освещены методы исследования задач оптимизации формы различных конструкций. В настоящее время основными аналитическими методами исследования задач оптимизации выступают: метод построения сопряженных уравнений и вариационный принцип Лагранжа [17, 18], метод разложения по малому физическому параметру [19–21], принцип максимума Понтрягина [22–24]. Нужно отметить также, что коэффициентные обратные задачи математической физики часто сводятся к оптимизационным задачам [25]. Аналитические решения задач оптимизации переменного коэффициента теплопроводности вариационным методом Лагранжа получены только для стержневых структур [26–28].

В настоящей работе исследуются задачи оптимизации переменного коэффициента теплопроводности плоской стенки и цилиндрической трубы. Для получения аналитических решений применяются различные методы оптимизации: вариационный принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина, метод разложения по малому параметру. На конкретных примерах оценен выигрыш от оптимизации.

## 2. Решение задачи оптимизации переменного коэффициента трубы вариационным методом Лагранжа

Одним из основных методов оптимизации является метод множителей Лагранжа [29]. Рассмотрим его применение к задаче оптимизации переменного коэффициента теплопроводности $k(r)$ неоднородной трубы, на внутренней поверхности $r = r_1$ которой задана нулевая температура, а на внешней $r = r_2$ — тепловой поток $q_0$. В качестве минимизируемого функционала выступает максимальная температура трубы, а в качестве ограничения — изопериметрическое условие для коэффициента теплопроводности.

Постановка вариационной задачи имеет вид:

$$\frac{d}{dr}\left(rk(r)\frac{dT}{dr}\right) = 0, \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \tag{1}$$

$$T(r_1) = 0, \quad k\left(r_2\right)\frac{dT}{dr}\left(r_2\right) = q_0, \tag{2}$$

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} k(r)r\,dr = s, \quad k(r) \geqslant 0, \tag{3}$$

$$J = \max(T(r)) \to \min_{k}. \tag{4}$$

Из граничных условий (2) следует, что максимальная температура будет на внешней поверхности трубы $r = r_2$.

Выполним обезразмеривание задачи по формулам [30]: $\xi = \frac{r}{r_2}$, $\xi_0 = \frac{r_1}{r_2}$, $\bar{k}(\xi) = \frac{k(r)}{k_0}$, $w = \frac{k_0 T}{q_0 r_2}$, $S_0 = \frac{s}{k_0}$, $\xi_0 = \frac{r_1}{r_2}$.

Постановка обезразмеренной задачи (1)–(4) имеет вид:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi \bar{k}(\xi)\frac{dw}{d\xi}\right) = 0, \quad \xi_0 \leqslant \xi \leqslant 1, \tag{5}$$

$$w(\xi_0) = 0, \quad \bar{k}(1)\frac{dw}{d\xi}(1) = 1, \tag{6}$$

$$\int\limits_{\xi_0}^{1} \bar{k}(\xi)\xi\, d\xi = s_0, \quad \bar{k}(\xi) \geqslant 0, \tag{7}$$

$$J = w(1) \to \min_{\bar{k}}. \tag{8}$$

Сначала получим слабую постановку задачи (5), (6), умножив (5) на сопряженную функцию $v(\xi)$, удовлетворяющую главному граничному условию $v(\xi_0) = 0$, и проинтегрировав по области в цилиндрической системе координат с учетом интегрирования по частям:

$$2\pi \int\limits_{\xi_0}^{1} \frac{d}{d\xi}\left(\xi \bar{k}(\xi)\frac{dw}{d\xi}\right) v(\xi)\xi\, d\xi = 2\pi v(1) - 2\pi \int\limits_{\xi_0}^{1} \xi \bar{k}(\xi)\frac{dw}{d\xi}\frac{dv}{d\xi}\xi\, d\xi. \tag{9}$$

Составим расширенный функционал, присоединив к функционалу (9), минимизируемый функционал (8) и изопериметрическое равенство (7) посредством множителя Лагранжа $\lambda$:

$$L = 2\pi\left[w(1) - v(1) + \int\limits_{\xi_0}^{1} \xi \bar{k}(\xi)\frac{dw}{d\xi}\frac{dv}{d\xi}\xi\, d\xi + \lambda\left(\int\limits_{\xi_0}^{1} \bar{k}(\xi)\xi dr - s_0\right)\right]. \tag{10}$$

Получим необходимые условия оптимальности и постановку сопряженной задачи из условия стационарности функционала (10). Для этого найдем первую вариацию функционала и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned}\delta L = 2\pi\Biggl(\delta w(1) - \delta v(1) + \int\limits_{\xi_0}^{1} \xi\frac{dw}{d\xi}\frac{dv}{d\xi}\delta\bar{k}\xi\, d\xi + \int\limits_{\xi_0}^{1} \xi\bar{k}\frac{dw}{d\xi}\frac{d\delta v}{d\xi}\xi d\xi + \int\limits_{\xi_0}^{1} \xi\bar{k}\frac{d\delta w}{d\xi}\frac{dv}{d\xi}\bar{k}\xi\, d\xi +\\ + \delta\lambda\left(\int\limits_{\xi_0}^{1} \bar{k}(\xi)\xi\, d\xi - s_0\right) + \lambda\int\limits_{\xi_0}^{1} \delta\bar{k}(\xi)\xi\, d\xi\Biggr) = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

Интегрируя по частям в (11) четвертое и пятое слагаемые, получим

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\xi_0}^{1} \xi\bar{k}\frac{dw}{d\xi}\frac{d\delta v}{d\xi}\xi d\xi = \bar{k}\left(1\right)\frac{dw}{d\xi}\left(1\right)\delta v\left(1\right) - \int\limits_{\xi_0}^{1}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\bar{k}\frac{dw}{d\xi}\right)\delta v\xi d\xi,\\
&\int\limits_{\xi_0}^{1} \xi\bar{k}\frac{d\delta w}{d\xi}\frac{dv}{d\xi}\xi\, d\xi = \bar{k}\left(1\right)\frac{dv}{d\xi}\left(1\right)\delta w\left(1\right) - \int\limits_{\xi_0}^{1}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\bar{k}\frac{dv}{d\xi}\right)\delta w\xi\, d\xi.
\end{aligned} \tag{12}$$

Далее с учетом (12), сгруппировав слагаемые в (11) по независимым вариациям $\delta\bar{k}$, $\delta w$, $\delta v$, получим: а) постановку прямой задачи (5), (6); б) постановку сопряженной задачи

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\bar{k}\left(\xi\right)\frac{dv}{d\xi}\right) = 0, \quad \xi_0 \leqslant \xi \leqslant 1, \tag{13}$$

$$v(\xi_0) = 0, \quad \bar{k}\left(1\right)\frac{dv}{d\xi}\left(1\right) = -1; \tag{14}$$

в) условие оптимальности

$$\xi\frac{dw}{d\xi}\frac{dv}{d\xi} + \lambda = 0. \tag{15}$$

Из (5), (6) и (13), (14) следует, что $v\left(\xi\right) = -w\left(\xi\right)$. Поэтому условие оптимальности (15) примет вид:

$$\xi\left(\frac{dw}{d\xi}\right)^2 = \lambda. \tag{16}$$

Таким образом, выразив производную $\frac{dw}{d\xi}$ из (16) и подставив ее в (5), (6), получим задачу Коши для нахождения $\bar{k}\left(\xi\right)$:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\bar{k}\left(\xi\right)\sqrt{\xi}\right) = 0, \quad \bar{k}\left(1\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \tag{17}$$

решением которой является функция $\bar{k}\left(\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda\xi}}$.

Подставив выражение для $\bar{k}\left(\xi\right)$ в изопериметрическое условие (7), получим $\sqrt{\lambda} = \frac{2\left(1-\sqrt{\xi_0}\right)}{s_0}$.

Выражения для оптимального распределения коэффициента теплопроводности и температуры примут вид:

$$\bar{k}_{\text{opt}}\left(\xi\right) = \frac{s_0}{2\sqrt{\xi}\left(1-\sqrt{\xi_0}\right)}, \quad w_{\text{opt}}\left(\xi\right) = \frac{4}{s_0}\left(1-\sqrt{\xi_0}\right)\left(\sqrt{\xi}-\sqrt{\xi_0}\right). \tag{18}$$

Проведено сравнение значений функционала (8) в случае однородной трубы $k_{\text{hom}} = s_0$, $w_{\text{hom}}\left(1\right) = \frac{ln\left(\xi_0^{-1}\right)}{s_0}$ и трубы с оптимальным законом коэффициента теплопроводности (18) при $\xi_0 = 0.6$, $s_0 = 1$. Выяснено, что $J_{\text{hom}} = 0.51$, $J_{\text{opt}} = 0.21$. Выигрыш от использования переменного оптимального коэффициента теплопроводности составил 58%.

### 3. Решение задачи оптимизации переменного коэффициента трубы на основе принципа максимума Понтрягина

Рассмотрим применение принцип максимума Понтрягина [22] к задаче оптимизации распределения переменного коэффициента теплопроводности $k(r)$ неоднородной трубы, на внутренней поверхности $r = r_1$ которой задана нулевая температура, а на внешней $r = r_2$ — тепловой поток $q_0$. В качестве минимизируемого функционала выступает средняя интегральная температура трубы, а в качестве ограничения — изопериметрическое условие для коэффициента теплопроводности.

Постановка обезразмеренной вариационной задачи имеет вид (5)–(7), а вместо функционала (8) используется функционал

$$J = \int_{\xi_0}^{1} w\,(\xi)\xi d\xi \to \min_{\bar{k}}\,. \tag{19}$$

Будем рассматривать поставленную вариационную задачу как задачу оптимального управления. Приняв функцию $\bar{k}\,(\xi)$ в качестве управляющей функции, выпишем уравнения (5), (6) в удобном для применения принципа максимума виде. Перейдем от дифференциального уравнения второго порядка (5) с помощью обозначений $w_1 = w$, $w_2 = kw'$ к канонической систему ОДУ 1-го порядка:

$$w'_1 = f_1, \quad f_1 = \frac{w_2}{k}, \tag{20}$$

$$w'_2 = f_2, \quad f_2 = -\frac{w_2}{\xi}, \tag{21}$$

$$w_1\,(\xi_0) = 0, \quad w_2\,(1) = 1. \tag{22}$$

Здесь знак «штрих» обозначает производную по координате $\xi$.

Согласно принципу максимума [22–24], присоединив к системе (20), (21) изопериметрическое условие (7) и минимизируемый функционал (19), выпишем функцию Гамильтона (гамильтониан) расширенной системы:

$$H = -w_1 + \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 - \lambda\bar{k} = -w_1 + \psi_1\frac{w_2}{k} - \psi_2\frac{w_2}{\xi} - \lambda\bar{k}, \tag{23}$$

где $\psi_1$, $\psi_2$ — сопряженные функции.

Согласно [22] сопряженная система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\psi'_1 = -\frac{\partial H}{\partial w_1} = 1, \tag{24}$$

$$\psi'_2 = -\frac{\partial H}{\partial w_2} = -\frac{\psi_1}{\bar{k}} + \frac{\psi_2}{\xi}. \tag{25}$$

Граничные условия для сопряженных переменных определим из условий трансверсальности $\sum_{i=1}^{2}\left(\psi_i(1)\delta w_i(1) - \psi_i(\xi_0)\delta w_i(\xi_0)\right) = 0$ с учетом $\delta w_1\,(\xi_0) = 0$, $\delta w_2\,(1) = 0$. Откуда следует, что $\psi_1\,(1) = 0$, $\psi_2\,(\xi_0) = 0$.

Необходимое условие стационарности гамильтониана (23) имеет вид:

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{k}} = -\frac{\psi_1 w_2}{\bar{k}^2} - \lambda = 0. \tag{26}$$

Из (26) находится выражение для коэффициента теплопроводности:

$$k = \sqrt{-\frac{\psi_1 w_2}{\lambda}}. \tag{27}$$

Непосредственным интегрированием (21), (24) и удовлетворением граничных условий $w_2\,(1) = 1$, $\psi_1\,(1) = 0$ находим, что $\psi_1 = \xi - 1$, $w_2 = \frac{1}{\xi}$, а множитель $\lambda$ определяется из изопериметрического равенства (7).

После несложных преобразований получим выражение для оптимального коэффициента теплопроводности:

$$\bar{k}_{\text{opt}}\,(\xi) = -\frac{4s_0}{1 - 4\sqrt{\xi_0\,(1-\xi_0)} - 2\arcsin\,(2\xi_0 - 1)}\sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}}. \tag{28}$$

Найдя вторую производную функции (23) по $\bar{k}$, получим:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{k}^2} = 2\frac{\psi_1 w_2}{\bar{k}^3} < 0, \quad \bar{k} \geqslant 0,\ w_2 > 0,\ \psi_1 < 0. \tag{29}$$

Из (29) следует, что функция имеет максимум, поэтому согласно принципу максимума Понтрягина, найденная функция (28) является оптимальным решением. Формула для оптимального коэффициента теплопроводности (28) совпадает с формулой, полученной путем применения к задаче (5)–(7), (19) вариационного метода Лагранжа.

Проведено сравнение значений функционала (19) в случае однородной трубы и неоднородной с оптимальным законом коэффициента теплопроводности (28) при $\xi_0 = 0.6$, $s_0 = 1$. Выяснено, что $J_{\text{hom}} = 0.11$, $J_{\text{opt}} = 0.066$. Выигрыш от оптимизации составил 40%.

## 4. Решение задачи оптимизации коэффициента теплопроводности плоской стенки методом малого параметра

Если известна дополнительная информация о слабой неоднородности материала, то для решения задач оптимизации удобно применять метод разложения по малому параметру [19, 20]. Рассмотрим его применение к задаче оптимизации распределения коэффициента теплопроводности неоднородной плоской стенки толщиной $h$ с тепловыми источниками, на нижней поверхности $x = 0$, на которой задана нулевая температура, а на верхней $x = h$ — тепловой поток, если известна априорная информация о границах изменения коэффициента теплопроводности. В качестве минимизируемого функционала выступает температура на верхней поверхности $T(h)$.

Обезразмеренная постановка вариационной задачи имеет вид:

$$\frac{d}{dz}\left(\bar{k}(z)\frac{dW}{dz}\right) + Q = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \tag{30}$$

$$W(0) = 0, \quad \bar{k}\,(1)\,\frac{dW}{dz}\,(1) = 1, \tag{31}$$

$$\bar{k}_{\min} \leqslant \bar{k}(z) \leqslant \bar{k}_{\max}, \tag{32}$$

$$J = W(1) \to \min_{\bar{k}}, \tag{33}$$

где $z = \frac{x}{h}$, $W = \frac{k_0 T}{q_0 h}$, $\bar{k}\,(z) = \frac{k(x)}{k_0}$ [25].

Решим задачу (30)–(33) методом малого параметра, полагая как в [21]

$$\bar{k}(z) = f_0\left(1 + \delta f(z)\right), \quad W(z) = W_0 + \delta W_1, \quad f_0 = \frac{1}{2}\left(\bar{k}_{\min} + \bar{k}_{\max}\right), \\ \delta = \frac{\bar{k}_{\max} - \bar{k}_{\min}}{\bar{k}_{\max} + \bar{k}_{\min}}, \quad 0 < \delta < 1. \tag{34}$$

Подставив (34) в (30), (31), и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $\delta$, получим следующие краевые задачи для нулевого и первого приближений.

При $\delta^0$ :

$$W_0'' = -\frac{Q}{f_0}, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \tag{35}$$

$$W_0(0) = 0, \quad W_0'(1) = \frac{1}{f_0}. \tag{36}$$

Решением задачи (35), (36) является функция

$$W_0(z) = \frac{z}{f_0} + \frac{Qz}{f_0}\left(1 - \frac{z}{2}\right). \tag{37}$$

При $\delta^1$ :

$$W_1'' = -\left(f(z)W_0'\right)', \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \tag{38}$$

$$W_1(0) = 0, \quad {W'}_1(1) = -f(1){W'}_0(1). \tag{39}$$

Решением задачи (38), (39) является функция

$$W_1(z) = -\frac{1}{f_0}\int\limits_0^z f(z)\left(1 + Q\left(1 - z\right)\right)dz. \tag{40}$$

Для функции $f(z)$ согласно [19] установим следующие ограничения:

$$\int\limits_0^1 f(z)dz = 0, \quad |f(z)| \leqslant 1, \quad \int\limits_0^1 \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz \leqslant C_0^2. \tag{41}$$

Исходя из (33), (40) и (41), составим расширенный функционал Лагранжа:

$$L = -\frac{1}{f_0}\int\limits_0^1 f(z)\left(1 + Q\left(1 - z\right)\right)\,dz + \lambda_1\int\limits_0^1 f(z)\,dz + \lambda_2\int\limits_0^1 \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz. \tag{42}$$

Из условия стационарности функционала (42) следует постановка краевой задачи для нахождения $f(z)$:

$$f'' = -\frac{1}{2\lambda_2}\left(\frac{1}{f_0} + \frac{Q}{f_0}\left(1 - z\right) - \lambda_1\right), \tag{43}$$

$$f'(0) = 0, \quad f'(1) = 0. \tag{44}$$

Согласно [19, 20] множитель Лагранжа $\lambda_1$, определяемый из выражения $\int_0^1 \left(\frac{1}{f_0} + \frac{Q}{f_0}(1-z) - \lambda_1\right) dz = 0$, равен $\frac{1}{f_0}\left(1+\frac{Q}{2}\right)$. Множитель $\lambda_2$, определяемый из неравенства $|f(z)| \leqslant 1$, равен $\frac{Q}{24 f_0}$. Отсюда следует, что

$$f(z) = z^2\,(2z-3)\,, \tag{45}$$

а значение $C_0^2$ в (41) равно 1.25.

В случае $Q = 1$ относительный выигрыш в соответствии с функционалом качества (33), введенный по формуле $\frac{W_1(1)}{W_0(1)}\delta \cdot 100\%$, составляет $43\%\delta$.

В работах по оптимизации переменного коэффициента теплопроводности, например, в [18, 28] в качестве минимизируемого функционала также широко используется функционал вида

$$J = \int\limits_0^1 \bar{k}(z) W'^2 dz \to \min_{\bar{k}}. \tag{46}$$

Решим задачу оптимизации переменного коэффициента теплопроводности плоской стенки (30)–(32) с функционалом качества (46) методом разложения по малому параметру.

Выполняя действия, аналогичные решению оптимизационной задачи теплопроводности (30)–(33), получено выражение для нахождения функции-поправки $f(z) = -\frac{1}{3}z^2(z^2 - 8z + 10)$. В случае $Q = 1$ относительный выигрыш от оптимизации составляет $29\%\delta$.

## 5. Сингулярная задача оптимизации коэффициента теплопроводности плоской стенки

В рассмотренных выше задачах оптимизации коэффициента теплопроводности градиент температуры $W'$ является непрерывной функцией координаты. Однако не для всех граничных условий $W'$ обладает этим свойством. Пусть в задаче оптимизации коэффициента теплопроводности плоской стенки (30)–(33) вместо (33) требуется минимизировать функционал

$$J = \int\limits_0^1 W(z) dz \to \min_{k} \tag{47}$$

при изопериметрическом ограничении вместо (32)

$$\int\limits_0^1 \bar{k}(z) dz = s_0, \quad \bar{k}(z) \geqslant 0. \tag{48}$$

Если вместо смешанных граничных условий (31) используются граничные условия первого рода

$$W(0) = \vartheta_1, \quad W(1) = \vartheta_2, \tag{49}$$

то оптимального решения, для которого функция $W'$ была бы непрерывна на $0 \leqslant z \leqslant 1$, не существует.

Используя метод множителей Лагранжа для поставленной задачи оптимизации, получено условие оптимальности, которое имеет вид:

$$\left(W'\right)^2 = \lambda. \tag{50}$$

Условие оптимальности (50) совместно с граничными условиями (49) приводит к неразрешимой краевой задаче, если считать функцию $W'$ непрерывной.

Будем искать решение задачи оптимизации при граничных условиях (49) в классе непрерывных функций с разрывной производной. Применим ранее разработанную в [17] схему для исследования сингулярной задачи оптимизации коэффициента теплопроводности.

В точке разрыва градиента температуры согласно условиям Вейерштрасса — Эрдмана имеем:

$$\left(\bar{k}W'\right)^{+} = \left(\bar{k}W'\right)^{-} = 0, \quad \left[\bar{k}\left(W'\right)^{2}\right]_{-}^{+} = 0. \tag{51}$$

Следовательно, при наличии разрывов по $W'$, требуется положить тепловой поток в сингулярной точке $z_0$ равным нулю, а т. к. $W'(z_0) \neq 0$, то имеем следующее условие для коэффициента теплопроводности:

$$\bar{k}^{-}(z_0) = \bar{k}^{+}(z_0) = 0. \tag{52}$$

Из условия оптимальности (50) следует, что

$$W'(z) = \begin{cases} -\sqrt{\lambda}, & 0 \leqslant z \leqslant z_0, \\ \sqrt{\lambda}, & z_0 \leqslant z \leqslant 1. \end{cases} \tag{53}$$

С учетом граничных условий (49) и условия непрерывности температуры имеем:

$$W(z) = \begin{cases} -\sqrt{\lambda}z + \vartheta_1, & 0 \leqslant z \leqslant z_0, \\ \sqrt{\lambda}(z-1) + \vartheta_2, & z_0 \leqslant z \leqslant 1, \end{cases} \qquad z_0 = \frac{\sqrt{\lambda} + \vartheta_1 - \vartheta_2}{2\sqrt{\lambda}}. \tag{54}$$

Подставив производную $W'(z)$ из (53) в уравнение теплопроводности (30), получим выражение для производной коэффициента теплопроводности:

$$\bar{k}'(z) = \begin{cases} \frac{Q}{\sqrt{\lambda}}, & 0 \leqslant z \leqslant z_0, \\ -\frac{Q}{\sqrt{\lambda}}, & z_0 \leqslant z \leqslant 1. \end{cases} \tag{55}$$

Проинтегрировав (55) с учетом граничных условий (52), имеем

$$\bar{k}(z) = \begin{cases} \frac{Q}{\sqrt{\lambda}}\left(z - z_0\right), & 0 \leqslant z \leqslant z_0, \\ \frac{Q}{\sqrt{\lambda}}\left(z_0 - z\right), & z_0 \leqslant z \leqslant 1. \end{cases} \tag{56}$$

В выражение (56) входит множитель $\sqrt{\lambda}$, который определяется из изопериметрического равенства (48) и равен $\sqrt{\lambda} = -\frac{Q}{4s_0}$.

Выражения для оптимального распределения коэффициента теплопроводности и температуры в случае $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_0$ имеют вид кусочно-линейных функций ($z_0 = 0.5$)

$$\begin{gathered} \bar{k}_{\text{opt}}(z) = \begin{cases} -4s_0\left(z - z_0\right), & 0 \leqslant z \leqslant z_0, \\ -4s_0\left(z_0 - z\right), & z_0 \leqslant z \leqslant 1, \end{cases} \\ W_{\text{opt}}(z) = \begin{cases} \frac{Q}{4s_0}z + \vartheta_0, & 0 \leqslant z \leqslant z_0, \\ -\frac{Q}{4s_0}z + \frac{Q}{4s_0} + \vartheta_0, & z_0 \leqslant z \leqslant 1. \end{cases} \end{gathered} \tag{57}$$

Проведено сравнение значений функционала (47) в случае однородной стенки и неоднородной с оптимальным законом коэффициента теплопроводности при $\vartheta_0 = 1$, $s_0 = 1$, $Q = 1$. Выяснено, что $J_{\text{hom}} = 0.083$, $J_{\text{opt}} = 0.062$. Выигрыш от оптимизации составил 35%.

### 6. Заключение

Рассмотрены постановки ряда задач об оптимизации распределения переменного коэффициента теплопроводности неоднородных тел. Построены аналитические решения задач об оптимальном распределении коэффициента теплопроводности неоднородной трубы и плоской стенки при различных граничных условиях. Для решения поставленных задач использовались различные методы оптимизации: вариационный метод множителей Лагранжа, принцип максимума Понтрягина, метод разложения по малому параметру. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что в случае расчетов по оптимальным законам распределения коэффициента теплопроводности уменьшение значений минимизируемых функционалов составляло от 20 до 60% по сравнению с однородными телами. Используя рассмотренные методы оптимизации, можно аналитически получить условия оптимальности и постановки сопряженных задач для двумерных объектов, например, прямоугольника. Однако для нахождения оптимальных двумерных законов распределения коэффициента теплопроводности необходимо использовать итерационную процедуру, а прямую задачу решать численно, например, методом конечных элементов.

### Литература


1. *Lee W. Y., Stinton D. P., Bernardt C. C., Erdogan F, Lee Y. D., Mutasin Z.* Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications // Journal of American Ceramic Society.—1996.—Vol. 19.—P. 3003–3012. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1996.tb08070.x.
2. *Wetherhold R. C., Seelman S., Wang J.* The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation // Composites Science and Technology.—1996.—№ 56.—P. 1099–1104. DOI: 10.1016/0266-3538(96)00075-9.
3. *Mathew J., Krishnan S.* A review on transient thermal management of electronic devices // J. Electron. Packag.—2022.—Vol. 144 (1).—P. 3003–3012. DOI: 10.1115/1.4050002.
4. *Bejan A.* Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume // Int. J. Heat Mass Transf.—1997.—Vol. 40, № 4.—P. 799–816. DOI: 10.1016/0017-9310(96)00175-5.
5. *Hua Y.-C., Zhao T., Guo Z.-Y.* Transient thermal conduction optimization for solid sensible heat thermal energy storage modules by the Monte Carlo method // Energy.—2017.—Vol. 133.—P. 338–347. DOI: 10.1016/j.energy.2017.05.073.
6. *Chen K., Wang S., Song M.* Optimization of heat source distribution for two-dimensional heat conduction using bionic method // Int. J. Heat Mass Transfer.—2016.—Vol. 93.—P. 108–117.
7. *Birman V., Byrd L. W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Applied Mechanics Reviews.—2007.—Vol. 60, № 5.—P. 195–216. DOI: 10.1115/1.2777164.
8. *Suresh S., Mortensen A.* Fundamentals of Functionally Graded Materials.—London: Cambridge Publication, 1998.—165 p. DOI: 10.1016/S1369-7021(98)80023.
9. *Быков Ю. В., Егоров С. В., Еремеев А. Г. и др.* Создание металлокерамических функционально-градиентных материалов спеканием при микроволновом нагреве // Физика и химия обработки материалов.—2011.—№ 4.—С. 52–61.
10. *Gururaja U., Shrikantha R. S., Gangadharan K. V.* Functionally graded composite materials: An overview // Procedia Matherials Science.—2014.—Vol. 5.—P. 1291–1299. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.07.442.
11. *Dirker J., Meyer J. P.* Topology optimization for an internal heat-conduction cooling scheme in a square domain for high heat flux applications // J. Heat Transfer.—2013.—Vol. 135 (11). DOI: 10.1115/1.4024615.
12. *Cheng C. H., Chen Y. F.* Topology optimization of heat conduction paths by a non-constrained volume-of-solid function method // Int. J. Therm. Sci.—2014.—Vol. 78.—P. 16–25. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2013.11.011.
13. *Dede E. M., Joshi S. N., Zhou F.* Topology optimization, additive layer manufacturing, and experimental testing of an air-cooled heat sink // J. Mech. Des.—2015.—Vol. 137 (11). DOI: 10.1115/1.4030989.
14. *Gersborg-Hansen A., Bendsoe M. P., Sigmund O.* Topology optimization of heat conduction problems using the finite volume method // Struct. Multid. Optim.—2006.—Vol. 31 (4).—P. 251–259. DOI: 10.1007/s00158-005-0584-3.

15. *Dbouk T.* A review about the engineering design of optimal heat transfer systems using topology optimization // Appl. Therm. Eng.—2017.—Vol. 112.—P. 841–854. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2016.10.134.
16. *Yongcun Z., Shutian L., Heting Q.* Design of the heat conduction structure based on the topology optimization // Developments in Heat Transfer, Dr. Marco Aurelio Dos Santos Bernardes (Ed.).—2011.—P. 523–536. DOI: 10.5772/20060.
17. *Баничук Н. В.* Введение в оптимизацию конструкций.—М: Наука, 1986.—304 с.
18. *Tong Z.-X., Li M.-J., Yan J.-J., Tao W.-Q.* Optimizing thermal conductivity distribution for heat conduction problems with different optimization objectives // Int. J. Heat Mass Transfer.—2018.—Vol. 119.—P. 343–354. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.11.108.
19. *Братусь А. С, Картвелишвили В. М.* Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.—1981.—№ 6.—С. 119–139.
20. *Sarkisyan V. S., Gukasyan G. M., Grigoryan A. A.* Optimal design of a circular plate with rectilinear anisotropy // J. Math. Sci.—2001.—Vol. 104, № 5.—P. 1569–1574. DOI: 10.1023/A:1011300122949.
21. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела.—Ереван: изд-во ЕрГУ, 1976.—536 с.
22. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов.—М: Физматгиз, 1961.—394 с.
23. *Warner W. H.* Optimal design problems for elastic bodies by use of the maximum principle // Journal of Elasticity.—2000.—Vol. 59.—P. 357–367. DOI: 10.1023/A:1011055305523.
24. *Алехин В. В.* Проектирование поперечно-слоистой консоли минимальной массы при ограничении на максимальный прогиб // Прикладная механика и техническая физика.—2007.—Т. 48, № 4.—С. 104–110.
25. *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Коэффициентные обратные задачи термомеханики. 2-е изд., исправ. и доп.—Ростов н/Д–Таганрог: Изд-во Южного федерального ун-та, 2022.—178 с.
26. *Мерик Р. А.* Оптимизация коэффициентов теплопроводности изотропных и ортотропных тел // Теплопередача.—1985.—№ 3.—С. 1–6.
27. *Meric R. A.* Material and load optimization by the adjoint variable method // Trans. ASME. J. Heat Transfer.—1987.—Vol. 109, № 3.—P. 782–784.
28. *Tian Z., Xuan W., Zeng-Yuan G.* Optimal thermal conductivity design for the volume-to-point heat conduction problem based on adjoint analysis // Case Studies in Thermal Engineering.—2022.—Vol. 40.—P. 1–16. DOI: 10.1016/j.csite.2022.102471.
29. *Ito K., Kunisch K.* Lagrange Multiplier Approach To Variational Problems and Applications.—SIAM: 2008.—341 p. DOI: 10.2307/40590422
30. *Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A.* On reconstruction of thermalphysic characteristics of functionally graded hollow cylinder// Applied Mathematical Modelling.—2016.—Vol. 40, № 4.—P. 2711–2719. DOI: 10.1016/j.apm.2015.09.078.

*Статья поступила 19 апреля 2024 г.*

Ватульян Александр Ованесович
Южный федеральный университет,
*заведующий кафедрой теории упругости*
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: aovatulyan@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0003-0444-4496

Нестеров Сергей Анатольевич
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
*старший научный сотрудник отдела дифференц. уравнений*
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: 1079@list.ru
https://orcid.org/0000-0003-3780-5104

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2024, Volume 26, Issue 3, P. 33–46*

# SOME ANALYTICAL SOLUTIONS IN PROBLEMS OF OPTIMIZATION OF VARIABLE THERMAL CONDUCTIVITY COEFFICIENT

A. O. Vatulyan[1] and S. A. Nesterov[2]

[1] Southern Federal University,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: aovatulyan@sfedu.ru, 1079@list.ru

**Abstract.** New formulations and solutions to problems of optimization of a variable thermal conductivity coefficient for an inhomogeneous pipe and a flat wall with mixed boundary conditions are presented. The quality functionals are either the average temperature or the maximum temperature, and as a limitation – either the condition of constancy of the integral thermal conductivity coefficient, or a priori information about the change in the thermal conductivity coefficient in a known range. To solve problems for a pipe, two optimization methods are used: 1) a variational approach based on the introduction of conjugate functions and the construction of an extended Lagrange functional; 2) Pontryagin's maximum principle. To solve the optimization problem for a flat wall under the assumption of weak material inhomogeneity, the expansion method in terms of a small physical parameter is used. As the fourth problem, optimization of the variable thermal conductivity coefficient of a non-uniform flat wall with boundary conditions of the first kind is considered. The solution to a singular optimization problem is found among broken extremals. Using specific examples, a comparison was made of the values of minimized functionals for bodies with a constant thermal conductivity coefficient and an optimal variable coefficient. The gain from optimization is estimated.

**Keywords:** optimization, thermal conductivity coefficient, functionally graded material, flat wall, pipe, Lagrange variational method, Pontryagin's maximum principle, small parameter expansion method, singular problem.

**AMS Subject Classification:** 80M30, 80M50.

**For citation:** *Vatulyan A. O. and Nesterov S. A.* Some Analytical Solutions in Problems of Optimization of Variable Thermal Conductivity Coefficient, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 3, pp. 33–46 (in Russian). DOI: 10.46698/v9056-4395-2233-f.

## References

1. *Lee, W. Y., Stinton, D. P., Bernardt, C. C., Erdogan, F, Lee, Y. D. and Mutasin, Z.* Concept of Functionally Graded Materials for Advanced Thermal Barrier Coatings Applications, *Journal of American Ceramic Society*, 1996, vol. 19, pp. 3003–3012. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1996.tb08070.x.
2. *Wetherhold, R. C., Seelman, S. and Wang, J.* The Use of Functionally Graded Materials to Eliminated or Control Thermal Deformation, *Composites Science and Technology*, 1996, no. 56, pp. 1099–1104. DOI: 10.1016/0266-3538(96)00075-9.
3. *Mathew, J. and Krishnan, S.* A Review on Transient Thermal Management of Electronic Devices, *Journal of Electronic Packaging*, 2022, vol. 144 (1), DOI: 10.1115/1.4050002.
4. *Bejan, A.* Constructal-Theory Network of Conducting Paths for Cooling a Heat Generating Volume, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1997, vol. 40, no. 4, pp. 799–816. DOI: 10.1016/0017-9310(96)00175-5.
5. *Hua, Y.-C., Zhao, T. and Guo, Z.-Y.* Transient Thermal Conduction Optimization for Solid Sensible Heat Thermal Energy Storage Modules by the Monte Carlo Method, *Energy*, 2017, vol. 133, pp. 338–347. DOI: 10.1016/j.energy.2017.05.073.
6. *Chen, K., Wang, S. and Song, M.* Optimization of Heat Source Distribution for Two-Dimensional Heat Conduction Using Bionic Method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, vol. 93, pp. 108–117.

7. *Birman, V. and Byrd, L. W.* Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures, *Applied Mechanics Reviews*, 2007, vol. 60, no. 5, pp. 195–216. DOI: 10.1115/1.2777164.
8. *Suresh, S. and Mortensen, A. Fundamentals of Functionally Graded Materials*, London, Cambridge Publication, 1998, 165 p. DOI: 10.1016/S1369-7021(98)80023.
9. *Bykov Yu. V., Egorov S. V., Eremeev A. G. and at all.* Fabrication of Metal-Ceramic Functionally Graded Materials by Microwave Sintering, *Fizika i khimiya obrabotki materialov* [Physics and Chemistry of Materials Treatment], 2011, no. 4, pp. 52–61 (in Russian).
10. *Gururaja, U., Shrikantha, R. S. and Gangadharan, K. V.* Functionally Graded Composite Materials: An Overview, *Procedia Matherials Science*, 2014, vol. 5, pp. 1291–1299. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.07.442.
11. *Dirker, J. and Meyer, J. P.* Topology Optimization for an Internal Heat-Conduction Cooling Scheme in a Square Domain for High Heat Flux Applications, *Journal of Heat Transfer*, 2013, vol. 135 (11). DOI: 10.1115/1.4024615.
12. *Cheng, C. H. and Chen, Y. F.* Topology Optimization of Heat Conduction Paths by a Non-Constrained Volume-of-Solid Function Method, *International Journal of Thermal Sciences*, 2014, vol. 78, pp. 16–25. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2013.11.011.
13. *Dede, E. M., Joshi, S. N. and Zhou, F.* Topology Optimization, Additive Layer Manufacturing, and Experimental Testing of an Air-Cooled Heat Sink, *Journal of Mechanical Design*, 2015, vol. 137 (11). DOI: 10.1115/1.4030989.
14. *Gersborg-Hansen, A., Bendsoe, M. P. and Sigmund, O.* Topology Optimization of Heat Conduction Problems Using the Finite Volume Method, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2006, vol. 31 (4), pp. 251–259. DOI: 10.1007/s00158-005-0584-3.
15. *Dbouk, T.* A Review About the Engineering Design of Optimal Heat Transfer Systems Using Topology Optimization, *Applied Thermal Engineering*, 2017, vol. 112, pp. 841–854. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2016.10.134.
16. *Yongcun, Z., Shutian, L. and Heting, Q.* Design of the Heat Conduction Structure Based on the Topology Optimization, *Developments in Heat Transfer, Dr. Marco Aurelio Dos Santos Bernardes (Ed.)*, 2011, pp. 523–536. DOI: 10.5772/20060.
17. *Banichuk, N. V. Vvedeniye v optimizatsiyu konstruktsiy* [Introduction to Optimization of Structures], Moscow, Nauka, 1986, 304 p. (in Russian).
18. *Tong, Z.-X., Li, M.-J., Yan, J.-J. and Tao, W.-Q.* Optimizing Thermal Conductivity Distribution for Heat Conduction Problems with Different Optimization Objectives, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2018, vol. 119, pp. 343–354. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.11.108.
19. *Bratus, A. C. and Kartvelishvili, V. M.* Approximate Analitycal Solutions in Problems of Optimizing Stability and Vibration Frequencies of Elastic Thin-Walled Structure, *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1981, no. 6, p. 119–139 (in Russian).
20. *Sarkisyan, V. S., Gukasyan, G. M. and Grigoryan, A. A.* Optimal Design of a Circular Plate with Rectilinear Anisotropy, *Journal of Mathematical Sciences*, 2001, vol. 104, p. 1569–1574. DOI: 10.1023/A:1011300122949.
21. *Sarkisyan, V. S. Nekotoryye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti anizotropnogo tela* [Some Problems of the Mathematical Theory of Elasticity of an Anisotropic Body], Yerevan, YerSU Publishing House, 1976, 536 p. (in Russian).
22. *Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V. and Mishchenko E. F. The Mathematical Theory of Optimal Processes*, New York, Interscience Publishers, 1962, 376 p.
23. *Warner, W. H.* Optimal Design Problems for Elastic Bodies by Use of the Maximum Principle, *Journal of Elasticity*, 2000, vol. 59, pp. 357–367. DOI: 10.1023/A:1011055305523.
24. *Alekhin, V. V.* Design of a Cross-Laminated Cantilever of Minimum Mass with a Limitation on Maximum Deflection, *Applied Mechanics and Technical Physics*, 2007, vol. 48, no. 4, p. 104–110 (in Russian).
25. *Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. Koeffitsiyentnyye obratnyye zadachi termomekhaniki* [Coefficient Inverse Problems of Thermomechanics. 2nd ed.], Rostov-on-Don, Taganrog, Southern Federal University Press, 2022, 178 p. (in Russian).
26. *Meric, R. A.* Optimization of thermal Conductivity Coefficients of Isotropic and Orthotropic Bodies, *Heat Transfer*, 1985, no. 3, pp. 1–6 (in Russian).
27. *Meric, R. A.* Material and Load Optimization by the Adjoint Variable Method, *Trans. ASME. Journal of Heat Transfer*, 1987, vol. 109, no. 3, pp. 782–784.
28. *Tian, Z., Xuan, W. and Zeng-Yuan G.* Optimal Thermal Conductivity Design for the Volume-to-Point Heat Conduction Problem Based on Adjoint Analysis, *Case Studies in Thermal Engineering*, 2022, vol. 40, pp. 1–16. DOI: 10.1016/j.csite.2022.102471.

29. *Ito, K. and Kunisch, K. Lagrange Multiplier Approach To Variational Problems and Applications*, SIAM, 2008, 341 p. DOI: 10.2307/40590422.
30. *Nedin, R., Nesterov S. and Vatulyan, A.* On Reconstruction of Thermalphysic Characteristics of Functionally Graded Hollow Cylinder, *Applied Mathematical Modelling*, 2016, vol. 40, no. 4, pp. 2711–2719. DOI: 10.1016/j.apm.2015.09.078.

*Received April 19, 2024*

Alexander O. Vatulyan
Southern Federal University,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
*Head of the Department of Theory of Elasticity*
E-mail: aovatulyan@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0003-0444-4496

Sergey A. Nesterov
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz, 362025, Russia,
*Senior Researcher of the Department of Differential Equations*
E-mail: 1079@list.ru
https://orcid.org/0000-0003-3780-5104