Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 3, С. 47–55

УДК 519.17
DOI 10.46698/x0578-3097-1488-l

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}^{\#}$

М. М. Исакова[1], А. А. Махнев[2], Минчжу Чень[3]

[1] Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х. М. Бербекова,
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173;
[2] Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
Россия, 620099, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
[3] Хайнаньский университет,
Китай, 570228, Хайкоу, пр-т Ренмин, 58

E-mail: isakova2206@mail.ru, makhnev@imm.uran.ru, 994194@hainanu.edu.cn

Аннотация. Для множества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается подмножество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Имеется ровно 7 допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов диаметра 3 и степени 44. Ранее было доказано, что для пяти из них графы не существуют. В данной работе найдены возможные автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$. Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа. Следствием основного результата является следующее: пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$, и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на вершинах графа Γ; тогда G действует интранзитивно на дугах графа Γ.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, подграф неподвижных точек, дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

AMS Subject Classification: 05B05, 20D05.

Образец цитирования: *Исакова М. М., Махнев А. А., Минчжу Чень.* Об автоморфизмах графа с массивом пересечений $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$ // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 3.—С. 47–55. DOI: 10.46698/x0578-3097-1488-l.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Если Γ — граф диаметра d и $i \leqslant d$, то через Γ_i обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

[#] Работа выполнена при поддержке Естественно-научного фонда Китая, проект № 12171126, и граната Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

© 2024 Исакова М. М., Махнев А. А., Минчжу Чень

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.*

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$ [1]. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным,* если для любого $i \in \{0, \dots, d\}$ и для любых двух пар вершин (u, w) и (y, z) с $d(u, w) = d(y, z) = i$ найдется автоморфизм g графа Γ такой, что $(u^g, w^g) = (y, z)$.

Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается подмножество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X.

Имеется точно 7 допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов степени 44. В [2] доказано, что для пяти из них графы не существуют. В данной работе найдены возможные автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$.

Теорема 1. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5\}$, Ω *не является кликой и верно одно из утверждений:*

(1) Ω — *пустой граф и либо*

(*i*) $p = 5$, $\alpha_0(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 5t$, $\alpha_2(g) = 375 - 15s - 5t$ *и* $\alpha_3(g) = 15s$, *либо*

(*ii*) $p = 3$, $\alpha_0(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 15t$, $\alpha_2(g) = 375 - 15s - 15t$ *и* $\alpha_3(g) = 15s$, *причем* $t + s - 7 = 4l$ *и* $t - s - 1$ *делится на 4, а в случае* $p = 5$ *имеем* $t + s = 15, 35, 55, 75$;

(2) $p = 5$, Ω — *непустой граф,* $\alpha_0(g) = 150$, $\alpha_1(g) = 5t$, $\alpha_3(g) = 75s'$ *и верно одно из утверждений:*

(*i*) $s' = 2$, $\alpha_2(g) = 5(15 - t)$ *и* $t = 5, 13$;

(*ii*) $s' = 1$, $\alpha_2(g) = 5(30 - t)$ *и* $t = 8, 16, 24$;

(*iii*) $s' = 0$, $\alpha_2(g) = 5(45 - t)$ *и* $t = 3, 11, 19, 27, 35, 43$.

Следствие 1. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$, *и группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на вершинах графа* Γ. *Тогда* G *действует интранзитивно на дугах графа* Γ.

1. Вспомогательные результаты

В этом параграфе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы.

Лемма 1.1. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с целыми собственными значениями,* g — *автоморфизм графа* Γ *простого порядка* p, *и* χ — *характер проекции мономиального представления на подпространство размерности* m *собственных векторов матрицы смежности графа, отвечающих неглавному собственному значению. Тогда* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого* l, *не кратного* p *и* $m - \chi(g)$, *делится на* p.

$\triangleleft$ Это лемма 2 из [3]. $\triangleright$

Лемма 1.2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$. *Тогда* Γ *имеет спектр* $\{44^1, 14^{55}, -1^{220}, -6^{99}\}$, *для чисел пересечения графа* Γ *верны равенства:*

$p^1_{11} = 13$, $p^1_{21} = 30$, $p^1_{32} = 54$, $p^1_{22} = 180$, $p^1_{33} = 12$,

$p^2_{11} = 5$, $p^2_{12} = 30$, $p^2_{13} = 9$, $p^2_{32} = 45$, $p^2_{22} = 188$, $p^2_{33} = 12$,

$p^3_{12} = 3$, $p^3_{22} = 180$, $p^3_{13} = 8$, $p^3_{23} = 48$, $p^3_{33} = 9$;

и Γ *имеет дуальную матрицу собственных значений*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 55 & \frac{35}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{15}{2} \\ 220 & -5 & -5 & 20 \\ 99 & -\frac{27}{2} & \frac{21}{4} & -\frac{27}{2} \end{pmatrix}.$$

$\lhd$ Прямые вычисления. $\rhd$

Ввиду границы Дельсарта, порядок клики в Γ не больше 8. По лемме 1.2 граф Γ_3 сильно регулярен с параметрами $(375, 66, 9, 12)$ и спектром 66^1, 6^{220}, -9^{154}, граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(375, 264, 188, 180)$. Ввиду границы Дельсарта, порядок клики в Γ_3 не больше 8.

2. Характеры конечных групп и автоморфизмы дистанционно регулярных графов

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [4]. При этом, граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathscr{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geqslant 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p^l_{ij} A_k$ для чисел пересечений p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, k) стоит p^k_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$, соответственно, называются первой и второй (дуальной) матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = |X|I$.

Предложение 2.1. *Пусть* u_j *и* w_j *— левый и правый собственные векторы матрицы* P_1, *отвечающие собственному значению* $p_1(j)$ *и имеющие первую координату* 1. *Тогда кратность* m_j *собственного значения* $p_1(j)$ *равна* $v/\langle u_j, w_j\rangle$.

$\lhd$ См. теорему 17.12 из [5]. $\rhd$

Фактически, из доказательства теоремы 17.12 из [5] следует, что w_j являются столбцами матрицы P, а $m_j u_j$ являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности A графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным.

Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [4, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда $a_1 = 13$.

Лемма 2.1. *Пусть $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на собственное подпространство размерности 55, χ_2 — характер проекции представления ψ на собственное подпространство размерности 220. Тогда*

$$\chi_1(g) = \frac{15\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g)}{60} - \frac{5}{4},$$

$$\chi_2(g) = \frac{9\alpha_0(g) + \alpha_3(g)}{15} - 5.$$

◁ По лемме 1.1 имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 55 & \frac{35}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{15}{2} \\ 220 & -5 & -5 & 20 \\ 99 & -\frac{27}{2} & \frac{21}{4} & -\frac{27}{2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\chi_1(g) = \frac{1}{375\big(55\alpha_0(g) + \frac{35\alpha_1(g)}{2} - \frac{5\alpha_2(g)}{4} - \frac{15\alpha_3(g)}{2}\big)}.$$

Так как $\alpha_2(g) = 375 - \alpha_0(g) - \alpha_1 - \alpha_3(g)$, то $\chi_1(g) = (15\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/60 - 5/4$.

Далее,

$$\chi_2(g) = \frac{1}{375(220\alpha_0(g) - 5\alpha_1(g) - 5\alpha_2(g) + 20\alpha_3(g))}.$$

Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 375 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (9\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/15 - 5$. Лемма доказана. ▷

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(375, 66, 9, 12)$ и спектром 66^1, 6^{220}, -9^{154}, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Лемма 2.2. *Пусть $g \in G$, φ — характер проекции представления ψ на собственное подпространство размерности 220. Тогда*

$$\varphi(g) = \frac{5\alpha_0(g) + \alpha_1'(g)}{15} + 5.$$

◁ По лемме 1.1 имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 220 & 20 & -5 \\ 154 & -21 & 4 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\varphi(g) = 1/375(220\alpha_0(g) + 20\alpha_1(g) - 5\alpha_2(g))$. Так как $\alpha_2(g) = 375 - \alpha_0(g) - \alpha_1$, то $\varphi(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/15 - 5$. Лемма доказана. $\rhd$

Если $\Gamma = \Gamma_3$ для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$, то $\alpha'_1(g) = \alpha_3(g)$.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(375, 110, 25, 35)$ и спектром 110^1, 5^{275}, 15^{-99}, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Лемма 2.3. *Пусть* $g \in G$, ω *– характер проекции представления* ψ *на собственное подпространство размерности* 99. *Тогда*

$$\omega(g) = \frac{5\alpha_0(g) - \alpha''_1(g)}{20} + \frac{21}{4}.$$

$\lhd$ По лемме 1.1 имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 275 & \frac{25}{2} & -\frac{25}{4} \\ 99 & -\frac{27}{2} & \frac{21}{4} \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\omega(g) = 1/375(99\alpha_0(g) - 27\alpha_1(g)/2 + 21\alpha_2(g)/4$. Так как $\alpha_2(g) = 375 - \alpha_0(g) - \alpha_1$, то $\omega(g)(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/20 + 21/4$. Лемма доказана. $\rhd$

Если $\Gamma = \overline{\Gamma}_2$ для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$, то $\alpha''_1(g) = \alpha_1(g) + \alpha_3(g)$.

3. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$

В этом параграфе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$, g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Из равенств

$$\chi_1(g) = \frac{15\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g)}{60} - \frac{5}{4}, \quad \chi_2(g) = \frac{9\alpha_0(g) + \alpha_3(g)}{15} - 5,$$

$$\varphi(g) = \frac{5\alpha_0(g) + \alpha_3(g)}{15} + 5, \quad \omega(g) = \frac{5\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)}{20} + \frac{21}{4}$$

следует, что $\alpha_3(g)$ делится на 5, $9\alpha_0(g) + \alpha_3(g)$ делится на 15, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g)$ делится на 5, $3\alpha_1(g) - \alpha_3(g)$ делится на 15, $220 - \varphi(g)$ и $99 - \omega(g)$ делятся на p.

Таким образом, $\alpha_3(g) = 15s$, $\alpha_0(g) = 5r$, $\alpha_1(g) = 5t$ и $\alpha_2(g) = 375 - 15s - 5r - 5t$.

Лемма 3.1. *Если* Ω *является пустым графом, то либо*

(1) $p = 5$, $\alpha_3(g) = 15s$, $\alpha_0(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 5t$ *и* $\alpha_2(g) = 375 - 15s - 5t$, *либо*

(2) $p = 3$, $\alpha_3(g) = 15s$, $\alpha_0(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 15t$ *и* $\alpha_2(g) = 375 - 15s - 15t$.

Далее, $t+s-7 = 4l$ *и* $t-s-1$ *делится на 4, а в случае* $p = 5$ *имеем* $t+s = 15, 35, 55, 75$.

$\lhd$ Так как $375 = 3 \cdot 125$, то $p \in \{3, 5\}$.

Из равенств $\alpha_3(g) = 15s$, $\alpha_0(g) = 5r$, $\alpha_1(g) = 5t$ и $\alpha_2(g) = 375 - 15s - 5r - 5t$ следуют утверждения (1)–(2).

Имеем $\varphi(g) = \alpha_3(g)/15 + 5 = s + 5$, $\omega(g) = -3(t + s - 7)/4$ и $t + s - 7 = 4l$, $\chi_1(g) = (t - s - 5)/4$ и $t - s - 1$ делится на 4.

Если $p = 5$, то по лемме 1.2 число $3(33 + l)$ делится на 5. Отсюда $l = 2, 7, 12, 17$, $t + s = 15, 35, 55, 75$. $\rhd$

Лемма 3.2. *Верно неравенство* $p \leqslant 11$.

$\lhd$ Пусть $p \geqslant 13$. Тогда g фиксирует две смежные вершины d, e. Если $p \geqslant 17$, то g поточечно фиксирует $[d] \cap [e]$ и $|[d] \cap [e]| \geqslant 17$. Противоречие с тем, что $a_1 = 13$.

Значит $p = 13$. Пусть $u \in [e] - \Omega$. Из действия g на $[e]$ следует, что g фиксирует не менее пяти вершин из $[e]$. Так как $c_2 = 5$, то подграф $[e] \cap \Omega$ является кликой, $[d] \cap [e]$ содержит не менее 4 вершин из $[e] \cap \Omega$ и 13 вершин из $u^{\langle g \rangle}$, противоречие. $\rhd$

Ввиду леммы 3.2 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

Лемма 3.3. Ω *не является кликой.*

$\lhd$ Пусть Ω является m кликой. Так как $\alpha_0(g)$ делится на 5, то $m = 5$. Для различных вершин $d, e \in \Omega$ подграф $[d] \cap [e]$ содержит $m - 2 = 3$ вершины из Ω и еще $15 - m = 10$ вершин. Отсюда p делит 10, поэтому $p = 2{,}5$.

Имеем $\alpha_3(g) = 15s$, $\alpha_0(g) = 5$, $\alpha_1(g) = 5t$ и $\alpha_2(g) = 375 - 15s - 5 - 5t$.

Из равенства $\omega(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g))/20 + 21/4$ следует, что $\omega(g) = (1 - t - 3s + 21)/4$, поэтому $t + 3s$ сравнимо с 2 по модулю 4. Аналогично, $\chi_1(g) = (15\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/60 - 5/4$ влечет $\chi_1(g) = (5 + t - s - 5)/4$ и $t - s$ делится на 4, противоречие. Лемма доказана. $\rhd$

Лемма 3.4. *Верно неравенство* $p \leqslant 5$.

$\lhd$ Пусть $p = 11$. Тогда $\alpha_0(g) = 5r$, $375 - \alpha_0(g)$ делится на 11, поэтому $5r - 1$ делится на 11, $r = 11r' + 9$ и $\alpha_0(g) = 55r' + 45$. Далее, g фиксирует некоторую вершину e.

Допустим, что g фиксирует вершину d из $[e]$. Из действия g на $[e]$ следует, что g фиксирует не менее 11 вершин из $[e]$, причем $[e] \cap \Omega$ является кликой, противоречие.

Значит, g не фиксирует ребер из Ω, и Ω является вполне регулярным графом с параметрами $(v', k', 0, 5)$, $k' = 11l$, $k'(k' - 1) = 5k_2'$. Отсюда $k' = 11$, $k_2' = 22$ и $v' \geqslant 34$. Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $34 \cdot 33 = 1122$, противоречие с тем, что вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с одной вершиной из Ω.

Пусть $p = 7$. Тогда $\alpha_0(g) = 5r$, $375 - \alpha_0(g)$ делится на 7, поэтому $r + 2$ делится на 7, $r = 7r' - 2$ и $\alpha_0(g) = 35r' - 10$.

Напомним, что $\alpha_3(g) = 105s'$, $\alpha_1(g) = 35t'$ и $\alpha_2(g) = 385 - 35r' - 105s' - 35t'$.

Из равенства $\varphi(g) = (7r' - 2)/3 + 7s' + 5$ следует, что $220 - \varphi(g) = 215 - (7r' - 2)/3 - 7s'$ делится на 7, противоречие. $\rhd$

Лемма 3.5. *Если* $p = 5$ *и* $e \in \Omega$, *то* $\alpha_0(g) = 150$, $\alpha_1(g) = 5t$, $\alpha_3(g) = 75s'$ *и верно одно из утверждений:*

(1) $s' = 2$, $\alpha_2(g) = 5(15 - t)$ *и* $t = 5, 13$*;*

(2) $s' = 1$, $\alpha_2(g) = 5(30 - t)$ *и* $t = 8, 16, 24$*;*

(3) $s' = 0$, $\alpha_2(g) = 5(45 - t)$ *и* $t = 3, 11, 19, 27, 35, 43$.

$\lhd$ Пусть $p = 5$ и $e \in \Omega$. Тогда $\alpha_0(g) = 5r$, $\alpha_3(g) = 15s$, $\alpha_1(g) = 5t$ и $\alpha_2(g) = 375 - 15s - 5r - 5t$.

Из действия g на $[e]$ следует, что g фиксирует не менее 4 вершин из $[e]$. Если $d \in [e] \cap \Omega$, то g фиксирует не менее 3 вершин из $[d] \cap [e]$.

Из равенства $\varphi(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/15 + 5$ следует, что $\alpha_0(g) = 15r'$ и $215 - 5r' - s$ делится на 5. Отсюда $s = 5s'$. Аналогично, $\chi_2(g) = 9r' + s - 5$ и $225 - 9r' - s$ делится на 5. Поэтому $r' = 5r''$ и $\alpha_0(g) = 75r''$.

Далее, равенство $\omega(g) = (75r'' - t - 15s' + 21)/4$ влечет то, что $75r'' - t - 15s' + 21 = 4l$, а равенство $\chi_1(g) = (75r'' + t - 5s' - 5)/4$ влечет то, что $3r'' + t - s' - 1$ делится на 4.

По лемме 1.2 числа $99 - l$ и $55 - l + (2t - 10s' + 26)/4$ делятся на 4. Отсюда, $t + 3s' - 3$ делится на 8.

В случае $r'' = 1$ число $t + 15s'$ делится на 4, противоречие. В случае $r'' = 2$ имеем $171 - t - 15s' = 4l$ и число $t + 15s' + 1$ делится на 4. В случае $r'' = 3$ имеем $246 - t - 15s' = 4l$ и число $t + 15s'$ сравнимо с 2 по модулю 4, снова противоречие.

Итак, $\alpha_0(g) = 150$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 5(t + 15s')$ и $\alpha_2(g) = 5(45 - 15s' - t)$. В случае $s' = 3$ имеем $t = 0$ и $t + 3s' - 3$ не делится на 8. В случае $s' = 2$ имеем $\alpha_2(g) = 5(15 - t)$ и $t = 5, 13$. В случае $s' = 1$ имеем $\alpha_2(g) = 5(30 - t)$ и $t = 8, 16, 24$. Наконец, в случае $s' = 0$ имеем $\alpha_2(g) = 5(45 - t)$ и $t = 3, 11, 19, 27, 35, 43$. Лемма доказана. ▷

Теорема 1 доказана.

Литература

1. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs.—Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1989.
2. *Чень Минчжу, Махнев А. А., Климов В. С.* О дистанционно регулярных графах диаметра 3 и степени 44 // Молодежная конф. ИММ УрО РАН. Тез. докл.—Екатеринбург, 2024. С. 1132–1134.
3. *Гаврилюк А. Л., Махнев А. А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. РАН.—2010.—Т. 432, № 5.—С. 512–515.
4. *Cameron P. J.* Permutation Groups. London Math. Soc. Student Texts.—Vol. 45.—Cambridge Univ. Press, 1999. DOI: 10.1017/CBO9780511623677.
5. *Cameron P. J., van Lint J.* Graphs, Codes, Designs and Their Links. London Math. Soc. Student Texts.—Vol. 22.—Cambridge Univ. Press, 1991.

Статья поступила 26 июня 2024 г.

Исакова Мариана Малиловна
Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х. М. Бербекова,
доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: `isakova2206@mail.ru`

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 620099, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: `makhnev@imm.uran.ru`

Минчжу Чень
Хайнаньский университет,
доцент
КИТАЙ, 570228, Хайкоу, пр-т Ренмин, 58
E-mail: `994194@hainanu.edu.cn`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 3, P. 47–55

ON AUTOMORPHISMS OF A GRAPH WITH AN INTERSECTION ARRAY $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$

Isakova, M. M.[1], Makhnev, A. A.[2] and Chen Mingzhu[3]

[1] Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, 173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia;
[2] N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, 16 S. Kovalevskaya St., Ekaterinburg 620990, Russia;
[3] Hainan University, 58 Renmin Ave., Haikou 570228, China

E-mail: isakova2206@mail.ru, makhnev@imm.uran.ru, 994194@hainanu.edu.cn

Abstract. For the set X automorphisms of the graph Γ let $\mathrm{Fix}(X)$ be a set of all vertices of Γ fixed by any automorphism from X. There are 7 feasible intersection arrays of distance regular graphs with diameter 3 and degree 44. Early it was proved that for fifth of them graphs do not exist. In this paper it is founded possible automorphisms of distance regular graph with intersection array $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$. The proof of the theorem is based on Higman's method of working with automorphisms of a distance regular graph. The consequence of the main result is is the following: Let Γ be a distance regular graph with intersection array $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$ and the group $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ acts vertex-transitively; then G acts intransitively on the set arcs of Γ.

Keywords: strongly regular graph, fixed point subgraph, distance regular graph, automorphism.

AMS Subject Classification: 05B05, 20D05.

For citation: *Isakova, M. M., Makhnev, A. A. and Chen Mingzhu.* On Automorphisms of a Graph with an Intersection Array $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 3, pp. 47–55 (in Russian). DOI: 10.46698/x0578-3097-1488-l.

References

1. *Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A. Distance-Regular Graphs*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1989.
2. *Chen Mingzhu, Makhnev, A. A. and Klimov, V. S.* On Distance Regular Graphs of Diameter 3 and Degrees 44, *Molodezhnaya konferenciya IMM UrO RAN. Tezisy dokladov* [Youth Conference of the Institute of Mechanics and Mathematics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Abstracts of Reports], Ekaterinburg, 2024, pp. 1132–1134 (in Russian).
3. *Gavrilyuk, A. L. and Makhnev, A. A.* On Automorphisms of a Distance-Regular Graph with Intersection Array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, *Doklady Rossiyskoy akademii nauk* [Reports of the Russian Academy of Sciences], 2010, vol. 432, no. 5, pp. 512–515 (in Russian).
4. *Cameron P. J. Permutation Groups*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 45, Cambridge University Press, 1999. DOI: 10.1017/CBO9780511623677.
5. *Cameron, P. J. and van Lint, J. Permutation Groups*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 22, Cambridge University Press, 1991.

Received July 26, 2024

Mariana M. Isakova
Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov,
173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia,
Associate Professor of the Department of Algebra and Differential Equations
E-mail: isakova2206@mail.ru

Alexander A. Makhnev
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaya St., Ekaterinburg 620990, Russia,
Principal Researcher
E-mail: makhnev@imm.uran.ru
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713

Chen Mingzhu
Hainan University,
58 Renmin Ave., Haikou 570228, China,
Assistant Professor
E-mail: 994194@hainanu.edu.cn