Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 3, С. 65–71

УДК 519.977
DOI 10.46698/w4665-6033-7631-f

О ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ ФИНАНСИРОВАНИИ В МОДЕЛИ «ИНВЕСТИЦИИ–ПОТРЕБЛЕНИЕ»

П. В. Николенко[1], Л. В. Новикова[2]

[1] Ростовский государственный экономический университет (РИНХ),
Россия, 344002, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 69;
[2] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а

E-mail: petr.v.nikolenko@gmail.com, lvnovikova@sfedu.ru

Аннотация. В модели «инвестиции–потребления» темп роста фондовооруженности представляет собой разность между собственными инвестициями и темпом амортизации. Пусть поставлена цель максимально сократить время выхода на заданный уровень фондовооруженности и для достижения этой цели дополнительно выделяются средства заданного объема, которые, однако, вовлекаются в процесс в виде финансового потока ограниченного сверху величиной — предельной способностью к поглощению инвестиций (предполагается, что указанная величина представляет собой гладкую функцию фондовооруженности). Дополнительные средства увеличивают темп роста фондовооруженности на значение финансового потока. Изучается вопрос для какого финансового потока, который выполняет роль управления, время достижения требуемой фондовооруженности минимально. Установлено, что оптимальное управление имеет не более двух точек переключения. Причем если этих точек две, то собственный темп роста фондовооруженности в указанные моменты времени одинаков. Оптимальный финансовый поток устроен следующим образом. Существует пара значений фондовооруженности, между начальным и целевым значениями, такая, что покафондовооруженность меняется от меньшего к большему значению, используются только собственные инвестиции. В остальное время используются дополнительные средства в максимальном возможном темпе. Получены формулы для вычисления указанных значений фондовооруженности.

Ключевые слова: инвестиции, фондовооруженность, производственная функция, коэффициент амортизации, принципа максимума Понтрягина.

AMS Subject Classification: 34H05.

Образец цитирования: *Николенко П. В., Новикова Л. В.* О дополнительном финансировании в модели «инвестиции–потребление» // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 3.—С. 65–71. DOI: 10.46698/w4665-6033-7631-f.

1. Введение

Уравнение динамики фондов в модели «инвестиции–потребление» имеет вид [1, с. 242]

$$\dot{K} = sF(K, L) - \mu K,$$

здесь K — объем основных фондов, L — запас трудовых ресурсов, μ — коэффициент амортизации, $s \in [0; 1]$ — управляющий параметр, F — производственная функция.

Предполагая, что трудовые ресурсы L остаются неизменными, а производственная функция F — линейно-однородна, уравнение динамики перепишем в виде

$$\dot{k} = sF(k,1) - \mu k,$$

где $k = K/L$ — фондовооруженность.

Если рассматривается функционирование системы на достаточно протяженном промежутке времени и поставлена задача выбора $s(t)$, которая обеспечит достижение заданного уровня фондовооруженности и при этом величина потребления за весь промежуток времени окажется максимальной, то оказывается, что [1, с. 247] $s(t) = 1$, пока величина k не достигнет некоторого значения, близкого к $\hat{k}$, где

$$\frac{\partial F}{\partial k}(\hat{k},1) = \mu.$$

Но это означает, что в указанный промежуток времени потребление отсутствует, поскольку темп потребления составляет $(1 - s(t))F = 0$.

Ясно, что это плохо согласуется с предположением о неизменности трудовых ресурсов L.

Вышеизложенное мотивирует следующую постановку задачи.

Пусть требуется от уровня фондовооруженности k_0 выйти на уровень k_1 за кратчайшее время, при этом на указанном промежутке времени величину s считаем фиксированной константой, так что

$$sF(k,1) - \mu k = f(k).$$

Предполагается, что выполняются обычные свойства производственных функций:

$$f'(k) > 0 \ \text{ при } \ k \in [k_0, \hat{k}),$$
$$f'(k) < 0 \ \text{ при } \ k \in (\hat{k}, k_1], \quad f'' < 0$$

(случай $k_1 \leqslant \hat{k}$ мы не излагаем, т. к. ответ в этом случае легко увидеть из нижеизложенного).

К собственным инвестициям могут быть привлечены дополнительно средства S, которые поступают в виде финансового потока $u(t)$, так что

$$\int_0^{t_1} u(t)\,dt = S,$$

где t_1 — момент выхода на фондовооруженность k_1, при этом считаем известной предельную способность к поглощению инвестиций $g(k)$, предполагается что функция g гладкая.

Таким образом, $u(t) \leqslant g(k(t))$, $\dot{k} = f(k) + u$, $k(0) = k_0$, $k(t_1) = k_1$,

$$\int_0^{t_1} u(t)\,dt = S.$$

Требуется определить u так, чтобы за кратчайшее время выйти на фондовооруженность k_1. Будем считать, что

$$S < \int_{k_0}^{k_1} \frac{g(k)}{f(k) + g(k)}\,dk = \tilde{S},$$

Значение $\tilde{S}$ позволяет осуществить дополнительное финансирование в максимальном объеме $g(k)$ на протяжении всего времени изменения k от k_0 до k_1 (см. (7)–(9)).

Родственная задача с другим функционалом качества изучена в работе [2].

2. Задача управления

Вводя обозначения $x_1 = k$, $x_2 = \int_0^t u(\tau)\,d\tau$, запишем нашу задачу как задачу теории управления:

$$\begin{gathered}
\tilde{t}_1 \to \min, \\
\dot{x}_1 = f(x_1) + u, \qquad (1) \\
\dot{x}_2 = u, \\
x_1(0) = x_1^0, \quad x_1(\tilde{t}_1) = x_1^1, \\
x_2(0) = 0, \quad x_2(\tilde{t}_1) = S, \\
b_1(x_1, u) = u - g(x_1) \leqslant 0, \\
b_2(x_1, u) = -u \leqslant 0.
\end{gathered}$$

Согласно принципу максимума Понтрягина для таких задач [3, с. 400], для оптимального процесса (x, u) существуют неотрицательные кусочно-непрерывные функции ρ_1, ρ_2, константа $\psi_0 \leqslant 0$, функции ψ_1, ψ_2 такие, что для функции Понтрягина

$$H = \psi_1(f(x_1) + u) + \psi_2 u$$

выполняются условия:

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} + \rho_1 \frac{\partial b_1}{\partial x_i} + \rho_2 \frac{\partial b_2}{\partial x_i},$$

т. е.

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_1 f'(x_1) - \rho_1 g'(x_1), \quad \dot{\psi}_2 = 0; \qquad (2)$$

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \max_{0 \leqslant v \leqslant g(x(t))} H(\psi(t), x(t), v) = -\psi_0 \geqslant 0.$$

Так как $H = \psi_1 f(x_1) + (\psi_1 + \psi_2)u$, заключаем, что

$$u = \begin{cases} g(x_1), & \text{если } \psi_1 + \psi_2 > 0, \\ 0, & \text{если } \psi_1 + \psi_2 < 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Вектор

$$(\psi_0, \psi_1(\tilde{t}_1), \psi_2(\tilde{t}_1)) \qquad (4)$$

нетривиален; $\rho_i(t) b_i(x(t), u(t)) = 0$, т. е.

$$\rho_1(u - g(x_1)) = 0, \quad \rho_2 u = 0. \qquad (5)$$

$$H_u(\psi(t), x(t), u(t)) = \rho_1(t) b_{1_u}(x(t), u(t)) + \rho_2(t) b_{2_u}(x(t), u(t)),$$

т. е.

$$\psi_1 + \psi_2 = \rho_1 - \rho_2. \qquad (6)$$

Исследуем полученную систему

1) Покажем, что $\psi_2 \neq 0$. Если $\psi_2 = 0$, то в силу предположения о величине S, на некотором интервале $u < g(x_1)$, тогда из формулы (5) следует $\rho_1 = 0$ и из формулы (6) следует $\psi_1 \leqslant 0$ на этом интервале.

В силу неотрицательности H $\psi_1 = 0$, но тогда $\psi_0 = 0$.

В финальный момент

$$H = \psi_1(f(x_1) + u) = 0,$$

следовательно, $\psi_1 = 0$, что противоречит нетривиальности $(\psi_0, \psi_1(\tilde{t}_1), \psi_2)$.

2) Покажем, что ни на каком промежутке функция $\psi_1 + \psi_2$ не является нулем. Если $\psi_1 + \psi_2 = 0$ на некотором промежутке, то $\rho_1 = \rho_2$.

Если $\rho_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$, то из (5) получаем противоречие: $u = g(x_1)$ и $u = 0$. Если $\rho_1 = \rho_2 = 0$, то из (2) получим $\psi_1 = \psi_2 = 0$, но как уже показано $\psi_2 \neq 0$.

3) Рассмотрим вопрос о числе точек переключения управления u.

Пусть t_1, t_2 — точки переключения и $\psi_1 + \psi_2 < 0$ на (t_1, t_2), тогда из (5) получаем: $\rho_1 = 0$ на (t_1, t_2) и

$$\dot{x}_1 = f(x_1), \quad \dot{\psi}_1 = \psi_1 f'(x_1),$$

причем при $t = t_1$ $\dot{\psi}_1 = -\psi_1 f'(x_1) < 0$, а при $t = t_2$

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_1 f'(x_1) > 0 \quad \text{и} \quad \psi_1(t_1) = \psi_1(t_2) = -\psi_2.$$

Следовательно, на концах промежутка f' имеет разные знаки и

$$\hat{x} \in (x_1(t_1), x_1(t_2)).$$

Если $\psi_1 + \psi_2 > 0$ на (t_1, t_2), то из (5) получаем $\rho_2 = 0$, из (6) $\Rightarrow$ $\rho_1 = \psi_1 + \psi_2$, подставляя в (2), имеем

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_1(f'(x_1) + g'(x_1)) - \psi_2 g'(x_1),$$

причем при $t = t_1$ $\dot{\psi}_1 = -\psi_1 f'(x_1) > 0$, при $t = t_2$ $\dot{\psi}_1 = -\psi_1 f'(x_1) < 0$ и, так как $\psi_1(t_1) = \psi_1(t_2)$, f' на концах промежутка имеет разные знаки и

$$\hat{x} \in (x_1(t_1), x_1(t_2)).$$

Далее, так как $f'(x_1(t_2)) < 0$ и $\dot{\psi}_1(t_2) < 0$, получаем, что $\psi_1(t_2) < 0$, но тогда правее точки t_2

$$H = \psi_1 f(x_1) < 0,$$

что противоречит наравенству $-\psi_0 \geqslant 0$.

Таким образом, установлена

Лемма 1. *Оптимальный процесс имеет не более двух точек переключения, причем, если t_1, t_2 — моменты переключения, то на интервале (t_1, t_2) $u = 0$.*

Замечание 1. Если в точках t_1, t_2 ψ_1 не имеет производной, то речь нужно вести об односторонних производных.

Замечание 2. Если имеется один момент переключения t_1, то, как видно из проведенных рассуждений, для управления

$$u = \begin{cases} g(x(t)), & t < t_1, \\ 0, & t > t_1 \end{cases}$$

выполняется неравенство $x(t_1) \leqslant \hat{x}$, для управления

$$u = \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ g(x(t)), & t > t_1 \end{cases}$$

выполняется неравенство $x(t_1) \geqslant \hat{x}$.

4) Обсудим вопрос о значениях фондовооруженности в точках переключения. Для этого потребуется

Лемма 2. *Если (x, ψ) — нестационарное решение системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ \dot{\psi} = -\psi f'(x) \end{cases}$$

и $\psi(t_1) = \psi(t_2)$, то $f(x(t_1)) = f(x(t_2))$.

$\lhd$ Система является гамильтоновой с функцией $H = \psi f(x)$. Поэтому вдоль решения $H = c$ ($\neq 0$, т. к. решение нестационарное), т. е.

$$\psi(t_1) f(x(t_1)) = \psi(t_2) f(x(t_2)).$$

Лемма доказана. $\rhd$

Поскольку фондовооруженность x_1 является монотонной функцией времени, можем сформулировать результат предыдущих пунктов так: управление u является функцией x_1, равной нулю на промежутке $[z_1, z_2]$ и равной $g(x_1)$ вне промежутка.

Возможны варианты:

а) $z_2 = x_1^1$, $z_1 \leqslant \hat{x}$ (см. замечание 2), при этом $z_1 = x_1(t_1)$, $\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)$, $x_1(0) = x_1^0$

$$\int_0^{t_1} g(x_1(t))\, dt = S.$$

Делая подстановку $x_1(t) = y$, $x_1^0 \leqslant y \leqslant z_1$, $dt = \frac{dy}{f(y)+g(y)}$, получаем

$$\int_{x_1^0}^{z_1} \frac{g(y)}{f(y) + g(y)}\, dy = S, \qquad (7)$$

откуда и определяем z_1.

б) $z_1 = x_1^0$, $z_2 \geqslant \hat{x}$, $\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)$, $x_1(t_1) = z_2$

$$\int_{t_1}^{\tilde{t}_1} g(x_1(t))\, dt = S,$$

делая подстановку $x_1(t) = y$, получаем

$$\int_{z_2}^{x_1'} \frac{g(y)}{f(y) + g(y)}\, dy = S, \qquad (8)$$

откуда и определяем z_2.

в) $z_1 < \hat{x} < z_2$, в силу леммы 2 $f(z_1) = f(z_2)$. Если $f(x_1^1) \geqslant f(x_1^0)$, то на промежутке $[\hat{x}, x_1^1]$ определим функцию $\alpha(x)$ со значениями в промежутке $[x_1^0, \hat{x}]$ условием $f(\alpha(x)) = f(x)$ (в случае $f(x_1^1) < f(x_1^0)$ функцию α следует определить на промежутке $[x_1^0, \hat{x}]$).

При этом $\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)$ при $t \leqslant t_1$ и $t \geqslant t_2$, $\dot{x}_1 = f(x_1)$ при $t_1 < t < t_2$ и

$$\int\limits_0^{t_1} g(x_1(t))\,dt + \int\limits_{t_2}^{\tilde{t}_1} g(x_1(t))\,dt = S.$$

Подставляя $x(t) = y$, получаем

$$\int\limits_{x_1^0}^{\alpha(z_2)} \frac{g(y)}{f(y)+g(y)}\,dy + \int\limits_{z_2}^{x_1^1} \frac{g(y)}{f(y)+g(y)}\,dy = S, \qquad (9)$$

откуда и определяем z_2 и z_1.

Таким образом, установлена

Теорема. *При оптимальном процессе динамика фондовооруженности описывается законом*

$$\dot{x} = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [z_1, z_2], \\ f(x) + g(x), & \text{если } x \notin [z_1, z_2], \end{cases}$$

где z_1, z_2 *определяются из формул* (7)–(9).

Выводы: Выделенные средства S следует расходовать максимально быстро на одном или двух промежутках времени, указанные промежутки определяются по значениям фондовооруженности из теоремы.

Литература

1. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику.—М.: Наука, 1984.—293 с.
2. *Николенко П. В., Новикова Л. В.* Об одной экстремальной задаче в модели «инвестиции–потребление» // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 2.—С. 124–129.
3. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления.—М.: Наука, 1969.—408 с.

Статья поступила 6 февраля 2024 г.

Николенко Пётр Вадимович
Ростовский государственный экономический университет (РИНХ),
доцент кафедры прикладной и фундаментальной математики
РОССИЯ, 344002, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 69
E-mail: `petr.v.nikolenko@gmail.com`

Новикова Людмила Вадимовна
Южный федеральный университет,
доцент кафедры дифференциальных и интегральных уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `lvnovikova@sfedu.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 3, P. 65–71

ABOUT ADDITIONAL FINANCING IN THE "INVESTMENT-CONSUMPTION" MODEL

Nikolenko, P. V.[1] and Novikova, L. V.[2]

[1] Rostov State University of Economics,
69 Bolshaya Sadovaya St., Rostov-on-Don 344002, Russia;
[2] Southern Federal University,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

E-mail: petr.v.nikolenko@gmail.com, lvnovikova@sfedu.ru

Abstract. In investment-consumption models, the growth rate of capital-labor ratio is the difference between own investments and the rate of amortization. Let the goal of maximizing the reduction of production time at a given level of capital-labor ratio be set and, to achieve this goal, additional attractive funds of a given volume, which, however, are involved in the process in the form of a financial flow of a limited highest level — the maximum possibility of distributing investments (it is assumed that the specified value represents a smooth financial capital-labor ratio). The functioning of the "investment–consumption" model with a fixed share of investment in the produced value is considered. The process involves additional investments of a total volume S, which arrive in the form of a financial flow, and the rate of receipt of funds is limited from above by the value of the maximum ability to absorb investments. The question of the form of financial flow that will ensure reaching the required level of capital ratio in the shortest possible time is being studied. It turns out that the flow we are looking for is structured as follows. There is a pair of capital-labor ratio values between the initial and target values, such that while the capital-labor ratio changes from a lower to a larger value, only own investments are used. The rest of the time, additional funds are used at the maximum possible rate. Formulas for calculating the indicated values of capital-labor ratio are obtained.

Keywords: investments, capital-labor ratio, production function, depreciation coefficient, Pontryagin's maximum principle.

AMS Subject Classification: 34H05.

For citation: *Nikolenko, P. V. and Novikova, L. V.* About Additional Financing in the "Investment-Consumption" Model, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 3, pp. 65–71 (in Russian). DOI: 10.46698/w4665-6033-7631-f.

References

1. *Ashmanov, S. A. Vvedenie v matematicheskuyu ekonomiku* [Introduction to Mathematical Economics], Moscow, Nauka, 1984, 293 p. (in Russian).
2. *Nikolenko, P. V. and Novikova, L. V.* On an Extremal Problem in "Investment– Consumption" Models, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 2, pp. 124–129 (in Russian). DOI: 10.46698/a7295-9838-4109-h.
3. *Boltyansky, V. G. Mathematical Methods of Optimal Control*, New York, Holt, Rinehart & Winston, 1971, 272 p.

Received February 6, 2024

Peter V. Nikolenko
Rostov State University of Economics,
69 Bolshaya Sadovaya St., Rostov-on-Don 344002, Russia,
Assistant Professor
E-mail: petr.v.nikolenko@gmail.com

Lyudmila V. Novikova
Southern Federal University,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Assistant Professor
E-mail: lvnovikova@sfedu.ru