

УДК 517.53, 517.58

DOI 10.46698/x2987-6171-9353-j

О КРАТНЫХ НУЛЯХ ОДНОЙ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ,
ВАЖНОЙ ДЛЯ ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ[#]

М. Алмохамед¹, И. В. Тихонов², В. Б. Шерстюков²

¹ Московский технический университет связи и информатики,
Россия, Москва, 111024, ул. Авиамоторная, 8а;

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, Москва, 119991, Ленинские горы, 1, стр. 52

E-mail: mssrmtz@gmail.com, ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

*Александрю Васильевичу Абанину
с глубоким уважением от авторов*

Аннотация. Исследуется характер нулей одной целой функции, возникшей в теории линейных обратных задач для дифференциальных уравнений второго порядка. Функция является трансцендентной, элементарной, нецелого порядка $\rho = 1/2$. Она простым образом зависит от комплексного параметра p . Спрашивается, возможны ли значения p , при которых функция имеет кратные нули? В работе найден полный ответ на поставленный вопрос и показано, что существует счетное множество значений $p = p_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, при каждом из которых изучаемая целая функция помимо бесконечного числа простых нулей имеет в точности один нуль кратности два. Дано описание как самого множества таких значений p_n , так и соответствующих кратных нулей. Итоговый результат выражен в терминах корней трансцендентного уравнения $\operatorname{sh} z = z$, анализу которого посвящен заключительный раздел работы. Здесь анонсированы новые «неасимптотические» оценки, применимые ко всем корням уравнения в области $z \neq 0$ и дающие для этих корней весьма точные зоны локализации. Численные расчеты подтверждают наши аналитические выводы. Имеются полезные связи с теорией распределения нулей целых функций типа Миттаг-Леффлера и с некоторыми спектральными задачами из математической физики.

Ключевые слова: целые функции, гиперболические функции, распределение нулей, кратные нули, трансцендентные уравнения, обратные задачи для дифференциальных уравнений.

AMS Subject Classification: 30C15, 30D20, 33E12.

Образец цитирования: Алмохамед М., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. О кратных нулях одной целой функции, важной для теории обратных задач // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 5–20. DOI: 10.46698/x2987-6171-9353-j.

1. Постановка задачи и основной результат

Недавно (см. [1]) при изучении одной обратной задачи для дифференциальных уравнений второго порядка возник вопрос о нулях элементарной целой функции

$$H(\zeta, p) = \frac{2}{\sqrt{\zeta}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\zeta}}{2} + p \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\zeta}}{2} \quad (1)$$

[#]Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики, соглашение № 075-15-2022-284.

© 2025 Алмохамед М., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.

переменной $\zeta \in \mathbb{C}$ с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Помимо общего исследования нулей требовалось узнать, существуют ли значения $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, при которых функция (1) имеет кратные нули. Несмотря на то, что конструкция (1) выглядит однотипной по p , ситуация с кратными нулями оказалась весьма неординарной. Как выяснилось, практически всегда все нули функции (1) являются простыми, однако существует счетное множество исключительных значений $p = p_n$, при каждом из которых функция $H(\zeta, p_n)$ имеет не только бесконечное число простых нулей, но и в точности один кратный нуль, кратности два (зависящий от выбранного значения p_n).

Подробному описанию выявленной картины и посвящена наша статья. Полученные результаты полезны для приложений: они позволяют строить присоединенные элементарные решения обратных задач по типу присоединенных собственных векторов линейных операторов (см. [2]). Краткое изложение наших исследований представлено в предыдущих заметках [3, 4] (см. также статью [1, с. 901–904]).

Охарактеризуем изучаемую функцию. Сразу отметим, что присутствие «двоек» в записи (1) объясняется не только происхождением самой $H(\zeta, p)$ (см. [1, с. 901–902]), но и последующим удобством для вывода основного результата. При $p = 0$ возникающая функция $H(\zeta, 0) = (2/\sqrt{\zeta}) \operatorname{sh}(\sqrt{\zeta}/2)$ имеет лишь простые нули $\zeta_k = -4k^2\pi^2$ с нумерацией $k \in \mathbb{N}$. Этот случай не представляет интереса и потому не обсуждается далее.

Для слагаемых в (1) справедливы степенные разложения

$$\frac{2}{\sqrt{\zeta}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\zeta}}{2} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} \frac{\zeta}{4} + \frac{1}{5!} \left(\frac{\zeta}{4}\right)^2 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left(\frac{\zeta}{4}\right)^m, \quad (2)$$

$$\operatorname{ch} \frac{\sqrt{\zeta}}{2} = 1 + \frac{1}{2!} \frac{\zeta}{4} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\zeta}{4}\right)^2 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left(\frac{\zeta}{4}\right)^m, \quad (3)$$

сходящиеся при всех $\zeta \in \mathbb{C}$. Отсюда следуют представления

$$\frac{2}{\sqrt{\zeta}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\zeta}}{2} = E_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\zeta}{4}, 2\right), \quad \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\zeta}}{2} = E_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\zeta}{4}, 1\right), \quad (4)$$

$$H(\zeta, p) = E_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\zeta}{4}, 2\right) + pE_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\zeta}{4}, 1\right) \quad (5)$$

с функциями Миттаг-Леффлера $E_{1/2}(\lambda, 2)$ и $E_{1/2}(\lambda, 1)$. Напомним (см. [5, 6]), что семейство функций Миттаг-Леффлера переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ с параметрами $\rho > 0$ и $\mu \in \mathbb{C}$ вводится формулой

$$E_{\rho}(\lambda, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{\Gamma(\rho^{-1}m + \mu)}. \quad (6)$$

Значение $\rho > 0$ совпадает с порядком целой функции $E_{\rho}(\lambda, \mu)$ (см. [5, с. 117–118]). Так как $a! = \Gamma(a + 1)$, то все переходы, связывающие формулы (1)–(6), практически очевидны. Вопрос о наличии кратных нулей для функций семейства (6) особо отмечается в монографии [6, гл. 4, раздел 4.4]. С этой точки зрения наши результаты примыкают к тематике [6], представляя полное описание возникающих возможностей для линейного пучка (5), образованного из функций $E_{1/2}(\zeta/4, 2)$ и $E_{1/2}(\zeta/4, 1)$.

Поскольку обе функции (4), а также составленная из них комбинация (5), имеют нецелый порядок $\rho = 1/2$, то, в согласии с общей теорией (см. [7, с. 38–40]), изучаемая функция (1) при любом значении $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ обладает бесконечным множеством нулей.

Степенное разложение для $H(\zeta, p)$ имеет вид

$$H(\zeta, p) = 1 + p + \left(\frac{1}{3!} + \frac{p}{2!}\right) \frac{\zeta}{4} + \left(\frac{1}{5!} + \frac{p}{4!}\right) \left(\frac{\zeta}{4}\right)^2 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 + (2m+1)p}{(2m+1)!} \left(\frac{\zeta}{4}\right)^m.$$

Отсюда ясно, что нуль $\zeta = 0$ возможен лишь при $p = -1$ и является простым, ибо

$$H(\zeta, -1) = -\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) \frac{\zeta}{4} - \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) \left(\frac{\zeta}{4}\right)^2 - \dots = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m}{(2m+1)!} \left(\frac{\zeta}{4}\right)^m$$

с ненулевым коэффициентом при первой степени ζ . Поэтому проблему кратных нулей функции (1) исследуем далее на множестве $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

В формулировке основного результата ключевую роль играют корни уравнения

$$\operatorname{sh} z = z. \quad (7)$$

Подробное описание корней дадим в разделе 4 нашей работы. Сейчас отметим только следующие первичные факты.

1) Трансцендентное уравнение (7) имеет очевидный корень $z = 0$ кратности три, т. е. число $z = 0$ есть нуль кратности три для целой функции $\varphi(z) = \operatorname{sh} z - z$. Это число сразу исключим из рассмотрения.

2) Все остальные корни уравнения (7) являются простыми и образуют счетное множество на комплексной плоскости. Данное множество обладает двумя симметриями — относительно начала координат (так как функция $\varphi(z) = \operatorname{sh} z - z$ является нечетной) и относительно вещественной оси (так как функция $\varphi(z) = \operatorname{sh} z - z$ является вещественной). Запишем это множество в виде

$$\pm z_n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad z_{-n} = \bar{z}_n, \quad (8)$$

где основная серия корней $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ расположена в первом координатном угле¹.

3) Делая в (8) отбор половины корней

$$z_n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad z_{-n} = \bar{z}_n, \quad (9)$$

получаем корни уравнения (7), расположенные в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Именно такое множество (9) используем в формулировке следующего основного результата.

Теорема 1. *Рассматриваем функцию $H(\zeta, p)$ вида (1) с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Определим счетное множество значений*

$$p_n = -\frac{2}{\operatorname{ch} z_n + 1}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad p_{-n} = \bar{p}_n, \quad (10)$$

где z_n — корни вида (9) трансцендентного уравнения (7), попадающие в правую полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Тогда справедливы утверждения:

• при каждом $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, не входящем во множество (10), функция $H(\zeta, p)$ имеет только простые нули;

¹Элементарно проверяется, что уравнение (7) не имеет корней $z \neq 0$ ни на вещественной, ни на мнимой осях. Поэтому основная серия корней $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ попадает строго внутрь первого координатного угла.

• при $p = p_n$ из множества (10) функция $H(\zeta, p_n)$ помимо бесконечного числа простых нулей имеет ровно один кратный нуль с кратностью два, который находится по формуле

$$\zeta = z_n^2, \quad (11)$$

с тем же значением z_n , что и при выборе параметра $p_n = -2/(\operatorname{ch} z_n + 1)$;

• при $n \in \mathbb{N}$ точки p_n из формулы (10) попадают в область

$$-2 < \operatorname{Re} p < 0, \quad 0 < \operatorname{Im} p < 1, \quad (12)$$

причем $p_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Как следствие, ни при каком номере $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ значение $p_n = -2/(\operatorname{ch} z_n + 1)$ не может быть вещественным или чисто мнимым.

Подробному доказательству теоремы 1 посвятим следующий раздел работы.

2. Доказательство основного результата

Итак, для целой функции $H(\zeta, p)$ вида (1) с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ исследуем проблему кратных нулей на множестве $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. В формуле (1) применим замену $\sqrt{\zeta} = z$, эквивалентную подстановке $\zeta = z^2$. Это не повлияет на кратности нужных нулей в согласии со следующим элементарным утверждением.

Лемма 1. Пусть $h(\zeta)$ — целая функция переменной $\zeta \in \mathbb{C}$, отличная от тождественной константы, и $f(z) = h(z^2)$ — соответствующая целая функция переменной $z \in \mathbb{C}$. Число $z = z_0 \neq 0$ является нулем кратности $k \geq 1$ для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда число $\zeta = z_0^2 \neq 0$ является нулем той же кратности $k \geq 1$ для функции $h(\zeta)$. В частности, все нули из множества

$$\Lambda_h \setminus \{0\} = \{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : h(\zeta) = 0\}$$

являются простыми для функции $h(\zeta)$ тогда и только тогда, когда все нули из множества $\Lambda_f \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : f(z) = 0\}$ являются простыми для функции $f(z)$. Наличие одного двукратного нуля в множестве $\Lambda_h \setminus \{0\}$ эквивалентно присутствию двух центральных симметричных двукратных нулей в множестве $\Lambda_f \setminus \{0\}$ и т. п.

◁ Для указанных функций рассматриваем нули из области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ясно, что когда число $z = z_0 \neq 0$ является нулем функции $f(z)$, то $h(z_0^2) = f(z_0) = 0$ и число $\zeta = z_0^2$ является нулем для $h(\zeta)$. Поскольку всякое число $\zeta \neq 0$ представимо в виде $\zeta = z^2$ двумя способами, то каждому нулю $\zeta = \zeta_0 \neq 0$ функции $h(\zeta)$ отвечают два нуля $z = \pm z_0$ функции $f(z)$ таких, что $(\pm z_0)^2 = \zeta_0$.

Обсудим вопрос о совпадении кратностей. Пусть, например, $k \geq 1$ — кратность нуля $\zeta = \zeta_0 = (\pm z_0)^2 \neq 0$ функции $h(\zeta)$. Тогда $h(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^k h_1(\zeta)$, где $h_1(\zeta_0) \neq 0$. Соответственно

$$f(z) = h(z^2) = (z^2 - \zeta_0)^k h_1(z^2) = (z^2 - z_0^2)^k h_1(z^2) = (z - z_0)^k (z + z_0)^k h_1(z^2).$$

Отсюда видно, что оба нуля $z = z_0 \neq 0$ и $z = -z_0 \neq 0$ функции $f(z)$ имеют ту же кратность $k \geq 1$, что и нуль $\zeta = \zeta_0$ функции $h(\zeta)$. Последующие добавления про одновременное отсутствие (или наличие) кратных нулей во множествах $\Lambda_f \setminus \{0\}$ и $\Lambda_h \setminus \{0\}$ есть прямое следствие данного факта. Лемма доказана. ▷

Используем намеченную идею. Сделаем подстановку $\zeta = z^2$ в формуле (1). Получим целую функцию

$$F(z, p) \equiv H(z^2, p) = \frac{2}{z} \operatorname{sh} \left(\frac{z}{2} \right) + p \operatorname{ch} \left(\frac{z}{2} \right) \quad (13)$$

переменной $z \in \mathbb{C}$ с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Две первые производные

$$F'_z(z, p) = -\frac{2}{z^2} \operatorname{sh} \left(\frac{z}{2} \right) + \frac{1}{z} \operatorname{ch} \left(\frac{z}{2} \right) + \frac{p}{2} \operatorname{sh} \left(\frac{z}{2} \right),$$

$$F''_{zz}(z, p) = \frac{4}{z^3} \operatorname{sh} \left(\frac{z}{2} \right) - \frac{2}{z^2} \operatorname{ch} \left(\frac{z}{2} \right) + \frac{1}{2z} \operatorname{sh} \left(\frac{z}{2} \right) + \frac{p}{4} \operatorname{ch} \left(\frac{z}{2} \right)$$

представимы в виде

$$F'_z(z, p) = -\frac{1}{z} F(z, p) + \frac{p+1}{z} \operatorname{ch} \left(\frac{z}{2} \right) + \frac{p}{2} \operatorname{sh} \left(\frac{z}{2} \right), \quad (14)$$

$$F''_{zz}(z, p) = \frac{z^2 + 8}{4z^2} F(z, p) - \frac{2(p+1)}{z^2} \operatorname{ch} \left(\frac{z}{2} \right). \quad (15)$$

Для кратных нулей имеем условия $F(z, p) = F'_z(z, p) = 0$. Отсюда по формулам (13), (14) устанавливаем соотношения

$$\begin{cases} \frac{2}{z} \operatorname{sh} \left(\frac{z}{2} \right) + p \operatorname{ch} \left(\frac{z}{2} \right) = 0, \\ \frac{p+1}{z} \operatorname{ch} \left(\frac{z}{2} \right) + \frac{p}{2} \operatorname{sh} \left(\frac{z}{2} \right) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

требующие отдельного анализа.

Рассмотрим (16) как нелинейную систему относительно переменных $z, p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Если такая пара (z, p) удовлетворяет указанной системе, то

$$\operatorname{ch} \left(\frac{z}{2} \right) \neq 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} \left(\frac{z}{2} \right) \neq 0. \quad (17)$$

Действительно, согласно первому из уравнений (16) величины $\operatorname{ch}(z/2)$ и $\operatorname{sh}(z/2)$ могут обращаться в нуль лишь одновременно. Но это исключено², т. е. (17) выполнено.

Теперь первое уравнение в системе (16) умножим на $\operatorname{ch}(z/2)$, а второе — на $2 \operatorname{sh}(z/2)$. С учетом справедливости (17) такое преобразование будет эквивалентным. Воспользуемся гиперболическими тождествами

$$2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a = \operatorname{sh} 2a, \quad 2 \operatorname{ch}^2 a = \operatorname{ch} 2a + 1, \quad 2 \operatorname{sh}^2 a = \operatorname{ch} 2a - 1,$$

и получим соотношения

$$\begin{cases} \frac{1}{z} \operatorname{sh} z + \frac{p}{2} (\operatorname{ch} z + 1) = 0, \\ \frac{p+1}{z} \operatorname{sh} z + \frac{p}{2} (\operatorname{ch} z - 1) = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \frac{1}{z} \operatorname{sh} z + \frac{p}{2} (\operatorname{ch} z + 1) = 0, \\ \operatorname{sh} z = z. \end{cases}$$

Последний эквивалентный переход выполнен путем вычитания из второго уравнения первого с последующим умножением результата на величину z/p , заведомо отличную от нуля. В итоге все сводится к равенствам

$$p = -\frac{2}{\operatorname{ch} z + 1}, \quad \operatorname{sh} z = z, \quad (18)$$

² Если $\operatorname{ch} a \equiv (e^a + e^{-a})/2 = 0$ и $\operatorname{sh} a \equiv (e^a - e^{-a})/2 = 0$ при некотором $a \in \mathbb{C}$, то $e^a = 0$, что очевидно невозможно.

система которых равносильна системе (16) на множестве $z, p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Пара (z, p) с комплексными ненулевыми компонентами удовлетворяет системе (16) тогда и только тогда, когда та же пара удовлетворяет равенствам (18).

По прежней договоренности множество корней $z \neq 0$ уравнения $\operatorname{sh} z = z$ оформляем в виде (8) с основной серией корней $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, расположенной внутри первого координатного угла. Введенные в (8) обозначения считаем фиксированными.

Как видим, множество \mathfrak{M} искомых решений системы (16) допускает описание:

$$\mathfrak{M} = \{(\pm z_n, p_n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}, \quad p_n = -\frac{2}{\operatorname{ch} z_n + 1} = -\frac{2}{\operatorname{ch}(-z_n) + 1}. \quad (19)$$

Значение p_n находится по первому из уравнений (18) и будет одинаковым для $z = z_n$ и $z = -z_n$. При каждом таком $p = p_n$ функция $F(z, p)$ имеет кратные нули в симметричных точках $z = z_n$ и $z = -z_n$. Покажем, что любое получаемое число p_n вида (19) однозначно соответствует лишь одной паре симметричных корней уравнения $\operatorname{sh} z = z$.

Допустим, что $p_n = p_m$ при некоторых $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Из определения (19) следует, что $\operatorname{ch} z_n = \operatorname{ch} z_m$, и соответственно

$$z_n^2 = \operatorname{sh}^2 z_n = \operatorname{ch}^2 z_n - 1 = \operatorname{ch}^2 z_m - 1 = \operatorname{sh}^2 z_m = z_m^2.$$

Отсюда либо $z_n = z_m$ (и тогда $n = m$), либо $z_n = -z_m$ (и тогда снова $n = m$). В любом из случаев две пары точек $z = \pm z_n$ и $z = \pm z_m$ оказываются совпадающими.

Таким образом, формула (19) дает полное решение проблемы кратных нулей целой функции $F(z, p) \equiv H(z^2, p)$ вида (13). Ответ выражается в терминах корней $\pm z_n$ трансцендентного уравнения (7). Искомые нули возникают лишь при $p = p_n = -2/(\operatorname{ch} z_n + 1)$ с нумерацией $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, причем каждому такому p_n (а все они различны) отвечает единственная пара симметричных кратных нулей $z = \pm z_n$, совпадающих с соответствующими простыми корнями уравнения (7).

Поясним, почему кратность найденных нулей равна в точности двум. Рассмотрим условия

$$F(z, p) = F'_z(z, p) = F''_{zz}(z, p) = 0 \quad (20)$$

для проверки нулей на кратности, большие чем два. Ограничения $z, p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ сохраняем, исходя из логики задачи. На основании (20) и с учетом представления (15) добавим к прежней системе (16) третье соотношение

$$-\frac{2(p+1)}{z^2} \operatorname{ch}\left(\frac{z}{2}\right) = 0. \quad (21)$$

Используя (21) во втором уравнении системы (16), получаем, что $\operatorname{sh}(z/2) = 0$. Затем из первого уравнения той же системы выводим, что $\operatorname{ch}(z/2) = 0$. Как уже отмечалось, такая комбинация равенств невозможна. Поэтому условия (20) не могут выполняться ни при каком $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ни в одной точке $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Нулей кратности больше чем два быть не может.

Итак, вопрос с кратными нулями функции $F(z, p) \equiv H(z^2, p)$ окончательно прояснен. Вернемся теперь к исходной функции $H(\zeta, p)$ с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Напомним, что нуль $\zeta = 0$ возникает лишь при $p = -1$ и является простым, т. е. для нас не интересным. Для описания кратных нулей на множестве $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ воспользуемся леммой 1 и той информацией о нулях функции $F(z, p)$, что заложена в формулу (19).

Как итог, получаем полную картину для кратных нулей функции $H(\zeta, p)$ на основе формул (10), (11) из теоремы 1 с тем пояснением, что среди пары корней $z = \pm z_n$ уравнения (7) достаточно брать корень $z = z_n$, расположенный в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$

(поскольку симметричный корень $z = -z_n$ из полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ приводит к тому же результату в формулах (10), (11)). В этом смысле имеем полное согласование теоремы 1 с леммой 1 и формулой (19) для множества значений (z, p) , связанных с кратными нулями функции $F(z, p)$.

Осталось доказать завершающую часть теоремы 1 про локализацию точек p_n , находимых по формуле (10). Ввиду соотношения $p_{-n} = \bar{p}_n$ ограничимся индексами $n \in \mathbb{N}$.

Преобразуем формулу (10). Воспользуемся тождеством $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ для перехода

$$\operatorname{ch} z_n = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 z_n} = \sqrt{1 + z_n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (22)$$

сделанного на основной серии корней $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ уравнения (7), расположенной в первом координатном угле. В формуле (22) надо брать главную ветвь радикала, отображающую верхнюю полуплоскость в первый координатный угол. Это связано с тем, что подкоренные значения $1 + z_n^2$ при $n \in \mathbb{N}$ очевидно попадают в верхнюю полуплоскость, а числа $\operatorname{ch} z_n$ будут, как раз, в первом координатном угле.

Последнее, кстати, не вполне очевидно и объясняется следующими соображениями. Для $z_n = x_n + iy_n$ при $n \in \mathbb{N}$ запишем стандартные представления

$$\operatorname{ch} z_n = \operatorname{ch} x_n \cos y_n + i \operatorname{sh} x_n \sin y_n, \quad \operatorname{sh} z_n = \operatorname{sh} x_n \cos y_n + i \operatorname{ch} x_n \sin y_n.$$

По условию значения z_n и равные им значения $\operatorname{sh} z_n$ находятся в первом координатном угле. Тем самым

$$x_n > 0, \quad y_n > 0, \quad \operatorname{sh} x_n \cos y_n > 0, \quad \operatorname{ch} x_n \sin y_n > 0. \quad (23)$$

Имеем соотношения $\operatorname{sh} x_n > 0$ (так как $x_n > 0$) и $\operatorname{ch} x_n > 0$ (это, вообще, всегда). Отсюда затем выводим, что $\cos y_n > 0$ и $\sin y_n > 0$ (см. формулу (23)). Но тогда и каждое значение $\operatorname{ch} z_n$ (где $\operatorname{ch} x_n \cos y_n > 0$ и $\operatorname{sh} x_n \sin y_n > 0$) тоже попадает в первый координатный угол, и выбор главной ветви для радикала в (22) обоснован.

Добившись однозначного понимания формулы (22), используем ее в основном соотношении (10) и запишем

$$p_n \equiv -\frac{2}{\operatorname{ch} z_n + 1} = -\frac{2}{\sqrt{1 + z_n^2} + 1} \quad (24)$$

с указанной главной ветвью радикала при всех номерах $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим соответствие (24) как действие на точку z_n конформного отображения

$$p = -\frac{2}{\sqrt{1 + z^2} + 1}, \quad (25)$$

определенного в первом координатном угле $\mathbb{C}_{++} \equiv \{z = x + iy : x > 0, y > 0\}$. При этом отображение z^2 переводит \mathbb{C}_{++} в верхнюю полуплоскость; затем $1 + z^2$ дает ту же полуплоскость, сдвинутую на единицу вправо, и $\sqrt{1 + z^2}$ возвращает ситуацию в первый координатный угол. Следующий шаг $\sqrt{1 + z^2} + 1$ переводит угол \mathbb{C}_{++} в аналогичный угол $1 + \mathbb{C}_{++}$, сдвинутый на единицу вправо.

Обозначим переменную в возникшем сдвинутом угле через λ и применим к множеству $1 + \mathbb{C}_{++}$ отображение $w \equiv u + iv = 1/\lambda = \bar{\lambda}/|\lambda|^2$. Учитывая свойства указанной дробно линейной функции, получим из $1 + \mathbb{C}_{++}$ круговую лунку в четвертом координатном угле,

примыкающую к отрезку $0 \leq u \leq 1$, $v = 0$, и ограниченную снизу линией³

$$v = -\sqrt{u(1-u)}, \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (26)$$

Минимум в выражении (26) приходится на точку $u = 1/2$, $v = -1/2$, т. е. полученная лунка (открытый полукруг) заключена в прямоугольнике

$$0 < \operatorname{Re} w < 1, \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Im} w < 0. \quad (27)$$

Остается подействовать на (27) заключительным преобразованием $p = -2w$, дающим прямоугольник (12) на плоскости $p \in \mathbb{C}$ (тот, что был указан в теореме 1). Этот прямоугольник (12) содержит в себе образ угла \mathbb{C}_{++} под действием отображения (25). Туда и попадают значения (24) с точками $z_n \in \mathbb{C}_{++}$, взятыми при $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, наконец, что $z_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow +\infty$ (как бесконечная серия корней уравнения (7), совпадающих с нулями целой функции $\varphi(z) = \operatorname{sh} z - z$). Но тогда по формуле (24) заключаем, что $p_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Теорема 1 полностью доказана.

3. Дополнения и комментарии

Значения p_{-n} с отрицательными номерами $(-n) \in \mathbb{Z}_- \equiv (-\mathbb{N})$ не требуют отдельных обсуждений. Достаточно напомнить связь $p_{-n} = \bar{p}_n$, элементарно проверяемую по определению (10). При проверке учитывается, что значения функции $\operatorname{sh} z$ в комплексно сопряженных точках z_n и $z_{-n} = \bar{z}_n$ будут комплексно сопряжены.

Отсюда заключаем, что все значения p_n из формулы (10) попадают в квадрат

$$-2 < \operatorname{Re} p < 0, \quad -1 < \operatorname{Im} p < 1, \quad (28)$$

при положительных номерах — в верхнюю половину $0 < \operatorname{Im} p < 1$ (см. (12)), а при отрицательных номерах — в нижнюю половину $-1 < \operatorname{Im} p < 0$ (так как $p_{-n} = \bar{p}_n$).

Квадрат (28) дает самую общую оценку для найденных значений (10), и область локализации чисел p_n можно дополнительно уточнить. Так, не меняя схемы наших рассуждений, но применяя в конце доказательства теоремы 1 преобразование $p = -2w$ не к самому прямоугольнику (27), а к найденной круговой лунке в этом прямоугольнике (и учитывая симметрию значений p_n и $p_{-n} = \bar{p}_n$), получим на плоскости $p \in \mathbb{C}$ заведомо более точное множество — открытый круг

$$|p + 1| < 1, \quad (29)$$

вписанный в квадрат (28). Именно здесь, в круге (29) (за вычетом отрезка вещественной оси), локализуются все значения p_n из формулы (10).

Численные расчеты конкретизируют наши аналитические выводы. На рисунках ниже представлены результаты компьютерного моделирования первых ста шестидесяти корней z_n из множества (9) (см. рис. 1) и отвечающих им значений p_n из множества (10) (см. рис. 2). В подписях под рисунками даны развернутые комментарии. Обратим внимание, в частности, что согласно рис. 2 зона локализации значений p_n может быть уменьшена до прямоугольника $-0.12 < \operatorname{Re} p < 0$, $-0.25 < \operatorname{Im} p < 0.25$.

³Вертикальная граница сдвинутого угла $1 + \mathbb{C}_{++}$ под действием отображения $w \equiv u + iv = 1/\lambda$ перейдет в кривую с параметрическим уравнением $u = 1/(1+t^2)$, $v = -t/(1+t^2)$, где $0 \leq t < +\infty$. Исключая отсюда параметр t , получаем явное уравнение (26), соответствующее нижней дуге окружности $(u - 1/2)^2 + v^2 = 1/4$.

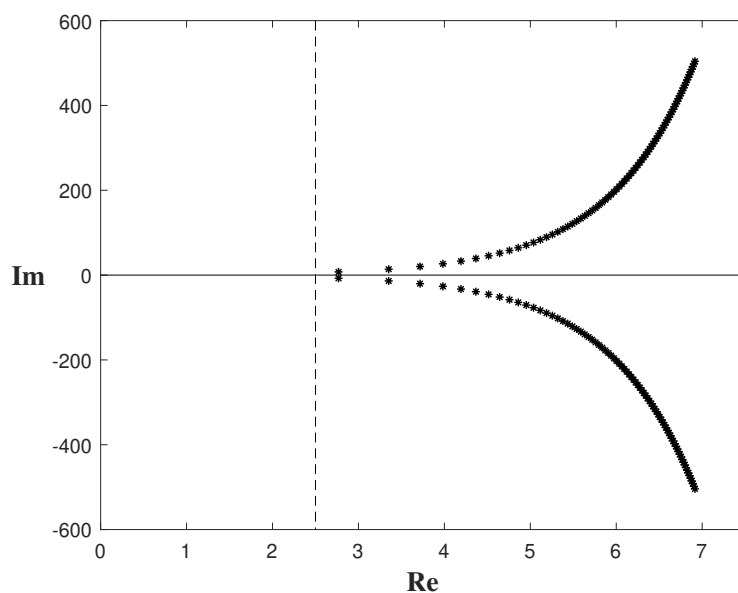


Рис. 1. Результат компьютерного расчета первых ста шестидесяти корней уравнения (7), входящих в множество (9). Взяты номера $n \in \mathbb{Z}$, $1 \leq |n| \leq 80$. Видно, что корни z_n попадают в правую полуплоскость $\text{Re } z > 2.5$ и асимптотически выстраиваются вдоль двух экспоненциальных кривых. Еще более точная граница $\text{Re } z > 2.7541$, получаемая аналитическим путем, указана в теореме 3 ниже.

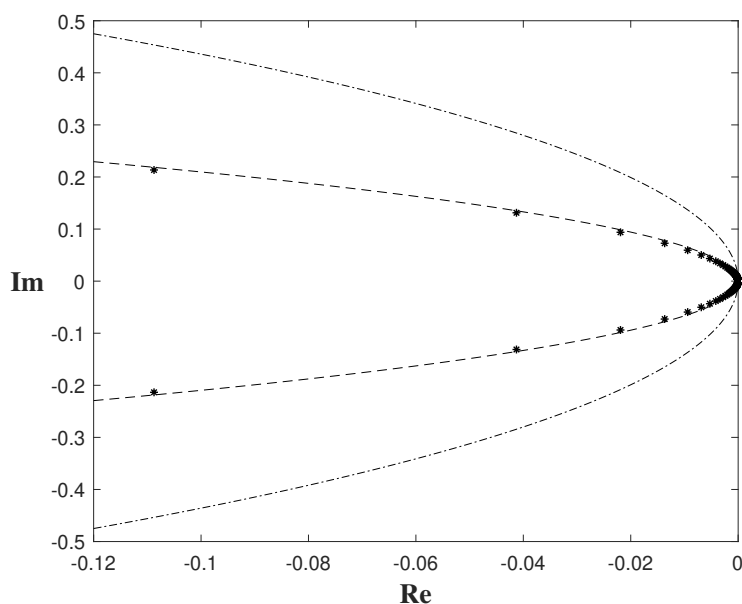


Рис. 2. Результат компьютерного расчета первых ста шестидесяти значений p_n , определяемых по формуле (10). Взяты номера $n \in \mathbb{Z}$, $1 \leq |n| \leq 80$. Видно, что квадрат (28) дает верную, но все же завышенную оценку на расположение значений p_n при $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Фактически эти значения попадают в меньший прямоугольник $-0.12 < \text{Re } p < 0$, $-0.25 < \text{Im } p < 0.25$. Указанные границы можно еще уточнить, учитывая, что $p_{\pm 1} \approx -0.10876 \pm 0.21344i$. Светлый штрих-пунктир совпадает с дугой окружности $(x + 1)^2 + y^2 = 1$, ограничивающей круг локализации (29). Светлый пунктир соответствует экспериментально подобранной дуге эллипса $(x + 4.5)^2 + (4.5y)^2 = (4.5)^2$, вблизи которой группируются все найденные значения p_n . Возникающие искажения кривых вызваны различием в масштабах по осям абсцисс и ординат.

Отметим также, что полученные результаты переносятся с функции (1) на родственную целую функцию

$$D(\lambda, p) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} + p \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} = E_{\frac{1}{2}}(\lambda, 2) + p E_{\frac{1}{2}}(\lambda, 1) \quad (30)$$

переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (сравни выражение (30) с формулами (1) и (5)). Имеют место соответствия

$$H(\zeta, p) = D\left(\frac{\zeta}{4}, p\right), \quad D(\lambda, p) = H(4\lambda, p).$$

Отсюда понятно, что нули функции $D(\lambda, p)$ при фиксированном $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ получаются из нулей функции $H(\zeta, p)$ путем деления на 4 с сохранением всех соответствующих кратностей. Тем самым, кратные нули у функции (30) возможны лишь при выборе параметра p среди прежних числовых значений (10). Точнее, при любом таком $p = p_n$ функция $D(\lambda, p_n)$ помимо бесконечного числа простых нулей имеет ровно один кратный нуль с кратностью два. Указанный кратный нуль находится по формуле

$$\lambda = \frac{z_n^2}{4} = \left(\frac{z_n}{2}\right)^2 \quad (31)$$

с тем же значением $z_n \neq 0$, что и при выборе параметра $p_n = -2/(\operatorname{ch} z_n + 1)$ (сравни (31) с формулой (11) из теоремы 1). Числа $z = z_n/2$, входящие в запись (31), совпадают с корнями $z \neq 0$ трансцендентного уравнения

$$\operatorname{sh}(2z) = 2z. \quad (32)$$

Вариант (32) неизбежно возникает при исследовании функции (30) на кратные нули по схеме из предыдущего раздела 2. В связи с таким «искажением» базового уравнения (7) первоначальная функция (1) оказывается «более удобной» по сравнению с функцией (30).

Осталось обсудить вопрос о точном расположении корней уравнения (7), т. е. уравнения $\operatorname{sh} z = z$. Материал следующего раздела (подготовленного по мотивам нашей предварительной публикации [4]) связан с классической проблематикой анализа и может быть полезен для математической физики.

4. О корнях нужного трансцендентного уравнения

В 1902 г. опубликована работа Харди [8], посвященная корням уравнения

$$\sin z = z \quad (33)$$

на множестве $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Там же, в [8], введено обобщенное уравнение

$$\sin z = az \quad (34)$$

с параметром $a \neq 0$. Публикация Харди сыграла заметную роль и была использована многими авторами. На созданной теоретической основе проводились дальнейшие исследования по численному анализу корней трансцендентных уравнений (33), (34), их обобщений и аналогов (см. [9–14]).

Отметим, что подобные уравнения встречаются в математической физике при рассмотрении некоторых спектральных задач из механики сплошной среды и теории наноструктур (см. [15–19]), а также используются как важный иллюстративный материал в теории целых функций (см. [20, с. 64–68]).

Наряду с «тригонометрической» версией (33) естественно изучать соответствующий «гиперболический» аналог (7), т. е. уравнение $\operatorname{sh} z = z$. Вариант (33) получается из (7) при замене z на iz . Следовательно, множества корней этих уравнений связаны поворотом на угол $\pi/2$ в плоскости \mathbb{C} . Из-за наличия наглядных симметрий в обоих множествах корней возможен ряд других ортогональных преобразований, приводящих корни уравнения (7) к корням уравнения (33). По понятным причинам продолжим обсуждать именно уравнение (7), рассматривая его на области $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Как уже отмечалось, интересующие нас корни уравнения (7) представимы в виде (8) с основной бесконечной серией

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots, \quad (35)$$

расположенной внутри первого координатного угла. Корни (35) являются простыми и упорядочены по возрастанию модулей. Достаточно дать как можно более точное описание именно этой серии (35), так как все прочие корни $z \neq 0$ выражаются потом самым элементарным образом (см. формулу (8)). Непосредственно проверяется, что аналогичная основная серия корней уравнения (33) (расположенная в первом координатном угле) получается из (35) путем замены значений $x_n + iy_n$ на $y_n + ix_n$.

При анализе уравнения (7) полезно учитывать связь

$$\frac{\operatorname{sh} z - z}{z^3} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m+3)!} = E_{\frac{1}{2}}(z^2, 4) \quad (36)$$

с соответствующей функцией типа Миттаг-Леффлера. Тем самым, к исследованию множества (35) можно привлекать общие результаты монографии [6]. Например, из указанной там теоремы 4.3.1 следует, что основная серия корней (35) локализуется в правой полуплоскости

$$\operatorname{Re} z > \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) = 2.2955\dots \quad (37)$$

Затем, применяя теорему 2.1.1, после несложных вычислений получим для основной серии (35) следующую асимптотическую формулу

$$z_n = \ln(4n\pi) + \frac{1}{4n} + i \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\ln(4n\pi)}{2n\pi} \right) + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Формула (38) согласуется с результатом [20, с. 67] (если переделать ответ из книги [20] на уравнение (7) вместо разобранный там уравнения (33)).

Для подобных корней имеется другой, близкий шаблон асимптотики из работы [16] (см. также [8]), откуда извлекается приближенная формула:

$$z_n = \ln((4n+1)\pi) + \delta_n + i \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{2 \ln((4n+1)\pi)}{(4n+1)\pi} + \varepsilon_n \right) \quad (39)$$

при $n \in \mathbb{N}$ со значениями $\delta_n, \varepsilon_n \in \mathbb{R}$ такими, что $\delta_n \rightarrow 0$ и $\varepsilon_n \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$. На первый взгляд, вариант (38) кажется проще и даже чуть сильнее, но именно представление (39) позволяет вывести следующий по-настоящему точный результат.

Теорема 2. В формуле (39) для основной серии корней (35) уравнения (7) при всех номерах $n \in \mathbb{N}$ действуют оценки

$$0 < \delta_n < \frac{2 \ln^2((4n+1)\pi)}{(4n+1)^2 \pi^2}, \quad |\varepsilon_n| < \frac{4 \ln^3((4n+1)\pi)}{(4n+1)^3 \pi^3}. \quad (40)$$

Указанное сочетание формулы (39) с оценками (40) для погрешностей $\delta_n, \varepsilon_n \in \mathbb{R}$ дает весьма полное представление о поведении корней уравнения (7). Как видим, итоговый ответ получается *неасимптотическим*, применимым при всех номерах $n \in \mathbb{N}$. Отметим еще один неасимптотический результат несколько иного характера.

Теорема 3. Для уравнения (7) рассматриваем основную серию корней (35) в первом координатном угле $\mathbb{C}_{++} \equiv \{z = x + iy : x > 0, y > 0\}$. Тогда справедливы утверждения:

- все корни (35) находятся на кривой $\gamma \subset \mathbb{C}_{++}$ с уравнением

$$y = \operatorname{ch} x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 x}}; \quad (41)$$

- корень z_n при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ попадает в область

$$\operatorname{ch} x - 1 < y < \operatorname{ch} x, \quad 2n\pi + \frac{\pi}{3} < y < 2n\pi + \frac{\pi}{2}; \quad (42)$$

- все корни (35) расположены в полуплоскости

$$\operatorname{Re} z > \ln 5\pi = 2.7541\dots, \quad (43)$$

что точнее прежней оценки (37).

Доказательства теорем 2 и 3 достаточно объемны и не укладываются в формат настоящей статьи. Один из авторов (В. Б. Шерстюков) планирует подробно обосновать эти результаты в отдельной публикации. Сейчас же обсудим лишь несколько технических моментов.

- 1) Ключевую роль в проводимых рассуждениях играет анализ системы

$$\begin{cases} \operatorname{sh} x \cos y = x, \\ \operatorname{ch} x \sin y = y, \end{cases} \quad (44)$$

к которой сводится «гиперболическое» уравнение $\operatorname{sh} z = z$ переменной $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Элементарные системы, подобные (44), типичны для данного круга задач (см., например, основополагающую работу [8]).

2) Из формулы (41) следует, в частности, что $y_n = (1/2) \exp(x_n)(1 + o(1))$ для изучаемых корней $z_n = x_n + iy_n$ при $n \rightarrow +\infty$. Это означает, что корни на рис. 1 асимптотически выстраиваются вблизи экспоненциальных кривых $y = \pm(1/2) \exp x$ с очевидным распределением знаков при $n \in \mathbb{N}$ и $n \in (-\mathbb{N})$.

3) Оценка (43) согласована с формулой (39), где $\delta_n > 0$ при $n \in \mathbb{N}$ (как сказано в теореме 2). Такой результат, находимый аналитическим путем, оказывается весьма точным, и численные расчеты дают приближенное значение $z_1 \approx 2.7687 + 7.4977i$, очень близкое к границе из формулы (43).

4) Для применения нашей основной теоремы 1 важны не только сами корни $z = z_n$, но и их квадраты $\zeta = z_n^2$, каждый из которых, согласно формуле (11), дает кратный нуль функции $H(\zeta, p_n)$ при соответствующем значении $p = p_n$. Учитывая информацию, заложенную в формулу (42), устанавливаем следующий полезный результат.

Теорема 4. При $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ для корней $z = z_n$ уравнения (7), расположенных в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, значения $\zeta = z_n^2$ находятся в угле

$$\frac{2\pi}{3} < \arg \zeta < \frac{4\pi}{3} \quad (45)$$

и, как следствие, в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta < 0$, не попадая при этом на луч $\arg \zeta = \pi$.

◁ Пусть $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем корень $z_n = x_n + iy_n$, взятый из основной серии (35). Тогда $x_n > 0$, $y_n > 0$, и в силу (44) имеем соотношения

$$x_n = \operatorname{sh} x_n \cos y_n, \quad y_n = \operatorname{ch} x_n \sin y_n.$$

Соответственно

$$\operatorname{tg}(\arg z_n) = \frac{y_n}{x_n} = \operatorname{cth} x_n \operatorname{tg} y_n > \operatorname{tg} y_n,$$

так как $\operatorname{cth} x > 1$ при всех $x > 0$. Но $\operatorname{tg} y_n > \operatorname{tg}(\pi/3)$ согласно последнему двойному неравенству из (42). Следовательно, $\operatorname{tg}(\arg z_n) > \operatorname{tg}(\pi/3)$ и $\pi/3 < \arg z_n < \pi/2$. Отсюда выводим, что $2\pi/3 < \arg z_n^2 < \pi$. Поскольку $z_{-n} = \bar{z}_n$, то для числа z_{-n}^2 получаем оценку $\pi < \arg z_{-n}^2 < 4\pi/3$. Ввиду произвольности номера $n \in \mathbb{N}$ приходим к утверждению теоремы 4. ▷

Оценка (45) на величины $\zeta = z_n^2$ может быть полезна при изучении присоединенных решений в обратных задачах для дифференциальных уравнений второго порядка (см. [2]).

Приятно отметить, что наши исследования на стыке анализа и неклассических задач математической физики находили неизменную поддержку Александра Васильевича Абанина, одного из лидеров ростовской математической школы, известного профессора и многолетнего заведующего кафедрой Ростовского государственного университета (ныне Южного федерального университета). Нам памятливы многие содержательные выступления Александра Васильевича на крупных математических форумах, а также некоторые собственные доклады при его доброжелательном внимании. Надеемся на продолжение традиций и дальнейшее научное взаимодействие.

Литература

1. Тихонов И. В., Алмохамед М. Обратная задача с переопределением третьего рода для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Диф. уравнения.—2022.—Т. 58, № 7.—С. 890–911. DOI: 10.31857/S0374064122070032.
2. Алмохамед М., Тихонов И. В. Примеры присоединенных решений в линейных обратных задачах // Челябинский физ.-мат. журн.—2022.—Т. 7, № 4.—С. 395–411. DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17401.
3. Алмохамед М., Тихонов И. В. О некоторых спектральных исследованиях, связанных с теорией обратных задач // Современные проблемы теории функций и их приложения: матер. 21-й междунар. Саратов. зимней shk.—Саратов: СГУ, 2022.—С. 20–26.
4. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Алмохамед М. О некоторых трансцендентных уравнениях, важных для математической физики // Современные проблемы теории функций и их приложения: матер. 21-й междунар. Саратов. зимней shk.—Саратов: СГУ, 2022.—С. 294–299.
5. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.—М.: Наука, 1966.—672 с.
6. Попов А. Ю., Седлецкий А. М. Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундам. направления.—2011.—Т. 40.—С. 3–171.
7. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: ГИТТЛ, 1956.—632 с.
8. Hardy G. H. On the zeroes of the integral function $x - \sin x = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} x^{2n+1}/(2n+1)! // The Messenger of Mathematics.—1902.—Vol. 31, № 11.—P. 161–165.$
9. Hillman A. P., Salzer H. E. Roots of $\sin z = z // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Ser. 7.—1943.—Vol. 34, № 235.—P. 575. DOI: 10.1080/14786444308521415.$

10. Robbins C. I., Smith R. C. T. A table of roots of $\sin z = -z$ // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Ser. 7.—1948.—Vol. 39, № 299.—P. 1004–1005. DOI: 10.1080/14786444808521711.
11. Burniston E. E., Siewert C. E. Exact analytical solutions of the transcendental equation $\alpha \sin \zeta = \zeta$ // SIAM J. Appl. Math.—1973.—Vol. 24, № 4.—P. 460–466. DOI: 10.1137/0124048.
12. Fettis H. E. Complex roots of $\sin z = az$, $\cos z = az$, $\cosh z = az$ // Math. Comp.—1976.—Vol. 30, № 135.—P. 541–545. DOI: 10.1090/S0025-5718-1976-0418401-9.
13. Misici L. Numerical solutions of two transcendental equations // Math. Comp.—1984.—Vol. 42, № 166.—P. 589–595. DOI: 10.1090/S0025-5718-1984-0736454-X.
14. Hansen E. B. Root structure and numerical solution of the equation $\sin z = cz$ // Appl. Math. Let.—1997.—Vol. 10, № 2.—P. 33–38. DOI: 10.1016/S0893-9659(97)00007-4.
15. Fadle J. Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe // Ingenieur-Archiv (Archive of Applied Mechanics).—1940.—Vol. 11.—P. 125–149. DOI: 10.1007/BF02084699.
16. Buchwald V. T. Eigenfunctions of plane elastostatics. I. The strip // Proc. Royal Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci.—1964.—Vol. 277, № 1370.—P. 385–400. DOI: 10.1098/rspa.1964.0029.
17. Joseph D. D. The convergence of biorthogonal series for biharmonic and Stokes flow edge problems. Part I // SIAM J. Appl. Math.—1977.—Vol. 33, № 2.—P. 337–347. DOI: 10.1137/0133021.
18. Katopodes F. V., Davis A. M. J., Stone H. A. Piston flow in a two-dimensional channel // Physics of Fluids.—2000.—Vol. 12, № 5.—P. 1240–1243. DOI: 10.1063/1.870373.
19. Barsan V. Algebraic approximations for transcendental equations with applications in nanophysics // Philosophical Magazine.—2015.—Vol. 95, № 27.—P. 3023–3038. DOI: 10.1080/14786435.2015.1081425.
20. Маркушевич А. И. Целые функции. Элементарный очерк. Изд. 2-е.—М.: Наука, 1975.—120 с.

Статья поступила 6 ноября 2024 г.

АЛМОХАМЕД МУАТАЗ

Московский технический университет связи и информатики,

старший преподаватель

РОССИЯ, Москва, 111024, ул. Авиамоторная, 8 а

E-mail: mssrmtz@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-7611-8369>

ТИХОНОВ ИВАН ВЛАДИМИРОВИЧ

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,

профессор

РОССИЯ, Москва, 119991, Ленинские горы, 1, стр. 52

E-mail: ivtikh@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0001-5949-3573>

ШЕРСТЮКОВ ВЛАДИМИР БОРИСОВИЧ

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,

профессор

РОССИЯ, Москва, 119991, Ленинские горы, 1, стр. 52

E-mail: shervb73@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-4679-0680>

ON MULTIPLE ZEROS OF ONE ENTIRE FUNCTION WHICH IS
OF INTEREST FOR THE THEORY OF INVERSE PROBLEMSAlmohamed, M.¹, Tikhonov, I. V.² and Sherstyukov, V. B.²¹ Moscow Technical University of Communications and Informatics,
8 a Aviamotornaya St., 111024 Moscow, Russia;² Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia

E-mail: mssrmtz@gmail.com, ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Abstract. We consider complex zeros of one entire function from the theory of linear inverse problems for second-order differential equations. This function of order $\rho = 1/2$ is elementary, transcendental, and depends in a simple way on a complex parameter $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. It is required to find out whether there are values of p for which the function has multiple zeros. The question posed has been fully answered. It is shown that there exists a countable set of values $p = p_n$, for each of which the entire function has not only an infinite number of simple zeros, but also one zero of multiplicity two. A description is given of both the set of such values p_n and the corresponding multiple zeros. Our main result is expressed in terms of roots of the transcendental equation $\operatorname{sh} z = z$, the analysis of which is the subject of the final section of the paper. Here we announce new non-asymptotic estimates, applicable to all roots of the equation in the domain $z \neq 0$ and giving very precise localization for them. Numerical calculations confirm our analytical conclusions. There are useful connections with the theory of Mittag-Leffler functions and some spectral problems from mathematical physics.

Keywords: entire functions, hyperbolic functions, distribution of zeros, multiple zeros, transcendental equations, inverse problems for differential equations.

AMS Subject Classification: 30C15, 30D20, 33E12.

For citation: Almohamed, M., Tikhonov, I. V. and Sherstyukov, V. B. On Multiple Zeros of One Entire Function which Is of Interest for the Theory of Inverse Problems, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 5–20 (in Russian). DOI: 10.46698/x2987-6171-9353-j.

References

1. Tikhonov, I. V. and Almohamed, M. Inverse Problem with Overdetermination of the Third Kind for an Abstract Second-Order Differential Equation, *Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 7, pp. 877–898. DOI: 10.1134/S0012266122070035.
2. Almohamed, M. and Tikhonov, I. V. Examples of Generalized Elementary Solutions in Linear Inverse Problems, *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2022, vol. 7, no. 4, pp. 395–411 (in Russian). DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17401.
3. Almohamed, M. and Tikhonov, I. V. On Some Spectral Studies Related to Inverse Problem Theory, *Sovremennyye Problemy Teorii Funktsiy i Ikh Prilozheniya: Materialy 21-y Mezhdunarodnoy Saratovskoy Zimney Shkoly*, 2022, pp. 20–26 (in Russian).
4. Tikhonov, I. V., Sherstyukov, V. B. and Almohamed, M. On Some Transcendental Equations that Matter for Mathematical Physics, *Sovremennyye Problemy Teorii Funktsiy i Ikh Prilozheniya: Materialy 21-y Mezhdunarodnoy Saratovskoy Zimney Shkoly*, 2022, pp. 294–299 (in Russian).
5. Dzhrbashyan, M. M. *Integralnyye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti* [Integral Transforms and Representations of Functions in Complex Domain], Moscow, Nauka, 1966, 672 p. (in Russian).
6. Popov, A. Yu. and Sedletskii, A. M. Distribution of Roots of Mittag-Leffler Functions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 190, no. 2, pp. 209–409. DOI: 10.1007/s10958-013-1255-3.
7. Levin, B. Ja. *Distribution of Zeros of Entire Functions*, Revised Edition, vol. 5, American Mathematical Society, 1980, xii+523 p.
8. Hardy, G. H. On the Zeroes of the Integral Function $x - \sin x = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n+1} / (2n+1)!$, *The Messenger of Mathematics*, 1902, vol. 31, no. 11, pp. 161–165.

9. Hillman, A. P. and Salzer, H. E. Roots of $\sin z = z$, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Series 7, 1943, vol. 34, no. 235, p. 575. DOI: 10.1080/14786444308521415.
10. Robbins, C. I. and Smith, R. C. T. A Table of Roots of $\sin z = -z$, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Series 7, 1948, vol. 39, no. 299, pp. 1004–1005. DOI: 10.1080/14786444808521711.
11. Burniston, E. E. and Siewert, C. E. Exact Analytical Solutions of the Transcendental Equation $\alpha \sin \zeta = \zeta$, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1973, vol. 24, no. 4, pp. 460–466. DOI: 10.1137/0124048.
12. Fettis, H. E. Complex roots of $\sin z = az$, $\cos z = az$, $\cosh z = az$, *Mathematics of Computation*, 1976, vol. 30, no. 135, pp. 541–545. DOI: 10.1090/S0025-5718-1976-0418401-9.
13. Misici, L. Numerical Solutions of Two Transcendental Equations, *Mathematics of Computation*, 1984, vol. 42, no. 166, pp. 589–595. DOI: 10.1090/S0025-5718-1984-0736454-X.
14. Hansen, E. B. Root Structure and Numerical Solution of the Equation $\sin z = cz$, *Applied Mathematics Letters*, 1997, vol. 10, no. 2, pp. 33–38. DOI: 10.1016/S0893-9659(97)00007-4.
15. Fadle, J. Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der Quadratischen Scheibe, *Ingenieur-Archiv (Archive of Applied Mechanics)*, 1940, vol. 11, pp. 125–149. DOI: 10.1007/BF02084699.
16. Buchwald, V. T. Eigenfunctions of Plane Elastostatics. I. The strip, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 1964, vol. 277, pp. 385–400. DOI: 10.1098/rspa.1964.0029.
17. Joseph, D. D. The Convergence of Biorthogonal Series for Biharmonic and Stokes Flow Edge Problems. Part I, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1977, vol. 33, no. 2, pp. 337–347. DOI: 10.1137/0133021.
18. Katopodes, F. V., Davis, A. M. J. and Stone, H. A. Piston Flow in a Two-Dimensional Channel, *Physics of Fluids*, 2000, vol. 12, no. 5, pp. 1240–1243. DOI: 10.1063/1.870373.
19. Barsan, V. Algebraic Approximations for Transcendental Equations with Applications in Nanophysics, *Philosophical Magazine*, 2015, vol. 95, no. 27, p. 3023–3038. DOI: 10.1080/14786435.2015.1081425.
20. Markushevich A. I. *Tselye funktsii. Elementarnyy ocherk* [Entire Functions. Elementary Essay], 2nd ed., Moscow, Nauka, 1975, 120 p. (in Russian).

Received November 6, 2024

MUATAZ ALMOHAMED

Moscow Technical University of Communications and Informatics,
8 a Aviamotornaya St., Moscow 111024, Russia,
Senior Lecturer

E-mail: mssrmtz@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-7611-8369>

IVAN V. TIKHONOV

Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia,
Professor

E-mail: ivtikh@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0001-5949-3573>

VLADIMIR B. SHERSTYUKOV

Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia,
Professor

E-mail: shervb73@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-4679-0680>