Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 127–149

УДК 510.8
DOI 10.46698/e7265-7012-8069-r

ОДНОСТОРОННИЕ ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

А. Б. Шишкин[1], **Б. А. Шишкин**[2]

[1] Кубанский государственный университет,
Россия, 353560, Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200;
[2] ООО «ПРАЙ»,
Россия, 353563, Славянск-на-Кубани, ул. Строителей, 1
E-mail: shishkin-home@mail.ru, shishkinb13@gmail.com

Посвящается 70-летию профессора А. В. Абанина

Аннотация. Феномен двойственности присущ всем разделам математики и лежит в основе многих специальных теорем двойственности, утверждающих возможность двойственных переходов — переносов математических высказываний из одной области математики в другую. Все известные теоремы двойственности опираются на свойства специальных математических структур и носят двусторонний характер, то есть предполагают двойственные переходы в одну и другую стороны. Настоящая статья посвящена новому пониманию двойственных переходов как переходов от внутренних (соответственно внешних) описаний множеств к внешним (соответственно внутренним) описаниям двойственных им множеств. Особое внимание уделяется двойственным переходам в одну сторону — односторонним теоремам двойственности. При этом в основу абстрактных построений (односторонней теории двойственности) положено понятие дуальной схемы, в основе которого, в свою очередь, лежит понятие ослабленной инволюции — вполне изотонного отображения. При этом любое вполне изотонное отображение имеет условно обратное отображения, которое тоже является вполне изотонным. Авторы различают четыре дуальные схемы, каждая из которых играет свою строго определенную роль в вопросах внешнего и внутреннего описания множеств. Любая дуальная схема представляется как совокупность из двух диаграмм, связанных между собой взаимно обратными переходами к условно обратным отображениям.

Ключевые слова: двойственность, интериоризация, экстериоризация.

AMS Subject Classification: 03E15.

Образец цитирования: *Шишкин А. Б., Шишкин Б. А.* Односторонние теоремы двойственности // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 127–149. DOI: 10.46698/e7265-7012-8069-r.

1. Введение

Понимание двойственных переходов как переходов от инъективного описания множеств к их проективному описанию возникло в условиях задачи спектрального синтеза в комплексной области. Исследования по спектральному синтезу в комплексной области опираются на свойства дуальной бипары $\langle\langle O, O^*\rangle, \langle P, P^*\rangle\rangle$, где $O := O(G)$ — пространство аналитических функций в односвязной области $G \subseteq \mathbf{C}$, O^* — его сильное сопряженное пространство, $P := P(G)$ — интерпретация O^* в терминах оператора Лапласа, P^* — его сильное сопряженное пространство. Новое понимание двойственных переходов позволило в ряде случаев свести задачу спектрального синтеза в комплексной области (для дифференциального оператора бесконечного порядка) к задаче проективного описания замкнутых подмодулей целых функций (над кольцами многочленов от целой функции) [1, 2]. Используемый при этом двойственный переход является двусторонним и существенным образом опирается на рефлексивность локально выпуклых пространств O и P.

Первая попытка осуществить односторонний двойственный переход в комплексной области предпринята в монографии [3]. Эти исследования несут яркий отпечаток задачи спектрального синтеза в комплексной области и тесно связаны с основными положениями локально выпуклого анализа. Попытка общематематического описания односторонних двойственных переходов предпринята в работе [4]. В этой работе разработана общая *односторонняя схема двойственности*, предполагающая двойственные переходы лишь в одну сторону. Такие переходы предполагают ослабление начальных условий и их использование приводит к существенному расширению области применения двойственных переходов в исследовательской практике. Упомянутая односторонняя схема двойственности основана на понятии вполне изотонного отображения (проекции, инъекции) и условно обратного отображения. Эти понятия, в свою очередь, лежат в основе понятия *дескриптора*, понятия инъективного описания (*интериоризации*) и понятия проективного описания (*экстериоризации*). Рассмотренная в работе [4] односторонняя схема двойственности связывает эти понятия одним предложением, утверждающим саму возможность односторонних двойственных переходов.

Однако упомянутая теорема (схема) носит характер общих рекомендаций по организации односторонних двойственных переходов и может вызвать затруднения при ее использовании в конкретных условиях. Этим вызвана необходимость конкретизации ее отдельных положений. Во-первых, требуется уточнить определение дескриптора (интериоризатора, экстериоризатора). Во-вторых, требуется конкретизировать процедуры внутреннего и внешнего описания множеств. В данной работе эти процедуры базируются на ключевом понятии *дуальной схемы*, в основе которого лежит понятие *полукоммутативной диаграммы* (*вполне изотонного неравенства*). Доказанные в данной статье *односторонние теоремы двойственности* являются конструктивными. Они уже не носят характер общих рекомендаций и могут быть легко применены в любых конкретных ситуациях. Их использование не требует каких-либо дополнительных построений и сводится лишь к проверке выполнимости конкретных условий.

2. Вполне изотонные отображения

2.1. Проекции и инъекции. Пусть $X := (X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Элемент $x \in X$ называем *частичной минорантой* (соответственно *частичной мажорантой*) множества $A \subseteq X$, если множество $\{a \in A : x \leqslant a\}$ (соответственно $\{a \in A : a \leqslant x\}$) не является пустым. Согласно этому определению любая точка из произвольного множества $A \subseteq X$ является и частичной мажорантой, и частичной минорантой этого множества. Множество $A \subseteq X$, обладающее свойством

$$x \leqslant a,\ a \in A \Rightarrow x \in A \quad (\text{соответственно } a \leqslant x,\ a \in A \Rightarrow x \in A),$$

принято называть *прямым* (соответственно *обратным*) *порядковым идеалом.* Согласно этому определению прямой (соответственно обратный) порядковый идеал $A \subseteq X$ совпадает с совокупностью всех своих частичных минорант (соответственно частичных мажорант).

Пусть $Y := (Y, \leqslant)$ — тоже частично упорядоченное множество, $m : X \to Y$ — некоторое отображение. Для любого $y \in Y$ символом $X(y \leqslant m(x))$ (соответственно $X(m(x) \leqslant y)$) обозначим множество

$$\{x \in \operatorname{Dom} m : \, y \leqslant m(x)\} \quad \bigl(\text{соответственно } \{x \in \operatorname{Dom} m : \, m(x) \leqslant y\}\bigr),$$

где $\operatorname{Dom} m$ — область определения отображения m. Элемент $y \in Y$ называем *частичной минорантой* (соответственно *частичной мажорантой*) отображения m, если он является частичной минорантой (соответственно частичной мажорантой) области изменения $\operatorname{Im} m$ отображения m. Элемент $y \in Y$ является частичной минорантой (соответственно частичной мажорантой) отображения m тогда и только тогда, когда множество $X(y \leqslant m(x))$ (соответственно $X(m(x) \leqslant y)$) не является пустым.

Отображение $m : X \to Y$ называется *изотонным* (соответственно *строго изотонным*), если для любых $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} m$, удовлетворяющих условию $x_1 \leqslant x_2$ (соответственно $x_1 < x_2$), выполняется неравенство $m(x_1) \leqslant m(x_2)$ (соответственно $m(x_1) < m(x_2)$). Отображение $m : X \to Y$ называется *антитонным* (соответственно *строго антитонным*), если для любых $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} m$, удовлетворяющих условию $x_1 \leqslant x_2$ (соответственно $x_1 < x_2$), выполняется неравенство $m(x_2) \leqslant m(x_1)$ (соответственно $m(x_2) < m(x_1)$). Если отображение $m : X \to Y$ является антитонным (соответственно строго антитонным), то отображения $m : \overline{X} \to Y$ и $m : X \to \overline{Y}$ являются изотонными (соответственно строго изотонными) и наоборот. Здесь $\overline{X} := (X, \geqslant)$ и $\overline{Y} := (Y, \geqslant)$ — частично упорядоченные множества X и Y с обратными порядками.

Изотонное отображение $m : X \to Y$ называется *проекцией* (соответственно *инъекцией*) из X в Y, если множество $\operatorname{Dom} m$ является прямым (соответственно обратным) порядковым идеалом и для любой частичной мажоранты (соответственно миноранты) $y \in Y$ отображения m множество $X(m(x) \leqslant y)$ (соответственно $X(y \leqslant m(x))$) обладает наибольшим (соответственно наименьшим) элементом. Проекции и инъекции из X в Y называем *вполне изотонными отображениями* из X в Y. Отмечаем, что любой порядковый изоморфизм является проекцией и инъекцией одновременно.

При замене порядков в множествах X и Y их обратными порядками проекция (соответственно инъекция) из X в Y становится инъекцией (соответственно проекцией) из X в Y. Другими словами, если отображение $m : X \to Y$ является проекцией (соответственно инъекцией), то отображение $\overline{m} : \, \overline{X} \to \overline{Y} \,\big|\, x \mapsto m(x)$ является инъекцией (соответственно проекцией). Разные символы X и $\overline{X}$ (соответственно Y и $\overline{Y}$) обозначают разные частично упорядоченные множества $(X, \leqslant)$ и $(X, \geqslant)$ (соответственно $(Y, \leqslant)$ и $(Y, \geqslant)$). Носители структур $(X, \leqslant)$ и $(X, \geqslant)$ (соответственно $(Y, \leqslant)$ и $(Y, \geqslant)$) совпадают, значит, символы m и $\overline{m}$ обозначают одно отображение. Необходимость использования разных символов m и $\overline{m}$ связана с возможным разночтением функциональных неравенств и полукоммутативных диаграмм. Например, неравенство $m(x) \leqslant y$ при переходе к обратным порядкам превращается в неравенство $y \leqslant \overline{m}(x)$. При этом множество $X(m(x) \leqslant y)$ будет совпадать с множеством $\overline{X}(y \leqslant \overline{m}(x))$.

2.2. Примеры вполне изотонных отображений. Рассмотрим несколько ключевых примеров вполне изотонных отображений. Первый пример связан с переходами к обратному порядку.

Пример 2.1. Пусть A — непустое множество, 2^A — булеан множества A, $X := (2^A, \subseteq)$ и $\overline{X} := (2^A, \supseteq)$ — частично упорядоченные множества с взаимно обратными порядками. Рассмотрим изотонное отображение

$$l : \, X \to \overline{X} \,\big|\, x \mapsto \overline{x} := A \setminus x.$$

Оно осуществляет порядковый изоморфизм X на $\overline{X}$. Следовательно, отображение l является проекцией и инъекцией X на $\overline{X}$ одновременно. Обратное отображение $l^{-1} : \overline{X} \to X$ обладает аналогичным свойством.

Следующие примеры показывают, что понятие вполне изотонного отображения тесно связано с понятием многозначного отображения (соответственно бинарного отношения). Пусть A и B — непустые множества, $X := (2^A, \subseteq)$ и $Y := (2^B, \subseteq)$ — их частично упорядоченные булеаны, $F : A \to B$ — некоторое многозначное отображение, $F^{-1} : B \to A$ — его обратное многозначное отображение.

Пример 2.2. Многозначное отображение F можно рассматривать как однозначное отображение $n : X \to Y \,\big|\, x \mapsto F(x)$, где $F(x) := \{b \in B : b \in F(a), a \in x\}$ — образ множества $x \in X$ при отображении F. Считаем, что $F(\varnothing) := \varnothing$. Значит, область определения $\operatorname{Dom} n$ отображения n совпадает с X и является прямым (и обратным) порядковым идеалом. Отображение n является изотонным. Покажем, что оно является проекцией X в Y. В самом деле, так как $n(\varnothing) = \varnothing \subseteq y$ для любого $y \in Y$, то любой элемент $y \in Y$ является частичной мажорантой отображения n. При этом для любого $y \in Y$ множество $X(n(x) \subseteq y)$ обладает наибольшим элементом. Этим элементом является *условный прообраз* $F^-(y) := \{a \in A : F(a) \subseteq y\}$ множества y при отображении F. Действительно, с одной стороны, $n(F^-(y)) = F(F^-(y)) \subseteq y$, т. е. множество $F^-(y)$ лежит в совокупности $X(n(x) \subseteq y)$. С другой стороны, если $n(x) \subseteq y$ для некоторого $x \in X$, то для любого $a \in x$ имеем $n(a) = F(a) \subseteq y$, т. е. $a \in F^-(y)$. Это означает, что $x \subseteq F^-(y)$.

Пример 2.3. Рассмотрим однозначное отображение $p : Y \to X \,\big|\, y \mapsto F^{-1}(y)$, где $F^{-1}(y) := \{a \in A : F(a) \cap y \neq \varnothing\}$ — прообраз множества $y \in Y$ при отображении F. Так как прообраз $F^{-1}(y)$ множества $y \in Y$ при отображении F совпадает с образом этого множества при отображении F^{-1}, то как уже показано в предыдущем примере отображение p является проекцией Y в X.

Пример 2.4. Далее рассмотрим однозначное отображение $m : Y \to X \,\big|\, y \mapsto F^-(y)$, где $F^-(y) := \{a \in A : F(a) \subseteq y\}$ — условный прообраз множества $y \in Y$ при отображении F. Отображение m является изотонным. Область определения $\operatorname{Dom} m$ отображения m совпадает с Y и является обратным (и прямым) порядковым идеалом. Покажем, что отображение m является инъекцией Y в X. В самом деле, так как $B \in Y$ и $x \subseteq A = m(B)$ для любого $x \in X$, то любой элемент $x \in X$ является частичной минорантой отображения m. При этом для любого $x \in X$ множество $Y(x \subseteq m(y))$ обладает наименьшим элементом. Этим элементом является образ $F(x)$ множества x. Действительно, с одной стороны, $x \subseteq F^-(F(x)) = m(F(x))$, т. е. множество $F(x)$ лежит в совокупности $Y(x \subseteq m(y))$. С другой стороны, если $x \subseteq m(y)$ для некоторого $y \in Y$, то для любого $b \in F(x)$ имеем $b \in F(m(y)) = F(F^-(y)) \subseteq y$, т. е. $b \in y$. Это означает, что $F(x) \subseteq y$.

Если отображение F является однозначным, то условный прообраз $F^-(y)$ множества $y \in Y$ при отображении F совпадает с прообразом $F^{-1}(y)$ этого множества при отображении F. Значит, отображение m совпадает с отображением $p : Y \to X \mid y \mapsto F^{-1}(y)$. Следовательно, в этом случае отображение m является еще и проекцией Y в X.

Пример 2.5. Затем рассмотрим однозначное отображение $q : X \to Y \,\big|\, x \mapsto F^+(x)$, где $F^+(x) := \{b \in B : F^{-1}(b) \subseteq x\}$ — *условный образ* множества $x \in X$ при отображении F. При этом условный образ $F^+(x)$ множества $x \in X$ при отображении F совпадает с условным прообразом $(F^{-1})^-(x)$ множества $x \in X$ при отображении F^{-1}. Действительно, если $b \in F^+(x)$, то $F^{-1}(b) \subseteq x$ и $b \in (F^{-1})^-(x)$. Обратно, если $b \in (F^{-1})^-(x)$, то $F^{-1}(b) \subseteq x$ и $b \in F^+(x)$. Значит, как уже показано в предыдущем примере отображение q является инъекцией X в Y.

Если отображение F является расслоением (образы различных точек не пересекаются), то обратное отображение F^{-1} является однозначным. При этом условный образ $F^{+}(x)$ множества $x \in X$ при отображении F совпадает с образом $F(x)$ этого множества. Действительно, если $b \in F^{+}(x)$, то $F^{-1}(b) \in x$ и $b \in F(x)$. Обратно, если $b \in F(x)$, то $F^{-1}(b) \in x$ и $b \in F^{+}(x)$. Значит, отображение q совпадает с отображением $n : X \to Y \mid x \mapsto F(x)$. Следовательно, в этом случае отображение q является еще и проекцией множества Y в множество X.

Пусть Λ — непустое множество, X_λ, $\lambda \in \Lambda$, — семейство непустых множеств. Декартово произведение семейства множеств X_λ, $\lambda \in \Lambda$, обозначаем $X_\Lambda := \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, а его элементы обозначаем $x_\Lambda := (x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$. Если $X_\lambda = X$ для любого $\lambda \in \Lambda$, то декартово произведение семейства множеств X, $\lambda \in \Lambda$, называем декартовой степенью X и обозначаем X^Λ, а его элементы вида $(x : \lambda \in \Lambda)$ обозначаем x^Λ. Декартово произведение X_Λ частично упорядоченных множеств $X_\lambda := (X_\lambda, \leqslant)$, $\lambda \in \Lambda$, рассматриваем как частично упорядоченное множество $(X_\Lambda, \leqslant)$ с естественным порядком: $x_\Lambda \leqslant x'_\Lambda$ тогда и только тогда, когда $x_\lambda \leqslant x'_\lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Декартово произведение $X_\Lambda \to Y_\Lambda$ семейства отображений $m_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, обозначаем m_Λ. Декартову степень $X^\Lambda \to Y^\Lambda$ отображения $m : X \to Y$ обозначаем m^Λ.

Пример 2.6. Декартово произведение $m_\Lambda : X_\Lambda \to Y_\Lambda$ данного семейства проекций (соответственно инъекций) $m_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, является проекцией (соответственно инъекцией) декартова произведения X_Λ в декартово произведение Y_Λ. Декартова степень $m^\Lambda : X^\Lambda \to Y^\Lambda$ проекции (соответственно инъекции) $m : X \to Y$ является проекцией (соответственно инъекцией) из декартовой степени X^Λ в декартову степень Y^Λ.

3. Условно обратные отображения

3.1. Условно обратные отображения. Пусть X и Y — частично упорядоченные множества. Всякая проекция m (соответственно инъекция m) X в Y обладает *условно обратным* отображением $m^- : Y \to X$, которое каждой частичной мажоранте (соответственно частичной миноранте) $y \in Y$ отображения m ставит в соответствие наибольший (соответственно наименьший) элемент множества $X(m(x) \leqslant y)$ (соответственно $X(y \leqslant m(x))$).

Согласно этому определению область определения $\operatorname{Dom} m^- \subseteq Y$ условно обратного отображения m^- совпадает с множеством всех частичных мажорант (соответственно минорант) отображения m. При этом для любого вполне изотонного отображения $m : X \to Y$ имеют место очевидные вложения:

$$\operatorname{Im} m \subseteq \operatorname{Dom} m^- \subseteq Y, \quad \operatorname{Im} m^- \subseteq \operatorname{Dom} m \subseteq X. \tag{1}$$

Действительно, если $y \in \operatorname{Im} m$, то y — частичная мажоранта и частичная миноранта отображения m, значит, $y \in \operatorname{Dom} m^-$. С другой стороны, если $x \in \operatorname{Im} m^-$, то по определению условно обратного отображения m^- имеем $x \in X(m(x) \leqslant y)$ (соответственно $x \in X(y \leqslant m(x))$) при некотором $y \in \operatorname{Dom} m^-$. В любом случае $x \in \operatorname{Dom} m$.

Соотношения (1) будем далее использовать по умолчанию, т. е. не будем акцентировать на них внимание читателя.

3.2. Основные свойства условно обратных отображений. Рассмотрим простейшие свойства вполне изотонных отображений и их условно обратных отображений. Отметим, что каждое из омеченных ниже свойств является парным, т. е. состоит из двух параллельных утверждений. Так как в каждом случае второе утверждение является зеркальным отражением первого, то обоснование второго утверждения является фактическим повторением обоснования первого утверждения. Доказательства первых пяти свойств опустим (см. [4]).

Свойство 3.1. *Если m — проекция (соответственно инъекция) X в Y, то для любого $y \in \operatorname{Dom} m^-$ выполняется неравенство $m \circ m^-(y) \leqslant y$ (соответственно $y \leqslant m \circ m^-(y)$).*

Свойство 3.2. *Если m — проекция (соответственно инъекция) X в Y, то для любого $x \in \operatorname{Dom} m$ выполняется неравенство $x \leqslant m^- \circ m(x)$ (соответственно $m^- \circ m(x) \leqslant x$).*

Свойство 3.3. *Если $m : X \to Y$ — вполне изотонное отображение, то условно обратное отображение $m^- : Y \to X$ является изотонным.*

Свойство 3.4. *Если $m : X \to Y$ — вполне изотонное отображение, то для любого $x \in \operatorname{Im} m^-$ выполняется равенство $m^- \circ m(x) = x$, а для любого $y \in \operatorname{Im} m$ выполняется равенство $m \circ m^-(y) = y$.*

Свойство 3.5. *Изотонное отображение $m : X \to Y$ является проекцией (соответственно инъекцией) X в Y тогда и только тогда, когда область определения $\operatorname{Dom} m$ является прямым (соответственно обратным) порядковым идеалом и существует изотонное отображение $r : Y \to X$, удовлетворяющее условиям:*

1) $\operatorname{Dom} r$ *совпадает с множеством всех частичных мажорант (соответственно минорант) отображения* m*;*

2) $m \circ r(y) \leqslant y$ *(соответственно* $y \leqslant m \circ r(y)$*) для любого* $y \in \operatorname{Dom} r$*;*

3) $x \leqslant r \circ m(x)$ *(соответственно* $r \circ m(x) \leqslant x$*) для любого* $x \in \operatorname{Dom} m$.

Отображение r, удовлетворяющее условиям 1), 2), 3), и условно обратное отображение m^- совпадают.

Остальные свойства приведем с полным обоснованием.

Свойство 3.6. *Если отображение n — инъекция (соответственно проекция) Y в X, то условно обратное отображение n^- является проекцией (соответственно инъекцией) X в Y, а второе условно обратное отображение $(n^-)^-$ совпадает с отображением n.*

$\lhd$ Предположим, что n — инъекция Y в X и $n^- : X \to Y$ — его условно обратное отображение. Пусть $m := n^-$ и $r := n : Y \to X$. По определению отображения n^- область определения $\operatorname{Dom} m$ является прямым порядковым идеалом. Пусть y — частичная мажоранта отображения m. Значит, при некотором $x \in \operatorname{Dom} m$ имеем $y' := m(x) \leqslant y$. Из вложений (1) вытекает, что $y' \in \operatorname{Im} m = \operatorname{Im} n^- \subseteq \operatorname{Dom} n = \operatorname{Dom} r$. Значит, по определению вполне изотонного отображения $y \in \operatorname{Dom} r$. С другой стороны, пусть $y \in \operatorname{Dom} r$ и $x := r(y)$. Тогда $x \in \operatorname{Im} n \subseteq \operatorname{Dom} n^- = \operatorname{Dom} m$ и по свойству 3.2 имеем $m(x) = n^- \circ n(y) \leqslant y$, т. е. y — частичная мажоранта отображения m. Следовательно, отображения m и r удовлетворяют условию 1) из формулировки свойства 3.5. Далее, по свойству 3.2 для любого $y \in \operatorname{Dom} r = \operatorname{Dom} n$ выполняется неравенство $m \circ r(y) = n^- \circ n(y) \leqslant y$, т. е. отображения m и r удовлетворяют условию 2) из формулировки свойства 3.5. По свойству 3.1 для любого $x \in \operatorname{Dom} m = \operatorname{Dom} n^-$ выполняется неравенство $r \circ m(x) = n \circ n^-(x) \leqslant x$, т. е. отображения m и r удовлетворяют условию 3) из формулировки свойства 3.5. Следовательно, отображения m и r удовлетворяют всем условиям из формулировки свойства 3.5. По этому свойству условно обратное отображение n^- является проекцией X в Y и отображение n является условно обратным для отображения n^-. Свойство доказано. $\rhd$

Следующее свойство существенным образом дополняет отмеченные ранее вложения (1).

Свойство 3.7 *Если вполне изотонное отображение $m : X \to Y$ является строго изотонным, то имеют место вложения:*

$$\operatorname{Dom} m \subseteq \operatorname{Im} m^- \subseteq X, \quad \operatorname{Dom} m^- \subseteq \operatorname{Im} m \subseteq Y.$$

$\lhd$ Предположим, что проекция $m : X \to Y$ является строго изотонной и $x \in \operatorname{Dom} m$. Пусть $y := m(x)$. В силу (1) $y \in \operatorname{Dom} m^-$. Если $x \neq m^-(y)$, то по определению условно обратного отображения $x < m^-(y)$ и $y := m(x) < m \circ m^-(y)$. При этом строгое неравенство $y < m \circ m^-(y)$ противоречит свойству 3.4. Следовательно, $x = m^-(y)$ и $\operatorname{Dom} m \subseteq \operatorname{Im} m^-$. С другой стороны, пусть $y \in \operatorname{Dom} m^-$ и $x := m^-(y) \in \operatorname{Im} m^- \subseteq \operatorname{Dom} m$. Если $y \neq m(x)$, то по свойству 3.6 $m(x) < y$ и $m^- \circ m(x) < m^-(y) =: x$. Неравенство $m^- \circ m(x) < x$ противоречит свойству 3.4. Следовательно, $y = m(x)$ и $\operatorname{Dom} m^- \subseteq \operatorname{Im} m$. Свойство доказано. $\rhd$

3.3. Вполне изотонные неравенства. Пусть $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство отображений $m_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$. Областью определения семейства отображений $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ называем пересечение

$$\operatorname{Dom}\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Dom} m_\lambda.$$

Область определения декартова произведения m_Λ совпадает с декартовым произведением $\prod_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Dom} m_\lambda$. Область определения декартовой степени m^Λ совпадает с декартовой степенью $(\operatorname{Dom} m)^\Lambda$.

Рассмотрим произвольные отображения $m : X \to Y$ и $n : Z \to T$. Говорим, что имеет место функциональное равенство $m = n$, если $m(x) = n(x)$ для любого $x \in \operatorname{Dom}\{m, n\}$. Говорим, что на множестве A имеет место функциональное равенство $m = n$ (отображения m и n совпадают на множестве A), если $A \subseteq \operatorname{Dom}\{m, n\}$ и $m(x) = n(x)$ для любого $x \in A$.

Пусть X, Y, Z и T — частично упорядоченные множества. Говорим, что имеет место функциональное неравенство $m \leqslant n$, если $m(x) \leqslant n(x)$ для любого $x \in \operatorname{Dom}\{m, n\}$. Говорим, что на множестве A имеет место функциональное неравенство $m \leqslant n$, если $A \subseteq \operatorname{Dom}\{m, n\}$ и $m(x) \leqslant n(x)$ для любого $x \in A$.

В дальнейших построениях существенную роль играют функциональные неравенства вида $m \leqslant n$, где $m : X \to Y$ и $n : X \to Y$ — проекции или инъекции одновременно. Такие функциональные неравенства мы называем *вполне изотонными неравенствами*. Рассмотрим ключевые свойства этих неравенств.

Свойство 3.8. *Пусть m и n — проекции. Неравенство $m(x) \leqslant n(x)$ выполняется для любых $x \in \operatorname{Dom} n$ тогда и только тогда, когда неравенство $n^-(y) \leqslant m^-(y)$ выполняется для любых $y \in \operatorname{Dom} n^-$.*

$\lhd$ Предположим, что для любого $x \in \operatorname{Dom} n$ выполняется неравенство $m(x) \leqslant n(x)$. Пусть $y \in \operatorname{Dom} n^-$. Тогда $n^-(y) \in \operatorname{Im} n^- \subseteq \operatorname{Dom} n$ и $m \circ n^-(y) \leqslant n \circ n^-(y)$. По свойству 3.1 имеем $m \circ n^-(y) \leqslant y$. Из этого неравенства вытекает, что y — частичная мажоранта проекции m. По свойству 3.5 $y \in \operatorname{Dom} m^-$ и $m^- \circ m \circ n^-(y) \leqslant m^-(y)$. При этом по свойству 3.2 $n^-(y) \leqslant m^- \circ m \circ n^-(y)$, значит, $n^-(y) \leqslant m^-(y)$.

С другой стороны, предположим, что $n^-(y) \leqslant m^-(y)$ для любого $y \in \operatorname{Dom} n^-$. Пусть $x \in \operatorname{Dom} n$. Тогда $n(x) \in \operatorname{Im} n \subseteq \operatorname{Dom} n^-$ и $n^- \circ n(x) \leqslant m^- \circ n(x)$. По свойству 3.2 имеем $x \leqslant m^- \circ n(x)$. Из этого неравенства вытекает, что x — частичная миноранта инъекции m^-. По свойству 3.5 $x \in \operatorname{Dom} m$ и $m(x) \leqslant m \circ m^- \circ n(x)$. При этом по свойству 3.1 $m(x) \leqslant n(x)$. Свойство доказано. $\rhd$

Свойство 3.9. *Пусть m и n — инъекции. Неравенство $m(x) \leqslant n(x)$ выполняется для любых $x \in \operatorname{Dom} m$ тогда и только тогда, когда неравенство $n^-(y) \leqslant m^-(y)$ выполняется для любых $y \in \operatorname{Dom} m^-$.*

$\lhd$ Предположим, что для любого $x \in \operatorname{Dom} m$ выполняется неравенство $m(x) \leqslant n(x)$. Пусть $y \in \operatorname{Dom} m^-$. Тогда $m^-(y) \in \operatorname{Im} m^- \subseteq \operatorname{Dom} m$ и $m \circ m^-(y) \leqslant n \circ m^-(y)$. По свойству 3.1 имеем $y \leqslant n \circ m^-(y)$. Из этого неравенства вытекает, что y — частичная миноранта инъекции n. По свойству 3.5 $y \in \operatorname{Dom} n^-$ и $n^-(y) \leqslant n^- \circ n \circ m^-(y)$. Значит, по свойству 3.2 имеем $n^-(y) \leqslant m^-(y)$.

С другой стороны, предположим, что $n^-(y) \leqslant m^-(y)$ для любого $y \in \operatorname{Dom} m^-$. Пусть $x \in \operatorname{Dom} m$. Тогда $m(x) \in \operatorname{Im} m \subseteq \operatorname{Dom} m^-$ и $n^- \circ m(x) \leqslant m^- \circ m(x)$. По свойству 3.2 имеем $n^- \circ m(x) \leqslant x$. Из этого неравенства вытекает, что x — частичная мажоранта проекции n^-. По свойству 3.5 $x \in \operatorname{Dom} n$ и $n \circ n^- \circ m(x) \leqslant n(x)$. Значит, по свойству 3.1 $m(x) \leqslant n(x)$. Свойство доказано. $\rhd$

Свойства 3.8 и 3.9 приводят к необходимости рассмотрения двух параллельных ситуаций:

- m, n — проекции и $\operatorname{Dom} n \subseteq \operatorname{Dom} m$;
- m, n — инъекции и $\operatorname{Dom} m \subseteq \operatorname{Dom} n$.

Объединим эти ситуации в используемой нами терминологии. Для этого дадим следующее определение. Пусть m и n — вполне изотонные отображения. Говорим, что *выполняется вполне изотонное неравенство* $m \leqslant n$, если имеет место одна из указанных ситуаций и выполнено функциональное неравенство $m \leqslant n$, т. е. $m(x) \leqslant n(x)$ для любого $x \in \operatorname{Dom}\{m, n\}$.

Из свойств 3.8 и 3.9 вытекает справедливость следующего утверждения.

Свойство 3.10. *Вполне изотонное неравенство $m \leqslant n$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется вполне изотонное неравенство $n^- \leqslant m^-$.*

Отметим, что обе рассмотренные выше параллельные ситуации реализуются одновременно, если, например, проекции (соответственно инъекции) m и n являются инъективными отображениями, т. е. имеют место равенства $\operatorname{Dom} m = \operatorname{Dom} n = X$.

4. Дуальные схемы

4.1. Композиции вполне изотонных отображений. Продолжим рассмотрение свойств вполне изотонных отображений. Пусть X, Y и Z — частично упорядоченные множества. Композиция $n \circ m$ отображений $m : X \to Y$ и $n : Y \to Z$ определяется как отображение $X \to Z \mid x \to n(m(x))$ с областью определения

$$\operatorname{Dom}(n \circ m) := \big\{x \in \operatorname{Dom} m : \, m(x) \in \operatorname{Dom} n\big\}.$$

При рассмотрении произвольной композиции $n \circ m$ всегда предполагаем, что выполнено условие ее существования $\operatorname{Im} m \cap \operatorname{Dom} n \neq \varnothing$. Справедливо следующее утверждение.

Свойство 4.1. *Если отображения $m : X \to Y$ и $n : Y \to Z$ являются проекциями (соответственно инъекциями), то композиция $n \circ m$ является проекцией (соответственно инъекцией) и ее условно обратное отображение совпадает с композицией $m^- \circ n^-$.*

$\lhd$ Предположим, что отображения m и n являются проекциями. По свойству 3.3 отображения m и n и их условно обратные отображения m^- и n^- являются изотонными, значит, отображения $n \circ m$ и $m^- \circ n^-$ тоже являются изотонными. Осталось убедиться, что отображение $n \circ m$ является проекцией из X в Z и его условно обратное отображение $(n \circ m)^-$ совпадает с отображением $m^- \circ n^-$. По свойству 3.5 для этого достаточно показать, что множество $\operatorname{Dom} n \circ m$ является прямым порядковым идеалом и изотонное отображение $m^- \circ n^-$ удовлетворяет условиям:

1) $\operatorname{Dom}(m^- \circ n^-)$ совпадает с множеством всех частичных мажорант отображения $n \circ m$;

2) $n \circ m \circ m^- \circ n^-(z) \leqslant z$ для любого $z \in \operatorname{Dom}(m^- \circ n^-)$;

3) $x \leqslant m^- \circ n^- \circ n \circ m(x)$ для любого $x \in \operatorname{Dom}(n \circ m)$.

Прежде всего, пусть $y \in \operatorname{Dom} n \circ m$ и $y' \leqslant y$. По определению композиции $y \in \operatorname{Dom} m$ и $m(y) \in \operatorname{Dom} n$. Значит, $y' \in \operatorname{Dom} m$ и $m(y') \leqslant m(y)$, т. е. $m(y') \in \operatorname{Dom} n$. Это означает, что $y' \in \operatorname{Dom} n \circ m$, т. е. множество $\operatorname{Dom} n \circ m$ является прямым порядковым идеалом.

Проверим выполнимость условия 1). Пусть $\operatorname{Dom}(n \circ m)^-$ — множество всех частичных мажорант отображения $n \circ m$ и $z \in \operatorname{Dom}(n \circ m)^-$. Значит, множество $X(n \circ m \leqslant z)$ не является пустым. Выберем произвольный элемент x из этого множества. Тогда по определению композиции $m(x) \in \operatorname{Dom} n$ и $n \circ m(x) \leqslant z$, значит, $z \in \operatorname{Dom} n^-$. Отображения m и n являются проекциями, значит, по свойству 3.2 выполняется неравенство $m(x) \leqslant n^- \circ n \circ m(x) \leqslant n^-(z)$, следовательно, $n^-(z) \in \operatorname{Dom} m^-$. Отсюда следует, что $z \in \operatorname{Dom}(m^- \circ n^-)$. Следовательно, $\operatorname{Dom}(n \circ m)^- \subseteq \operatorname{Dom}(m^- \circ n^-)$. С другой стороны, если $z \in \operatorname{Dom}(m^- \circ n^-)$, то по определению композиции $z \in \operatorname{Dom} n^-$ и $n^-(z) \in \operatorname{Dom} m^-$. Из включения $n^-(z) \in \operatorname{Dom} m^-$ вытекает, что при некотором $x \in \operatorname{Dom} m$ выполняется неравенство $m(x) \leqslant n^-(z)$. Значит, по свойству 3.1 из включения $z \in \operatorname{Dom} n^-$ следует выполнение неравенств $n \circ m(x) \leqslant n \circ n^-(z) \leqslant z$. Отсюда вытекает, что $z \in \operatorname{Dom}(n \circ m)^-$. Следовательно, $\operatorname{Dom}(m^- \circ n^-) \subseteq \operatorname{Dom}(n \circ m)^-$, т. е. $\operatorname{Dom}(m^- \circ n^-) = \operatorname{Dom}(n \circ m)^-$.

Покажем, что выполняется условие 2). Действительно, предположим, что $z \in \operatorname{Dom}(m^- \circ n^-)$. Тогда $m^- \circ n^-(z) \in \operatorname{Im} m^- \subseteq \operatorname{Dom} m$ и по определению композиции $n^-(z) \in \operatorname{Dom} m^-$. Так как отображение m является проекцией, то по свойству 3.1 выполняется неравенство $m \circ m^- \circ n^-(z) \leqslant n^-(z)$. Аналогично, так как отображение n является проекцией, то выполняются неравенства $n \circ m \circ m^- \circ n^-(z) \leqslant n \circ n^-(z) \leqslant z$.

Далее покажем, что выполняется условие 3). Действительно, пусть $x \in \operatorname{Dom}(n \circ m)$. Тогда $m(x) \in \operatorname{Dom} n$ и $n \circ m(x) \in \operatorname{Im} n \subseteq \operatorname{Dom} n^-$. Так как отображение n является проекцией, то по свойству 3.2 выполняется неравенство $m(x) \leqslant n^- \circ n \circ m(x)$. Аналогично, так как отображение m является проекцией, то по свойству 3.2 выполняются неравенства $x \leqslant m^- \circ m(x) \leqslant m^- \circ n^- \circ n \circ m(x)$. Таким образом, свойство доказано. $\triangleright$

4.2. Полукоммутативные диаграммы. Пусть X, Y и Z — частично упорядоченные множества. Предположим, что $k : X \to Y$, $l : Z \to Y$ и $m : X \to Z$ — произвольные проекции (соответственно инъекции); k^-, l^-, m^- — их условно обратные отображения. Рассмотрим диаграммы

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr, "l"] & \\ X \arrow[ur, "m"] \arrow[rr, "k"'] & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "k^-"] \arrow[dr, "l^-"'] & & X \\ & Z \arrow[ur, "m^-"'] & \end{tikzcd} \quad . \tag{2}$$

Коммутативность первой из этих диаграмм означает выполнение функционального равенства $k = l \circ m$, а коммутативность второй из этих диаграмм означает выполнение функционального равенства $m^- \circ l^- = k^-$.

Отмечаем, что первая из диаграмм (2) коммутативна тогда и только тогда, когда вторая из этих диаграмм коммутативна. Действительно, предположим, что первая из диаграмм (2) коммутативна, т. е. $k = l \circ m$. По свойству 4.1 условно обратные отображение k^-, l^- и m^- являются инъекциями (соответственно проекциями). При этом инъекция k^- совпадает с композицией $m^- \circ l^-$, т. е. имеет место функциональное равенство

$m^- \circ l^- = k^-$, значит, вторая из диаграмм (2) тоже коммутативна. Далее предположим, что вторая из диаграмм (2) коммутативна. По свойству 4.1 $(k^-)^- = (l^-)^- \circ (m^-)^-$, где $(k^-)^-$, $(l^-)^-$ и $(m^-)^-$ — вторые условно обратные отображения. По свойству 3.6 отображения $(k^-)^-$, $(l^-)^-$ и $(m^-)^-$ совпадают с отображениями k, l и m соответственно. Значит, $k = l \circ m$. Следовательно, первая диаграмма тоже коммутативна.

Пусть X, Y, Z и T — частично упорядоченные множества. Рассмотрим диаграммы

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "m"] & Z \arrow[d, "l"] \\ X \arrow[u, "n"] \arrow[r, "k"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "k^-"] \arrow[d, "l^-"'] & X \\ Z \arrow[r, "m^-"'] & T \arrow[u, "n^-"'] \end{tikzcd}, \tag{3}$$

где k, l, m и n — проекции (соответственно инъекции). Вторая из этих диаграмм получена из первой диаграммы заменой вполне изотонных отображений k, l, m и n их условно обратными отображениями. Коммутативность этих диаграмм по определению означает выполнение функциональных равенств $k = l \circ m \circ n$ и $n^- \circ m^- \circ l^- = k^-$ соответственно.

Убедимся, что первая из диаграмм (3) коммутативна тогда и только тогда, когда вторая из этих диаграмм коммутативна. Действительно, предположим, что первая из диаграмм (3) коммутативна, т. е. $k = l \circ m \circ n$. По свойству 4.1 условно обратное отображение $(m \circ n)^-$ является инъекцией (соответственно проекцией) и совпадает с композицией $n^- \circ m^-$. Условно обратное отображение $(l \circ (m \circ n))^-$ тоже является инъекцией (соответственно проекцией) и совпадает с композицией $(m \circ n)^- \circ l^-$. Значит, условно обратное отображение k^- является инъекцией (соответственно проекцией) и совпадает с композицией $n^- \circ m^- \circ l^-$. Следовательно, вторая из диаграмм (3) тоже коммутативна. Далее предположим, что вторая из диаграмм (3) коммутативна. По уже доказанному имеет место функциональное равенство $(k^-)^- = (l^-)^- \circ (m^-)^- \circ (n^-)^-$, значит, по свойству 3.6 имеет место функциональное равенство $k = l \circ m \circ n$. Следовательно, первая диаграмма тоже коммутативна.

Осталось рассмотреть диаграммы

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "m"] & Z \\ X \arrow[u, "n"] \arrow[r, "k"'] & Y \arrow[u, "l"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "k^-"] & X \\ Z \arrow[u, "l^-"] \arrow[r, "m^-"'] & T \arrow[u, "n^-"'] \end{tikzcd}, \tag{4}$$

где k, l, m и n — проекции (соответственно инъекции). Вторая из этих диаграмм, как и прежде, получена из первой диаграммы заменой вполне изотонных отображений k, l, m и n их условно обратными отображениями. Коммутативность этих диаграмм по определению означает выполнение функциональных равенств $l \circ k = m \circ n$ и $n^- \circ m^- = k^- \circ l^-$ соответственно. Сейчас читатель сам может легко убедиться, что первая из диаграмм (4) коммутативна тогда и только тогда, когда вторая из этих диаграмм коммутативна.

Предположим, что k, l, и m — проекции или инъекции одновременно. Говорим, что первая (соответственно вторая) из диаграмм (2) *полукоммутативна*, если имеет место вполне изотонное неравенство $k \leqslant l \circ m$ (соответственно $m^- \circ l^- \leqslant k^-$).

Из свойства 3.10 вытекает, что первая из диаграмм (2) полукоммутативна тогда и только тогда, когда вторая из этих диаграмм полукоммутативна. Действительно, полукоммутативность первой из диаграмм (2) означает, что выполнено вполне изотонное неравенство $k \leqslant l \circ m$. По свойству 3.10 это условие равносильно выполнимости вполне изотонного неравенства $(l\circ m)^- \leqslant k^-$ или выполнимости вполне изотонного неравенства $m^-\circ l^- \leqslant k^-$, т. е. равносильно полукоммутативности второй из диаграмм (2).

Далее предположим, что отображения k, l, m и n — проекции или инъекции одновременно. Говорим, что первая (соответственно вторая) из диаграмм (3) *полукоммутативна*, если имеет место вполне изотонное неравенство $k \leqslant l\circ m\circ n$ (соответственно $n^-\circ m^-\circ l^- \leqslant k^-$). Легко убедиться, что первая из диаграмм (3) полукоммутативна тогда и только тогда, когда вторая из этих диаграмм полукоммутативна. Действительно, полукоммутативность первой из диаграмм (3) означает, что выполнено вполне изотонное неравенство $k \leqslant l\circ m\circ n$. По свойству 3.10 это условие равносильно выполнимости вполне изотонного неравенства $(l\circ m\circ n)^- \leqslant k^-$ или выполнимости вполне изотонного неравенства $n^-\circ m^-\circ l^- \leqslant k^-$, т. е. равносильно полукоммутативности второй из диаграмм (3).

Наконец, первая (соответственно вторая) из диаграмм (4) *полукоммутативна*, если имеет место вполне изотонное неравенство $l\circ k \leqslant m\circ n$ (соответственно $n^-\circ m^- \leqslant k^-\circ l^-$). При этом первая из диаграмм (4) полукоммутативна тогда и только тогда, когда вторая из этих диаграмм полукоммутативна.

4.3. Дуальные схемы. Пусть (X, Y) и (Z, T) — произвольные упорядоченные пары частично упорядоченных множеств. Выберем произвольные вполне изотонные отображения $k : X \to Z$ и $l : Y \to T$. Упорядоченную пару $((X, Y), (Z, T))$ называем *дуальной бипарой* и обозначаем символом $\langle (X, Y), (Z, T)\rangle$, а упорядоченную пару (k, l) при этом называем *дуальной парой* и обозначаем символом $\langle k, l\rangle$.

Рассмотрим конкретную дуальную бипару $\langle (X, Y), (Z, T)\rangle$, (обратную) дуальную бипару $\langle (Y, X), (T, Z)\rangle$ и диаграммы

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "n"] & T \\ X \arrow[u, "k"] \arrow[r, "m"'] & Y \arrow[u, "l"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "m^-"] & X \\ T \arrow[u, "l^-"] \arrow[r, "n^-"'] & Z \arrow[u, "k^-"'] \end{tikzcd} . \tag{5}$$

Здесь k, l, m и n — проекции или инъекции одновременно. Если первая из диаграмм (5) является полукоммутативной, то вполне изотонное отображение m называем *дуальным* к вполне изотонному отображению n относительно дуальной пары $\langle k, l\rangle$. По определению полукоммутативных диаграмм отображение m является дуальным к отображению n, если выполняется вполне изотонное неравенство $l\circ m \leqslant n\circ k$.

Далее рассмотрим диаграммы

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "n"] \arrow[d, "k^-"'] & T \arrow[d, "l^-"] \\ X \arrow[r, "m"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "m^-"] \arrow[d, "l"'] & X \arrow[d, "k"] \\ T \arrow[r, "n^-"'] & Z \end{tikzcd} . \tag{6}$$

Здесь k^-, l^-, m и n — проекции или инъекции одновременно. Если первая из диаграмм (6) является полукоммутативной, то вполне изотонное отображение m называем *дуальным* к вполне изотонному отображению n относительно дуальной пары $\langle k^-, l^-\rangle$. По определению полукоммутативных диаграмм отображение m является дуальным к отображению n, если выполняется вполне изотонное неравенство $m\circ k^- \leqslant l^-\circ n$.

Затем рассмотрим диаграммы

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "n"] & T \arrow[d, "l^-"] \\ X \arrow[u, "k"] \arrow[r, "m"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "m^-"] \arrow[d, "l"'] & X \\ T \arrow[r, "n^-"'] & Z \arrow[u, "k^-"'] \end{tikzcd} . \tag{7}$$

Здесь k, l^-, m и n — проекции или инъекции одновременно. Если первая из диаграмм (7) является полукоммутативной, то вполне изотонное отображение m называем *дуальным* к отображению n относительно дуальной пары $\langle k, l^- \rangle$. По определению полукоммутативных диаграмм отображение m является дуальным к отображению n, если выполняется вполне изотонное неравенство $m \leqslant l^- \circ n \circ k$.

Наконец, рассмотрим диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "l"'] & Y \\ Z \arrow[r, "n"'] & T \arrow[u, "k^-"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "n^-"] & Z \arrow[d, "l^-"] \\ Y \arrow[u, "k"] \arrow[r, "m^-"'] & X \end{tikzcd} . \tag{8}$$

Здесь k^-, l, m и n — проекции или инъекции одновременно. Если первая из диаграмм (8) является полукоммутативной, то вполне изотонное отображение m называем *дуальным* к отображению n относительно дуальной пары $\langle l, k^- \rangle$. По определению полукоммутативных диаграмм отображение m является дуальным к отображению n, если выполняется вполне изотонное неравенство $k \circ n \circ l^- \leqslant m$.

По свойствам полукоммутативных диаграмм полукоммутативность первой из диаграмм (5) равносильна полукоммутативности второй из этих диаграмм, которая означает выполнение вполне изотонного неравенства $k^- \circ n^- \leqslant m^- \circ l^-$. Аналогичное утверждение справедливо и по отношению к диаграммам (6), (7) и (8). Полукоммутативность второй из диаграмм (6) (соответственно (7) или (8)) означает выполнение вполне изотонного неравенства $n^- \circ l \leqslant k \circ m^-$ (соответственно $k^- \circ n^- \circ l \leqslant m^-$ или $m^- \leqslant l^- \circ n^- \circ k$). Это означает, что справедливо следующее утверждение.

Свойство 4.2. *Вполне изотонное отображение m является дуальным к вполне изотонному отображению n тогда и только тогда, когда условно обратное отображение m^- является дуальным к условно обратному отображению n^-.*

Полукоммутативные диаграммы (5), (6), (7) и (8) принято называть *дуальными схемами.* Каждая дуальная схема включает две полукоммутативные диаграммы, по любой из которых другая восстанавливается однозначно. Замечательным является то, что все четыре дуальные схемы объединяются одним построением, лежащим в основе доказательства односторонних теорем двойственности. При этом каждая из отмеченных дуальных схем играет в этом построении свою существенную роль и не может быть заменена другой без потери общности проводимых рассуждений.

5. Дескрипторы

5.1. Определение дескрипторов. Пусть Λ — непустое множество, X^Λ и Y^Λ — декартовы степени частично упорядоченных множеств X и Y соответственно. Инъекцию $u : X^\Lambda \to X$ называем *дескриптором* (на множестве X), если для любого $x \in X$, удовлетворяющего условию $x^\Lambda := (x : \lambda \in \Lambda) \in \operatorname{Dom} u$, выполняется неравенство

$$x \leqslant u\bigl(x^\Lambda\bigr).$$

Дескриптор u называем *экстериоризатором* в точке $x \in X$, если выполняется равенство $x = u(x^\Lambda)$. Проекцию $v : Y^\Lambda \to Y$ называем *дескриптором* (на множестве Y), если для любого $y \in Y$, удовлетворяющего условию $y^\Lambda := (y : \lambda \in \Lambda) \in \operatorname{Dom} v$, выполняется неравенство

$$v\big(y^\Lambda\big) \leqslant x.$$

Дескриптор v называем *интериоризатором* в точке $y \in Y$, если выполняется равенство $v(y^\Lambda) = y$.

Рассмотрим пример простейшего экстериоризатора и пример простейшего интериоризатора.

Пример 5.1. Пусть Λ и A — непустые множества, X — совокупность всех непустых подмножеств множества A (частично упорядоченная по вложению $\subseteq$), X^Λ — декартова степень частично упорядоченного множества X. Изотонное отображение

$$u : X^\Lambda \to X \,\big|\, x_\Lambda := (x_\lambda : \lambda \in \Lambda) \mapsto \bigcap_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$$

является инъекцией из множества X^Λ на множество X. Действительно, область определения $\operatorname{Dom} u$ отображения u совпадает с совокупностью всех элементов $x_\Lambda := (x_\lambda : \lambda \in \Lambda) \in X^\Lambda$, для которых пересечение $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ не является пустым. Эта совокупность является обратным порядковым идеалом. При этом для любого $y \in X$ множество $X^\Lambda(y \leqslant u(x_\Lambda))$ обладает наименьшим элементом. Этим элементом является элемент $y^\Lambda := (y : \lambda \in \Lambda) \in X^\Lambda$. Осталось заметить, что $x = u(x^\Lambda)$ для любого $x \in X$. Это означает, что инъекция u является дескриптором (на множестве X) и экстериоризатором в любой точке $x \in X$.

Пример 5.2. Пусть Λ и B — непустые множества, Y — совокупность всех непустых подмножеств множества B (частично упорядоченная по вложению $\subseteq$), Y^Λ — декартова степень частично упорядоченного множества Y. Изотонное отображение

$$v : Y^\Lambda \mapsto Y \,\big|\, y_\Lambda := (y_\lambda : \lambda \in \Lambda) \mapsto \bigcup_{\lambda \in \Lambda} y_\lambda$$

является проекцией множества Y^Λ на множество Y. Действительно, область определения $\operatorname{Dom} v$ отображения v совпадает с Y^Λ и является прямым порядковым идеалом. При этом для любого $x \in Y$ множество $Y^\Lambda(v(y_\Lambda) \leqslant x)$ обладает наибольшим элементом. Этим элементом является элемент $x^\Lambda := (x : \lambda \in \Lambda) \in Y^\Lambda$. При этом $v(y^\Lambda) = y$ для любого $y \in Y$. Это означает, что проекция v является дескриптором (на множестве Y) и интериоризатором в любой точке $y \in Y$.

5.2. Дуальные дескрипторы. Понятие дуального дескриптора требует обращения к дуальным схемам (7) и (8). Если Λ — множество и k — проекция (соответственно инъекция), то декартова степень $\mathbf{k} := k^\Lambda$ тоже является проекцией (соответственно инъекцией). При этом условно обратное отображение $\mathbf{k}^-$ совпадает с декартовой степенью условно обратного отображения k^-, т. е.

$$\mathbf{k}^- := \big(k^\Lambda\big)^- = \big(k^-\big)^\Lambda.$$

Пусть X и Y — частично упорядоченные множества, $\overline{Y}$ — частично упорядоченное множество Y с обратным отношением порядка. Рассмотрим дуальную бипару

$\langle (X^\Lambda, X), (\overline{Y}^\Lambda, \overline{Y}) \rangle$ и две дуальные схемы

$$\begin{tikzcd} X^\Lambda \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathbf{l}"'] & X \\ \overline{Y}^\Lambda \arrow[r, "\bar v"'] & \overline{Y} \arrow[u, "k^-"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{Y}^\Lambda \arrow[r, "\bar v"] \arrow[d, "\mathbf{k}^-"'] & \overline{Y} \\ X^\Lambda \arrow[r, "u"'] & X \arrow[u, "l"'] \end{tikzcd}, \tag{9}$$

где u, l и $\mathbf{l} := l^\Lambda$ — инъекции, а v, k и $\mathbf{k}$ — проекции. Символом $\bar v$ обозначаем инъекцию $\overline{Y}^\Lambda \to \overline{Y} \mid y \mapsto v(y)$. Полагаем, что u и v — дескрипторы.

Говорим, что дескриптор u является *дуальным* к дескриптору v относительно дуальной пары $\langle \mathbf{l}, k^- \rangle$, если инъекция u является дуальной к инъекции $\bar v$ относительно дуальной пары $\langle \mathbf{l}, k^- \rangle$. Это условие означает, что первая из диаграмм (9) является полукоммутативной, т. е. выполняется вполне изотонное неравенство $k^- \circ \bar v \circ \mathbf{l} \leqslant u$.

Говорим, что дескриптор v является *дуальным* к дескриптору u относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}^-, l \rangle$, если инъекция $\bar v$ является дуальной к инъекции u относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}^-, l \rangle$. Это условие означает, что вторая из диаграмм (9) является полукоммутативной, т. е. выполняется вполне изотонное неравенство $l \circ u \circ \mathbf{k}^- \leqslant \bar v$.

Теорема 5.1. *Если дескриптор u является дуальным к дескриптору v и является экстериоризатором в некоторой точке $x \in X$ $(k \leqslant l)$, то дескриптор v является интериоризатором в любой точке $y \in \overline{Y}$, удовлетворяющей условиям $k(x) \leqslant y \leqslant l(x)$ и $v(y^\Lambda) \in \operatorname{Im} k$.*

Если дескриптор v является дуальным к дескриптору u и является интериоризатором в некоторой точке $y \in \overline{Y}$ $(l^- \leqslant k^-)$, то дескриптор u является экстериоризатором в любой точке $x \in X$, удовлетворяющей условиям $l^-(y) \leqslant x \leqslant k^-(y)$ и $u(x^\Lambda) \in \operatorname{Im} l^-$.

$\lhd$ Во-первых, пусть дескриптор u является дуальным к дескриптору v. Значит, имеет место вполне изотонное неравенство $k^- \circ \bar v \circ \mathbf{l} \leqslant u$, т. е. для любого $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} k^- \circ \bar v \circ \mathbf{l}$ выполняется неравенство $k^- \circ \bar v \circ \mathbf{l}(x_\Lambda) \leqslant u(x_\Lambda)$. Предположим, что u — экстериоризатор в некоторой точке $x \in X$ $(k \leqslant l)$, значит, $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} u$ и $x = u(x^\Lambda)$. Выберем произвольную точку $y \in \overline{Y}$, которая удовлетворяет условиям $k(x) \leqslant y \leqslant l(x)$ и $v(y^\Lambda) \in \operatorname{Im} k$. Так как $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} \bar v$ и $y^\Lambda \leqslant \mathbf{l}(x^\Lambda)$, то по определению инъекции $\mathbf{l}(x^\Lambda) \in \operatorname{Dom} \bar v$ и выполняется неравенство $\bar v(y^\Lambda) \leqslant \bar v \circ \mathbf{l}(x^\Lambda)$. Так как $v(y^\Lambda) \in \operatorname{Im} k \subseteq \operatorname{Dom} k^-$ и k^- — инъекция, то $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} k^- \circ \bar v \circ \mathbf{l}$ и

$$k^- \circ \bar v\big(y^\Lambda\big) \leqslant k^- \circ \bar v \circ \mathbf{l}\big(x^\Lambda\big) \leqslant u\big(x^\Lambda\big) = x.$$

По свойству 3.4 из условия $v(y^\Lambda) \in \operatorname{Im} k$ вытекает, что

$$\bar v\big(y^\Lambda\big) = k \circ k^- \circ \bar v\big(y^\Lambda\big) \leqslant k(x) \leqslant y.$$

Это означает, что $y \leqslant v(y^\Lambda)$ в множестве Y. По определению дескриптора v выполняется обратное неравенство $v(y^\Lambda) \leqslant y$, значит, $v(y^\Lambda) = y$, т. е. дескриптор v является интериоризатором в точке y.

Во-вторых, пусть дескриптор v является дуальным к дескриптору u. Значит, имеет место вполне изотонное неравенство $l \circ u \circ \mathbf{k}^- \leqslant \bar v$, т. е. для любого $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} l \circ u \circ \mathbf{k}^-$ выполняется неравенство $l \circ u \circ \mathbf{k}^-(y_\Lambda) \leqslant \bar v(y_\Lambda)$. Предположим, что v — интериоризатор в некоторой точке $y \in \overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$, значит, $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} v$ и $v(y^\Lambda) = y$. Выберем произвольную точку $x \in X$, которая удовлетворяет условиям $l^-(y) \leqslant x \leqslant k^-(y)$ и $u(x^\Lambda) \in \operatorname{Im} l^-$. Так как $x^\Lambda \leqslant \mathbf{k}^-(y^\Lambda)$ и $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} u$, то по определению инъекции $\mathbf{k}^-(y^\Lambda) \in \operatorname{Dom} u$ и выполняется неравенство $u(x^\Lambda) \leqslant u \circ \mathbf{k}^-(y^\Lambda)$. Так как $u(x^\Lambda) \in \operatorname{Im} l^- \subseteq \operatorname{Dom} l$ и l — инъекция, то $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} l \circ u \circ \mathbf{k}^-$ и

$$l \circ u\bigl(x^\Lambda\bigr) \leqslant l \circ u \circ \mathbf{k}^-\bigl(y^\Lambda\bigr) \leqslant \bar{v}\bigl(y^\Lambda\bigr) = y.$$

По свойству 3.4 из условия $u(x^\Lambda) \in \operatorname{Im} l^-$ вытекает, что

$$u\bigl(x^\Lambda\bigr) = l^- \circ l \circ u\bigl(x^\Lambda\bigr) \leqslant l^- \circ \bar{v}\bigl(y^\Lambda\bigr) = l^-(y) \leqslant x.$$

Это означает, что $u(x^\Lambda) \leqslant x$. По определению дескриптора u выполняется обратное неравенство $x \leqslant u(x^\Lambda)$, значит, $x = u(x^\Lambda)$, т. е. дескриптор u является экстериоризатором в точке x. Таким образом, теорема доказана. $\rhd$

Из теоремы 5.1 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 5.2. *Если дескриптор u является дуальным к дескриптору v и является экстериоризатором в любой точке множества $X(k \leqslant l)$, то дескриптор v является интериоризатором в любой точке y множества $\overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$, удовлетворяющей условию $v(y^\Lambda) \in \operatorname{Im} k$.*

Если дескриптор v является дуальным к дескриптору u и является интериоризатором в любой точке множества $\overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$, то дескриптор u является экстериоризатором в любой точке x множества $X(k \leqslant l)$, удовлетворяющей условию $u(x^\Lambda) \in \operatorname{Im} l^-$.

$\lhd$ Во-первых, предположим, что дескриптор u является дуальным к дескриптору v и является экстериоризатором в любой точке множества $X(k \leqslant l)$. Выберем произвольную точку $y \in \overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$, удовлетворяющую условию $v(y^\Lambda) \in \operatorname{Im} k$, и произвольную точку x, удовлетворяющую неравенствам $l^-(y) \leqslant x \leqslant k^-(y)$. По свойствам вполне изотонных отображений $x \in \operatorname{Dom}\{k, l\}$ и

$$k(x) \leqslant k \circ k^-(y) \leqslant y \leqslant l \circ l^-(y) \leqslant l(x).$$

При этом $x \in X(k \leqslant l)$, следовательно, по теореме 5.1 дескриптор v является интериоризатором в точке y.

Во-вторых, предположим, что дескриптор v является дуальным к дескриптору u и является интериоризатором в любой точке y из множества $\overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$. Выберем произвольную точку $x \in X(k \leqslant l)$, удовлетворяющую условию $u(x^\Lambda) \in \operatorname{Im} l^-$, и произвольную точку y, удовлетворяющую неравенствам $k(x) \leqslant y \leqslant l(x)$. По свойствам вполне изотонных отображений $y \in \operatorname{Dom}\{l^-, k^-\}$ и

$$l^-(y) \leqslant l^- \circ l(x) \leqslant x \leqslant k^- \circ k(x) \leqslant k^-(y).$$

При этом $y \in \overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$, следовательно, по теореме 5.1 дескриптор u является экстериоризатором в точке x. Теорема доказана. $\rhd$

6. Односторонние теоремы двойственности

6.1. Экстериоризация и интериоризация. Пусть X — частично упорядоченное множество, $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство частично упорядоченных множеств. Выберем произвольное семейство $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ инъекций $m_\lambda : X_\lambda \to X$ и произвольное семейство $\{n_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ проекций $n_\lambda : X \to X_\lambda$. Декартовы произведения $\mathbf{m} : X_\Lambda \to X^\Lambda$ и $\mathbf{n} : X^\Lambda \to X_\Lambda$ этих семейств являются инъекцией и проекцией соответственно. Если $u : X^\Lambda \to X$ — какая-либо инъекция, то равенство

$$x = u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\bigl(x^\Lambda\bigr) \tag{10}$$

называем правилом *внешнего описания* (*экстериоризации*), если для любого $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} u$ выполняется неравенство $x_\Lambda \leqslant \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x_\Lambda)$. Если равенство (10) выполнено для какого-либо элемента $x \in X$ и дескриптор u при этом является экстериоризатором в точке x, то говорим, что элемент x допускает *внешнее описание* (*экстериоризацию*) по правилу (10). Отметим, что неравенство $x_\Lambda \leqslant \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x_\Lambda)$ будет выполнено для любого $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} u$, например, если проекция $\mathbf{n}$ совпадает с условно обратным отображением $\mathbf{m}^-$ и выполнены вложения $\operatorname{Im} \mathbf{m} \subseteq \operatorname{Dom} u \subseteq \operatorname{Dom} \mathbf{m}^-$.

Пусть Y — тоже частично упорядоченное множество, $\{Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство частично упорядоченных множеств. Выберем произвольное семейство $\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ проекций $p_\lambda : Y_\lambda \to Y$ и произвольное семейство $\{q_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ инъекций $q_\lambda : Y \to Y_\lambda$. Декартовы произведения $\mathbf{p} : Y_\Lambda \to Y^\Lambda$ и $\mathbf{q} : Y^\Lambda \to Y_\Lambda$ этих семейств являются проекцией и инъекцией соответственно. Если $v : Y^\Lambda \to Y$ — какая-либо проекция, то равенство

$$v \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{q}(y^\Lambda) = y \tag{11}$$

называем правилом *внутреннего описания* (*интериоризации*), если для любого $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} v$ выполняется неравенство $\mathbf{p} \circ \mathbf{q}(y_\Lambda) \leqslant y_\Lambda$. Если равенство (11) выполнено для какого-либо элемента $y \in Y$ и дескриптор v при этом является интериоризатором в точке y, то говорим, что элемент y допускает *внутреннее описание* (*интериоризацию*) по правилу (11). Отметим, что неравенство $\mathbf{p} \circ \mathbf{q}(y_\Lambda) \leqslant y_\Lambda$ будет выполнено для любого $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} v$, например, если инъекция $\mathbf{q}$ совпадает с условно обратным отображением $\mathbf{p}^-$ и $\operatorname{Im} \mathbf{p} \subseteq \operatorname{Dom} v \subseteq \operatorname{Dom} \mathbf{p}^-$.

6.2. Дуальные описания. Понятие дуального описания требует обращения к дуальным схемам (5) и (6). Пусть $\{h_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство вполне изотонных отображений $h_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$. Будем считать, что отображения $h_\lambda : X_\lambda \to \overline{Y}_\lambda$ являются инъекциями, значит, декартово произведение $\mathbf{h} : X_\Lambda \to \overline{Y}_\Lambda$ тоже является инъекцией Здесь символы $\overline{Y}_\lambda$ и $\overline{Y}_\Lambda$ обозначают частично упорядоченные множества Y_λ и Y_Λ, соответственно, с обратными порядками. Далее рассмотрим две дуальные бипары

$$\big\langle (X_\Lambda, X^\Lambda), (\overline{Y}_\Lambda, \overline{Y}^\Lambda) \big\rangle, \quad \big\langle (X^\Lambda, X_\Lambda), (\overline{Y}^\Lambda, \overline{Y}_\Lambda) \big\rangle$$

и две дуальные схемы

$$\begin{array}{ccc} X_\Lambda & \xrightarrow{\mathbf{m}} & X^\Lambda \\ {\scriptstyle \mathbf{h}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{l}} \\ \overline{Y}_\Lambda & \xrightarrow[\bar{\mathbf{p}}]{} & \overline{Y}^\Lambda \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X^\Lambda & \xrightarrow{\mathbf{n}} & X_\Lambda \\ {\scriptstyle \mathbf{l}^-}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathbf{h}^-} \\ \overline{Y}^\Lambda & \xrightarrow[\bar{\mathbf{q}}]{} & \overline{Y}_\Lambda \end{array}. \tag{12}$$

Если дескриптор u является дуальным к дескриптору v относительно дуальной пары $\langle \mathbf{l}, k^- \rangle$ и диаграммы (12) полукоммутативны, то правило внешнего описания (10) называем *дуальным* к правилу внутреннего описания (11). Полукоммутативность первой из представленных диаграмм означает, что инъекция $\mathbf{m}$ является дуальной к инъекции

$$\bar{\mathbf{p}} : \overline{Y}_\Lambda \to \overline{Y}^\Lambda \,\Big|\, y_\Lambda \mapsto \mathbf{p}(y_\Lambda)$$

относительно дуальной пары $\langle \mathbf{h}, \mathbf{l} \rangle$, т. е. выполняется вполне изотонное неравенство $\bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{h} \leqslant \mathbf{l} \circ \mathbf{m}$. Полукоммутативность второй из диаграмм (12) означает, что проекция $\mathbf{n}$ является дуальной к проекции

$$\bar{\mathbf{q}} : \overline{Y}^\Lambda \to \overline{Y}_\Lambda \,\Big|\, y_\Lambda \mapsto \mathbf{q}(y_\Lambda)$$

относительно дуальной пары $\langle \mathbf{l}^-, \mathbf{h}^- \rangle$, т. е. выполняется вполне изотонное неравенство $\mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}} \leqslant \mathbf{n} \circ \mathbf{l}^-$.

Пусть $\{r_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — тоже произвольное семейство вполне изотонных отображений $r_\lambda : X_\lambda \to \overline{Y}_\lambda$. Будем считать, что отображения $r_\lambda : X_\lambda \to \overline{Y}_\lambda$ являются проекциями, значит, декартово произведение $\mathbf{r} : X_\Lambda \to \overline{Y}_\Lambda$ тоже является проекцией. Затем рассмотрим две дуальные бипары

$$\big\langle (X_\Lambda, X^\Lambda), (\overline{Y}_\Lambda, \overline{Y}^\Lambda) \big\rangle, \quad \big\langle (X^\Lambda, X_\Lambda), (\overline{Y}^\Lambda, \overline{Y}_\Lambda) \big\rangle$$

и две дуальные схемы

$$\begin{tikzcd} \overline{Y}_\Lambda \arrow[r, "\bar{\mathbf{p}}"] \arrow[d, "\mathbf{r}^-"'] & \overline{Y}^\Lambda \arrow[d, "\mathbf{k}^-"] \\ X_\Lambda \arrow[r, "\mathbf{m}"'] & X^\Lambda \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{Y}^\Lambda \arrow[r, "\bar{\mathbf{q}}"] & \overline{Y}_\Lambda \\ X^\Lambda \arrow[r, "\mathbf{n}"'] \arrow[u, "\mathbf{k}"] & X_\Lambda \arrow[u, "\mathbf{r}"'] \end{tikzcd} . \tag{13}$$

Если дескриптор v является дуальным к дескриптору u относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}^-, l \rangle$ и диаграммы (13) полукоммутативны, то правило внутреннего описания (11) называем *дуальным* к правилу внешнего описания (10). Полукоммутативность первой из диаграмм (13) означает, что инъекция $\bar{\mathbf{p}}$ является дуальной к инъекции $\mathbf{m}$ относительно дуальной пары $\langle \mathbf{r}^-, \mathbf{k}^- \rangle$, т. е. выполняется вполне изотонное неравенство $\mathbf{m} \circ \mathbf{r}^- \leqslant \mathbf{k}^- \circ \bar{\mathbf{p}}$. Полукоммутативность второй из диаграмм (13) означает, что проекция $\bar{\mathbf{q}}$ является дуальной к проекции $\mathbf{n}$ относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}, \mathbf{r} \rangle$, т. е. выполняется вполне изотонное неравенство $\mathbf{r} \circ \mathbf{n} \leqslant \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}$.

6.3. Односторонние теоремы двойственности. В этом разделе мы докажем основные теоремы, связанные с описанием односторонних двойственных переходов.

Теорема 6.1. *Пусть* $\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} k$. *Если правило внешнего описания* (10) *является дуальным к правилу внутреннего описания* (11) *и некоторый элемент* $x \in X(k \leqslant l)$ *допускает экстериоризацию по правилу* (10), *то любой элемент* $y \in \overline{Y}$, *удовлетворяющий неравенствам* $k(x) \leqslant y \leqslant l(x)$, *допускает интериоризацию по правилу* (11).

Пусть $\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Im} l^-$. *Если правило внутреннего описания* (11) *является дуальным к правилу внешнего описания* (10) *и некоторый элемент* $y \in \overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$ *допускает интериоризацию по правилу* (11), *то любой элемент* $x \in X$, *удовлетворяющий неравенствам* $l^-(y) \leqslant x \leqslant k^-(y)$, *допускает экстериоризацию по правилу* (10).

$\lhd$ Во-первых, предположим, что правило внешнего описания (10) является дуальным к правилу внутреннего описания (11), т. е. выполняются вполне изотонные неравенства

$$k^- \circ \bar{v} \circ \mathbf{l} \leqslant u, \quad \bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{h} \leqslant \mathbf{l} \circ \mathbf{m}, \quad \mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}} \leqslant \mathbf{n} \circ \mathbf{l}^-.$$

Допустим, что некоторый элемент $x \in X(k \leqslant l)$ допускает экстериоризацию по правилу (10). Это означает, что выполняются следующие соотношения:

$$x = u\big(x^\Lambda\big), \quad x = u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big).$$

При этом условие $x \in X(k \leqslant l)$ означает, что $k(x) \leqslant l(x)$ в множестве $\overline{Y}$. Выберем произвольное $y \in \overline{Y}$, удовлетворяющее неравенствам $k(x) \leqslant y \leqslant l(x)$. Так как дескриптор u является дуальным к дескриптору v, то по теореме 5.1 дескриптор v является интериоризатором в точке y. Значит, $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} v$ и

$$v\big(y^\Lambda\big) = y.$$

При этом по определению правила внутреннего описания (11) для любого $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} v$ в множестве Y_Λ выполняется неравенство $\mathbf{p} \circ \mathbf{q}(y_\Lambda) \leqslant y_\Lambda$. Значит, $\mathbf{p} \circ \mathbf{q}(y^\Lambda) \leqslant y^\Lambda$ и по определению проекции имеем $\mathbf{p} \circ \mathbf{q}(y^\Lambda) \in \operatorname{Dom} v$. Следовательно, $v \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{q}(y^\Lambda) \leqslant v(y^\Lambda) = y$ в множестве Y или

$$y \leqslant \bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big)$$

в множестве $\overline{Y}$.

С другой стороны, так как $\mathbf{l}^-(y^\Lambda) \leqslant \mathbf{l}^- \circ \mathbf{l}(x^\Lambda) \leqslant x^\Lambda$ и $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} \mathbf{n}$, то по определению проекции имеем $\mathbf{l}^-(y^\Lambda) \in \operatorname{Dom} \mathbf{n}$ и $\mathbf{n} \circ \mathbf{l}^-(y^\Lambda) \leqslant \mathbf{n}(x^\Lambda)$. Значит, $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} \mathbf{n} \circ \mathbf{l}^-$. По определению вполне изотонного неравенства $\mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}} \leqslant \mathbf{n} \circ \mathbf{l}^-$ имеем $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} \mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}}$ и выполняются неравенства $\mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}}(y^\Lambda) \leqslant \mathbf{n} \circ \mathbf{l}^-(y^\Lambda) \leqslant \mathbf{n}(x^\Lambda)$. Следовательно,

$$\bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big) \leqslant \bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{h} \circ \mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big) \leqslant \bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{h} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big) \leqslant \bar{v} \circ \mathbf{l} \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big).$$

Из неравенства $y \leqslant \bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}(y^\Lambda)$ вытекает, что $\bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}(y^\Lambda) \in \operatorname{Dom} k^-$, значит,

$$k^- \circ \bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big) \leqslant k^- \circ \bar{v} \circ \mathbf{l} \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big) \leqslant u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big) = x$$

По условию теоремы выполняется вложение $\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} k$, значит,

$$\bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big) = k \circ k^- \circ \bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big) \leqslant k(x) \leqslant y.$$

Следовательно, $\bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}(y^\Lambda) = y$ или $v \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{q}(y^\Lambda) = y$.

Во-вторых, предположим, что правило внутреннего описания (11) является дуальным к правилу внешнего описания (10), т. е. выполняются вполне изотонные неравенства

$$l \circ u \circ \mathbf{k}^- \leqslant \bar{v}, \quad \mathbf{m} \circ \mathbf{r}^- \leqslant \mathbf{k}^- \circ \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{r} \circ \mathbf{n} \leqslant \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}.$$

Допустим, что некоторый элемент $y \in \overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$ допускает интериоризацию по правилу (11). Это означает, что выполняются следующие соотношения:

$$y = v\big(y^\Lambda\big), \quad y = v \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{q}\big(y^\Lambda\big).$$

При этом условие $y \in \overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$ означает, что $l^-(y) \leqslant k^-(y)$ в множестве X. Выберем произвольное $x \in X$, удовлетворяющее неравенствам $l^-(y) \leqslant x \leqslant k^-(y)$. Так как дескриптор v является дуальным к дескриптору u, то по теореме 5.1 дескриптор u является экстериоризатором в точке x. Значит, $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} u$ и

$$x = u\big(x^\Lambda\big).$$

При этом по определению правила внешнего описания (10) для любого $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} u$ в множестве Y_Λ выполняется неравенство $x_\Lambda \leqslant \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x_\Lambda)$. Значит, $x^\Lambda \leqslant \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x^\Lambda)$ и по определению инъекции имеем $\mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x^\Lambda) \in \operatorname{Dom} u$. Следовательно, $u(x^\Lambda) \leqslant u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x^\Lambda)$ и

$$x \leqslant u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big).$$

С другой стороны, так как $\mathbf{k}(x^\Lambda) \leqslant \mathbf{k} \circ \mathbf{k}^-(y^\Lambda) \leqslant y^\Lambda$ и $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} \mathbf{q}$, то по определению проекции имеем $\mathbf{k}(x^\Lambda) \in \operatorname{Dom} \mathbf{q}$ и $\bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}(x^\Lambda) \leqslant \bar{\mathbf{q}}(y^\Lambda)$. Значит, $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}$. По определению вполне изотонного неравенства $\mathbf{r} \circ \mathbf{n} \leqslant \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}$ имеем $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} \mathbf{r} \circ \mathbf{n}$ и выполняются неравенства $\mathbf{r} \circ \mathbf{n}(x^\Lambda) \leqslant \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}(x^\Lambda) \leqslant \bar{\mathbf{q}}(y^\Lambda)$. Следовательно,

$$u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big) \leqslant u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{r}^- \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big) \leqslant u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{r}^- \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big) \leqslant u \circ \mathbf{k}^- \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big).$$

Из неравенства $x \leqslant u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x^{\Lambda})$ вытекает, что $u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x^{\Lambda}) \in \operatorname{Dom} l$, значит,

$$l \circ u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^{\Lambda}\big) \leqslant l \circ u \circ \mathbf{k}^{-} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^{\Lambda}\big) \leqslant \bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^{\Lambda}\big) = y.$$

По условию теоремы выполняется вложение $\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Im} l^{-}$, значит,

$$u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x^{\Lambda}) = l^{-} \circ l \circ u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^{\Lambda}\big) \leqslant l^{-}(y) \leqslant x.$$

Следовательно, $x = u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x^{\Lambda})$. Теорема доказана. $\triangleright$

Из теоремы 6.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 6.2. *Пусть* $\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} k$. *Если правило внешнего описания* (10) *является дуальным к правилу внутреннего описания* (11) *и любой элемент множества* $X(k \leqslant l)$ *допускает экстериоризацию по правилу* (10), *то любой элемент множества* $\overline{Y}(l^{-} \leqslant k^{-})$ *допускает интериоризацию по правилу* (11).

Пусть $\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Im} l^{-}$. *Если правило внутреннего описания* (11) *является дуальным к правилу внешнего описания* (10) *и любой элемент множества* $\overline{Y}(l^{-} \leqslant k^{-})$ *допускает интериоризацию по правилу* (11), *то любой элемент множества* $X(k \leqslant l)$ *допускает экстериоризацию по правилу* (10).

$\triangleleft$ Во-первых, предположим, что правило внешнего описания (10) является дуальным к правилу внутреннего описания (11) и любой элемент множества $X(k \leqslant l)$ допускает экстериоризацию по правилу (10). Выберем произвольную точку $y \in \overline{Y}(l^{-} \leqslant k^{-})$ и произвольную точку $x \in X$, удовлетворяющую неравенствам $l^{-}(y) \leqslant x \leqslant k^{-}(y)$. По свойствам вполне изотонных отображений

$$k(x) \leqslant y \leqslant l(x), \quad x \in X(k \leqslant l)$$

и $v(y^{\Lambda}) \in \operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} k$, следовательно, по теореме 6.1 элемент y допускает интериоризацию по правилу (11).

Во-вторых, предположим, что правило внутреннего описания (11) является дуальным к правилу внешнего описания (10) и любой элемент множества $\overline{Y}(l^{-} \leqslant k^{-})$ допускает интериоризацию по правилу (11). Выберем произвольную точку $x \in X(k \leqslant l)$ и произвольную точку $y \in \overline{Y}$, удовлетворяющую неравенствам $k(x) \leqslant y \leqslant l(x)$. По свойствам вполне изотонных отображений

$$l^{-}(y) \leqslant x \leqslant k^{-}(y), \quad y \in \overline{Y}(l^{-} \leqslant k^{-})$$

и $u(x^{\Lambda}) \in \operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Im} l^{-}$, следовательно, по теореме 6.1 элемент x допускает экстериоризацию по правилу (10). Теорема доказана. $\triangleright$

7. Двусторонняя теорема двойственности

7.1. Принцип двойственности. В исследовательской практике, как правило, двойственные переходы осуществляются по упрощенной схеме. Будем называть ее *двусторонней схемой* двойственности. Упрощение достигается путем отождествления вполне изотонных отображений k и l. Пусть $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ — частично упорядоченные множества, $t : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ — вполне изотонное отображение, $t^{-} : \widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ — его условно обратное отображение. Символом X обозначим полный образ $\operatorname{Im} t^{-} \subseteq \widetilde{X}$, а символом Y обозначим полный образ $\operatorname{Im} t \subseteq \tilde{Y}$.

Справедлива следующая теорема (принцип двойственности).

Теорема 7.1. *Между элементами x и y множеств X и Y, соответственно, можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу:*

$$y = t(x), \quad x = t^{-}(y).$$

$\lhd$ Во-первых, убедимся, что образ $t(X)$ совпадает с Y. Действительно, $t(X) \subseteq t(\widetilde{X}) =: Y$. С другой стороны, если $y \in Y$, то по свойству 3.4 $y = t \circ t^{-}(y) = t(x)$, где $x := t^{-}(y) \in X$, значит, $y \in t(X)$, т. е. $Y \subseteq t(X)$. Следовательно, $t(X) = Y$. Во-вторых. убедимся, что образ $t^{-}(Y)$ совпадает с X. Действительно, $t^{-}(Y) \subseteq t^{-}(\widetilde{Y}) =: X$. С другой стороны, если $x \in X$, то по свойству 3.4 $x = t^{-} \circ t(x) = t^{-}(y)$, где $y := t(x) \in Y$, значит, $x \in t^{-}(Y)$, т. е. $X \subseteq t^{-}(Y)$. Следовательно, $t^{-}(Y) = X$. Таким образом, из свойства 3.4 вытекает, что сужение отображения t^{-} на образ Y и сужение отображения t на образ X являются взаимно обратными отображениями. Теорема доказана. $\rhd$

Символом k обозначим отображение

$$X \mapsto Y \,\big|\, x \mapsto t(x),$$

а символом k^{-} обозначим отображение

$$Y \mapsto X \,\big|\, y \mapsto t^{-}(y).$$

Из доказанного принципа двойственности следует, что отображение k является порядковым изоморфизмом X на Y, а отображение k^{-} совпадает с обратным отображением и является порядковым изоморфизмом Y на X. Отображения k и k^{-} являются проекциями и инъекциями одновременно и условно обратное к отображению k совпадает с отображением k^{-}, а условно обратное к отображению k^{-} совпадает с отображением k.

7.2. Взаимно дуальные дескрипторы. Пусть Λ — непустое множество, X^{Λ} и Y^{Λ} — декартовы степени частично упорядоченных множеств X и Y соответственно, $\mathbf{k}$ — декартова степень отображения k, $\mathbf{k}^{-}$ — декартова степень отображения k^{-}. Отображения $\mathbf{k} : X^{\Lambda} \mapsto Y^{\Lambda}$ и $\mathbf{k}^{-} : X^{\Lambda} \mapsto Y^{\Lambda}$ являются порядковыми изоморфизмами.

Пусть $u : X^{\Lambda} \to X$ — инъекция, $v : Y^{\Lambda} \to Y$ — проекция. Рассмотрим дуальную бипару $\langle (X^{\Lambda}, X), (\overline{Y}^{\Lambda}, \overline{Y}) \rangle$ и две дуальные схемы

$$\begin{tikzcd}
X^{\Lambda} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathbf{k}"'] & X \\
\overline{Y}^{\Lambda} \arrow[r, "\bar{v}"'] & \overline{Y} \arrow[u, "k^{-}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\overline{Y}^{\Lambda} \arrow[r, "\bar{v}"] \arrow[d, "\mathbf{k}^{-}"'] & \overline{Y} \\
X^{\Lambda} \arrow[r, "u"'] & X \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd},$$

где символом $\bar{v}$ мы обозначаем инъекцию $\overline{Y}^{\Lambda} \to \overline{Y} \mid y \mapsto v(y)$. Дескриптор u является дуальным к дескриптору v относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}, k^{-} \rangle$, если выполняется вполне изотонное неравенство $k^{-} \circ \bar{v} \circ \mathbf{k} \leqslant u$. Дескриптор v является дуальным к дескриптору u относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}^{-}, k \rangle$, если выполняется вполне изотонное неравенство $k \circ u \circ \mathbf{k}^{-} \leqslant \bar{v}$. Если дескриптор u является дуальным к дескриптору v, а дескриптор v является дуальным к дескриптору u, то дескрипторы u и v называем *взаимно дуальными.* Если дескрипторы u и v являются взаимно дуальными, то по определению вполне изотонных неравенств выполняются вложения

$$\operatorname{Dom} k^{-} \circ \bar{v} \circ \mathbf{k} \subseteq \operatorname{Dom} u, \quad \operatorname{Dom} k \circ u \circ \mathbf{k}^{-} \subseteq \operatorname{Dom} v.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.2. *Дескрипторы u и v являются взаимно дуальными тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Dom} k^- \circ \bar{v} \circ \mathbf{k} = \operatorname{Dom} u, \quad \operatorname{Dom} k \circ u \circ \mathbf{k}^- = \operatorname{Dom} v$$

и выполняются функциональные равенства

$$u = k^- \circ \bar{v} \circ \mathbf{k}, \quad \bar{v} = k \circ u \circ \mathbf{k}^-.$$

$\lhd$ Докажем первое функциональное равенство. Пусть $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} u$ и $y := k(x)$. Тогда $u(x^\Lambda) = k^- \circ k \circ u \circ \mathbf{k}^-(y^\Lambda)$, т. е. $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} k \circ u \circ \mathbf{k}^-$. Значит, $u(x^\Lambda) \leqslant k^- \circ \bar{v}(y^\Lambda) = k^- \circ \bar{v} \circ \mathbf{k}(x^\Lambda)$. Это означает, что выполняются обратное вложение $\operatorname{Dom} u \subseteq \operatorname{Dom} k^- \circ \bar{v} \circ \mathbf{k}$ и функциональное равенство $u(x^\Lambda) = k^- \circ \bar{v} \circ \mathbf{k}(x^\Lambda)$.

Докажем второе функциональное равенство. Пусть $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} v$ и $x := k^-(y)$. Тогда $\bar{v}(y^\Lambda) = k \circ k^- \circ \bar{v} \circ \mathbf{k}(x^\Lambda)$, т. е. $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} k^- \circ \bar{v} \circ \mathbf{k}$. Значит, $\bar{v}(y^\Lambda) \leqslant k \circ u(x^\Lambda) = k \circ u \circ \mathbf{k}^-(y^\Lambda)$, т. е. выполняется обратное вложение $\operatorname{Dom} \bar{v} \subseteq \operatorname{Dom} k \circ u \circ \mathbf{k}^-$ и выполняется функциональное равенство $\bar{v}(y^\Lambda) = k \circ u \circ \mathbf{k}^-(y^\Lambda)$. Теорема доказана. $\rhd$

Из теорем 5.2 и 7.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.3. *Если дескрипторы u и v являются взаимно дуальными, то дескриптор u является интериоризатором в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда дескриптор v является экстериоризатором в точке $y := k(x) \in Y$.*

7.3. Взаимно дуальные описания. Пусть $\{h_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство порядковых изоморфизмов $h_\lambda : X_\lambda \mapsto \overline{Y}_\lambda$, значит, декартово произведение $\mathbf{h} : X_\Lambda \to \overline{Y}_\Lambda$ тоже является порядковым изоморфизмом. Здесь символы $\overline{Y}_\lambda$ и $\overline{Y}_\Lambda$ обозначают частично упорядоченные множества Y_λ и Y_Λ соответственно с обратными порядками. Рассмотрим дуальную бипару $\langle (X_\Lambda, X^\Lambda), (\overline{Y}_\Lambda, \overline{Y}^\Lambda) \rangle$ и две дуальные схемы

$$\begin{tikzcd} X_\Lambda \arrow[r, "\mathbf{m}"] \arrow[d, "\mathbf{h}"'] & X^\Lambda \arrow[d, "\mathbf{k}"] \\ \overline{Y}_\Lambda \arrow[r, "\bar{\mathbf{p}}"'] & \overline{Y}^\Lambda \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{Y}_\Lambda \arrow[r, "\bar{\mathbf{p}}"] \arrow[d, "\mathbf{h}^-"'] & \overline{Y}^\Lambda \arrow[d, "\mathbf{k}^-"] \\ X_\Lambda \arrow[r, "\mathbf{m}"'] & X^\Lambda \end{tikzcd}.$$

По определению инъекция $\mathbf{m}$ является дуальной к инъекции $\bar{\mathbf{p}}$ относительно дуальной пары $\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle$, если выполняется вполне изотонное неравенство $\bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{h} \leqslant \mathbf{k} \circ \mathbf{m}$. Инъекция $\bar{\mathbf{p}}$ является дуальной к проекции $\mathbf{m}$ относительно дуальной пары $\langle \mathbf{h}^-, \mathbf{k}^- \rangle$, если выполняется вполне изотонное неравенство $\mathbf{m} \circ \mathbf{h}^- \leqslant \mathbf{k}^- \circ \bar{\mathbf{p}}$. Если инъекция $\mathbf{m}$ является дуальной к инъекции $\bar{\mathbf{p}}$, а инъекция $\bar{\mathbf{p}}$ является дуальной к инъекции $\mathbf{m}$, то инъекции $\mathbf{m}$ и $\bar{\mathbf{p}}$ называем *взаимно дуальными*. Легко убедиться, что инъекции $\mathbf{m}$ и $\bar{\mathbf{p}}$ являются взаимно дуальными тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Dom} \bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{h} = \operatorname{Dom} \mathbf{k} \circ \mathbf{m}, \quad \operatorname{Dom} \mathbf{m} \circ \mathbf{h}^- = \operatorname{Dom} \mathbf{k}^- \circ \bar{\mathbf{p}}$$

и выполняются функциональные равенства

$$\bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{h} = \mathbf{k} \circ \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} \circ \mathbf{h}^- = \mathbf{k}^- \circ \bar{\mathbf{p}}.$$

Затем рассмотрим дуальную бипару $\langle (X^\Lambda, X_\Lambda), (\overline{Y}^\Lambda, \overline{Y}_\Lambda) \rangle$ и две дуальные схемы

$$\begin{tikzcd} X^\Lambda \arrow[r, "\mathbf{n}"] & X_\Lambda \\ \overline{Y}^\Lambda \arrow[u, "\mathbf{k}^-"] \arrow[r, "\bar{\mathbf{q}}"'] & \overline{Y}_\Lambda \arrow[u, "\mathbf{h}^-"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{Y}^\Lambda \arrow[r, "\bar{\mathbf{q}}"] & \overline{Y}_\Lambda \\ X^\Lambda \arrow[u, "\mathbf{k}"] \arrow[r, "\mathbf{n}"'] & X_\Lambda \arrow[u, "\mathbf{h}"'] \end{tikzcd}$$

Проекция $\mathbf{n}$ является дуальной к проекции $\bar{\mathbf{q}}$ относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}^-, \mathbf{h}^- \rangle$, если выполняется вполне изотонное неравенство $\mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}} \leqslant \mathbf{n} \circ \mathbf{k}^-$. Проекция $\bar{\mathbf{q}}$ является дуальной к проекции $\mathbf{n}$ относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}, \mathbf{h} \rangle$, если выполняется вполне изотонное неравенство $\mathbf{h} \circ \mathbf{n} \leqslant \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}$. Если проекция $\mathbf{n}$ является дуальной к проекции $\bar{\mathbf{q}}$, а проекция $\bar{\mathbf{q}}$ является дуальной к проекции $\mathbf{n}$, то проекции $\mathbf{n}$ и $\bar{\mathbf{q}}$ называем *взаимно дуальными.* Легко убедиться, что проекции $\mathbf{n}$ и $\bar{\mathbf{q}}$ являются взаимно дуальными тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Dom} \mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}} = \operatorname{Dom} \mathbf{n} \circ \mathbf{k}^-, \quad \operatorname{Dom} \mathbf{h} \circ \mathbf{n} = \operatorname{Dom} \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}$$

и выполняются функциональные равенства

$$\mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{n} \circ \mathbf{k}^-, \quad \mathbf{h} \circ \mathbf{n} = \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}.$$

7.4. Двусторонняя теорема двойственности. Если дескрипторы u и v, инъекции $\mathbf{m}$ и $\bar{\mathbf{p}}$ и проекции $\mathbf{n}$ и $\bar{\mathbf{q}}$, соответственно, являются взаимно дуальными, то правило внешнего описания (10) и правило внутреннего описания (11) называем *взаимно дуальными.* Из теорем 6.2, 7.1 и 7.3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 7.4. *Если правило внешнего описания* (10) *и правило внутреннего описания* (11) *являются взаимно дуальными, то элемент $x \in X$ допускает экстериоризацию по правилу* (10) *тогда и только тогда, когда элемент $y := k(x) \in Y$ допускает интериоризацию по правилу* (11).

Литература

1. *Шишкин А. Б.* Экспоненциальный синтез в ядре оператора симметричной свертки // Зап. науч. сем. ПОМИ.—2016.—Т. 447.—С. 129–170.
2. *Шишкин А. Б.* О непрерывных эндоморфизмах целых функций // Мат. сб.—2021.—Т. 212, № 4.—С. 131–158. DOI: 10.4213/sm9316.
3. *Шишкин А. Б.* Проективное и инъективное описания в комплексной области.—Saarbrucken: Lambert Academic Publ. GmbH & Co. KG, 2011.—309 с.
4. *Шишкин А. Б.* Односторонние схемы двойственности // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, № 3.—С. 124–150. DOI: 10.46698/i3178-1119-0009-t.

Статья поступила 13 января 2025 г.

Шишкин Андрей Борисович
Кубанский государственный университет,
профессор кафедры МИЕОД
Россия, 353560, Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200;
E-mail: shishkin-home@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-7114-0524

Шишкин Борис Андреевич
ООО «ПРАЙ»,
технический директор
РОССИЯ, 353563, Славянск-на-Кубани, ул. Строителей, 1
E-mail: shishkinb13@gmail.com
https://orcid.org/0009-0005-4303-8628

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 127–149

ONE-SIDED DUALITY THEOREMS

Shishkin, A. B.[1] and Shishkin, B. A.[2]

[1] Kuban State University
200 Kuban St., Slavyansk-on-Kuban 353560, Russia;
[2] "PRAI" LLS, 1 Stroiteley St., Slavyansk-on-Kuban 353563, Russia

E-mail: `shishkin-home@mail.ru`, `shishkinb13@gmail.com`

Abstract. The phenomenon of duality is inherent in all sections of mathematics and underlies many special duality theorems that assert the possibility of dual transitions – transfers of mathematical statements from one area of mathematics to another. All known duality theorems are based on properties of special mathematical structures and are bilateral in nature, i. e. they assume dual transitions in one and other directions. The present paper is devoted to a new understanding of dual transitions as transitions from internal (respectively external) descriptions of sets to external (respectively internal) descriptions of sets dual to them. Special attention is paid to one-way dual transitions, one-way duality theorems. The abstract constructions (one-sided duality theory) are based on the notion of dual scheme, which, in turn, is based on the notion of weakened involution – a fully isotone mapping. In this case, any fully isotone mapping has a conditionally inverse mapping which is also fully isotone. The authors distinguish four dual schemes, each of which plays its strictly defined role in matters of external and internal description of sets. Any dual scheme is represented as a set of two diagrams connected by mutually inverse transitions to conditionally inverse mappings.

Keywords: duality, interiorization, exteriorization.

AMS Subject Classification: 03E15.

For citation: *Shishkin, A. B. and Shishkin, B. A.* One-Sided Duality Theorems, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 127–149 (in Russian). DOI: 10.46698/e7265-7012-8069-r.

References

1. *Shishkin, A. B.* Exponential Synthesis in the Kernel of a Symmetric Convolution, *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*), 2018, vol. 229, no. 5, pp. 572–599. DOI: 10.1007/s10958-018-3700-9.
2. *Shishkin, A. B.* On Continuous Endomorphisms of Entire Functions, *Sbornik: Mathematics*, 2021, vol. 212, no. 4, pp. 567–591. DOI: 10.1070/SM9316.
3. *Shishkin, A. B. Proektivnoe i in"ektivnoe opisaniya v kompleksnoy oblasti* [Projective and Injective Descriptions in the Complex Domain], Saarbrucken, Lambert Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2011, 309 p. (in Russian).
4. *Shishkin, A. B.* One-Sided Dual Schemes, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 124–150 (in Russian). DOI: 10.46698/i3178-1119-0009-t.

Received January 13, 2025

Andrey B. Shishkin
Kuban State University
200 Kuban St., Slavyansk-on-Kuban 353560, Russia,
Professor
E-mail: `shishkin-home@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-7114-0524

Boris A. Shishkin
"PRAI" LLS,
1 Stroiteley St., Slavyansk-on-Kuban 353563, Russia
Technical Director
E-mail: `shishkinb13@gmail.com`
https://orcid.org/0009-0005-4303-8628