Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 21–35

УДК 517.53
DOI 10.46698/y0305-5846-4678-h

ВЕСОВОЙ ИНДЕКС КОНЦЕНТРАЦИИ

А. М. Гайсин[1], **Р. А. Гайсин**[1]
[1] Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: `gaisinam@mail.ru`, `rashit.gajsin@mail.ru`

Посвящается 70-летию профессора А. В. Абанина

Аннотация. В терминах весового индекса концентрации исследуется поведение функции $|W(re^{i\theta})|^{-1}$ при $\theta \to 0$, где W — четная целая функция экспоненциального типа, имеющая только вещественные нули. Этот вопрос актуален в ряде задач комплексного анализа, связанных с усиленной неполнотой (усиленной минимальностью) системы экспонент на семействе кривых, интерполяцией типа Павлова — Коревара — Диксона, аналитическим продолжением предельных функций последовательностей полиномов из экспонент. Этот круг задач восходит к следующей задаче А. Ф. Леонтьева, поставленной им в 1956 году: при каких условиях $\sup_{\theta \neq 0,\pi} H(\theta) < \infty$, где $H(\theta)$ — индикатриса (индикатор) функции $W^{-1}(\lambda)$, $\lambda = re^{i\theta}$. В работах А. Ф. Леонтьева и Э. Байет были получены некоторые оценки для этого индикатора, однако они оказались очень грубыми. Для произвольных целых функций уточненного порядка И. Ф. Красичковым в 1965 году была доказана теорема, дающая ответ на вопрос А. Ф. Леонтьева. Как было показано, необходимым и достаточным условием конечности индикатора $H(\theta)$ является конечность индекса концентрации последовательности Λ нулей целой функции W, подсчитываемого через соответствующую функцию сравнения при данном уточненном порядке. Особый интерес представляет случай, когда последовательность Λ является интерполяционной. В этом случае, как показал Б. Берндсон, функцией сравнения служит некоторая вогнутая мажоранта ω из класса сходимости. Однако эта функция (вес) не обязана иметь правильное изменение в бесконечности. Поэтому случай веса такого типа и рассматривается в настоящей статье. Основной результат: для того, чтобы весовой нижний индикатор $H(\omega,\theta)$ функции W был равномерно ограничен по $\theta \in (0,\pi)$ снизу, необходимо и достаточно, чтобы весовой индекс концентрации $I_\Lambda(\omega,\mathbb{R})$ был конечен.

Ключевые слова: целая функция, нижний индикатор, коиндикатриса, максимальная плотность, весовой индекс концентрации.

AMS Subject Classification: 30D20.

Образец цитирования: *Гайсин А. М., Гайсин Р. А.* Весовой индекс концентрации // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 21–35. DOI: 10.46698/y0305-5846-4678-h.

1. Введение

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, имеет конечную верхнюю плотность:

$$D = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} < \infty.$$

Тогда произведение Вейерштрасса

$$W(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right) \tag{1}$$

— целая функция экспоненциального типа. Наряду с индикатрисой роста (индикатором)

$$h(\theta)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln|W(re^{i\theta})|}{r},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

в ряде работ рассматривалась и следующая характеристика (см. [1])

$$H(\theta)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{r}\ln\left|\frac{1}{W(re^{i\theta})}\right|,\quad \theta\neq 0,\pi.$$

Если последовательность Λ измерима (т. е. имеет плотность $D_0=\lim_{n\to\infty}(n/\lambda_n)$), то $H(\theta)=-h(\theta)$. В общем случае функция $H(\theta)$ неограничена при $\theta\to 0$ (или $\theta\to\pi$) (см. [2, гл. I, § 3, п. 5]).

Если $D<\infty$, то $H(\theta)=-h_-(\theta)$, где $h_-(\theta)$ — нижний индикатор функции $W(\lambda)$, т. е.

$$h_-(\theta)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\ln|W(re^{i\theta})|}{r}.$$

Все эти характеристики роста — $h(\theta)$, $h_-(\theta)$ и $H(\theta)$ — имеют смысл для любой целой функции конечного порядка ρ, $0<\rho<\infty$, а также уточненного порядка[1] $\rho(r)$, $\rho(r)\to\rho$ (см. [4, 5]).

Как известно, решение ряда задач комплексного анализа, связанных с интерполяцией и продолжением функций, аппроксимируемых полиномами Дирихле (полиномами из экспонент), зависит от поведения функции $H(\theta)$ на семействе лучей $R_\theta=\{z\colon\ \arg z=\theta,\ 0<\theta<\pi\}$.

Рассматривая случай $\rho=1$, А. Ф. Леонтьев получил оценку (см. [1]): для любого $\varepsilon>0$ при достаточно малом $\theta\neq 0$

$$H(\theta)<(D+\varepsilon)\ln\frac{1}{|\theta|}.$$

В терминах индекса насыщенности

$$L=\lim_{\xi\to 1-}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r)-n(r\xi)}{r},\quad n(r)=\sum_{\lambda_n\leqslant r}1,$$

Э. Байет уточнила эту оценку А. Ф. Леонтьева. Она показала (см. [6, 7]), что для любого $\varepsilon>0$ при достаточно малых $\theta\neq 0$ справедливо двойное неравенство

$$(L-\varepsilon)\ln\frac{1}{|\theta|}<H(\theta)<(L+\varepsilon)\ln\frac{1}{|\theta|}. \tag{2}$$

В [2, гл. I, § 3, п. 5] показано, что $0\leqslant L\leqslant D$, причем $L<\infty$ тогда и только тогда, когда $D<\infty$. Если же последовательность Λ имеет конечную максимальную плотность Полиа (см. [8])

$$P(\Lambda)=\lim_{\xi\to 1-}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r)-n(r\xi)}{r(1-\xi)},$$

то $L=0$. В частности, если Λ измерима, то, очевидно, $P(\Lambda)=L=0$.

[1]Уточненным порядком называется положительная непрерывно дифференцируемая на $(0,\infty)$ функция $\rho(r)$, удовлетворяющая условиям: $\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$, $\lim_{r\to\infty}r\rho'(r)\ln r=0$ (см. [3]).

Отметим, что доказательства оценок (2) приведены и в [2]. Однако эти оценки оказались слишком грубыми для приложений. В частности, они не дают ответа на следующий вопрос, поставленный А. Ф. Леонтьевым (см. [1]): при каких условиях

$$\sup_{\theta\neq 0,\pi} H(\theta) < \infty? \tag{3}$$

В терминах нижнего индикатора соотношение (3) означает, что

$$\inf_{\theta\neq 0,\pi} h_-(\theta) > -\infty.$$

В статье [4] доказана следующая теорема, содержащая ответ на сформулированный выше вопрос А. Ф. Леонтьева (см. [4, теорема 3])[2]. *Пусть $W(\lambda)$ — целая функция уточненного порядка $\rho(r)$, $\rho(r)\to\rho$, $\rho>0$, т. е.*

$$0 < \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_W(r)}{r^{\rho(r)}} < \infty,$$

где $M_W(r) = W(ir)$ — максимум модуля. Положим

$$H_W(\theta) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln|W(re^{i\theta})|}{V(r)}, \quad V(r) = r^{\rho(r)}.$$

Для того чтобы

$$\inf_{\theta\neq 0,\pi} H_W(\theta) > -\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность Λ имела конечный индекс концентрации, т. е.

$$I_\Lambda(V,\mathbb{R}_+) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{x\to\infty} \frac{1}{V(x)} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(x)}{\sigma}\,d\sigma < \infty.$$

Здесь $n_\sigma(x)$ — число точек λ_n из отрезка $n_\sigma(x) = \{t:\ |t-x|\leqslant\sigma x\}$, $x>0$.

Отметим, что данный результат И. Ф. Красичкова из [4] является ключевым в задаче продолжения в полуплоскость функций, аппроксимируемых в некоторой выпуклой области полиномами Дирихле (см. [1]).

Существует и другая мера концентрации последовательности Λ, а именно, максимальная $\rho(r)$-плотность (см. [5])

$$P_V(\Lambda) = \lim_{\xi\to 1-}\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r)-n(r\xi)}{V(r)(1-\xi^\rho)}.$$

Известно, что из условия $P_V(\Lambda)<\infty$ следует, что $I_\Lambda(V,\mathbb{R}_+)<\infty$, но обратное неверно (см. [4, 5]).

В монографии [9] В. Бернштейн для измеримых последовательностей Λ использовал понятие индекса конденсации

$$\delta(\Lambda) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln\left|\frac{1}{W'(\lambda_n)}\right|.$$

Позже в более общей ситуации эта характеристика исследовалась и нашла широкое применение в работах А. Ф. Леонтьева и других специалистов (более подробно об этом

[2]Формулировка приводится для четной функции $W(\lambda)$, определенной формулой (1).

см. в [10]). Так, в [2] показано, что если $\delta(\Lambda) < \infty$, то индикатриса $H(\theta)$ функции $1/W(re^{i\theta})$ ограничена, т. е. $\sup_{\theta\neq 0,\pi} H(\theta) < \infty$ (см. [2, гл. II, § 5, п. 4, замечание 1]). Обратное не верно, так как при $\rho(r)\equiv 1$ конечность индекса концентрации I_Λ, очевидно, имеет место для любой измеримой последовательности Λ (см. [11]), в том числе и в случае $\delta(\Lambda)=\infty$.

В статье [12] было введено понятие индекса ω-конденсации $\delta(\omega,\Lambda)$ (где $\omega(r)$ — положительная неубывающая на $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ функция), которое потом систематически применялось и в других работах автора (см., например, [13]). Следуя [10], величину $\delta(\omega,\Lambda)$ будем называть весовым индексом конденсации. По определению,

$$\delta(\omega,\Lambda)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\omega(\lambda_n)}\ln\left|\frac{1}{W'(\lambda_n)}\right|.$$

Если в качестве $\omega(r)$ брать наименьшую неубывающую мажоранту последовательности $\{-\ln|W'(\lambda_n)|\}$ (см. [13]), то $\delta(\omega,\Lambda)=1$. В некоторых задачах, связанных с интерполяцией, проблемами полноты системы экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ и квазианалитичности классов Карлемана на дугах, рассматривается вогнутый вес $\omega(r)$, принадлежащий классу сходимости, т. е. удовлетворяющий условию

$$\int\limits_1^\infty \frac{\omega(x)}{x^2}\,dx<\infty.$$

Пусть L — класс положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+$ функций, а L_1 — множество функций ω из L, обладающих свойствами: $\omega(x)\geqslant 1$; для любого $A>0$

$$B_A=\sup_{x>0}\frac{\omega(Ax)}{\omega(x)}<\infty. \tag{4}$$

Ясно, что условие (4) можно переписать и в форме

$$\sup_{x>0}\frac{\omega(2x)}{\omega(x)}<\infty.$$

Подкласс вогнутых функций ω из L_1 обозначим L_2. Если $\omega\in L_2$, то $\omega(2x)\leqslant 2\omega(x)$ при всех $x>0$.

Пусть $\omega(r)$ — какая-то фиксированная функция, принадлежащая классу L_1, такая, что

$$0<D^*_\omega=\sup_{r>0}\frac{\ln M_W(r)}{\omega(r)}<\infty. \tag{5}$$

Поскольку функция $\ln M_W(r)$ сама принадлежит классу L_1, то такая функция ω существует.

Введем в рассмотрение весовой индекс концентрации последовательности Λ

$$I_\Lambda(\omega,\mathbb{R}_+)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{x\to\infty}\frac{1}{\omega(x)}\int\limits_\varepsilon^1\frac{n_\sigma(x)}{\sigma}d\sigma,\quad x>0. \tag{6}$$

Случай $\omega(x)=V(x)=x^{\rho(x)}$ был исследован в [4]. Обозначим

$$D_\omega=\sup_{x>0}\frac{n(x)}{\omega(x)}. \tag{7}$$

Легко убедиться в том, что $D_\omega < \infty$ (это следует из неравенства $n(x) \leqslant \ln M_W(ex)$ Иенсена и условий (5), (4)).

Пусть $W(\lambda)$ — целая функция (1), для которой условие (5) выполнено с некоторой вогнутой функцией $\omega(r)$. Важно отметить, что в отличие от $V(x)$, функция $\omega(x)$, $\omega \in L_2$, не обязана быть правильно меняющейся в бесконечности (см. [10]).

Положим

$$H_W(\omega,\theta) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln|W(re^{i\theta})|}{\omega(r)}, \quad \omega \in L_2.$$

Цель статьи — выяснить, будет ли справедливым аналог теоремы 3 из работы [4] для такого весового нижнего индикатора $H_W(\omega,\theta)$.

Основной результат настоящей заметки следующий[3]. *Пусть условие* (5) *выполнено для веса* $\omega \in L_2$. *Для того чтобы*

$$\inf_{\theta\neq 0,\pi} H_W(\omega,\theta) > -\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы $I_\Lambda(\omega,\mathbb{R}_+) < \infty$, *где* $I_\Lambda(\omega,\mathbb{R}_+)$ — *индекс концентрации последовательности* Λ, *определенный формулой* (6).

Далее вместо $H_W(\omega,\theta)$ будем писать просто $H_W(\theta)$.

2. Предварительные результаты

В основе главной теоремы из [4] лежит следующий общий факт. Сформулируем его применительно к функции (1).

Теорема 1 (см. [4])**.** *Пусть* $W(\lambda)$ — *целая функция* (1) *уточненного порядка* $\rho(r)$, $\rho(r)\to\rho$, $\rho>0$. *Тогда для всех* $\lambda\neq 0$

$$\ln|W(\lambda)| = -\int_0^1 \frac{n_\sigma(\lambda)}{\sigma}\,d\sigma + R(|\lambda|), \tag{8}$$

где $n_\sigma(\lambda)$ — *число точек* λ_n *в круге* $\Delta_\sigma(\lambda) = \{t\colon\ |t-\lambda|\leqslant\sigma|\lambda|\}$, $R(|\lambda|) = O(1)V(|\lambda|)$, $V(|\lambda|) = |\lambda|^{\rho(|\lambda|)}$, *а* $O(1)$ *обозначает некоторую функцию, ограниченную вне любого круга* $\{z\colon\ |z|<r\}$, $r>0$.

Пусть теперь $D^*_\omega < \infty$, $\omega\in L_2$ (эта величина определена в (5)). Покажем, что тогда в представлении (8)

$$R(|\lambda|) = O(1)\omega(|\lambda|). \tag{9}$$

Действительно, из рассуждений и выкладок, проделанных в статьях [4, 14], следует, что

$$|R(|\lambda|)| \leqslant 2n(2|\lambda|) + 2N(2|\lambda|) + U(|\lambda|),$$

где

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt, \quad U(r) = \int_2^\infty \frac{m(r\tau)}{\tau(\tau^2-1)}\,d\tau,$$

а $m(x)$ — непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция, $m(0)=0$, $m(\lambda_n)=n$, $n\geqslant 1$; на отрезках $[0,\lambda_1]$, $[\lambda_n,\lambda_{n+1}]$, $n\geqslant 1$, эта функция линейна. Так как $\omega\in L_2$, учитывая (7), имеем:

[3]Основные результаты получены Р. А. Гайсиным, первому автору принадлежат постановка задачи и обзор литературы.

$n(2|\lambda|) \leqslant D_\omega\omega(2|\lambda|) \leqslant 2D_\omega\omega(|\lambda|)$. Далее, по формуле Иенсена (см., например, [15, § 2, 2.4. Примечания]), $N(2|\lambda|) \leqslant \ln M_W(2|\lambda|)$. Отсюда, учитывая (5), получим

$$N(2|\lambda|) \leqslant D^*_\omega\omega(2|\lambda|) \leqslant 2D^*_\omega\omega(|\lambda|), \quad \omega \in L_2.$$

Осталось оценить функцию $U(r)$, $r = |\lambda|$.

Имеем $m(x) \leqslant n(x) + 1$, $x \geqslant 0$. Отсюда, по неравенству Иенсена, если еще учесть (5), $m(x) \leqslant 1 + \ln M_W(ex) \leqslant 1 + eD^*_\omega\omega(x)$, $x \geqslant 0$. Следовательно,

$$U(r) \leqslant \frac{1}{3} + eD^*_\omega \int\limits_2^\infty \frac{\omega(r\tau)}{\tau(\tau^2-1)}\,d\tau \leqslant \frac{1}{3} + \frac{4}{3}eD^*_\omega \int\limits_2^\infty \frac{\omega(r\tau)}{\tau^3}\,d\tau.$$

Отсюда получаем

$$U(r) \leqslant \frac{1}{3} + 4D^*_\omega r^2 \int\limits_{2r}^\infty \frac{\omega(x)}{x^3}\,dx \leqslant 1 + 2D^*_\omega\omega(r).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\frac{\omega(x)}{x} \downarrow$ при $x \uparrow$. Таким образом,

$$R(|\lambda|) \leqslant 1 + 4\left(D_\omega + \frac{3}{2}D^*_\omega\right)\omega(|\lambda|), \quad |\lambda| \geqslant 1,$$

и, тем самым, соотношение (9) выполнено.

Пусть $D^*_\omega < \infty$, $\omega \in L_2$. Для любого неограниченного множества $G \subset \mathbb{C}$ положим (в [4] рассматривается случай веса $V(|z|)$)

$$H_W(G) = \varliminf_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G}} \frac{\ln|W(z)|}{\omega(|z|)},$$

$$H^*_W(G) = \sup_{E\in\mathscr{D}} H_W(G\setminus E),$$

где $\mathscr{D}$ — совокупность всех множеств кружков нулевой линейной плотности (см. [4]). Коиндикатрисой и обобщенной коиндикатрисой называются соответственно функции

$$H_W(\mathscr{E}) = \inf_{G\in\mathscr{E}} H_W(G),$$

$$H^*_W(\mathscr{E}) = \inf_{G\in\mathscr{E}} H^*_W(G),$$

где $\mathscr{E}$ — любое семейство неограниченных множеств. Следуя [4], индексом концентрации последовательности Λ на неограниченном множестве G назовем величину

$$I_\Lambda(G) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\,d\sigma, \quad I_\Lambda(G) = I_\Lambda(\omega, G).$$

Индекс концентрации Λ на семействе $\mathscr{E}$ неограниченных множеств — это величина

$$I_\Lambda(\mathscr{E}) = \sup_{G\in\mathscr{E}} I_\Lambda(G).$$

Пусть $\mathscr{E} = \{G\}$, G — неограниченное множество,

$$J_\Lambda(G) = \varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_0^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\,d\sigma, \quad J_\Lambda(\mathscr{E}) = \sup_{G\in\mathscr{E}} J_\Lambda(G),$$

$$J^*_\Lambda(G) = \inf_{E\in\mathscr{D}} J_\Lambda(G\setminus E), \qquad J^*_\Lambda(\mathscr{E}) = \sup_{G\in\mathscr{E}} J^*_\Lambda(G).$$

Из (8), (9) следует, что $H_W(G)$ и $J_W(G)$ конечны или бесконечны одновременно, а в случае их конечности

$$|H_W(G) + J_\Lambda(G)| \leqslant A_W < \infty. \tag{10}$$

Если одна из величин $H^*_W(G)$ или $J^*_\Lambda(G)$ конечна, то

$$|H^*_W(G) + J^*_\Lambda(G)| \leqslant A_W. \tag{11}$$

Из (10), (11) имеем также

$$|H_W(\mathscr{E}) + J_\Lambda(\mathscr{E})| \leqslant A_W, \quad |H^*_W(\mathscr{E}) + J^*_\Lambda(\mathscr{E})| \leqslant A_W. \tag{12}$$

Теперь ставится задача перейти от $J_\Lambda(\mathscr{E})$ и $J^*_\Lambda(\mathscr{E})$ к $I_\Lambda(\mathscr{E})$ в интересующем нас случае, т. е. когда

$$\mathscr{E} = \left\{G_\theta\colon\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}, \quad G_\theta = \left\{z\colon\ \theta\leqslant \arg z\leqslant \pi-\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathscr{E} = \left\{G_\theta : 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$, $G_\theta = \left\{z : \theta\leqslant\arg z\leqslant\pi-\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$. *Если* $D_\omega<\infty$, $\omega\in L_1$, *то верны равенства:*

I. $J^*_\Lambda(G_\theta) = I_\Lambda(G_\theta)$;

II. $J^*_\Lambda(\mathscr{E}) = I_\Lambda(\mathscr{E})$.

Замечание. Равенства I, II, как и в случае функции $V(|z|)$, верны и для семейства $\mathfrak{F} = \{\Gamma_\theta\}$, $\Gamma_\theta = \partial G_\theta$. Дело в том, что эти равенства на самом деле справедливы и для произвольного семейства так называемых линейно плотных множеств, а множества G_θ и Γ_θ линейно плотны (см. [4, теорема 2]).

$\lhd$ Достаточно доказать только равенство I, так как II есть следствие I.

Для G_θ имеем (для множеств Γ_θ рассуждения те же):

$$I_\Lambda(G_\theta) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G_\theta}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\,d\sigma,$$

$$J_\Lambda(G_\theta) = \varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G_\theta}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_0^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\,d\sigma.$$

Как и выше,

$$J^*_\Lambda(G_\theta) = \inf_{E\in\mathscr{D}} J_\Lambda(G_\theta\setminus E).$$

Доказательство равенства I теоремы 2, как и в случае уточненного порядка, по сути опирается только на леммы типа 3–5 из [4]. При этом лемма 3 справедлива для любого веса $\omega\in L$. Поэтому переформулируем леммы 4 и 5 в терминах веса $\omega\in L_2$, обозначая их как лемма 1 и лемма 2. $\rhd$

Лемма 1. *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, *удовлетворяет условию*

$$D_\omega = \sup_{t>0} \frac{n(t)}{\omega(t)} < \infty, \quad \omega \in L_2.$$

Тогда для любых фиксированных N, σ, $N > 1$, $0 < \sigma < 1$, *существует исключительное множество* E *кружков* $K_i = \{z\colon\ |z - h_i| < \rho_i\}$ *такое, что при* $z \notin E$

$$n_\sigma(z) < N\omega(|z|),$$

причем для любого $r > 0$ *переменная линейная плотность*

$$p_E(r) = \frac{1}{r} \sum_{|h_i| \leqslant r} \rho_i$$

не превосходит

$$\frac{4D_\omega}{N} \frac{\sigma}{1-\sigma}.$$

$\lhd$ Доказательство почти ничем не отличается от доказательства леммы 4 из [4]. Требуется только уточнить оценку для линейной плотности множества E. В остальном, как и в случае $V(r) = r^{\rho(z)}$, используется только монотонность веса $\omega(r)$.

В [4] показано, что для любой точки $z \notin E$,

$$E = \bigcup_{h_i \in H} \Delta_\delta(h_i), \quad \delta = \frac{2\sigma}{1-\sigma},$$

выполняется оценка

$$n_\sigma(z) < N|z|^{\rho(|z|)}.$$

Переменная плотность множества E равна

$$p_E(r) = \frac{\delta}{r} \sum_{|h_i| \leqslant r} |h_i| = \frac{\delta}{r} \int\limits_0^r t\, d\nu(t), \tag{13}$$

где $H = \{h_i\}$ — некоторая последовательность, пронумерованная в порядке неубывания модулей (строится специальным образом), $\nu(t)$ — число точек $|h_i|$ из полуинтервала $(0, t]$, $\nu(t) \equiv 0$ при $t \leqslant \frac{q}{2}$, $q < \lambda_1$. В процессе построения множества $H = \{h_i\}$ строится и цепочка последовательностей Λ_k, $\Lambda = \Lambda_0 \supset \Lambda_1 \supset \ldots \supset \Lambda_k \supset \ldots$, такая, что каждый круг $\Delta_\sigma(h_i)$ содержит не менее $N|h_i|^{\rho(|h_i|)}$ точек из Λ_i. Учитывая это, в [4] выписаны очевидные неравенства

$$N \sum_{|h_i| \leqslant r} |h_i|^{\rho(|h_i|)} \leqslant \sum_{|h_i| \leqslant r} n_\sigma^{(i)}(h_i) \leqslant n(2r), \tag{14}$$

где $n_\sigma^{(i)}(h_i)$ — число точек из Λ_i, попавших в круг $\Delta_\sigma(h_i)$. В нашем случае вместо $V(r) = r^{\rho(r)}$ берется вес $\omega \in L_2$. Поэтому, если учесть (7), вместо (14) получим

$$N \sum_{|h_i| \leqslant r} \omega(|h_i|) \leqslant n(2r) \leqslant D_\omega \omega(2r) \leqslant 2D_\omega \omega(r)$$

(здесь учтено, что $n(2r)=0$ при $r\leqslant\frac{q}{2}$, а функция $\omega(r)$ вогнутая). Отсюда для функции

$$\Phi(r)=\int\limits_0^r \omega(t)\,d\nu(t)=\sum_{|h_i|\leqslant r}\omega(|h_i|)$$

будем иметь

$$\Phi(r)=0 \quad \text{при} \quad r\leqslant\frac{q}{2};$$

$$\Phi(r)\leqslant\frac{2D_\omega}{N}\,\omega(r) \quad \text{при} \quad r>\frac{q}{2}.$$

Так как $\frac{t}{\omega(t)}\uparrow$ при $t\uparrow$, то отсюда имеем

$$\int\limits_0^r t d\nu(t)=\int\limits_q^r \frac{t}{\omega(t)}\,\omega(t)\,d\nu(t)\leqslant\frac{2D_\omega}{N}r.$$

Таким образом, из (13) окончательно получаем, что

$$p_E(r)\leqslant\delta\frac{2D_\omega}{N}=4\frac{D_\omega}{N}\frac{\sigma}{1-\sigma}.$$

Лемма 1 доказана. $\triangleright$

Лемма 2. *Пусть $D_\omega<\infty$, $\omega\in L_2$, $0<\alpha<1$. Тогда каждому числу t, $0<t\leqslant\frac{1}{2}$, можно поставить в соответствие множество кружков Q_t таким образом, что выполняются условия:*

а) *$Q_t\supset Q_s$ при $t>s$;*

б) *при $t\to 0$ линейная плотность множества Q_t стремится к нулю;*

в) *при $z\notin Q_t$ верна оценка*

$$\sup_{0<\sigma\leqslant t}\frac{n_\sigma(z)}{\sigma^{1-\alpha}}\leqslant\omega(|z|).$$

Доказательство леммы 2 есть дословное повторение доказательства леммы 5 из [4] с той лишь разницей, что вместо $V(r)=r^{\rho(r)}$ используется вес $\omega(r)$ из L_2, только вместо леммы 4 из [4] применяется доказанная выше лемма 1. Поэтому доказательство леммы 2 не приводим.

Поясним теперь, как доказывается равенство I теоремы 2. Как и в статье [4], сначала показывается, что $I_\Lambda(G_\theta)\leqslant J^*_\Lambda(G_\theta)$. Для этого из неравенства $J^*_\Lambda(G_\theta)<K<\infty$ выводится оценка $I_\Lambda(G_\theta)\leqslant K$. При этом используется только то, что функция $\omega(r)$ принадлежит классу L_1, т. е. возрастающая и удовлетворяет условию (4). Противоположное неравенство $J^*_\Lambda(G_\theta)\leqslant I_\Lambda(G_\theta)$ по сути получается при помощи тех же рассуждений, что и в случае функции $V(r)$, но с применением лемм 1 и 2, приведенных выше.

Таким образом, равенство I в случае $\omega\in L_2$ почти очевидно.

Свойство II есть простое следствие равенства I.

3. Подготовительная теорема

Пусть $W(\lambda)$ — целая функция (1), для которой выполняется условие (5): $0 < D^*_\omega < \infty$, $\omega \in L_2$. Для формулировки основных теорем нам понадобятся следующие семейства неограниченных множеств: $\mathscr{E} = \bigl\{G_\theta\colon\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\bigr\}$, $\mathfrak{F} = \{\Gamma_\theta\}$, $\Gamma_\theta = \partial G_\theta$, где $G_\theta = \bigl\{z\colon\ \theta \leqslant \arg z \leqslant \pi - \theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\bigr\}$. Пусть $\mathfrak{R}$ — любое из семейств $\mathscr{E}$ или $\mathfrak{F}$.

Верна следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $0 < D^*_\omega < \infty$, $\omega \in L_2$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

А. *Если $H^*_W(\mathfrak{R}) < \infty$ или $I_\Lambda(\mathfrak{R}) < \infty$, то найдется постоянная $A_W < \infty$, не зависящая от $\mathfrak{R}$, такая, что*

$$|H^*_W(\mathfrak{R}) + I_\Lambda(\mathfrak{R})| \leqslant A_W; \tag{15}$$

Б. *Если $H^*_W(\mathfrak{R}) < \infty$ или $H_W(\mathfrak{R}) < \infty$, то найдется постоянная $B_W < \infty$, не зависящая от $\mathfrak{R}$, такая, что*

$$|H^*_W(\mathfrak{R}) - H_W(\mathfrak{R})| \leqslant B_W; \tag{16}$$

В. *Условия $H^*_W(\mathscr{E}) > -\infty$ и $H^*_W(\mathfrak{F}) > -\infty$ эквивалентны.*

Г. *Пусть $P = \{z\colon\ \pi \leqslant \arg z \leqslant 2\pi\}$, $\Gamma = \partial P = \mathbb{R}$. Тогда условия $H_W(\mathscr{E}) > -\infty$ и $I_\Lambda(\Gamma) < \infty$ эквиваленты.*

$\lhd$ Неравенство (15) в утверждении А вытекает из второй оценки в (12) и теоремы 2, если учесть замечание к этой теореме.

Докажем утверждение Б. Для любой точки $z \in G_\theta$

$$\min_{\lambda\in\Lambda} |z - \lambda| \geqslant d|z|,$$

где $d = \sin\theta > 0$ — «коэффициент удаления линейно плотного множества G_θ от множества Λ» (см. [4]). Ясно, что $n_\sigma(z) = 0$ при $z \in G_\theta$ и $\sigma < d$. Отсюда

$$I_\Lambda(G_\theta) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G_\theta}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma = \varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G_\theta}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_d^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma$$
$$= \varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G_\theta}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_0^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma = J_\Lambda(G_\theta).$$

С другой стороны, по теореме 2, $I_\Lambda(G_\theta) = J^*_\Lambda(G_\theta)$. Отсюда следует, что $J_\Lambda(G_\theta) = J^*_\Lambda(G_\theta)$. Так как все это верно и для Γ_θ, то

$$J_\Lambda(\mathfrak{R}) = J^*_\Lambda(\mathfrak{R}). \tag{17}$$

Воспользуемся оценками (12). В силу (17), указанные оценки имеют место, если хотя бы одна из величин $H_W(\mathfrak{R})$ или $H^*_W(\mathfrak{R})$ конечна. Тогда неравенство (16) следует из равенства

$$H^*_W(\mathfrak{R}) - H_W(\mathfrak{R}) = [H^*_W(\mathfrak{R}) + J^*_\Lambda(\mathfrak{R})] - [H_W(\mathfrak{R}) + I_\Lambda(\mathfrak{R})]$$

с постоянной $B_W = 2A_W$.

Утверждение Б доказано.

Доказательство утверждения В основано на следующей лемме, которая будет использована и при доказательстве утверждения Г.

Лемма 3. *Пусть G — произвольное множество, свободное от точек последовательности Λ, $\Gamma = \partial G$. Тогда из $I_\Lambda(\Gamma) < K$ следует $I_\Lambda(G) \leqslant \frac{3}{2}(K + 15D_\omega)$, где*

$$D_\omega = \sup_{t>0} \frac{n(t)}{\omega(t)}, \quad \omega \in L_2,$$

а ω — вес из теоремы 3.

$\lhd$ Доказательство леммы. Так как $I_\Lambda(\Gamma) < K$, то для любого $\varepsilon > 0$ при $z' \in \Gamma$, $|z'| \geqslant r_0(\varepsilon)$ имеем

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z')}{\sigma}\, d\sigma < K\omega(|z'|). \tag{18}$$

Пусть $z \in G$, $d(z) = \frac{\rho(z)}{|z|}$, $z \neq 0$, где $\rho(z) = \inf_{t \in \Gamma} |z - t| = |z - z'|$, $z' \in \Gamma$. Запишем $\rho(z) = d(z)|z|$. Если $d(z) > \frac{1}{2}$, то $n_\sigma(z) = 0$ при $\sigma \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma \leqslant n_1(z) \leqslant n(2|z|) \leqslant 2D_\omega \omega(|z|),$$

так как $\omega \in L_2$. Если же $d(z) \leqslant \frac{1}{2}$, то

$$\frac{1}{2}|z| \leqslant |z'| \leqslant \frac{3}{2}|z|. \tag{19}$$

Поэтому $|z'| > r_0(\varepsilon)$ при больших z, $z \in G$, и будет выполняться равенство (18). Далее, так как $\Delta_{4\sigma}(z') \supset \Delta_\sigma(z)$ при $\sigma \geqslant d(z)$, то $n_\sigma(z) \leqslant n_{4\sigma}(z')$. Тогда, полагая $d_\varepsilon = d_\varepsilon(z) = \max\,[d(z), \varepsilon]$, при $z \in G$, $|z| \geqslant R$ получим, что

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma = \int\limits_{d_\varepsilon}^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma \leqslant \int\limits_{d_\varepsilon}^1 \frac{n_{4\sigma}(z')}{\sigma}\, d\sigma = \int\limits_{4d_\varepsilon}^4 \frac{n_\sigma(z')}{\sigma}\, d\sigma$$
$$\leqslant \int\limits_{4\varepsilon}^1 \frac{n_\sigma(z')}{\sigma}\, d\sigma + \int\limits_1^4 \frac{n_\sigma(z')}{\sigma}\, d\sigma \leqslant \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z')}{\sigma}\, d\sigma + 3n_4(z').$$

Отсюда, учитывая (18), (19) и вогнутость функции ω, находим

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma \leqslant K\omega(|z'|) + 3n(5|z'|) \leqslant K\omega\left(\frac{3}{2}|z|\right) + 3n\left(\frac{15}{2}|z|\right) \leqslant \frac{3}{2}(K + 15D_\omega)\omega(|z|).$$

Отсюда следует, что

$$I_\Lambda(G) \leqslant \frac{3}{2}(K + 15D_\omega).$$

Лемма доказана. $\rhd$

Приступим теперь к доказательству предложения B. Согласно (15), достаточно доказать эквивалентность условий $I_\Lambda(\mathscr{E}) > -\infty$ и $I_\Lambda(\mathfrak{F}) < \infty$. Пусть $I_\Lambda(\mathfrak{F}) < K < \infty$. Убедимся, что тогда $I_\Lambda(\mathscr{E}) < \infty$. Очевидно, имеем: $I_\Lambda(\Gamma_\theta) < K$ для любого θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. По лемме 3, $I_\Lambda(G_\theta) \leqslant \frac{3}{2}(K + 15D_\omega)$. Отсюда

$$I_\Lambda(\mathscr{E}) = \sup_{0<\theta<\frac{\pi}{2}} I_\Lambda(G_\theta) < \infty.$$

Итак, из неравенства $I_\Lambda(\mathfrak{F}) < K$ следует, что $I_\Lambda(\mathscr{E}) < \infty$.

Обратное утверждение проверяется проще.

Пусть $I_\Lambda(\mathscr{E}) < K < \infty$, т. е. для любых $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G_\theta}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\,d\sigma < K.$$

Отсюда при $z \in G_\theta$, $|z| \geqslant R$

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\,d\sigma < K\omega(|z|). \tag{20}$$

Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, $z' \in \Gamma_\theta$. В круге $\Delta_\varepsilon(z')$ найдется точка $z \in G_\theta$. Для этой точки при $\sigma \geqslant \varepsilon$ имеем $\Delta_{4\sigma}(z) \supset \Delta_\sigma(z')$, и $n_{4\sigma}(z) \geqslant n_\sigma(z')$. Отсюда, учитывая (20), получаем, что при $|z'| \geqslant R_1$

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z')}{\sigma}\,d\sigma \leqslant \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_{4\sigma}(z)}{\sigma}\,d\sigma \leqslant \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\,d\sigma + \int\limits_1^4 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\,d\sigma \leqslant K\omega(|z|) + 3n_4(z)$$
$$\leqslant K\omega((1+\varepsilon)|z'|) + 3n(5(1+\varepsilon)|z'|) \leqslant (1+\varepsilon)[K + 15D_\omega]\omega(|z'|).$$

Таким образом, при $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$ и $z' \in \Gamma_\theta$, $|z'| \geqslant R_1$, имеем

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z')}{\sigma}\,d\sigma \leqslant \frac{3}{2}[K + 15D_\omega]\omega(|z'|),$$

т. е. $I_\Lambda(\Gamma_\theta) \leqslant \frac{3}{2}[K + 15D_\omega]$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Отсюда

$$I_\Lambda(\mathfrak{F}) = \sup_{0<\theta<\frac{\pi}{2}} I_\Lambda(\Gamma_\theta) < \infty.$$

Утверждение В доказано.

Наконец, докажем утверждение Г. Пусть P есть замкнутая нижняя полуплоскость $\overline{\Pi}_- = \{z\colon\ \mathrm{Im} z \leqslant 0\}$, границей которой является $\Gamma = \mathbb{R}$. Так что $\Lambda \subset P$. Требуется доказать, что условия $H_W(\mathscr{E}) > -\infty$ и $I_\Lambda(\mathbb{R}) < \infty$ эквивалентны. Здесь $\mathscr{E} = \{G_\theta\colon\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$.

В силу утверждения Б, достаточно показать эквивалентность условий $H^*_W(\mathscr{E}) > -\infty$ и $I_\Lambda(\mathbb{R}) < \infty$, а если учесть утверждение А, — равносильность условий $I_\Lambda(\mathscr{E}) < \infty$ и $I_\Lambda(\mathbb{R})$.

Пусть $I_\Lambda(\mathbb{R}) < K < \infty$, $\Pi_+ = \{z\colon\ \mathrm{Im} z > 0\}$. Так как $\Pi_+ \cap \Lambda = 0$, то, применяя к Π_+ лемму 3, получаем, что

$$I_\Lambda(\Pi_+) \leqslant \frac{3}{2}(K + 15D_\omega) < \infty.$$

Так как $G_\theta \subset \Pi_0$ для любого $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то $I_\Lambda(G_\theta) \leqslant \frac{3}{2}(K + 15D_\omega)$, а потому

$$I_\Lambda(\mathscr{E}) = \sup_{0<\theta<\frac{\pi}{2}} I_\Lambda(G_\theta) < \infty.$$

Осталось убедиться, что если $I_\Lambda(\mathbb{R}) = \infty$, то и $I_\Lambda(\mathscr{E}) = \infty$. Для случая веса $\omega(r) = V(r)$, $V(r) = r^{\rho(r)}$, это показано в [4]. При этом использовано только то, что $V \in L_1$, т. е. монотонность и выполнение условия типа (4). Так что это подавно верно и для веса $\omega \in L_2$, так как $L_2 \subset L_1$. $\rhd$

4. Основная теорема

Теорема 4. *Пусть $D^*_\omega < \infty$, $\omega \in L_2$. Положим*

$$H_W(\theta) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln|W(re^{i\theta})|}{\omega(r)},$$

где $W(\lambda)$ — целая функция (1).

Для того чтобы

$$\inf_{\theta\neq 0,\pi} H_W(\theta) > -\infty, \tag{21}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$I_\Lambda(\omega,\mathbb{R}_+) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{1}{\omega(x)} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(x)}{\sigma}\, d\sigma < \infty.$$

$\lhd$ В наших обозначениях $I_\Lambda(\omega,\mathbb{R}_+) = I_\Lambda(\mathbb{R}_+)$, а условие (21) можно записать таким образом:

$$H_W(\mathfrak{F}) > -\infty, \tag{22}$$

где

$$\mathfrak{F} = \left\{\Gamma_\theta\colon\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}, \quad \Gamma_\theta = \partial G_\theta, \quad G_\theta = \{z\colon\ \theta \leqslant \arg z \leqslant \pi-\theta\}.$$

Согласно утверждению Б теоремы 3 условие (22) равносильно условию $H^*_W(\mathfrak{F}) > -\infty$, которое, в свою очередь, эквивалентно неравенству $H^*_W(\mathscr{E}) > -\infty$ согласно свойству В, а значит, неравенству $H_W(\mathscr{E}) > -\infty$, если снова учесть утверждение Б теоремы 3. Таким образом, видим, что $H_W(\mathfrak{F}) > -\infty$ тогда и только тогда, когда $H_W(\mathscr{E}) > -\infty$. Осталось применить утверждение Г, согласно которому условие $H_W(\mathscr{E}) > -\infty$ для четной функции (1) равносильно условию $I_\Lambda(\mathbb{R}_+) < \infty$.

Итак, условия $H_W(\mathfrak{F}) > -\infty$ и $I_\Lambda(\mathbb{R}_+) < \infty$ равносильны, и все доказано. $\rhd$

Литература

1. *Леонтьев А. Ф.* О сходимости последовательности полиномов Дирихле // Докл. АН СССР.—1956.—Т. 108, № 1.—С. 23–26.
2. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент.—М.: Наука, 1980.—384 с.
3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.—632 с.
4. *Красичков И. Ф.* Оценки снизу для целых функций конечного порядка // Сиб. матем. журн.—1965.—Т. 6, № 4.—С. 840–861.
5. *Кондратюк А. А.* Целые функции с положительными нулями, имеющими конечную максимальную плотность // Теория функций, функциональный анализ и их приложения.—1968.—Вып. 7.—С. 37–52.
6. *Baillette A.* Approximation de fonctions par des sommes d'exponentielles // C. R. Acad. Sci.—1959.—Vol. 249, № 23.—P. 2470–2471.
7. *Baillette A.* Fonctions approchables par des sommes d'exponentielles // J. Anal. Math.—1962.—Vol. 10, № 2.—P. 91–115. DOI: 10.1007/BF02790304.
8. *Pólya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzeihen // Math. Z.—1929.—Vol. 29.—P. 549–640.
9. *Bernstein V.* Leçons sur les Progrès Récents de la Théorie des Séries de Dirichlet.—Paris: Gauthier-Villars.—1933.—320+xiv p.
10. *Шерстюков В. Б.* Распределение нулей канонических произведений и весовой индекс конденсации // Мат. сб.—2015.—Т. 206, № 9.—С. 139–180. DOI: 10.4213/sm8446.

11. *Красичков И. Ф.* О сходимости полиномов Дирихле // Сиб. матем. журн.—1966.—Т. 7, № 5.—С. 1039–1058.
12. *Гайсин А. М.* Об одной гипотезе Полиа // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1994.—Т. 58, № 2.—С. 73–92.
13. *Гайсин А. М.* Решение проблемы Пойа // Мат. сб.—2002.—Т. 193, № 6.—С. 39–60. DOI: 10.4213/sm659.
14. *Гайсин А. М.* Об одной теореме Хеймана // Сиб. матем. журн.—1998.—Т. 39, № 3.—С. 501–516.
15. *Гайсин А. М.* Целые функции: основы классической теории с приложениями по комплексному анализу.—Уфа.: РИЦ БашГУ, 2016.—160 с.

Статья поступила 29 октября 2024 г.

Гайсин Ахтяр Магазович
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
главный научный сотрудник, заведующий отделом
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: gaisinam@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-4579-9077

Гайсин Рашит Ахтярович
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
научный сотрудник
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: rashit.gajsin@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-4356-2842

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 21–35

WEIGHT INDEX OF CONCENTRATION

Gaisin, A. M.[1] and Gaisin, R. A.[1]

[1] Institute of Mathematics with Computing Centre
of the Ufa Federal Research Center of the RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia

E-mail: gaisinam@mail.ru, rashit.gajsin@mail.ru

Abstract. In terms of the concentration weight index, the behavior of the function $|W(re^{i\theta})|^{-1}$ is investigated as $\theta \to 0$, where W is an even entire function of exponential type that has only real zeros. This question is relevant in a number of problems of complex analysis related to the strongly nonspanning (strongly minimality) of a system of exponentials on a family of curves, Pavlov–Korevar–Dixon interpolation, and analytic continuation of limit functions of sequences of polynomials from exponentials. This circle of problems goes back to the following problem of A. F. Leontief posed in 1956: under what conditions $\sup_{\theta\neq 0,\pi} H(\theta) < \infty$, where $H(\theta)$ is the indicatrix (indicator) of the function $W^{-1}(\lambda)$, $\lambda = re^{i\theta}$. In the works of A. F. Leontief and A. Baillette, some estimates for this indicator were obtained, but they turned out to be very rough. For arbitrary entire functions of proximate order, I. F. Krasichkov in 1965 proved a theorem that answers A. F. Leontief's question. As was shown, a necessary and sufficient condition for the finiteness of the indicator $H(\theta)$ is the finiteness of the concentration index of the sequence Λ of zeros of the entire function W, calculated through the growth function for a given proximate order. Of particular interest is the case when the sequence Λ is an interpolation sequence. In this case, as shown by B. Berndtsson, the comparison function is some concave majorant from the convergence class. However, this function (i. e., the weight) does not have to have the regular variation at infinity. Therefore, this case is considered in the present paper. The main result: in order for the weight lower indicator $H(\omega,\theta)$ of the function W to be uniformly bounded below, it is necessary and sufficient that the concentration weight index $I_\Lambda(\omega,\mathbb{R})$ be finite.

Keywords: entire function, lower indicator, coindicatrix, maximum density, weight index of concentration.

AMS Subject Classification: 30D20.

For citation: *Gaisin, A. M. and Gaisin, R. A.* Weight Index of Concentration, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 21–35. (in Russian). DOI: 10.46698/y0305-5846-4678-h.

References

1. *Leont'ev, A. F.* On the Convergence of a Sequence of Dirichlet Polynomials, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1956, vol. 108, pp. 23–26. (in Russian).
2. *Leont'ev, A. F. Posledovatel'nosti polinomov iz e'ksponent* [Sequences of polynomials of exponentials], Moscow, Nauka, 1980, 384 p. (in Russian).
3. *Levin, B. Ja. Raspredelenie kornej cely'x funkcij* [Distribution o f zeros of entire functions], Moscow, Gastexizdat, 1956, 632 p.
4. *Krasichkov, I. F.* Lower Bound for Entire Functions of Finite Order, *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 1965, vol. 6, no. 4, pp. 840–861. (in Russian).
5. *Kondratyuk, A. A.* Entire Functions with Positive Zeros That Have Finite Maximum Density, *Teoriya funkcij, funkcional'nyj analiz i ih prilozheniya* [Theory of functions, functional analysis and their applications], 1968, vol. 7, pp. 37–52. (in Russian).
(in Russian).
6. *Baillette, A.* Approximation de Fonctions par des sommes d'Exponentielles, *C.R. Acad. Sci.*, 1959, vol. 249, no. 23, pp. 2470–2471.
7. *Baillette, A.* Fonctions Approchables par des Sommes d'Exponentielles, *Journal d'Analyse Mathématique*, 1962, vol. 10, no. 2, pp. 91–115. DOI: 10.1007/BF02790304.
8. *Pólya, G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzeihen, *Math. Z.*, 1929, vol. 29, pp. 549–640.
9. *Bernstein, V. Leçons sur les Progrès Récents de la Théorie des Séries de Dirichlet*, Paris, Gauthier-Villars, 1933, 320+xiv p.
10. *Sherstyukov, V. B.* Distribution of the Zeros of Canonical Products and Weighted Condensation Index, *Sbornik: Mathematics*, 2015, vol. 206, no. 9, pp. 1299–1339. DOI: 10.1070/SM2015v206n09ABEH004497.
11. *Krasichkov, I. F.* Convergence of Dirichlet Polynomials, *Siberian Mathematical Journal*, 1966, vol. 7, no. 5, pp. 826–842. DOI: 10.1007/BF01044487.
12. *Gaisin, A. M.* On a Conjecture of Polya, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1995, vol. 44, no. 2, pp. 281–299. DOI: 10.1070/IM1995v044n02ABEH001597.
13. *Gaisin, A. M.* Solution of the Polya Problem, *Sbornik: Mathematics*, 2002, vol. 193, no. 6, pp. 825–845. DOI: 10.1070/SM2002v193n06ABEH000659.
14. *Gaisin, A. M.* On a Theorem of Hayman, *Siberian Mathematical Journal*, 1998, vol. 39, no. 3, pp. 431–445. DOI: 10.1007/BF02673898.
15. *Gaisin, A. M. Cely'e funkcii: osnovy' klassicheskoj teorii s prilozheniyami po kompleksnomu analizu* [Entire functions: fundamentals of classical theory with applications to research in complex analysis], Ufa, RIC BashGU, 2016, 160 p. (in Russian).

Received October 29, 2024

Akhtyar M. Gaisin
Institute of Mathematics with Computing Centre
of the Ufa Federal Research Center of the RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Chief Scientific Officer
E-mail: gaisinam@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-4579-9077

Rashit A. Gaisin
Institute of Mathematics with Computing Centre
of the Ufa Federal Research Center of the RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Scientific Officer
E-mail: rashit.gajsin@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-4356-2842