Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 44–55

УДК 517.982.274, 517.983.22
DOI 10.46698/r2980-5208-7458-m

ПРОСТРАНСТВО ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА КАК ЛОКАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

О. А. Иванова[1], **С. Н. Мелихов**[1,2]

[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: `neo_ivolga@mail.ru`, `snmelihov@yandex.ru`, `snmelihov@sfedu.ru`

Посвящается 70-летию профессора А. В. Абанина

Аннотация. Пусть G — область в комплексной плоскости, звездная относительно точки 0, $H^{-\infty}(G)$ — пространство голоморфных в G функций полиномиального роста вблизи границы G. В нем вводится произведение Дюамеля $*$. Оно используется в операционном и операторном исчислениях, при решении дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в спектральной теории, в задаче о спектральной кратности линейного оператора, в краевых задачах. Показано, что $H^{-\infty}(G)$ с указанным умножение является унитальной ассоциативной и коммутативной топологической алгеброй. Оператор интегрирования $J(f)(z) = \int_0^z f(t)\,dt$ линейно и непрерывно действует в $H^{-\infty}(G)$. Установлено, что все линейные непрерывные в $H^{-\infty}(G)$ операторы, перестановочные с J, представляются в виде $S_g(f) = f * g$, где g — фиксированная функция из $H^{-\infty}(G)$. В случае, когда G является строго звездной относительно точки 0, доказаны критерий обратимости элемента алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$ и критерий того, что оператор S_g имеет линейный непрерывный обратный. Показано, что всякий ненулевой оператор из коммутанта J является композицией степени оператора J и некоторого изоморфизма из упомянутого коммутанта. При доказательстве $*$-обратимости привлекается ряд Неймана, обычно применяющийся в банаховых пространствах. В ненормируемых локально выпуклых пространствах функций ранее он использовался Л. Бергом, Н. Уигли и М. Т. Караевым. Описаны все замкнутые идеалы алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$, замкнутые инвариантные подпространства и циклические векторы J в $H^{-\infty}(G)$. Из полученных результатов следует, что оператор J является одноклеточным, а алгебра $(H^{-\infty}(G), *)$ локальна. Единственным максимальным идеалом в ней является множество всех $*$-необратимых элементов.

Ключевые слова: произведение Дюамеля, оператор интегрирования, пространство голоморфных функций полиномиального роста.

AMS Subject Classification: 46A10, 47B91, 46H10.

Образец цитирования: *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Пространство голоморфных функций полиномиального роста как локальная алгебра // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 44–55. DOI: 10.46698/r2980-5208-7458-m.

1. Введение

В данной работе изучается произведение Дюамеля $*$ в пространстве $H^{-\infty}(G)$ голоморфных в области $G \subset \mathbb{C}$ функций полиномиального роста вблизи границы G. При этом предполагается, что G является звездной относительно точки 0. В пространстве

Фреше $H(G)$ всех голоморфных в G функций это произведение было введено и исследовано Н. Уигли [1]. С умножением $*$ пространство $H^{-\infty}(G)$ является ассоциативной и коммутативной топологической алгеброй с единицей — функцией, тождественно равной 1. В последние десятилетия алгебры голоморфных функций с таким умножением достаточно интенсивно исследуются (см., например, статью М. Т. Караева [2]). Оно находит приложения в операционном и операторном исчислениях, к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, в обобщенной спектральной теории в смысле А. Бисваса, А. Ламберта и С. Петровича [3], в задаче о спектральной кратности линейного непрерывного оператора, в краевых задачах. Умножение $*$ тесно связано с оператором интегрирования $J(f)(z) = \int_0^z f(t)\,dt$. В статье показано, что линейными непрерывными в $H^{-\infty}(G)$ операторами, перестановочными с J, являются операторы Дюамеля $S_g(f) = f * g$ (функция $g \in H^{-\infty}(G)$ фиксирована), и только они. Для пространств всех голоморфных функций в областях $\mathbb{C}$ подобные результаты ранее были получены И. С. Райчиновым [4], Н. И. Нагнибидой [5, теорема 1] (см. также исторический обзор в монографии Ю. Ф. Коробейника [6, § 13]), для пространств непрерывных $C(\Delta)$ и локально интегрируемых $\mathscr{L}(\Delta)$ функций (Δ — промежуток в $\mathbb{R}$, содержащий точку 0) — И. Димовским [7, теорема 1.1.2], для пространства $C^\infty[0,1]$ — Р. Тапдигоглу и Б. Т. Торебеком [8]. Здесь используется подход, предложенный М. Т. Караевым: отмеченная связь оператора J и произведения $*$ позволяет одновременно описывать замкнутые идеалы алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$ и замкнутые инвариантные подпространства оператора J. Ключевым при этом является следующий результат (теорема 3): элемент g алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$ обратим тогда и только тогда, когда $g(0) \neq 0$. Последнее равносильно также тому, что оператор S_g является топологическим изоморфизмом $H^{-\infty}(G)$. Для пространства Фреше всех функций, непрерывно дифференцируемых на $[0, +\infty)$, такой критерий был доказан Л. Бергом [9, гл. 5, § 26], для $H(G)$ — в [1], для $C^\infty[0,1]$ — в [8], для пространств бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций на интервале или отрезке в $\mathbb{R}$, содержащем точку 0, — в [10, следствие 4.1]. При $*$-обращении g используется ряд Неймана, применяемый, как правило, в банаховых пространствах. Ранее в ненормируемых пространствах для доказательства аналогичного критерия он привлекался Л. Бергом [9, гл. 5, § 26], Н. Уигли [1] , М. Т. Караевым [11]. Структура $H^{-\infty}(G)$ отличается от структуры пространств, рассмотренных в этом направлении ранее: $H^{-\infty}(G)$ является ненормируемым счетным индуктивным пределом весовых банаховых пространств. Возможность привлечения ряда Неймана в рассматриваемой ситуации дают характер непрерывности свертки $*$, выявленный теоремой 1 для области G, строго звездной относительно точки 0, и сужения $*$ на банаховы пространства, образующие данный индуктивный предел. Используя аргументы Н. Уигли [1], М. Т. Караева [11], с помощью этого результата мы описываем все замкнутые идеалы алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$. Множество $I_0 = \{f \in H^{-\infty}(G) : f(0) = 0\}$ всех необратимых элементов в $(H^{-\infty}(G), *)$ является единственным максимальным идеалом этой алгебры, а значит, она локальная. Взаимосвязь умножения $*$ и оператора J и плотность множества всех многочленов в $H^{-\infty}(G)$ позволяют также показать, что множество всех замкнутых идеалов алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$ совпадает с множеством всех замкнутых J-инвариантных подпространств $H^{-\infty}(G)$. Отсюда следует, что $H^{-\infty}(G)\backslash I_0$ является множеством всех циклических векторов оператора J в $H^{-\infty}(G)$.

Одними из первых работ, в которых изучалось пространство $H^{-\infty}(G)$, являются статьи Б. Коренблюма [12, 13] (в случае, когда G — открытый единичный круг). В них исследованы нулевые множества функций из $H^{-\infty}(G)$, изучен соответствующий класс мероморфных функций, получено аналитическое описание замкнутых идеалов алгебры

$H^{-\infty}(G)$ с поточечным умножением. Интерес к этому пространству вызван, в частности, и тем, что его аналоги для областей в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ используются в проблеме граничных значений в смысле распределений (см. статью Э. Дж. Штраубе [14]). Цикл исследований, связанных с пространством $H^{-\infty}(G)$ для области G в $\mathbb{C}^n$ при $n \geqslant 1$ проведен А. В. Абаниным, Ле Хай Хоем и Р. Ишимурой (см., например, [15–19] и библиографию в этих работах). Он связан с описанием сопряженного пространства, изучением разложений в ряды эспонент, с достаточными множествами, с операторами свертки.

2. Основные пространства, произведение Дюамеля и его свойства

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$. Через $H(G)$ будем обозначать пространство всех функций, голоморфных в G, с топологией равномерной сходимости на компактах в G. Полагаем $\overline{B}(a,r) = \big\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant r\big\}$, $a \in \mathbb{C}$, $r \geqslant 0$; $d(z) = \inf_{t \in \partial G} |z-t|$, $z \in G$. Здесь ∂G — граница области G. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим банахово пространство

$$H^{-n}(G) := \left\{ f(z) \in H(G) : \|f\|_n := \sup_{z \in G} |f(z)|(d(z))^n < +\infty \right\}$$

с нормой $\|\cdot\|_n$. Введем в пространстве $H^{-\infty}(G) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H^{-n}(G)$ голоморфных в G функций полиномиального роста вблизи границы G топологию индуктивного предела последовательности пространств $H^{-n}(G)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в $H^{-\infty}(G)$.

Следующий результат получен в [20].

Лемма 1. *Оператор дифференцирования $f \mapsto f'$ непрерывно отображает $H^{-n}(G)$ в $H^{-n-1}(G)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, а значит, $H^{-\infty}(G)$ в $H^{-\infty}(G)$.*

Далее предполагается, что G — ограниченная область, звездная относительно точки 0, т. е. для любого $z \in G$ отрезок $[0,z]$ содержится в G. Для $f, g \in H(G)$ произведение Дюамеля $f * g$ определяется равенством (интеграл берется по отрезку $[0,z]$)

$$(f * g)(z) := \frac{d}{dz} \int_0^z f(t) g(z-t)\, dt, \quad z \in G.$$

Это произведение можно представить и в таком виде:

$$(f * g)(z) = g(0) f(z) + \int_0^z f(t) g'(z-t)\, dt, \quad z \in G.$$

Полагаем

$$(f \circledast g)(z) := \int_0^z f(t) g(z-t) dt, \quad z \in G,\ f, g \in H^{-\infty}(G).$$

Функции $f * g$ и $f \circledast g$ голоморфны в G.

Далее $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f_n(z) := \frac{1}{n!} z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, $J(f)(z) := \int_0^z f(t)\, dt$, $f \in H^{-\infty}(G)$, $z \in G$. Оператор интегрирования J линеен и непрерывен в $H^{-\infty}(G)$ (см. следствие 1). Отметим выполняющиеся в G равенства

$$J(f * g) = f \circledast g, \quad J(f) * g = f \circledast g, \quad f, g \in H^{-\infty}(G), \tag{1}$$

$$f_m * f_n = f_{m+n}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0, \tag{2}$$

$$J^n(f) = f_n * f, \quad f \in H^{-\infty}(G),\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{3}$$

Следующий результат доказан в [21, лемма 3].

Лемма 2. *Если G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, звездная относительно точки 0, то $d(qz) \geqslant qd(z)$ для любых $z \in G$, $q \in [0,1]$.*

Лемма 3. *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, звездная относительно точки 0; $r_0 > 0$ такое, что $\overline{B}(0, r_0) \subseteq G$. Тогда существует $q_0 \in (0,1)$, для которого для любых $z \in G \setminus \overline{B}(0, r_0)$ и $t \in [0, z] \setminus \overline{B}(0, r_0)$, выполняется неравенство $d(t) \geqslant q_0 d(z)$.*

$\lhd$ Так как область G ограниченная, то существует $R > r_0$, для которого $G \subseteq \overline{B}(0, R)$. Для любой точки $z \in G \setminus \overline{B}(0, r_0)$, любого $t \in G \setminus \overline{B}(0, r_0)$, лежащего на отрезке $[0, z]$, выполняется неравенство

$$\frac{|t|}{|z|} \geqslant \frac{r_0}{R} =: q_0.$$

Значит, $t = qz$, где $q \geqslant q_0$. По лемме 2 $d(t) \geqslant q_0 d(z)$. $\rhd$

Ниже будут использоваться области, обладающие усиленным свойством звездности. Ограниченная область G в $\mathbb{C}$ является строго звездной относительно точки 0, если для любого $q \in [0,1)$ множество $q\overline{G}$ содержится в G. При этом $\overline{G}$ — замыкание G в $\mathbb{C}$. Ясно, что ограниченная область G в $\mathbb{C}$, строго звездная относительно 0, является звездной относительно 0. Если G строго звездная относительно точки 0, то любой луч с началом в 0 пересекает границу ∂G области G в единственной точке и выполняются равенства

$$G = \bigcup_{w \in \partial G} [0, w), \quad \overline{G} = \bigcup_{w \in \partial G} [0, w].$$

Теорема 1. *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область, звездная относительно точки 0.*

(i) *Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $f \in H^{-m}(G)$, $g \in H^{-n}(G)$*

$$\|f \circledast g\|_{m+n} \leqslant C \|f\|_m \|g\|_n,$$

а если G строго звездная относительно точки 0, то

$$\|f \circledast g\|_{\max\{m,n\}} \leqslant C \|f\|_m \|g\|_n.$$

(ii) *Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ существует постоянная $B > 0$ такая, что для всех $f \in H^{-m}(G)$, $g \in H^{-n}(G)$*

$$\|f * g\|_{m+n+1} \leqslant B \|f\|_m \|g\|_n,$$

а если G строго звездная относительно точки 0, то

$$\|f * g\|_{\max\{m,n\}+1} \leqslant B \|f\|_m \|g\|_n.$$

$\lhd$ Докажем утверждение (i). Выберем r_0, r_1 так, что $0 < r_0 < r_1$ и $\overline{B}(0, r_1) \subset G$. Определим $q_0 \in (0,1)$ по лемме 3. Пусть $t \in [0, z]$, $z \in G$. Если $|t| \geqslant r_0$, то $d(t) \geqslant q_0 d(z)$. Если $|t| < r_0$, то

$$d(t) \geqslant r_1 - r_0 \geqslant \frac{r_1 - r_0}{R}\, d(z)$$

для $R > 0$ такого, что $G \subset \overline{B}(0, R)$. Значит, для любых $z \in G$, $t \in [0, z]$ выполняется неравенство

$$d(t) \geqslant \gamma_0 d(z), \tag{4}$$

где $\gamma_0 := \min\left\{q_0; \frac{r_1-r_0}{R}\right\}$. Возьмем $m,n\in\mathbb{N}$, $f\in H^{-m}(G)$, $g\in H^{-n}(G)$. Для $z\in G$

$$|(f\circledast g)(z)| = \left|\int\limits_0^z f(t)g(z-t)\,dt\right| \leqslant \|f\|_m\|g\|_n\,|z| \sup_{t\in[0,z]}\frac{1}{(d(t))^m(d(z-t))^n}. \tag{5}$$

Неравенства (4) и (5) влекут, что

$$|(f\circledast g)(z)|(d(z))^{m+n} \leqslant \frac{R}{(\gamma_0)^{m+n}}\|f\|_m\|g\|_n, \quad z\in G,$$

а значит,

$$\|f\circledast g\|_{m+n} \leqslant \frac{R}{(\gamma_0)^{m+n}}\|f\|_m\|g\|_n.$$

Предположим теперь, что область G строго звездная относительно точки 0. Как и выше, выберем $R\geqslant 1$, для которого $G\subseteq \overline{B}(0,R)$. Введем компакт $K := \frac{1}{2}\overline{G}$. Он содержится в G, 0 является его внутренней точкой и

$$0 < \inf_{\substack{u\in K,\\ v\in\partial G}} |u-v| =: \delta.$$

Выполняется равенство $K := \bigcup_{w\in\partial G}[0,\frac{w}{2}]$. Возьмем $\rho>0$, для которого $\overline{B}(0,\rho)\subseteq K$.

Если $z\in[0,w)$ и $z\notin\left[0,\frac{w}{2}\right]$ для $w\in\partial G$, то для любой точки $t\in[0,z]$ не более одной точки t и $z-t$ лежит в $\left(\frac{w}{2},w\right)$. Действительно, если обе эти точки лежат в $\left(\frac{w}{2},w\right)$, то $z=t+(z-t)$ не принадлежит G.

Пусть $z\in G$, $z\in[0,w)$, $w\in\partial G$, и $z\notin\left[0,\frac{w}{2}\right]$. Предположим, что $t\in[0,z]$ и $t\in\left(\frac{w}{2},w\right)$. Тогда $z-t\in K$ и $d(z-t)\geqslant\delta$. Поскольку $t=qz$ для некоторого $q\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, то $d(t)\geqslant\frac{1}{2}d(z)$ по лемме 2. Если $t\in[0,z]$, $t\in K$ и $z-t\in\left(\frac{w}{2},wb\right)$, то $d(t)\geqslant\delta$ и $d(z-t)\geqslant\frac{1}{2}\,d(z)$. Если обе точки t и $z-t$ находятся в K, то $d(t)\geqslant\delta$ и $d(z-t)\geqslant\delta$. В случае $z\in\left[0,\frac{w}{2}\right]$ для $t\in[0,z]$ также выполняются неравенства $d(t)\geqslant\delta$ и $d(z-t)\geqslant\delta$. Поэтому для любых $z\in G$, $t\in[0,z]$

$$(d(t))^m\;(d(z-t))^n \geqslant \min\left\{\frac{(d(z))^m}{2^m}\delta^n;\,\delta^m\frac{(d(z))^n}{2^n};\,\delta^{m+n}\right\} =: \alpha(z). \tag{6}$$

Положим

$$\beta=\beta(m,n) := \min\left\{\frac{\delta^n}{2^m};\,\frac{\delta^m}{2^n};\,\delta^{m+n}\right\}.$$

Пусть $s:=\max\{m;n\}$. Тогда, если $d(z)\in(0,1]$,

$$\alpha(z)\geqslant\beta\,(d(z))^s\,.$$

Пусть $d(z)\geqslant 1$. Поскольку $d(\xi)\leqslant R$ для любого $\xi\in G$, то

$$\alpha(z) = (d(z))^s\min\left\{\frac{\delta^n}{2^m}(d(z))^{m-s};\,\frac{\delta^m}{2^n}(d(z))^{n-s};\,\frac{\delta^{m+n}}{(d(z))^s}\right\}\geqslant\omega(d(z))^s,$$

где

$$\omega=\omega(m,n) := \min\left\{\frac{\delta^n}{2^mR^{s-m}};\,\frac{\delta^m}{2^nR^{s-n}};\,\frac{\delta^{m+n}}{R^s}\right\}>0$$

и $\omega\leqslant\beta$. Значит, для любого $z\in G$ выполняется неравенство

$$\alpha(z)\geqslant\omega\big(d(z)\big)^s. \tag{7}$$

Итак, вследствие неравенств (5)–(7)

$$|(f \circledast g)(z)| \leqslant \|f\|_m \|g\|_n \frac{|z|}{\omega\,(d(z))^s}, \quad z \in G. \tag{8}$$

Поэтому

$$\|f \circledast g\|_s = \sup_{z\in G} |(f \circledast g)(z)|\,(d(z))^s \leqslant \frac{R}{\omega}\|f\|_m\|g\|_n.$$

Утверждение (ii) следует из (i) и леммы 1. $\triangleright$

Для $g \in H^{-\infty}(G)$ введем оператор Дюамеля

$$S_g(f) := f * g, \quad f \in H^{-\infty}(G).$$

Следствие 1. *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область, звездная относительно точки* 0; $g \in H^{-\infty}(G)$.

(i) *Линейный оператор S_g непрерывно отображает $H^{-\infty}(G)$ в $H^{-\infty}(G)$.*

(ii) *Оператор интегрирования J линеен и непрерывен в $H^{-\infty}(G)$.*

Из теоремы 1, равенств (2) и плотности множества всех многочленов в $H^{-\infty}(G)$ вытекает

Следствие 2. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, звездная относительно точки* 0. *Тогда $(H^{-\infty}(G), *)$ — ассоциативная и коммутативная топологическая алгебра. Функция, тождественно равная* 1, *является ее единицей.*

При этом используются следующие понятия. *Алгебра* — это локально выпуклое пространство $\mathscr{A}$ над $\mathbb{C}$, в котором введено умножение, т. е. билинейное отображение $\cdot$ из $\mathscr{A}\times\mathscr{A}$ в $\mathscr{A}$. Алгебра $(\mathscr{A}, \cdot)$ называется *топологической*, если отображение $\cdot : \mathscr{A}\times\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ непрерывно.

3. Описание коммутанта оператора интегрирования

Пусть $\{J\}'$ — коммутант J в алгебре $\mathscr{L}(H^{-\infty}(G))$ всех линейных непрерывных в $H^{-\infty}(G)$ операторов с умножением — композицией операторов:

$$\{J\}' = \big\{A \in \mathscr{L}(H^{-\infty}(G)) :\ AJ = JA \ \text{ в } \ H^{-\infty}(G)\big\}.$$

Множество $\{J\}'$ является подалгеброй $\mathscr{L}(H^{-\infty}(G))$. Опишем его. Далее $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная 1.

Теорема 2. *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, звездная относительно точки* 0.

(i) *Если $A \in \{J\}'$, то существует единственная функция $g \in H^{-\infty}(G)$, для которой $A = S_g$.*

(ii) *Для любой функции $g \in H^{-\infty}(G)$ оператор S_g принадлежит $\{J\}'$.*

$\triangleleft$ Утверждение (ii) вытекает из следствия 1 и равенств (1).

(i): Положим $g := A(\mathbf{1})$. Тогда $A(\mathbf{1}) = \mathbf{1} * g$. Рассуждая по индукции, для любого $n \in \mathbb{N}$ получим:

$$A(f_n) = nA(J(f_{n-1})) = nJ(A(f_{n-1})) = nJ(f_{n-1} * g) = n(J(f_{n-1}) * g) = f_n * g.$$

Из плотности множества всех многочленов в $H^{-\infty}(G)$ и следствия 2 вытекает, что $A(f) = f * g$ для любой функции $f \in H^{-\infty}(G)$. Поскольку $\mathbf{1} * h = h$ для всех $h \in H^{-\infty}(G)$, то такая функция g единственна. $\triangleright$

Утверждения подобного рода для других пространств хорошо известны. И. Райчинов [4] доказал такое представление для операторов из коммутанта J для пространства всех функций, голоморфных в звездной относительно точки 0 области в $\mathbb{C}$, Н. И. Нагнибида [5, теорема 1] — для оператора $f \mapsto \int_\alpha^z f(t)\,dt$ в пространстве $H(G)$ для области G в $\mathbb{C}$, звездной относительно точки α, И. Димовски [7, теорема 1.1.2] — для пространств функций, непрерывных и локально интегрируемых на промежутке Δ в $\mathbb{R}$, содержащем точку 0.

Теорема 2 и ассоциативность умножения $*$ влекут

Следствие 3. *Отображение $g \mapsto S_g$ является изоморфизмом алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$ на алгебру $\{J\}'$.*

4. Обратимые элементы алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$ и обратимость оператора Дюамеля

В этой части идет речь об $*$-обратимости и обратимости S_g в $H^{-\infty}(G)$. Ниже будем использовать метод, идущий от [9, гл. 5, § 26], [1, теорема, с. 212].

Лемма 4. *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{G}$, строго звездная относительно точки 0; $h \in H^{-\infty}(G)$, $h(0) = 0$. Тогда функция $f = \mathbf{1} - h$ является $*$-обратимой.*

$\lhd$ Покажем, что существует функция $u \in H^{-\infty}(G)$, для которой $f * u = \mathbf{1}$. Пусть $h \in H^{-n}(G),\ n \in \mathbb{N}$. По лемме 1 $h' \in H^{-n-1}(G)$. Положим

$$h^{[0]} := \mathbf{1}, \quad h^{[s+1]} := h^{[s]} * h, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

При этом $h^{[1]} = h$. Для $s \in \mathbb{N}_0$, $z \in G$

$$h^{[s+1]}(z) = h(0)h^{[s]}(z) + \int_0^z h^{[s]}(t)h'(z-t)\,dt = \int_0^z h^{[s]}(t)h'(z-t)\,dt.$$

Пусть $\omega = \omega(n+1, n+1) > 0$ такое, как при доказательстве теоремы 1. Вследствие неравенства (8) для любого $z \in G$

$$\left|h^{[2]}(z)\right| = \left|\int_0^z h(t)h'(z-t)\,dt\right| \leqslant \|h\|_{n+1}\|h'\|_{n+1}\frac{|z|}{\omega\,(d(z))^{n+1}}.$$

Покажем по индукции, что для $s \geqslant 2$

$$\left|h^{[s]}(z)\right| \leqslant \|h\|_{n+1}\left(\|h'\|_{n+1}\right)^{s-1}\frac{|z|^{s-1}}{\omega^{s-1}(s-1)!\,(d(z))^{n+1}}, \quad z \in G. \tag{9}$$

При $s = 2$ это верно. Пусть (9) верно для некоторого $s \geqslant 2$. Тогда $h^{[s]} \in H^{-n-1}(G)$. Вследствие неравенств (6) и (7) для любых $z \in G$, $t \in [0, z]$

$$\begin{aligned}|h^{[s]}(t)h'(z-t)| &\leqslant \|h\|_{n+1}\left(\|h'\|_{n+1}\right)^{s-1}\frac{|t|^{s-1}}{\omega^{s-1}(s-1)!}\|h'\|_{n+1}\frac{1}{(d(t))^{n+1}\,(d(z-t))^{n+1}} \\ &\leqslant \|h\|_{n+1}\left(\|h'\|_{n+1}\right)^{s}\frac{1}{\omega^{s}(s-1)!\,(d(z))^{n+1}}|t|^{s-1}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\left|h^{[s+1]}(z)\right| = \left|\int\limits_0^z h'(z-t)\, h^{[s]}(t)\, dt\right|$$

$$\leqslant \|h\|_{n+1} \left(\|h'\|_{n+1}\right)^s \frac{1}{\omega^s (s-1)! (d(z))^{n+1}} \int\limits_0^{|z|} r^{s-1} dr = \|h\|_{n+1} \left(\|h'\|_{n+1}\right)^s \frac{|z|^s}{\omega^s s!\, \left(d(z)\right)^{n+1}}.$$

Значит, неравенство (9) выполняется и для $s+1$. Из него вытекает, что

$$\|h^{[s]}\|_{n+1} \leqslant \|h\|_{n+1} \left(\|h'\|_{n+1}\right)^{s-1} \frac{R^s}{\omega^{s-1} s!}, \quad s \geqslant 2,$$

где $R \in [1, +\infty)$ такое, что $G \subseteq \overline{B}(0, R)$. Поэтому ряд $\sum_{s=0}^{\infty} h^{[s]}$ абсолютно сходится в банаховом пространстве $H^{-n-1}(G)$ к функции u такой, что $(1-h) * u = \mathbf{1}$. $\rhd$

Теорема 3. *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, строго звездная относительно точки* 0. *Функция $g \in H^{-\infty}(G)$ обратима в $(H^{-\infty}(G), *)$ тогда и только тогда, когда* $g(0) \neq 0$.

$\lhd$ Если $g(0) \neq 0$, то элемент g обратим в $(H^{-\infty}(G), *)$ по лемме 4.

Пусть $g(0) = 0$. Тогда $f * g = f \circledast g'$ и $(f * g)(0) = 0$ для любой функции $f \in H^{-\infty}(G)$. Это влечет $*$-необратимость g. $\rhd$

Следствие 4. *Пусть G — ограниченная строго звездная относительно точки* 0 *область в $\mathbb{C}$, $g \in H^{-\infty}(G)$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *Оператор $S_g : H^{-\infty}(G) \to H^{-\infty}(G)$ имеет линейный непрерывный обратный.*

(ii) *Оператор $S_g : H^{-\infty}(G) \to H^{-\infty}(G)$ сюръективен.*

(iii) $g(0) \neq 0$.

$\lhd$ (iii)$\Rightarrow$(i): Пусть $g(0) \neq 0$. По лемме 4 существует функция $v \in H^{-\infty}(G)$, для которой $g * v = \mathbf{1}$. Поэтому по следствию 3 $S_{\mathbf{1}} = S_{g*v} = S_g S_v$. Так как $S_{\mathbf{1}}$ — тождественный оператор, то S_v — линейный непрерывный обратный к $S_g : H^{-\infty}(G) \to H^{-\infty}(G)$.

Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) очевидна.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Пусть $g(0) = 0$. Тогда для $f \in H^{-\infty}(G)$

$$S_g(f)(z) = \int\limits_0^z f(t) g'(z-t)\, dt.$$

Значит, $S_g(f)(0) = 0$ для любой функции $f \in H^{-\infty}(G)$. Поэтому оператор $S_g : H^{-\infty}(G) \to H^{-\infty}(G)$ не является сюръективным. $\rhd$

Теорема 3 ранее была доказана Л. Бергом [9, гл. 5, § 26] для пространства всех непрерывно дифференцируемых функций на $[0, +\infty)$, Н. Уигли [1] — для $H(G)$ в случае, когда область $G \subset \mathbb{C}$ звездна относительно точки 0, следствие 4 — Р. Тапдигоглу и Б. Т. Торебеком [8] для $C^{\infty}[0, 1]$, в [10, следствие 4.1] для пространств бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций на интервале или отрезке в $\mathbb{R}$, содержащем 0 (здесь отмечены результаты для ненормируемых пространств).

Следствие 5. *Пусть G — ограниченная строго звездная относительно точки 0 область в $\mathbb{C}$, $g \in H^{-\infty}(G)$, $n \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}(0) = 0$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $g^{(n)}(0) \neq 0$. Тогда $S_g = J^n S_h$, где $h = g^{(n)}$ и S_h — изоморфизм $H^{-\infty}(G)$.*

$\lhd$ Поскольку $g = J^n(h)$, то $g = f_n * h$ в силу равенства (3). Учитывая следствие 3, получим, что $S_g = S_{f_n} S_h = J^n S_h$. По следствию 4 оператор S_h является изоморфизмом $H^{-\infty}(G)$. $\rhd$

5. Идеалы алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$, инвариантные подпространства и циклические векторы оператора интегрирования

Ниже предполагается, что G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, строго звездная относительно точки 0.

Теорема 4. *Для любого $m \in \mathbb{N}_0$ множество*

$$I_m := \left\{ f \in H^{-\infty}(G) : \, f^{(k)}(0) = 0, \ 0 \leqslant k \leqslant m \right\}$$

является собственным замкнутым идеалом алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$.

Любой собственный замкнутый идеал $(H^{-\infty}(G), *)$ совпадает с некоторым множеством I_m.

$\lhd$ Для любой функции $f \in I_m$, для $h \in H^{-\infty}(G)$ вследствие теоремы 2

$$f * h = J^{m+1}\left(f^{(m+1)}\right) * h = J^{m+1}\left(f^{(m+1)} * h\right),$$

а значит, $f * h \in I_m$. Кроме того, I_m — собственное замкнутое подпространство $H^{-\infty}(G)$. Следовательно, каждое множество I_m, $m \in \mathbb{N}_0$, является собственным замкнутым идеалом $(H^{-\infty}(G), *)$.

Пусть I — собственный замкнутый идеал $(H^{-\infty}(G), *)$. Поскольку каждый элемент I $*$-необратим, то $I \subseteq I_0$ по теореме 3. Выберем наименьшее $m \in \mathbb{N}_0$, для которого $f^{(k)}(0) = 0$, $0 \leqslant k \leqslant m$, для любой функции $f \in I$, и функцию $h \in I$ такую, что $h^{(m+1)}(0) \neq 0$. Пусть $f \in H^{-\infty}(G)$. Вследствие теоремы 3 существует функция $v \in H^{-\infty}(G)$, для которой $f = h^{(m+1)} * v$. Поэтому

$$J^{m+1}(f) = J^{m+1}\left(h^{(m+1)}\right) * v = h * v \in I.$$

Значит, $I_m = J^{m+1}\left(H^{-\infty}(G)\right) = I$. $\rhd$

Теорема 5. *Семейство $\{I_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ совпадает с множеством всех собственных замкнутых J-инвариантных подпространств $H^{-\infty}(G)$.*

$\lhd$ Пусть H — собственное замкнутое J-инвариантное подпространство $H^{-\infty}(G)$, $f \in H$. Поскольку $f_n * f = J^n(f) \in H$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$ и множество всех многочленов плотно в $H^{-\infty}(G)$, то $g * f \in H$ для каждой функции $g \in H^{-\infty}(G)$. Значит, H — собственный замкнутый идеал $(H^{-\infty}(G), *)$.

Ясно, что любое I_m, $m \in \mathbb{N}_0$, является собственным замкнутым J-инвариантным подпространством $(H^{-\infty}(G)$. $\rhd$

Структура решетки замкнутых J-инвариантных подпространств $H^{-\infty}(G)$, описанная в теореме 5, позволяет определить и множество циклических векторов J. При этом элемент x локально выпуклого пространства E называется *циклическим вектором* линейного непрерывного в E оператора L, если замыкание линейной оболочки орбиты $\{L^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ совпадает с E. Ненулевой элемент $x \in E$ является циклическим вектором L в том и только в том случае, когда x не принадлежит ни одному замкнутому собственному L-инвариантному подпространству E. Этот факт и теорема 5 влекут

Следствие 6. *Функция $f \in H^{-\infty}(G)$ является циклическим вектором оператора J в $H^{-\infty}(G)$ тогда и только тогда, когда $f(0) \neq 0$.*

Литература

1. *Wigley N.* The Duhamel product of analytic functions // Duke Math. J.—1974.—Vol. 41.—P. 211–217. DOI: 10.1215/S0012-7094-74-04123-4.
2. *Караев М. Т.* Алгебры Дюамеля и их приложения // Функц. анализ и его прил.—2018.—Т. 52, вып. 1.—С. 3–12. DOI: 10.4213/faa3481.
3. *Biswas A., Lambert A., Petrovic S.* Extended eigenvalues and the Volterra operator // Glasgow Math. J.—2002.—Vol. 44.—P. 521–534. DOI: 10.1017/S001708950203015X.
4. *Райчинов И.* О линейных операторах, перестановочных с операцией интегрирования // Математический анализ и его приложения. Т. 2.—Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1970.—С. 63–72.
5. *Нагнибида Н. И.* К вопросу об описании коммутантов оператора интегрирования в аналитических пространствах // Сибирский матем. журн.—1981.—Т. 22, № 5.—С. 127–131.
6. *Коробейник Ю. Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах.—Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1983.—160 с.
7. *Dimovski I.* Convolutional Calculus.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990.—184 p.
8. *Tapdigoglu R., Torebek B. T.* Commutant and Uniqueness of Solutions of Duhamel Equations // Bull. Malays. Math. Sci. Soc.—2021.—Vol. 44, issue 2.—P. 705–710. DOI: 10.1007/s40840-020-00972-1.
9. *Berg L.* Einführung in die Operatorenrechnung.—Berlin: VEB Duetscher Verlag der Wissenschaften, 1965.—274 p.
10. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об обратимости оператора Дюамеля в пространствах ультрадифференцируемых функций // Уфимск. матем. журн.—2023.—Т. 15, № 4.—С. 61–74.
11. *Karaev M. T.* New proof of Nagnibida's theorem // J. of Function Spaces and Appl.—2006.—Vol. 4, № 1.—P. 85–90. DOI: 10.1155/2006/524947.
12. *Korenblum B.* An extension of the Nevanlinna theory // Acta Math.—1975.—Vol. 135.—P. 187—219. DOI: 10.1007/BF02392019.
13. *Korenblum B.* A Beurling-type theorem // Acta Math.—1977.—Vol. 138.—P. 265—293. DOI: 10.1007/BF02392318.
14. *Straube E. J.* Harmonic and analytic functions admitting a distribution boundary value // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.—1989.—Vol. 11, № 4.—P. 559–591.
15. *Abanin A. V., Khoi Le Hai.* Dual of the function algebra $A^{-\infty}(D)$ and representation of functions in Dirichlet series // Proc. Amer. Math. Soc.—2010.—Vol. 138.—P. 3623–3635. DOI: 10.1090/S0002-9939-10-10383-9.
16. *Abanin A. V., Khoi Le Hai.* Pre-dual of the Function Algebra $A^{-\infty}(D)$ and Representation of Functions in Dirichlet Series // Complex Anal. Oper. Theory.—2011.—Vol. 5.—P. 1073–1092. DOI: 10.1007/s11785-010-0047-8.
17. *Abanin A. V., Ishimura R., Khoi Le Hai.* Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains // Ark. Mat.—2012.—Vol. 50.—P. 1–22. DOI: 10.1007/s11512-011-0146-4.
18. *Abanin A. V., Ishimura R., Khoi Le Hai.* Extension of solutions of convolution equations in spaces of holomorphic functions with polynomial growth in convex domains // Bull. Sci. Math.—2012.—Vol. 136, Issue 1.—P. 96–110. DOI: 10.1016/j.bulsci.2011.06.002.
19. *Абанин А. В., Хой Ле Хай.* Линейный непрерывный правый обратный оператор для оператора свертки в пространствах голоморфных функций полиномиального роста // Изв. вузов. Математика.—2015.—№ 1.—С. 3–13.
20. *Melikhov S. N.* (DFS)-spaces of holomorphic functions invariant under differentiation // J. Math. Anal. Appl.—2004.—Vol. 297, issue 2.—P. 577—586. DOI: 10.1016/j.jmaa.2004.03.030.
21. *Варзиев В. А., Мелихов С. Н.* О сопряженном к пространству аналитических функций полиномиального роста вблизи границы // Владикавк. матем. журн.—2008.—Т. 10, № 4.—С. 17—22.

Статья поступила 31 октября 2024 г.

Иванова Ольга Александровна
Южный федеральный университет,
доцент кафедры математического анализа и геометрии
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: neo_ivolga@mail.ru

Мелихов Сергей Николаевич
Южный федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики,
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: snmelihov@yandex.ru, snmelihov@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0002-5895-9607

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 44–55

SPACE OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS OF POLYNOMIAL GROWTH AS LOCAL ALGEBRA

Ivanova, O. A.[1] and Melikhov, S. N.[1,2]
[1] Southern Federal University,
8 a Mil'chakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: neo_ivolga@mail.ru, snmelihov@yandex.ru, snmelihov@sfedu.ru

Abstract. Let G be a domain in the complex plane, star-shaped with respect to the point 0, $H^{-\infty}(G)$ be the space of holomorphic functions in G of polynomial growth near the boundary of G. The Duhamel product $*$ is introduced in it. This product is used in operational and operator calculus, in the spectral theory, in the problem of the spectral multiplicity of a linear operator, in boundary value problems. It is shown that $H^{-\infty}(G)$ with it is a unital topological algebra. The integration operator $J(f)(z) = \int_0^z f(t)\,dt$ acts linearly and continuously in $H^{-\infty}(G)$. It is proved that all linear continuous operators in $H^{-\infty}(G)$ that commute with J, are represented as $S_g(f) = f * g$, where g is a fixed function from $H^{-\infty}(G)$. In the case where G is strictly star-shaped with respect to zero, a criterion for the invertibility of an element of the algebra $H^{-\infty}(G)$ and a criterion for the operator S_g to have the continuous linear inverse are proved. It is shown that every nonzero operator from the commutator subgroup J is a composition of the power of the operator J and some isomorphism from the aforementioned commutator subgroup. In the proving of $*$-invertibility the Neumann series is used, usually applied in Banach spaces. In non-normable locally convex spaces of functions it was previously used by L. Berg, N. Wigley, and M. T. Karaev. All closed ideals of the algebra $(H^{-\infty}(G), *)$, closed invariant subspaces and cyclic vectors of J in $H^{-\infty}(G)$ are described. From the obtained results it follows that the operator J is unicellular and the algebra $(H^{-\infty}(G), *)$ is local. The only maximal ideal in it is the set of all $*$-irreversible elements.

Keywords: Duhamel product, integration operator, space of holomorphic functions of polynomial growth.

AMS Subject Classification: 46A10, 47B91, 46H10.

For citation: *Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N.* Space of Holomorphic Functions of Polynomial Growth as Local Algebra, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 44–55 (in Russian). DOI: 10.46698/r2980-5208-7458-m.

References

1. *Wigley, N.* The Duhamel Product of Analytic Functions, *Duke Mathematical Journal*, 1974, vol. 41, pp. 211–217. DOI: 10.1215/S0012-7094-74-04123-4.
2. *Karaev, M. T.* Duhamel Algebras and Applications, *Functional Analysis and Its Applications*, 2018, vol. 52, pp. 1–8. DOI: 10.1007/s10688-018-0201-z.
3. *Biswas, A., Lambert, A. and Petrovic, S.* Extended Eigenvalues and the Volterra Operator, *Glasgow Mathematical Journal*, 2002, vol. 44, pp. 521–534. DOI: 10.1017/S001708950203015X.
4. *Raichinov, I.* On Linear Operators Commuting with the Integration Operation, *Matematicheskii analiz i ego prilozheniya. T. 2* [Mathematical Analysis and its Applications. Vol. 2], Rostov-on-Don, RSU, 1970, pp. 63–72 (in Russian).

5. *Nagnibida, N. I.* On the Question of the Description of the Commutants of an Integration Operator in Analytic Spaces, *Siberian Mathematical Journal*, 1981, vol. 22, no. 5, pp. 748–752. DOI: 10.1007/BF00968071.
6. *Korobeinik, Yu. F. Operatory sdviga na chislovykh semeystvakh* [Shift Operators on Numerical Families], Rostov-on-Don, RSU, 1983, 160 p. (in Russian).
7. *Dimovski, I. Convolutional Calculus*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1990, 184 p.
8. *Tapdigoglu, R. and Torebek, B. T.* Commutant and Uniqueness of Solutions of Duhamel Equations, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2020, vol. 44, no. 2, pp. 705–710. DOI: 10.1007/s40840-020-00972-1.
9. *Berg, L. Einführung in die Operatorenrechnung*, Berlin, VEB Duetscher Verlag der Wissenschaften, 1965, 274 p.
10. *Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N.* On Invertibility of Duhamel Operator in Spaces of Ultradifferentiable Functions, *Ufa Mathematical Journal*, 2023, vol. 15, no. 4, pp. 62–75. DOI: 10.13108/2023-15-4-62.
11. *Karaev, M. T.* New Proof of Nagnibida's Theorem, *Journal of Function Spaces and Applications*, 2008, vol. 4, no. 1, pp. 85–90. DOI: 10.1155/2006/524947.
12. *Korenblum, B.* An Extension of the Nevanlinna Theory, *Acta Mathematica*, 1975, vol. 135, pp. 187—219. DOI: 10.1007/BF02392019.
13. *Korenblum, B.* A Beurling-Type Theorem, *Acta Mathematica*, 1977, vol. 138, pp. 265—293. DOI: 10.1007/BF02392318.
14. *Straube, E. J.* Harmonic and Analytic Functions Admitting a Distribution Boundary Value, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa–Classe di Scienze*, 1989, vol. 11, no. 4, pp. 559–591.
15. *Abanin, A. V. and Khoi, Le Hai.* Dual of the function Algebra $A^{-\infty}(D)$ and Representation of Functions in Dirichlet Series, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2010, vol. 138, pp. 3623–3635. DOI: 10.1090/S0002-9939-10-10383-9.
16. *Abanin, A. V. and Khoi, Le Hai.* Pre-Dual of the Function Algebra $A^{-\infty}(D)$ and Representation of Functions in Dirichlet Series, *Complex Analysis and Operator Theory*, 2011, vol. 5, pp. 1073–1092. DOI: 10.1007/s11785-010-0047-8.
17. *Abanin A. V., Ishimura R. and Khoi Le Hai.* Convolution Operators in $A^{-\infty}$ for Convex Domains, *Arkiv för Matematik*, 2012, vol. 50, pp. 1–22. DOI: 10.1007/s11512-011-0146-4.
18. *Abanin, A. V., Ishimura, R. and Khoi, Le Hai.* Extension of Solutions of Convolution Equations in Spaces of Holomorphic Functions with Polynomial Growth in Convex Domains, *Bulletin des Sciences Mathematiques*, 2012, vol. 136, no. 1, pp. 96–110. DOI: 10.1016/j.bulsci.2011.06.002.
19. *Abanin, A. V. and Khoi, Le Hai.* Linear Continuous Right Inverse Operator for Convolution Operator in Spaces of Holomorphic Functions of Polynomial Growth, *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, no. 1, pp. 1–10. DOI: 10.3103/S1066369X15010016.
20. *Melikhov, S. N.* (DFS)-Spaces of Holomorphic Functions Invariant Under Differentiation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, vol. 297, no. 2, pp. 577–586. DOI: 10.1016/j.jmaa.2004.03.030.
21. *Varziev, V. A. and Melikhov, S. N.* On the Dual Space of the Space of Analytic Functions of Polynomial Growth Near the boundary, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2008, vol. 10, no. 4, pp. 17–22 (in Russian).

Received October 31, 2024

Olga A. Ivanova
Southern Federal University,
8 a Mil'chakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis and Geometry
E-mail: `neo_ivolga@mail.ru`

Sergey N. Melikhov
Southern Federal University,
8 a Mil'chakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Professor of the Department of Algebra and Discrete Mathematics;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Leading Researcher of the Department of Mathematical Analysis
E-mail: `snmelihov@yandex.ru`, `snmelihov@sfedu.ru`
https://orcid.org/0000-0002-5895-9607