Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 56–69

УДК 517.53
DOI 10.46698/k4349-9424-9818-w

О ТИПЕ ПОЛИА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ#

К. Г. Малютин[1]

[1] Курский государственный университет,
Россия, 305000, Курск, ул. Радищева, 33
E-mail: malyutinkg@gmail.com

Посвящается 70-летию профессора
Абанина Александра Васильевича

Аннотация. Пусть f — целая функция, $M(r,f) = \max_{|z|=r}|f(z)|$ — максимум модуля функции f в круге $|z| \leqslant r$. В статье рассматриваются функции плотности максимума модуля функции f, которые вычисляются по формулам $M(\alpha) = \overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{M(r+\alpha r,f)-M(r,f)}{r^{\rho(r)}}$, $\underline{M}(\alpha) = \underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{M(r+\alpha r,f)-M(r,f)}{r^{\rho(r)}}$, $\alpha \geqslant 0$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Валирона, $\lim_{r\to+\infty}\rho(r) = \varrho \geqslant 0$. Доказывается, что $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$ являются ϱ-полуаддитивными функциями. Вводится определение типа $\sigma_p(f)$ и минимального типа $\underline{\sigma}_p(f)$ в смысле Полиа функции f по формулам $\sigma_p(f) = \lim_{\alpha\to+0}\frac{M(\alpha)}{\alpha}$, $\underline{\sigma}_p(f) = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\underline{M}(\alpha)}{\alpha}$, которые дают большую информацию о поведении функции, чем ее тип и нижний тип в классическом смысле. Это определение является распространением понятий максимальной и минимальной плотности последовательности положительных чисел, введенных Полиа, который доказал их существование, если рост считающей функции последовательности чисел имеет нормальный тип относительно r. Доказывается существование величин $\sigma_p(f)$ и $\underline{\sigma}_p(f)$, если рост $\ln|f|$ имеет тип не выше чем нормальный относительно $r^{\rho(r)}$ в классическом смысле, т. е. $\ln M(r,f) \leqslant Kr^{\rho(r)}$ при некотором $K > 0$. Рассматриваются некоторые свойства функций $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$.

Ключевые слова: целая функция, функция плотности, полуаддитивная функция, теорема Полиа, максимальный тип, минимальный тип.

AMS Subject Classification: 30D15, 30D20.

Образец цитирования: *Малютин К. Г.* О типе Полиа целой функции // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 56–69. DOI: 10.46698/k4349-9424-9818-w.

Введение

В теории роста целых и субгармонических функций и в других разделах математики часто используются функции плотности. Важной и часто цитируемой является теорема Полиа о существовании максимальной и минимальной плотности последовательности положительных чисел, полученная им в работе [1]. Функции плотности обладают некоторыми свойствами полуаддитивности. Теория полуаддитивных функций достаточно широко изложена в книге Хилле и Филлипс «Функциональный анализ и полугруппы» [2]. Поэтому естественно возникает вопрос о свойствах общих функций плотности

#Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00006.

и связанных с ними полуаддитивных функциях. Одному из таких вопросов посвящено наше исследование.

Пусть $\rho(r)$, $r \in (0,+\infty)$, $\lim_{r\to\infty}\rho(r) = \varrho$, $\varrho \in (-\infty,+\infty)$, — уточненный порядок в смысле Валирона. Число ϱ может быть произвольным вещественным числом. При изучении роста целых функций обычно ограничиваются условием $\varrho \geqslant 0$. Мы будем обозначать $V(r) = r^{\rho(r)}$. Пусть $L(r) = r^{-\varrho}V(r)$. Известно, например, из [3], что для любого $t \in (0,\infty)$ выполняется равенство

$$\lim_{r\to\infty}\frac{L(rt)}{L(r)} = 1. \tag{1}$$

Если для некоторой функции L выполняется равенство (1), то функция L называется *правильно меняющейся порядка ноль в смысле Караматы*. Теории медленно меняющихся функций посвящены книги [4, 5].

Зафиксируем некоторый уточненный порядок. Пусть $f(z)$ — целая функция,

$$M(r,f) = \max_{|z|=r}|f(z)|.$$

Тогда для нее по формулам

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{M(r,f)}{V(r)} := \sigma \in [0,\infty), \quad \underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{M(r,f)}{V(r)} := \underline{\sigma} \in [0,\infty)$$

можно определить тип σ и нижний тип $\underline{\sigma}$. Конечно, для произвольной целой функции f можно только утверждать, что $\sigma, \underline{\sigma} \in [0,\infty]$. Тип функции f — важная характеристика роста этой функции. Однако, значительно большую информацию о поведении f дают ее верхняя функция плотности $M(\alpha)$ и нижняя функция плотности $\underline{M}(\alpha)$, которые вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} M(\alpha) &= \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{M(r+\alpha r,f) - M(r,f)}{V(r)}, \quad \alpha \geqslant 0,\\ \underline{M}(\alpha) &= \underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{M(r+\alpha r,f) - M(r,f)}{V(r)}, \quad \alpha \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Из свойств верхнего и нижнего пределов и равенства (1) следует лемма.

Лемма 1. *Справедливы соотношения*

$$M(\alpha+\beta) \leqslant M(\alpha) + (1+\alpha)^{\varrho} M\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right), \tag{3}$$

$$M(\alpha+\beta) \geqslant M(\alpha) + (1+\alpha)^{\varrho} \underline{M}\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right), \tag{4}$$

$$\underline{M}(\alpha+\beta) \geqslant \underline{M}(\alpha) + (1+\alpha)^{\varrho} \underline{M}\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right), \tag{5}$$

$$\underline{M}(\alpha+\beta) \leqslant \underline{M}(\alpha) + (1+\alpha)^{\varrho} M\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right). \tag{6}$$

$\lhd$ Докажем, например, неравенство (4). Имеем

$$
\begin{aligned}
M(\alpha+\beta) &= \varlimsup_{r\to\infty} \frac{M((1+\alpha+\beta)\,r),f)-M(r,f)}{V(r)}\\
&= \varlimsup_{r\to\infty}\left\{\frac{M((1+\alpha+\beta)\,r,f)-M((1+\alpha)\,r),f)}{V(r)}+\frac{M((1+\alpha)\,r,f)-M(r,f)}{V(r)}\right\}\\
&\geqslant \varliminf_{r\to\infty}\frac{M((1+\alpha+\beta)\,r,f))-(M((1+\alpha)\,r,f))}{V(r)}+\varlimsup_{r\to\infty}\frac{M((1+\alpha)\,r,f)-M(r,f)}{V(r)}\\
&= \varliminf_{r\to\infty}\left\{\frac{M\Big((1+\alpha)\left(1+\frac{\beta}{1+\alpha}\right)r,f\Big)-M((1+\alpha)\,r,f)}{V((1+\alpha)\,r)}\right.\\
&\qquad\left.\times\frac{V((1+\alpha)\,r)}{V(r)}\right\}+M(\alpha)=M(\alpha)+(1+\alpha)^{\varrho}\underline{M}\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right).\ \rhd
\end{aligned}
$$

Функции, удовлетворяющие неравенствам (3) или (5), называются *ϱ-полуаддитивными.* Заметим еще, что $\underline{M}(\alpha)\leqslant M(\alpha)$. Обычно предполагается, что выполняется неравенство $\ln|f(r)|\leqslant KV(r)$ с некоторой константой $K>0$. В этом случае функции $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$ ограничены на любом сегменте $[a,b]\subset[0,\infty)$. По различным причинам временами приходится отказываться от априорной оценки $\ln|f(r)|\leqslant KV(r)$. В этом случае необходимо считать, что функции $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$ принимают значения из расширенной вещественной полуоси $[0,\infty]$. При действиях с величинами из расширенной вещественной прямой в нашей работе предполагается, что соотношения $x=\infty-\infty$, $x\leqslant\infty-\infty$, $x\geqslant\infty-\infty$, справедливы для любого $x\in[-\infty,\infty]$. Неравенство (3) по своей структуре напоминает неравенство

$$\varphi(\alpha+\beta)\leqslant\varphi(\alpha)+\varphi(\beta). \tag{7}$$

Функции, удовлетворяющие неравенству (7), называются полуаддитивными. Полуаддитивные функции часто встречаются в различных вопросах математики. Они активно изучались, и их теория изложена в [2], где приведены многочисленные ссылки. В книге [2] рассматриваются измеримые полуаддитивные функции. Это ограничение естественно и не столь обременительно, если полуаддитивные функции рассматривать как первичные объекты, исходя из которых вести дальнейшие построения. Однако, в рассматриваемом нами случае требование измеримости $M(\alpha)$ не столь безобидно. Дело в том, что мы рассматриваем функцию $M(\alpha)$ как функцию плотности. А из измеримости функции $M(r,f)$ не следует, что ее функция плотности $M(\alpha)$ будет измеримой.

Верхняя функция плотности $M(\alpha)$ удовлетворяет условиям $M(0)=0$ и (3). Однако, далеко не всякая функция $M(\alpha)$, $\alpha\geqslant0$, удовлетворяющая этим условиям, будет функцией плотности. Дело в том, что равенством (2) функцию $M(\alpha)$ можно определить при $\alpha>-1$, причем неравенство (3) будет выполняться и при таких α. Таким образом, всякая функция плотности $M(\alpha)$ продолжается как ϱ-полуаддитивная на полуось $(-1,\infty)$. Нетрудно подсчитать, что функция $M(\alpha)$ при отрицательных α определяется следующим образом:

$$M(\alpha)=-(1+\alpha)^{\varrho}\underline{M}\left(-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right),\quad \alpha\in(-1,0).$$

Аналогично,

$$\underline{M}(\alpha)=-(1+\alpha)^{\varrho}M\left(-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right),\quad \alpha\in(-1,0).$$

Вопросы, связанные с продолжением полуаддитивных функций, обсуждаются в [2] (см., например, теорему 7.6.4).

Изучение свойств функций плотности модуля целой функции — тема нашей работы. Близкие понятия — функции концентрации изучаются в работах [6–8]. Кроме этого нас интересуют вопросы равномерности. Пусть $\psi(\alpha)$ — непрерывная функция на полуоси $[0,\infty)$, $\psi(0)=0$, и пусть выполняется неравенство

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{M((1+\alpha)\,r,f)-M(r,f)}{V(r)}\leqslant\psi(\alpha). \tag{8}$$

Нас интересует, при каких условиях на функцию f функция

$$\varepsilon(r,\alpha)=\left(\frac{M((1+\alpha)\,r,f)}{V(r)}-\psi(\alpha)\right)^{+} \tag{9}$$

равномерно относительно $\alpha\in[0,\alpha_0]$ стремится к нулю при $r\to\infty$ (здесь $(x)^+=\max\{0;x\}$). В теореме 2 мы показываем, что для любой целой функции f справедливо равномерное по α стремление к нулю функции ε при $r\to\infty$.

Наше изложение больше ориентировано на применения к теории роста целых функций. Изложение теории субаддитивных функций в [2] ориентировано на применение в различных вопросах анализа, но более всего — в теории полугрупп операторов. Только в случае $\varrho=0$ ϱ-полуаддитивные функции с точностью до замены переменной $\alpha=e^t-1$ совпадают с полуаддитивными. Специалисты по теории моста целых и субгармонических функций знают, что случай $\varrho=0$ всегда требует отдельного исследования. Исключительность случая $\varrho=0$ будет видна и в нашей работе.

1. Теорема о равномерности

Начнем этот раздел с простого критерия непрерывности функций $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$.

Теорема 1. *Пусть функции $M(\alpha)$, $\underline{M}(\alpha)$, $\alpha\geqslant 0$, удовлетворяют равенствам*

$$M(0)=\underline{M}(0)=0.$$

Для того чтобы обе функции были конечными, непрерывными функциями на полуоси $[0,\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\lim_{\alpha\to+0}M(\alpha)=\lim_{\alpha\to+0}\underline{M}(\alpha)=0.$$

Доказательство простое и мы его опускаем. Далее мы переходим к одному из важных результатов этого раздела — доказательству теоремы о равномерности.

Теорема 2. *Пусть f — целая функция, $\psi(\alpha)$ — непрерывная функция на всей оси $[0,\infty)$, причем $\psi(0)=0$. Пусть для любого $\alpha\in[0,\infty)$ выполняется неравенство (8). Тогда это неравенство выполняется равномерно по α на любом сегменте $[a,b]\subset(0,\infty)$. Если для некоторого $\eta>0$ неравенство (8) выполняется на полуоси $(-\eta,\infty)$, то оно выполняется равномерно на любом сегменте $[0,b]$.*

$\lhd$ Обозначим $r=e^x$, $1+\alpha=e^\tau$, $\varphi(x)=M(e^x,f)$, $\Phi(x)=V(e^x)$, $a_1=\ln(1+a)$, $b_1=\ln(1+b)$, $\psi_1(\tau)=\psi(e^\tau-1)$. В новых обозначениях неравенство (8) будет иметь вид

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\varphi(x+\tau)-\varphi(x)}{\Phi(x)}\leqslant\psi_1(\tau). \tag{10}$$

Нам нужно доказать, что это соотношение выполняется равномерно на сегменте $[a_1, b_1]$. Если это не так, то существуют строго положительное число ε, последовательности $x_n \to \infty$, $\tau_n \in [a_1, b_1]$, такие, что

$$\varphi(x_n + \tau_n) - \varphi(x_n) \geqslant (\psi_1(\tau_n) + \varepsilon)\Phi(x_n). \tag{11}$$

Пусть $\delta \in (0, a_1/2)$, $\varepsilon_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, а в остальном — произвольные числа. Определим множество

$$U_n = \Big\{\alpha \in [0, \delta] : \varphi(x_m + \alpha) - \varphi(x_m) < (\psi_1(\alpha) + \varepsilon_1)\,\Phi(x_m) \ \ \forall\, m \geqslant n\Big\}.$$

Имеем $U_{n+1} \supset U_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = [0, \delta]$. Из измеримости функции φ (это так, поскольку, $M(r, f)$ — непрерывная функция) следует измеримость множеств U_n. Далее определяем множество

$$V_n = \Big\{\beta \in [a_1 - \delta, b_1] : \varphi(x_m + \tau_m) - \varphi(x_m + \tau_m - \beta) < (\psi_1(\beta) + \varepsilon_1)\Phi(x_m + \tau_m - \beta)\ \forall\, m \geqslant n\Big\}.$$

Множества V_n — измеримы, $V_n \subset V_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = [a_1 - \delta, b_1]$. Из свойств непрерывности меры следует, что для любого $\delta_1 > 0$ и всех достаточно больших p будут справедливы соотношения

$$\operatorname{mes} U_p > \delta - \delta_1, \quad \operatorname{mes} V_p > b_1 - a_1 + \delta - \delta_1.$$

Пусть $V_p' = \tau_p - V_p$, и пусть $\delta_1 < \delta/2$. Легко проверяются соотношения

$$U_p \subset [0, \delta] \subset [\tau_p - b_1, \tau_p - a_1 + \delta], \quad V_p' \subset [\tau_p - b_1, \tau_p - a_1 + \delta],$$
$$\operatorname{mes} U_p > \delta - \delta_1 > \frac{1}{2}\,\delta, \quad \operatorname{mes} V_p' > b_1 - a_1 + \delta - \delta_1 > b_1 - a_1 + \frac{1}{2}\,\delta.$$

Из этого следует, что $U_p \cap V_p' \neq \varnothing$. Пусть $\alpha \in U_p \cap V_p'$. Тогда $\alpha \in [0, \delta]$, $\alpha = \tau_p - \beta$, $\beta \in V_p$, $\varphi(x_p + \alpha) - \varphi(x_p) < (\psi_1(\alpha) + \varepsilon_1)\Phi(x_p)$, $\varphi(x_p + \tau_p) - \varphi(x_p + \alpha) < (\psi_1(\tau_p - \alpha) + \varepsilon_1)\Phi(x_p + \alpha)$.

Складывая два последних неравенства, получим

$$\varphi(x_p + \tau_p) - \varphi(x_p) < \psi_1(\tau_p)\Phi(x_p) + (\psi_1(\alpha) + \varepsilon_1)\Phi(x_p) + \varepsilon_1 \frac{\Phi(x_p + \alpha)}{\Phi(x_p)}\Phi(x_p)$$
$$+ \psi_1(\tau_p - \alpha)\left[\frac{\Phi(x_p + \alpha)}{\Phi(x_p)} - 1\right]\Phi(x_p)AA + [\psi_1(\tau_p - \alpha) - \psi_1(\tau_p)]\Phi(x_p).$$

Напомним, что $\alpha \in [0, \delta]$. При достаточно малых ε_1 и δ и достаточно больших p это неравенство противоречит неравенству (22). Тем самым мы доказали, что соотношение (10) выполняется равномерно на сегменте $[a_1, b_1]$. Первое утверждение теоремы доказано. В случае если неравенство 10) выполняется на полуоси $(-\nu, \infty)$, мы можем повторить предыдущие рассуждения с $a = 0$. $\triangleright$

Замечание 1. Равномерная выполнимость неравенства (10) на некотором сегменте по определению означает, что функция $\varepsilon(r, \alpha)$, определенная равенством (9), равномерно по α на этом сегменте стремится к нулю при $r \to \infty$.

Замечание 2. Пусть $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$ — функции плотности целой функции f. Для того, чтобы обе эти функции были непрерывными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{\substack{r \to \infty \\ \alpha \to +0}} \frac{M(r + \alpha r, f) - M(r, f)}{V(r)} = 0. \tag{12}$$

◁ Если выполняется равенство (12), то

$$\lim_{\alpha\to+0} M(\alpha) = \lim_{\alpha\to+0} \underline{M}(\alpha) = 0.$$

Теперь из теоремы 1 следует непрерывность функций $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$. Обратно, если функции $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$ непрерывны (можно считать на полуоси $(-1,\infty)$), то из теоремы 2 следует существование функции $\varepsilon(r)\to 0$ при $r\to\infty$ такой, что будут справедливы неравенства

$$(\underline{M}(\alpha)-\varepsilon(r))V(r) \leqslant M(r+\alpha r, f) - M(r,f) \leqslant (M(\alpha)+\varepsilon(r))V(r), \quad \alpha\in[0,1].$$

Из этих неравенств вытекает равенство (12). ▷

Замечание 3. Если неравенство (10) выполняется на полуоси $[0,\infty)$, то из этого не следует, что оно выполняется равномерно на любом сегменте $[0,b]$.

2. Свойства функций плотности

Формулируемая ниже теорема принадлежит Штейнгаузу [9, теорема 7].

Теорема 3. *Арифметическая сумма $A+B$ измеримых множеств положительной меры на вещественной оси содержит в себе некоторый сегмент $[\alpha,\beta]$, $\alpha<\beta$.*

Простейшие из функций плотности — это те, для которых в неравенствах (3) или (5) стоит знак равенства. Они называются ϱ-аддитивными функциями плотности. К этому классу принадлежат функции плотности регулярно растущих целых функций f, т. е. таких функций, для которых существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r+\alpha r,f)-M(r,f)}{V(r)}.$$

Теорема 4. *Пусть функция плотности $M(\alpha)$ на полуоси $(0,\infty)$, принимающая значения из расширенной вещественной полуоси $[0,\infty]$, удовлетворяет равенству*

$$M(\alpha+\beta) = M(\alpha) + (1+\alpha)^{\varrho} M\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right), \quad \varrho\in[0,\infty)\,. \tag{13}$$

Пусть $\varrho\neq 0$ и функция $M(\alpha)$ конечна на множестве положительной меры. Тогда

$$M(\alpha) = K\frac{(1+\alpha)^{\varrho}-1}{\varrho},$$

где $K>0$ — некоторое число.

Пусть $\varrho=0$ и функция $M(\alpha)$ удовлетворяет хотя бы одному из двух условий:

1) $M(\alpha)$ — измеримая функция, которая конечна на множестве положительной меры;

2) $M(\alpha)$ — ограниченная функция на некотором множестве положительной меры.

Тогда $M(\alpha)=K\ln(1+\alpha)$.

◁ Обозначим $\varphi(t)=M(e^t-1)$. Для функции φ получается уравнение

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + e^{\varrho u}\varphi(v), \quad u,v>0. \tag{14}$$

В частности,

$$\varphi(2u) = (1+e^{\varrho u})\varphi(u). \tag{15}$$

Пусть $A=\{x>0:|\varphi(x)|<\infty\}$. Из условия теоремы следует, что множество A содержит в себе множество положительной меры. Из равенства (14) следует, что $A+A\subset A$. Из теоремы 3 следует, что $\operatorname{Int}A\neq\varnothing$ ($\operatorname{Int}A$ — внутренность A). Из равенства (15) следует, что $\frac{1}{2}A\subset A$. Поэтому $\inf\{\operatorname{Int}A\}=0$. Если теперь $\operatorname{Int}A\neq(a,\infty)$, то существует интервал $(\alpha,\beta)\subset\operatorname{Int}A$ такой, что $\beta\notin\operatorname{Int}A$. Пусть теперь $\gamma\in A$, $\gamma\in(0,\beta-\alpha)$. Так как $\gamma+A\subset A$, то интервал $(\alpha+\gamma,\beta+\gamma)\subset A$. Но тогда $\beta\in\operatorname{Int}A$. Мы получаем противоречие. Таким образом, $\operatorname{Int}A=(a,\infty)$. Из равенства $\inf\{\operatorname{Int}A\}=0$ следует, что $a=0$. Таким образом, функция $\varphi(t)$ конечна на всей полуоси $(0,\infty)$. Пусть $\rho\neq0$. Тогда, меняя в равенстве (14) местами u и v, получим

$$\varphi(u+v)=\varphi(v)+e^{\rho v}\varphi(u),\quad \frac{\varphi(u)}{e^{\varrho u}-1}=\frac{\varphi(v)}{e^{\rho v}-1}.$$

Т. е. функция $\Phi(x)=\frac{\varphi(x)}{e^{\varrho x}-1}=\mathrm{const}:=\frac{K}{\varrho}$, $x>0$, где $K>0$.

Тогда

$$\varphi(u)=K\frac{e^{\varrho u}-1}{\varrho},\quad M(\alpha)=K\frac{(1+\alpha)^{\varrho}-1}{\varrho}.$$

Пусть теперь $\varrho=0$. Имеем $\varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v)$, причем φ конечная на полуоси функция. Если φ — измеримая функция и $U_n=\{u\in[1,2]:|\varphi(u)|<n\}$, то U_n — возрастающая последовательность измеримых множеств, причем $\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n=[1,2]$. Тогда для некоторого n $\operatorname{mes}U_n>0$. Таким образом, из условия теоремы следует в случае $\rho=0$, что существует множество B положительной меры, на котором функция $|\varphi|$ ограничена, скажем, константой b. Тогда на множестве $B+B$ она ограничена константой $2b$. По теореме 3 множество $B+B$ содержит в себе сегмент $[\alpha,\beta]\subset(0,\infty)$. Пусть $\varphi(1)=K$. Тогда из равенства $\varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v)$ следует, что для положительных рациональных u выполняется равенство $\varphi(u)=Ku$. Рассмотрим функцию $\varphi_1(u)=\varphi(u)-Ku$. Эта функция удовлетворяет уравнению $\varphi_1(u+v)=\varphi_1(u)+\varphi_1(v)$, $u,v>0$, ограничена на сегменте $[\alpha,\beta]$, равна нулю в положительных рациональных точках. Пусть теперь x — произвольное число на полуоси $(0,\infty)$. Всегда существует рациональное число r такое, что $x+r=y$, где $y\in[\alpha,\beta]$. Тогда, используя равенство $x+r=y$, если $r>0$, равенство $x=y-r$, если $r<0$, функциональное уравнение для φ_1 и то, что φ_1 обращается в ноль в положительных рациональных точках, получим $\varphi_1(x)=\varphi_1(y)$. Из этого следует, что функция φ_1 ограничена на всей полуоси $(0,\infty)$. Если теперь для некоторого $x_0>0$ $\varphi_1(x_0)\neq0$, то равенство $\varphi_1(nx_0)=n\varphi_1(x_0)$ приводит к противоречию. Таким образом, $\varphi_1(u)=0$, $\varphi(u)=Ku$, $N(\alpha)=K\ln(1+\alpha)$. $\rhd$

Для доказательства следующей теоремы мы предварительно сформулируем две леммы. В этих леммах $[x]$ означает целую часть x.

Лемма 2. *Пусть заданы сегмент $[t_1,t_2]\subset(0,\infty)$ и целое положительное число p такие, что $\left[t_1,\frac{p+1}{p}t_1\right]\subset[t_1,t_2]$. Тогда любое $x\geqslant pt_1$ представляется в виде $x=pt+kt_1$, где $k=\left[\frac{x-pt_1}{t_1}\right]$, $t\in[t_1,t_2]$.*

$\lhd$ Доказательство очевидно. $\rhd$

Лемма 3. *Пусть заданы число $s>0$, сегмент $[\tau_1,\tau_2]\subset(0,\infty)$ и целое число A такие, что $A(\tau_2-\tau_1)>2s$. Тогда любое число $x\geqslant\left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right]+1\right)^2s$ представляется в виде $x=n\tau+ms$, где $\tau\in[\tau_1,\tau_2]$, $n=A\left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right]+1\right)$, $m=k\left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right]+1\right)$, $k=\left[\frac{x-([A\tau_1/s]+1)^2s}{s([A\tau_1/s]+1)}\right]$.*

$\lhd$ Неравенство $A(\tau_2-\tau_1)>2s$ гарантирует включение

$$\left[\left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right]+1\right)s,\left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right]+2\right)s\right]\subset[A\tau_1,A\tau_2]. \tag{16}$$

Теперь применение леммы 2 с параметрами $t_1 = \left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right]+1\right)s$, $p = \left[\frac{A\tau_1}{s}\right]+1$ и соотношения (16) доказывают лемму 3. $\triangleright$

Замечание 4. Если взять $A = \left[x^{1/3}\right]$, то для представления $x = n(x)\tau + m(x)s$ будут справедливы соотношения $n(x) \sim \tau_1 x^{2/3}/s$, $m(x) \sim x/s$. Варьируя величину A, можно добиться, чтобы выполнялось любое из соотношений

$$\lim_{x\to\infty}\frac{m(x)}{n(x)} = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{n(x)}{m(x)} = 0$$

при выполнении условий $\lim_{x\to\infty} n(x) = \lim_{x\to\infty} m(x) = \infty$.

Далее формулируется основная теорема о свойствах функций плотности (мы считаем $\frac{\varrho}{(1+\alpha)^\varrho - 1}\Big|_{\varrho=0} = \frac{1}{\ln(1+\alpha)}$).

Теорема 5. *Пусть $M(\alpha)$ — функция плотности целой функции f, которая удовлетворяет неравенству* (3) *при некотором $\varrho \geqslant 0$.*

1. *Если выполняется хотя бы одно из условий:*

a) *функция $M(\alpha)$ измерима и удовлетворяет неравенству $M(\alpha) < \infty$ на множестве положительной меры;*

b) *функция $M(\alpha)$ ограничена сверху на множестве положительной меры,*
то существует предел

$$H = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{\varrho M(\alpha)}{(1+\alpha)^\varrho - 1} = \inf_{\alpha>0}\frac{\varrho M(\alpha)}{(1+\alpha)^\varrho - 1}\,.$$

2. *Для любой точки $x > 0$ справедливы неравенства*

$$\frac{\varrho}{(1+x)^\varrho - 1}\varlimsup_{\alpha\to x+0} M(\alpha) \leqslant \varlimsup_{\alpha\to+0}\frac{M(\alpha)}{\alpha}\,,$$

$$\frac{\varrho}{(1+x)^\varrho - 1}\varliminf_{\alpha\to x-0} M(\alpha) \leqslant \varliminf_{\alpha\to+0}\frac{M(\alpha)}{\alpha}\,.$$

3. *Существуют пределы*

$$\sigma_p(f) = \lim_{\alpha\to+0}\frac{M(\alpha)}{\alpha} = \sup_{\alpha>0}\frac{\varrho M(\alpha)}{(1+\alpha)^\varrho - 1}, \quad \underline{\sigma}_p(f) = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\underline{M}(\alpha)}{\alpha} = \inf_{\alpha>0}\frac{\varrho \underline{M}(\alpha)}{(1+\alpha)^\varrho - 1}.$$

$\triangleleft$ Обозначим $\varphi(t) = M(e^t - 1)$. Тогда неравенство (3) преобразуется в неравенство

$$\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u) + e^{\varrho u}\varphi(v)\,. \tag{17}$$

Используя метод математической индукции, можно доказать неравенства

$$\frac{\varrho\,\varphi(nu)}{e^{\varrho nu} - 1} \leqslant \frac{\varrho\,\varphi(u)}{e^{\varrho u} - 1}\,, \tag{18}$$

$$\varphi(nu+mv) \leqslant \frac{e^{\varrho nu} - 1}{e^{\varrho u} - 1}\varphi(u) + e^{\varrho nu}\frac{e^{\varrho mv} - 1}{e^{\varrho v} - 1}\varphi(v), \quad \varrho \neq 0\,, \tag{19}$$

$$\varphi(nu+mv) \leqslant n\varphi(u) + m\varphi(v), \quad \varrho = 0\,. \tag{20}$$

Пусть выполняется условие a) теоремы. Так как при отображении $t = \ln(1+\alpha)$ измеримость сохраняется и множество положительной меры переходит в множество положительной меры, то при принятом предположении функция φ будет измеримой и конечной на некотором множестве E положительной меры. Обозначим $E_n = \{t \in E : \varphi(t) \leqslant n\}$. Тогда E_n — возрастающая последовательность измеримых множеств, причем $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Для некоторого n множество E_n имеет положительную меру. На множестве E_n функция φ ограничена сверху. Заметим, что условие б) прямо гарантирует существование такого множества. Вдобавок, мы, без ограничения общности, можем считать, что множество E_n ограничено. Теперь из (17) следует, что функция φ ограничена сверху на множестве $E_n + E_n$. По теореме 3 это множество содержит некоторый сегмент $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, \infty)$. Таким образом, как из условия а) так и из условия б) вытекает существование сегмента $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, \infty)$, на котором функция φ ограничена сверху. Пусть

$$H = \inf_{t>0} \frac{\rho\varphi(t)}{e^{\rho t} - 1}.$$

По условию теоремы $H < \infty$. Пусть H_1 — произвольное вещественное число строго большее чем H. Тогда существует число $\alpha_0 > 0$, что

$$\frac{\rho\varphi(\alpha_0)}{e^{\rho\alpha_0} - 1} < H_1.$$

Пусть вначале $\varrho > 0$. Применим неравенство (19) с $n = n(x)$, $u = \tau$, $m = m(x)$, $v = \alpha_0$. Мы получим

$$\frac{\varrho\,\varphi(x)}{e^{\varrho\, x} - 1} \leqslant \frac{e^{\varrho\, n(x)\tau} - 1}{e^{\varrho\, x} - 1} \frac{\varrho\,\varphi(\tau)}{e^{\varrho\,\tau} - 1} + \frac{e^{\varrho\, x} - e^{\varrho\, n(x)\tau}}{e^{\varrho\, x} - 1} \frac{\varrho\,\varphi(\alpha_0)}{e^{\varrho\,\alpha_0} - 1}\,.$$

Так как $\varrho\, x - \varrho\, n(x)\tau = \varrho\, m(x)\alpha_0$, и так как по замечанию 4 к лемме 3 можно считать, что $\lim_{x\to\infty} m(x) = \infty$, то $\lim_{x\to\infty}(e^{\varrho\, n(x)\tau} - 1)/(e^{\varrho\, x} - 1) = 0$. Мы получаем, что

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\varrho\,\varphi(x)}{e^{\varrho\, x} - 1} \leqslant H.$$

Используя определение H, легко получить, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varrho\,\varphi(x)}{e^{\varrho\, x} - 1} = H\,. \tag{21}$$

Пусть теперь $\varrho = 0$. Подставляя в неравенство (20) $n = n(x)$, $u = \tau$, $m = m(x)$, $v = \alpha_0$, получим

$$\frac{\varphi(x)}{x} \leqslant \frac{n(x)}{x}\varphi(\tau) + \frac{m(x)}{x}\varphi(\alpha_0) = \frac{n(x)}{x}\left(\varphi(\tau) - \frac{\tau}{\alpha_0}\varphi(\alpha_0)\right) + \frac{\varphi(\alpha_0)}{\alpha_0}\,. \tag{22}$$

Мы можем считать, согласно замечанию 4 к лемме 3, что $\lim_{x\to\infty} n(x)/m(x) = 0$. Тогда из (22) следует, что

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \leqslant \frac{\varphi(\alpha_0)}{\alpha_0} < H_1\,.$$

Отсюда следует (21) и при $\rho = 0$. Утверждение 1 теоремы доказано.

Далее будем доказывать утверждение 2. Обозначим

$$N_1 = \varliminf_{\alpha\to+0} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}.$$

Пусть $\{\tau_k\}$, $\lim_{k\to\infty} \tau_k = 0$, — такая последовательность, что

$$N_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(\tau_k)}{\tau_k}\,.$$

Обозначим $t_{n,k} = n\tau_k$. Тогда из неравенства (18) следует, что

$$\frac{\varrho\,\varphi(t_{n,k})}{e^{\varrho\,t_{n,k}}-1} \leqslant \frac{\varrho\,\varphi(\tau_k)}{e^{\varrho\,\tau_k}-1}\,. \tag{23}$$

Пусть t — произвольное строго положительное число. Так как $\lim_{k\to\infty}\tau_k = 0$, то существует функция $n = n(k)$ такая, что $\lim_{k\to\infty} t_{n(k),k} = t$. Причем функцию $n = n(k)$ мы можем выбивать таким образом, чтобы гарантировать выполнение любого из неравенств $t_{n(k),k} < t$, $t_{n(k),k} > t$. Выберем $n = n(k)$ одним из указанных способов и подставим в (23) вместо n величину $n(k)$. Переходя к пределу при $k\to\infty$, получим

$$\frac{\varrho}{e^{\varrho\,t}-1}\,\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\varphi(t_{n(k),k}) \leqslant N_1\,. \tag{24}$$

Если теперь $n(k)$ выбрано так, что выполняется неравенство $t_{n(k),k} > t$, то из (24) следует, что

$$\frac{\varrho}{e^{\varrho\,t}-1}\,\underline{\lim}_{u\to t+0}\,\varphi(u) \leqslant \frac{\varrho}{e^{\varrho\,t}-1}\,\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\varphi(t_{n(k),k}) \leqslant N_1\,. \tag{25}$$

Аналогично, получаем

$$\frac{\varrho}{e^{\varrho t}-1}\,\underline{\lim}_{u\to t-0}\,\varphi(u) \leqslant N_1\,.$$

Из этого следует утверждение 2 теоремы.

Осталось доказать утверждение 3 теоремы. Предыдущие рассуждения показывают, что достаточно установить аналогичный результат для функции φ. Функция $M(\alpha)$ — возрастающая функция. А любая возрастающая функция полунепрерывна снизу справа. Поэтому функция φ полунепрерывна снизу справа в точке t. Это означает, что выполняется неравенство

$$\varphi(t) \leqslant \underline{\lim}_{u\to t+0}\,\varphi(u).$$

Теперь из (25) следует, что

$$\frac{\varrho\,\varphi(t)}{e^{\varrho\,t}-1} \leqslant N_1\,. \tag{26}$$

Функция $-\underline{M}(\alpha)$ убывающая, поэтому полунепрерывна снизу слева в точке α. Аналогичными рассуждениями можно показать, что неравенство (26) с использованием (5) выполняется и для функции $\varphi(t) = \underline{M}(e^t-1)$.

Из неравенства (26) легко следует утверждение 3 теоремы.

Теорема полностью доказана. $\rhd$

Замечание 5. Как уже отмечалось во введении теория ϱ-полуаддитивных функций параллельна хорошо разработанной теории полуаддитивных функций, причем для случая $\rho = 0$ функция $M(\alpha)$ с помощью замены $\alpha = e^t - 1$ превращается в полуаддитивную функцию. Аналогом утверждения 1 теоремы является теорема 7.6.1 из [2]. Аналогом утверждения 3 является теорема 7.11.1 из этой же книги.

Замечание 6. Пусть a_n — последовательность положительных чисел, а $n(r) = \sum_{a_n\leqslant r} 1$ — считающая функция последовательности a_n. Пусть $N(\alpha)$, $\underline{N}(\alpha)$ — функции плотности функции $n(r)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)\equiv 1$. Обе функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ — возрастающие. Тогда по теореме 5, если ее применять к функциям $N(\alpha)$ и $-\underline{N}(\alpha)$, получим, что существуют пределы

$$N = \lim_{\alpha\to+0}\frac{N(\alpha)}{\alpha}, \quad \underline{N} = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\underline{N}(\alpha)}{\alpha}\,.$$

Эти утверждения совпадают с теоремой Полиа [1] о существовании минимальной и максимальной плотностей. Правда, Полиа доказывал свою теорему при некотором дополнительном предположении о последовательности a_n. Затем А. А. Кондратюк [10] показал, что дополнительные предположения не нужны. Он также рассмотрел случай произвольного уточненного порядка. Таким образом, утверждение 3 теоремы 5 можно рассматривать как распространение теоремы Полиа на максимум модуля целой функции.

В пункте 3 теоремы 5 приведены достаточные условия существования предела

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{M(\alpha)}{\alpha} \tag{27}$$

для функции плотности. Эти условия выражены в терминах свойств функции $M(\alpha)$. Можно привести условия существования предела и в других терминах. Обозначим

$$N_1=\varliminf_{\alpha\to+0}\frac{M(\alpha)}{\alpha}. \tag{28}$$

Тогда существует множество $E\subset(0,\infty)$, для которого ноль является предельной точкой, и такое, что

$$\lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \alpha\in E}}\frac{M(\alpha)}{\alpha}=N_1. \tag{29}$$

Если существует предел (27), то тогда в качестве E можно взять всю полуось $(0,\infty)$. Мы покажем, что если в равенстве (29) множество E достаточно «массивное», то существует предел (27). Нам нужно несколько новых определений. Мы будем пользоваться терминологией из [2]. Множество E в абелевой полугруппе называется модулем, если из соотношений $x\in E$, $y\in E$, следует, что $x+y\in E$. Всюду в дальнейшем в качестве абелевой полугруппы у нас будет выступать вещественная полуось $(0,\infty)$ со сложением в качестве полугрупповой операции. Множество $E\subset(0,\infty)$ называется L-модулем, если из соотношений $x\in E$, $y\in E$, следует, что $x+y+xy\in E$. Легко видеть, что если E — модуль, $\alpha(t)=e^t-1$, то $\alpha(E)$ есть L-модуль и, обратно, если E есть L-модуль и $t(\alpha)=\ln(1+\alpha)$, то $t(E)$ есть модуль. Пусть E — произвольное множество на полуоси $(0,\infty)$. Через $S(E)$ мы будем обозначать наименьший модуль, содержащий множество E. Легко видеть, что $x\in S(E)$ тогда и только тогда, когда $x=\sum_{k=1}^n u_k$, где $u_k\in E$. Число n и слагаемые u_k изменяются с изменением x. Аналогично, через $\hat S(E)$ обозначается наименьший L-модуль, содержащий E.

Теорема 6. *Пусть функция* $\varphi(t)$, $t\in(0,\infty)$, *удовлетворяет неравенству* (17),

$$N_1=\varliminf_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{t}.$$

Пусть $E\subset(0,\infty)$ *есть множество, для которого ноль является предельной точкой, причем*

$$\lim_{\substack{t\to+0\\ t\in E}}\frac{\varphi(t)}{t}=N_1.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{t\to+0\\ t\in S(E)}}\frac{\varphi(t)}{t}=N_1.$$

$\lhd$ Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta_0 \in (0,1)$ — суть произвольные числа. По условию теоремы существует $\delta \in (0,\delta_0)$ такое, что для любого $t \in (0,\delta) \cap E$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{\varphi(t)}{t} - N_1\right| < \varepsilon,$$

и, в частности, неравенство $\varphi(t) < (N_1+\varepsilon)t$. Пусть теперь $t \in (0,\delta) \cap S(E)$. Тогда $t = u_1+u_2+\cdots+u_n$, где $u_k \in E$. Очевидно также, что $u_k \in (0,\delta)$. Поэтому $\varphi(u_k) < (N_1+\varepsilon)u_k$. Тогда, используя неравенство (17), получим

$$\begin{aligned}\varphi(t) = \varphi(u_1+u_2+\cdots+u_n) &\leqslant \varphi(u_1) + e^{\rho u_1}\varphi(u_2) + \cdots + e^{\rho(u_1+u_2+\cdots+u_{n-1})}\varphi(u_n)\\ &< (N_1+\varepsilon)(u_1 + e^{\rho u_1}u_2 + \cdots + e^{\rho(u_1+u_2+\cdots+u_{n-1})}u_n.\end{aligned} \tag{30}$$

Из неравенства (30) следует, что

$$\varphi(t) < (N_1+\varepsilon)\Big(1 + \operatorname{sign}(N_1+\varepsilon)\sup_{x\in[0,\delta]}|e^{\rho x}-1|\Big)t.$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{\substack{t\to+0,\\ t\in S(E)}} \frac{\varphi(t)}{t} \leqslant N_1\,.$$

Из этого следует утверждение теоремы в случае $N_1 \in (-\infty,\infty)$.

Случай $N_1 = -\infty$ исследуется аналогично. В случае $N_1 = +\infty$ теорема тривиальна. $\rhd$

Теорема 7. *Пусть функция $\varphi(t)$, $t \in (0,\infty)$, удовлетворяет неравенству (17) и*

$$\varliminf_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{t} = N_1.$$

Пусть $E \subset (0,\infty)$ — множество, для которого 0 является предельной точкой, и такое, что

$$\lim_{\substack{t\to+0,\\ t\in E}}\frac{\varphi(t)}{t} = N_1.$$

Тогда, если для любого $\delta > 0$ множество $(0,\delta)\cap S(E)$ содержит в себе множество положительной меры, то существует

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{t}.$$

$\lhd$ Из теоремы 3 следует, что для любого $\delta > 0$ множество $(0,\delta)\cap S(E)$ содержит в себе интервал. Поэтому существует открытое множество E_1, для которого ноль является предельной точкой, такое, что $E_1 \subset S(E)$. Тогда $S(E_1) \subset S(S(E)) = S(E)$. По теореме 8 из [2] $S(E_1) = (0,\infty)$. Таким образом, $S(E) = (0,\infty)$. Теперь применение теоремы 7 заканчивает доказательство теоремы. $\rhd$

Сформулируем теперь соответствующие результаты для ϱ-полуаддитивных функций.

Теорема 8. *Пусть $M(\alpha)$, $\alpha \in (0,\infty)$, есть функция плотности и пусть*

$$N_1 = \varliminf_{\alpha\to+0}\frac{M(\alpha)}{\alpha}.$$

Пусть $E \subset (0,\infty)$ — множество, для которого 0 есть предельная точка, и такое, что

$$\lim_{\substack{\alpha\to+0,\\ \alpha\in E}} \frac{M(\alpha)}{\alpha} = N_1.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{\alpha\to+0,\\ \alpha\in \hat{S}(E)}} \frac{M(\alpha)}{\alpha} = N_1.$$

Теорема 9. *Пусть $M(\alpha)$, $\alpha \in (0,\infty)$, есть функция плотности и пусть*

$$N_1 = \underline{\lim}_{\alpha\to+0} \frac{M(\alpha)}{\alpha}.$$

Пусть $E \subset (0,\infty)$ — множество, для которого 0 есть предельная точка, и такое, что

$$\lim_{\substack{\alpha\to+0,\\ \alpha\in E}} \frac{M(\alpha)}{\alpha} = N_1.$$

Тогда, если для любого $\delta > 0$ множество $(0,\delta)\cap\hat{S}(E)$ содержит внутри себя множество положительной меры, то существует предел

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{M(\alpha)}{\alpha}.$$

Литература

1. *Polya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen // Math. Zeit.—1929.—Vol. 29.—P. 549–640.
2. *Хилле Е. Р., Филлипс С.* Функциональный анализ и полугруппы.—М.: Изд. иностр. лит-ры, 1962.—829 с.
3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.— 632 с.
4. *Seneta E.* Regularly Varying Functions.—Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag, 1976.—112 p.
5. *Bingham N. H.* Regular Variation.—N. Y.: Cambridge University Press, 1987.—491 p.
6. *Hengartner W., Theodorescu R.* Concentration functions.—London: Academic Press, 1973.—139 p.
7. *Гайсин А. М.* Об одной гипотезе Полиа // Изв. РАН. Сер. матем.—1994.—Т. 58, № 2.—С. 73–92.
8. *Шерстюков В. Б.* Распределение нулей канонических произведений и весовой индекс конденсации // Матем. сб.—2015.—Т. 206, № 9.—С. 139–180.
9. *Steinhaus H.* Sur les distances des points de mesure positive // Fund. Math.—1949.—Vol. 1.—P. 93–104.
10. *Кондратюк А. А.* Целые функции с положительными нулями, имеющими конечную максимальную плотность // Респ. сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения».—1968.—Т. 7.—С. 37–52.

Статья поступила 29 ноября 2024 г.

Малютин Константин Геннадьевич
Курский государственный университет,
профессор
РОССИЯ, 305000, Курск, ул. Радищева, 33
E-mail: malyutinkg@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5480-0722

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 56–69

ON THE POLYA TYPE OF AN ENTIRE FUNCTION

Malyutin, K. G.[1]

[1] Kursk State University,
33 Radishchev St., Kursk 305000, Russia
E-mail: `malyutinkg@gmail.com`

Abstract. Let f be an entire function and let $M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ be maximum of the modulus of the function f in disk $|z|\leqslant r$. The article considers the density functions of the maximum modulus of the function f, which are calculated using the formulas $M(\alpha)=\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{M(r+\alpha r,f)-M(r,f)}{r^{\rho(r)}}$, $\underline{M}(\alpha)=\underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{M(r+\alpha r,f)-M(r,f)}{r^{\rho(r)}}$, $\alpha\geqslant 0$, where $\rho(r)$ is proximate order in the sense of Valiron, $\lim_{r\to+\infty}\rho(r)=\varrho\geqslant 0$. It is proved, that $M(\alpha)$ and $\underline{M}(\alpha)$ are ϱ-semi-additive functions. The definition of the type $\sigma_p(f)$ and the minimum type $\underline{\sigma}_p(f)$ in the sense of Polia of the function f is introduced by the formulas $\sigma_p(f)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{M(\alpha)}{\alpha}$, $\underline{\sigma}_p(f)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\underline{M}(\alpha)}{\alpha}$. These quantities give more information about the behavior of the function than its type and lower type in the classical sense. This definition is an extension of the concepts of maximum and minimum density of a sequence of positive numbers introduced by Polya, who proved their existence if the growth of the counting function of a sequence of numbers has normal type with respect to r. The existence of the quantities $\sigma_p(f)$ and $\underline{\sigma}_p(f)$ is proved if the growth $\ln|f|$ has type not higher than normal type with respect to $r^{\rho(r)}$ in the classical sense, i. e. $\ln M(r,f)\leqslant Kr^{\rho(r)}$ for some $K>0$. Some properties of functions $M(\alpha)$ and $\underline{M}(\alpha)$ are considered.

Keywords: entire function, density function, semi-additive function, Polya theorem, maximum type, minimum type.

AMS Subject Classification: 30D15, 30D20.

For citation: *Malyutin, K. G.* On the Polya Type of an Entire Function, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 56–69 (in Russian). DOI: 10.46698/k4349-9424-9818-w.

References

1. *Polya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, *Mathematische Zeitschrift*, 1929, vol. 29, pp. 549–640.
2. *Hille, E. and Phillips, R. S. Functional Analysis and Semi-Groups*, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1996, 808 p.
3. *Levin, B. Ya. Distribution of Zeros of Entire Functions*, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1994, 523 p.
4. *Seneta, E. Regularly Varying Functions*, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1976, 112 p.
5. *Bingham, N. H. Regular Variation*, New York, Cambridge University Press, 1987, 491 p.
6. *Hengartner, W. and Theodorescu, R. Concentration Functions*, London, Academic Press, 1973 139 p.
7. *Gaisin, A. M.* On a Conjecture of Polya, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1995, vol. 44, no. 2, pp. 281–299. DOI: 10.1070/IM1995v044n02ABEH001597.
8. *Sherstyukov, V. B.* Distribution of the Zeros of Canonical Products and Weighted Condensation Index, *Sbornik: Mathematics*, 2015, vol. 206, no. 9, pp. 1299–1339. DOI: 10.1070/SM2015v206n09ABEH004497.
9. *Steinhaus, H.* Sur les Distances des Points de Mesure Positive, *Fundamenta Mathematicae*, 1949, vol. 1, pp. 93–104.
10. *Kondratyuk, A. A.* Entire Functions with Positive Zeros Possessing Maximal Finite Density, *Function Theory, Functional Analysis, and Their Applications*, 1968, vol 7, pp. 37–52 (in Russian).

Received November 29, 2024

Konstantin G. Malyutin
Kursk State University,
33 Radishchev St., Kursk 305000, Russia,
Professor
E-mail: `malyutinkg@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0001-5480-0722