Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 87–100

УДК 517.55
DOI 10.46698/w6732-0632-5795-v

О ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬФАНДА — ШИЛОВА ТИПА S

И. Х. Мусин[1]

[1] Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: musin_ildar@mail.ru

Посвящается профессору Александру Васильевичу Абанину
по случаю его 70-летнего юбилея

Аннотация. В теории обобщенных функций, теории дифференциальных уравнений значительный интерес представляют пространства быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций. Это связано с тем, что при решении различных задач анализа в таких пространствах можно воспользоваться богатыми возможностями, которые представляет преобразование Фурье или преобразование Лапласа. Одним из таких пространств являются пространства Гельфанда — Шилова типа S. Они возникли в середине 1950-х годов в работах И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова в ходе изучения проблемы единственности решения задач Коши для уравнений в частных производных. В знаменитой серии книг И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова по обобщенным функциям конца 1950-х — начала 1960-х гг. детально описаны свойства функций этих пространств и проведен тщательный анализ Фурье в них. К настоящему времени пространства типа S нашли многочисленные применения также в теории псевдодифференциальных операторов, частотно-временном анализе. В настоящей работе помощью двух счетных семейств φ и ψ раздельно радиальных весовых функций в $\mathbb{R}^n$ введено пространство $\mathscr{S}_{\varphi}^{\psi}$ функций типа S более общее, чем пространство Гельфанда — Шилова S_{α}^{β}. Получено описание пространства $\mathscr{S}_{\varphi}^{\psi}$ в терминах преобразования Фурье функций и рассмотрен вопрос о его нетривиальности. Исследование оператора периодизации на одном из рассматриваемых пространств типа S оказалось связанным с задачей описания функций пространства периодических ультрадифференцируемых функций типа Румье в терминах убывания их коэффициентов Фурье.

Ключевые слова: пространства Гельфанда — Шилова, преобразование Фурье, ряд Фурье.

AMS Subject Classification: 46F05, 42B05.

Образец цитирования: *Мусин И. Х.* О пространствах Гельфанда — Шилова типа S // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 87–100. DOI: 10.46698/w6732-0632-5795-v.

Введение

В теории обобщенных функций, теории дифференциальных уравнений значительный интерес представляют пространства быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций. Это связано с тем, что при решении различных задач анализа в таких пространствах можно воспользоваться богатыми возможностями, которые представляет преобразование Фурье. Одним из таких пространств являются пространства Гельфанда — Шилова типа S [1]. Они возникли в середине 1950-х годов в работах И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова в ходе изучения проблемы единственности решения задач Коши для уравнений в частных производных. К настоящему времени пространства типа S нашли многочисленные применения также в теории псевдодифференциальных операторов, частотно-временном анализе. Достаточно общий подход к определению двух классов пространств Гельфанда — Шилова типа S (в настоящей работе это пространства $\mathscr{S}_\varphi$ и $\mathscr{S}^\psi$), частными случаями которых являются как классические пространства Гельфанда — Шилова S_α и S^β, так и их обобщения (см., например, [2]), построенные с помощью некоторых неубывающих последовательностей положительных чисел, был предложен в заметке [3]. Данная работа продолжает начатые в [3] исследования пространств Гельфанда — Шилова типа S более общего вида и линейных операторов на них и имеет своей целью подготовку необходимых сведений для дальнейшего перехода к изучению задач теории (псевдо)дифференциальных операторов и вейвлет-анализа в этих пространствах. В частности, для этого с помощью двух счетных семейств φ и ψ раздельно радиальных весовых функций в $\mathbb{R}^n$ введено пространство $\mathscr{S}_\varphi^\psi$, более общее, чем пространство S_α^β [1, гл. 4]. Рассмотрен вопрос о его нетривиальности и дано его описание в терминах преобразования Фурье функций (раздел 2). При определенных условиях на семейство φ показано, что оператор периодизации непрерывным образом переводит пространство $\mathscr{S}^\varphi$ в пространство периодических ультрадифференцируемых функций типа Румье (раздел 4). Изучение оператора периодизации потребовало описания функций последнего пространства в терминах убывания их коэффициентов Фурье (раздел 3).

Статья посвящена юбилею Александра Васильевича Абанина в знак восхищения широтой его научных интересов, красотой полученных им результатов и признания его большого вклада в тесное взаимодействие ростовской и уфимской школ по комплексному анализу и теории функций.

1. Обозначения и определения

Для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ полагаем $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ обозначение $\alpha \leqslant \beta$ означает, что $\alpha_j \leqslant \beta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. В этом случае $C_\beta^\alpha := \prod_{j=1}^n C_{\beta_j}^{\alpha_j}$.

Для $t \geqslant 0$ $\ t^+ = \max(t, 1)$, $\ln^+ t = \ln t^+$.

По произвольной функции $g : X \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{Z}^n \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^n$, определим функцию $g^* : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ по правилу: $g^*(x) = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (\langle \alpha, x \rangle - g(\alpha))$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Преобразование Юнга — Фенхеля функции $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ есть функция $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, определяемая по формуле $\tilde{g}(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - g(y))$.

Придерживаемся следующего определения преобразования Фурье $\hat{f}$ функции $f \in S(\mathbb{R}^n)$: $\hat{f}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle}\, d\xi$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Через Ω обозначена совокупность всех семейств $\omega = \{\omega_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, состоящих из функций $\omega_\nu : \mathbb{Z}_+^n \to [0, \infty)$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

i_1) существуют зависящие от ω_ν числа $a_1 \geqslant 0$, $a_2 > 0$ такие, что $\omega_\nu(\alpha) \geqslant a_1 + a_2|\alpha|$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$;

i_2) $\omega_{\nu+1}(\alpha) \geqslant \omega_\nu(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\lim_{|\alpha| \to +\infty} (\omega_{\nu+1}(\alpha) - \omega_\nu(\alpha)) = +\infty$.

Через Ω_1 обозначим подмножество Ω, семейства $\omega = \{\omega_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ которого удовлетворяют условию

i_3) для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует число $b_\nu > 0$ такое, что

$$\omega_\nu(\alpha + \beta) \leqslant b_\nu + \omega_{\nu+1}(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n \cap [0,1]^n.$$

2. О пространствах Гельфанда — Шилова типа S более общего вида и свойствах им принадлежащих функций

2.1. Определение пространств $\mathscr{S}_\varphi$, $\mathscr{S}^\psi$ и $\mathscr{S}_\varphi^\psi$. Пусть $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega$. Для любых $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$\mathscr{S}_{m,\varphi_\nu} = \left\{ f \in C^m(\mathbb{R}^n) : \ \|f\|_{m,\nu} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\, \beta\in\mathbb{Z}_+^n,\\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n : |\alpha|\leqslant m}} \frac{\left|x^\beta (D^\alpha f)(x)\right|}{e^{\varphi_\nu(\beta)}} < \infty \right\}.$$

Положим $\mathscr{S}_{\varphi_\nu} := \bigcap_{m=0}^\infty \mathscr{S}_{m,\varphi_\nu}$. Снабдим $\mathscr{S}_{\varphi_\nu}$ топологией, определяемой семейством норм $\|\cdot\|_{m,\nu}$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$. Очевидно, пространство $\mathscr{S}_{\varphi_\nu}$ непрерывно вложено в $\mathscr{S}_{\varphi_{\nu+1}}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Пусть $\mathscr{S}_\varphi = \varinjlim \mathscr{S}_{\varphi_\nu}$ — внутренний индуктивный предел [4] пространств $\mathscr{S}_{\varphi_\nu}$.

По семейству $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega$ определим пространство $\mathscr{S}^\psi$. Вначале по $\nu \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ введем пространство

$$\mathscr{S}_m^{\psi_\nu} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \ \rho_{m,\nu}(f) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n}} \frac{(1+\|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)|}{e^{\psi_\nu(\alpha)}} < \infty \right\}.$$

Эквивалентная топология в $\mathscr{S}_m^{\psi_\nu}$ может быть задана с помощью норм

$$q_{m,\nu}(f) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\, \alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\\ \beta\in\mathbb{Z}_+^n : |\beta|\leqslant m}} \frac{\left|x^\beta (D^\alpha f)(x)\right|}{e^{\psi_\nu(\alpha)}}.$$

Пусть $\mathscr{S}^{\psi_\nu} := \bigcap_{m=0}^\infty \mathscr{S}_m^{\psi_\nu}$. Наделим $\mathscr{S}^{\psi_\nu}$ топологией, определяемой семейством норм $\rho_{m,\nu}$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$. Пусть $\mathscr{S}^\psi = \varinjlim \mathscr{S}^{\psi_\nu}$ — внутренний индуктивный предел пространств $\mathscr{S}^{\psi_\nu}$.

По семействам $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty, \psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega$ определим пространство $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ как внутренний индуктивный предел нормированных пространств

$$\mathscr{S}_{\varphi_\nu}^{\psi_\nu} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \ \|f\|_\nu = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n}} \frac{\left|x^\alpha (D^\beta f)(x)\right|}{e^{\varphi_\nu(\alpha)+\psi_\nu(\beta)}} < \infty \right\}.$$

Пространства $\mathscr{S}_\varphi$, $\mathscr{S}^\psi$, $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ построены по аналогии с пространствами Гельфанда — Шилова S_α, S^β, S_α^β, соответственно [1].

Замечание. Если положить $\mathscr{M}_\nu(\alpha) = e^{\varphi_\nu(\alpha)}$ для $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\mathscr{M} = \{\mathscr{M}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, то получим, что $\mathscr{S}_\varphi$ $(\mathscr{S}^\varphi)$ не что иное, как пространство $\mathscr{S}_\mathscr{M}$ $(\mathscr{S}^\mathscr{M})$. Однако обозначения $\mathscr{S}_\mathscr{M}$ и $\mathscr{S}^\mathscr{M}$ представляются более громоздкими.

2.2. О некоторых свойствах пространств $\mathscr{S}_\varphi$, $\mathscr{S}^\psi$, $\mathscr{S}_\varphi^\psi$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty, \psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega$. Пусть функции семейства φ не убывают по каждой переменной и $\lim_{|\alpha|\to\infty} \frac{\varphi_\nu(\alpha)}{|\alpha|} = +\infty$ для каждого $\nu \in \mathbb{N}$.*

Функция $f \in S(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ тогда и только тогда, когда существуют числа $\nu \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\left|(D^\beta f)(x)\right| \leqslant C e^{-\varphi_\nu^*(\ln^+|x_1|,\ldots,\ln^+|x_n|)+\psi_\nu(\beta)}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \qquad (1)$$

$\lhd$ Пусть $f \in \mathscr{S}_\varphi^\psi$. Тогда $f \in \mathscr{S}_{\varphi_\nu}^{\psi_\nu}$ при некотором $\nu \in \mathbb{N}$. Значит, для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\left|x^\alpha (D^\beta f)(x)\right| \leqslant \|f\|_\nu e^{\varphi_\nu(\alpha)+\psi_\nu(\beta)}. \qquad (2)$$

Отметим, что благодаря неубыванию φ_ν по каждой переменной

$$\left|x^\gamma (D^\beta f)(x)\right| \leqslant \|f\|_\nu e^{\varphi_\nu(\alpha)+\psi_\nu(\beta)}, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n, \ \gamma \leqslant \alpha. \qquad (3)$$

Поставим в соответствие точке $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ точку $x^+ = (|x_1|^+, \dots, |x_n|^+)$. Тогда, с учетом (3), из (2) следует, что

$$\left|(D^\beta f)(x)\right| \leqslant \|f\|_\nu \inf_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{e^{\varphi_\nu(\alpha)}}{(x^+)^\alpha} e^{\psi_\nu(\beta)} = \|f\|_\nu e^{-\varphi_\nu^*(\ln^+|x_1|, \dots, \ln^+|x_n|)+\psi_\nu(\beta)}.$$

Обратно, пусть функция $f \in S(\mathbb{R}^n)$ такова, что при некоторых $\nu \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ выполнено неравенство (1). Тогда для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\left|(D^\beta f)(x)\right| \leqslant C e^{-\alpha_1 \ln^+|x_1| - \dots - \alpha_n \ln^+|x_n| + \varphi_\nu(\alpha)} e^{\psi_\nu(\beta)}.$$

Т. е.

$$\left(|x_1|^+\right)^{\alpha_1} \cdots \left(|x_n|^+\right)^{\alpha_n} \left|(D^\beta f)(x)\right| \leqslant C e^{\varphi_\nu(\alpha)+\psi_\nu(\beta)}.$$

Тогда тем более справедливо неравенство

$$\left|x^\alpha (D^\beta f)(x)\right| \leqslant C e^{\varphi_\nu(\alpha)+\psi_\nu(\beta)}.$$

Значит, $f \in \mathscr{S}_\varphi^\psi$. $\rhd$

В доказательстве ряда последующих утверждений точку $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ обозначаем для краткости через $\mathbf{1}$.

Предложение 1. *Пусть семейства $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega_1$. Тогда функция $f \in S(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ тогда и только тогда, когда найдутся числа $\nu \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha (D^\beta f)(x)\right|^2 dx \leqslant C e^{2(\varphi_\nu(\alpha)+\psi_\nu(\beta))}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \qquad (4)$$

$\lhd$ Пусть $f \in S(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $\mathscr{S}_\varphi^\psi$. Тогда найдутся числа $p \in \mathbb{N}$ и $K > 0$ такие, что

$$|x^\alpha (D^\beta f)(x)| \leqslant K e^{\varphi_p(\alpha)+\psi_p(\beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \qquad (5)$$

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ произвольны. Представим интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta f)(x)|^2\, dx$ в виде суммы 2^n интегралов по непересекающимся подмножествам $\mathbb{R}^n$, описываемых n неравенствами вида $|x_k| \leqslant 1$ или $|x_k| > 1$. В интегралах по множествам, в описании которых участвует неравенство $|x_k| > 1$, умножаем и делим подынтегральное выражение на x_k^2. Тогда из (5) с учетом условий i_3) и i_2) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha (D^\beta f)(x)\right|^2 dx \leqslant K_1 e^{2(\varphi_{p+1}(\alpha)+\psi_{p+1}(\beta))}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

где K_1 — некоторое положительное число. Итак, неравенство (4) выполнено с $\nu = p+1$, $C = K_1$.

Пусть теперь имеет место неравенство (4) и $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ произвольны. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left|x^\alpha (D^\beta f)(x)\right|^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^n \left(\xi^\alpha \left(D^\beta f\right)(\xi)\right)^2}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_n} \right| d\xi \leqslant \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n \colon j \leqslant \mathbf{1}} C_{\mathbf{1}}^j \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \left(D^j \left(\xi^{2\alpha}\right)\right) \left(D^{\mathbf{1}-j} \left(D^\beta f\right)^2 (\xi)\right) \right| d\xi.$$

Согласно [2], если $u \in S(\mathbb{R}^n)$, то при любых $\mu, j \in \mathbb{Z}_+^n$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|D^j (x^\mu)\right| |u(x)| \, dx \leqslant \sqrt{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x^\mu| \left|(D^j u)(x)\right| dx. \tag{6}$$

Таким образом, с учетом неравенства (6) и пользуясь неравенством Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} \left|x^\alpha (D^\beta f)(x)\right|^2 &\leqslant 2^n \sqrt{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\xi^{2\alpha}\right| \left| \left(D^{\mathbf{1}} \left(D^\beta f\right)^2 (\xi)\right) \right| d\xi \\ &\leqslant 2^n \sqrt{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n \colon s \leqslant \mathbf{1}} C_{\mathbf{1}}^s \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\xi^\alpha \left(D^{\beta+s} f\right)(\xi)\right| \left|\xi^\alpha \left(D^{\beta+\mathbf{1}-s} f\right)(\xi)\right| d\xi \\ &\leqslant 2^n \sqrt{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n \colon s \leqslant \mathbf{1}} C_{\mathbf{1}}^s \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\xi^\alpha \left(D^{\beta+s} f\right)(\xi)\right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\xi^\alpha \left(D^{\beta+\mathbf{1}-s} f\right)(\xi)\right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant 2^n \sqrt{2} C \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n \colon s \leqslant \mathbf{1}} C_{\mathbf{1}}^s e^{2\varphi_\nu(\alpha)} e^{\psi_\nu(\beta+s)} e^{\psi_\nu(\beta+\mathbf{1}-s)}. \end{aligned}$$

Отсюда, благодаря условиям i_3), i_2), получим, что при некотором $C_2 > 0$

$$|x^\alpha (D^\beta f)(x)|^2 \leqslant C_2 e^{2\varphi_{\nu+1}(\alpha)} e^{2\psi_{\nu+1}(\beta)}.$$

Следовательно, $f \in \mathscr{S}_\varphi^\psi$. $\triangleright$

Точно теми же рассуждениями, что и в предложении 1, доказываются следующие два утверждения.

Предложение 2. *Пусть семейство* $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega_1$. *Тогда функция* $f \in S(\mathbb{R}^n)$ *принадлежит пространству* $\mathscr{S}_\varphi$ *тогда и только тогда, когда существует число* $\nu \in \mathbb{N}$ *такое, что для любого* $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ *найдется число* $C_\beta > 0$ *такое, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta f)(x)|^2 \, dx \leqslant C_\beta e^{2\varphi_\nu(\alpha)}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Предложение 3. *Пусть семейство* $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega_1$. *Тогда функция* $f \in S(\mathbb{R}^n)$ *принадлежит пространству* $\mathscr{S}^\psi$ *тогда и только тогда, когда найдется число* $\nu \in \mathbb{N}$ *такое, что каким бы ни было* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, *найдется число* $C_\alpha > 0$ *такое, что для любого* $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta f)(x)|^2 \, dx \leqslant C_\alpha e^{2\psi_\nu(\beta)}.$$

Доказательство следующего утверждения проводится по схеме доказательства теоремы 3.3 из [5]. Поэтому считаем возможным не приводить его. Отметим лишь, что оно по существу использует предложения 2 и 3.

Теорема 2. *Пусть семейства* $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega_1$. *Пусть для любого* $\nu \in \mathbb{N}$ *выполнены условия:*

i_4) *при некотором* $d_\nu > 0$

$$\varphi_\nu(\alpha+\beta) \geqslant \varphi_\nu(\alpha) + \varphi_\nu(\beta) - d_\nu,$$
$$\psi_\nu(\alpha+\beta) \geqslant \psi_\nu(\alpha) + \psi_\nu(\beta) - d_\nu;$$

i_5) *при некоторых* $A_\nu, B_\nu > 0$

$$e^{\varphi_\nu(\alpha)+\psi_\nu(\alpha)} \geqslant A_\nu B_\nu^{|\alpha|}\alpha!, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n;$$

i_6) *существуют числа* $s = s_\nu \in \mathbb{N}$ *и* $b_\nu > 0$ *такие, что для всех* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\varphi_\nu(2\alpha) \leqslant b_\nu + 2\varphi_{\nu+s}(\alpha),$$
$$\psi_\nu(2\alpha) \leqslant b_\nu + 2\psi_{\nu+s}(\alpha).$$

Пусть также выполнено условие

i_7) *существует число* $\sigma > 1$ *такое, что для каждого* $\nu \in \mathbb{N}$ *найдется число* $l_\nu > 0$, *что для любого* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$l_\nu + \sigma|\alpha| + \varphi_\nu(\alpha) \leqslant \varphi_{\nu+1}(\alpha),$$
$$l_\nu + \sigma|\alpha| + \psi_\nu(\alpha) \leqslant \psi_{\nu+1}(\alpha).$$

Тогда функция $f \in S(\mathbb{R}^n)$ *принадлежит пространству* $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ *тогда и только тогда, когда* $f \in \mathscr{S}_\varphi \cap \mathscr{S}^\psi$.

2.3. О (не)квазианалитичности II пространства $\mathscr{S}_\varphi^\psi$**.** В работах [6, 7] класс функций назван квазианалитическим II, если в нем отсутствует нетривиальная финитная функция, т. е. функция, отличная от тождественного нуля и равная нулю всюду вне какой-нибудь ограниченной области.

Пусть L — некоторая (достаточно быстро растущая) положительная функция на $\mathbb{Z}_+^n$. Она порождает класс $C_D(L)$ всех бесконечно дифференцируемых в области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ функций f таких, что для любого компакта $K \subset D$ найдутся положительные числа A и C такие, что

$$|(D^\alpha f)(x)| \leqslant CA^{|\alpha|}L(\alpha), \quad x \in K,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

По L образуем последовательность чисел

$$\overline{L}_m = \sup_{t>0} \inf_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} t^{m-|\alpha|} L_\alpha, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Определим еще функцию

$$\theta(r) = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \big(|\alpha| \ln r - \ln L(\alpha)\big), \quad r > 0.$$

Известен следующий результат [8–11].

Теорема B. *Класс* $C_D(L)$ *является квазианалитическим* II *тогда и только тогда, когда* $\sum_{m=1}^\infty \frac{\overline{L}_m}{\overline{L}_{m+1}} = \infty$, *или, тогда и только тогда, когда* $\int_0^\infty \frac{\theta(r)}{1+r^2}\,dr = \infty$.

В следующем утверждении через $(\exp \psi_\nu)$ обозначено отображение, сопоставляющее каждому $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ число $e^{\psi_\nu(\alpha)}$.

Предложение 4. *Пусть семейства $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \in \Omega$ удовлетворяют условию i_7) и пространство $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ является квазианалитическим* II. *Тогда для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ расходится ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{\overline{(\exp\psi_\nu)}_m}}{\overline{\overline{(\exp\psi_\nu)}}_{m+1}}. \tag{7}$$

◁ Пусть в пространстве $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ отсутствует нетривиальная финитная функция. Допустим, что при некотором $\nu \in \mathbb{N}$ ряд (7) сходится. Тогда найдется отличная от тождественного нуля и равная нулю всюду вне какой-нибудь ограниченной области $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^n$ бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n$ функция f такая, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдутся положительные числа A_K и B_K такие, что

$$\big|\big(D^\beta f\big)(x)\big| \leqslant A_K B_K^{|\beta|} e^{\psi_\nu(\beta)}, \quad x \in K, \;\; \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

В частности, это неравенство справедливо и при $K = \overline{\Omega}$. Поэтому, с учетом условия i_1), при некотором $R > 0$, зависящем от Ω, для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$\big|x^\alpha\big(D^\beta f\big)(x)\big| \leqslant C_1 \left(\frac{R}{e^{a_2(\nu)}}\right)^{|\alpha|} e^{\varphi_\nu(\alpha)} B_{\overline{\Omega}}^{|\beta|} e^{\psi_\nu(\beta)},$$

где $C_1 = \frac{A_{\overline{\Omega}}}{e^{a_1(\nu)}}$. Отсюда, с учетом условия i_7), получим, что при некоторых $s \in \mathbb{N}$ и $C_2 > 0$

$$\big|x^\alpha\big(D^\beta f\big)(x)\big| \leqslant C_2 e^{\varphi_{\nu+s}(\alpha)+\psi_{\nu+s}(\beta)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \;\; \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Значит, $f \in \mathscr{S}_\varphi^\psi$. Но по условию в пространстве $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ отсутствует нетривиальная финитная функция. Таким образом, допущение неверно и ряд (7) расходится. ▷

Предложение 5. *Пусть для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ расходится ряд* (7). *Тогда пространство $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ является квазианалитическим* II.

◁ Пусть для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ расходится ряд (7). Допустим, что пространство $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ не является квазианалитическим II. Это означает, что существует нетривиальная бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n$ функция f, обращающаяся в ноль вне некоторой ограниченной области $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^n$, и такая, что при некоторых $\nu \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x^\alpha(D^\beta f)(x)| \leqslant C e^{\varphi_\nu(\alpha)} e^{\psi_\nu(\beta)}, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$|(D^\beta f)(x)| \leqslant C e^{\varphi_\nu(0)} e^{\psi_\nu(\beta)}, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Но тогда по теореме B $f(x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, что противоречит допущению. ▷

Из предложений 4 и 5 имеем

Следствие 1. *Пусть семейства $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \in \Omega$ удовлетворяют условию i_7). Тогда пространство $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ не является квазианалитическим* II *тогда и только тогда, когда при некотором $\nu \in \mathbb{N}$ сходится ряд* (7).

2.4. О преобразовании Фурье в пространстве $\mathscr{S}_\varphi^\psi$.

Теорема 3. *Пусть семейства $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \in \Omega_1$ удовлетворяют условию i_7). Тогда отображение $\mathscr{F} : f \in \mathscr{S}_\varphi^\psi \to \hat{f}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ и $\mathscr{S}_\psi^\varphi$.*

$\lhd$ Покажем вначале, что отображение $\mathscr{F}$ действует из $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ в $\mathscr{S}_\psi^\varphi$. Пусть $g \in \mathscr{S}_\varphi^\psi$. Тогда $g \in \mathscr{S}_{\varphi_\nu}^{\psi_\nu}$ для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$. Поэтому для всех $\gamma, \mu \in \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|x^\mu (D^\gamma g)(x)| \leqslant \|g\|_\nu e^{\varphi_\nu(\mu)+\psi_\nu(\gamma)}. \tag{8}$$

Далее, пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ произвольны. Положим $\kappa_s := \min(\alpha_s, \beta_s)$ для $s = 1, \dots, n$ и $\kappa := (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$. Так как

$$(i\xi)^\beta \big(D^\alpha \hat{g}\big)(\xi) = \frac{(-1)^{|\beta|}}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n \colon j \leqslant \kappa} C_\beta^j \big(D^{\beta-j} g\big)(x) \big(D^j (ix)^\alpha\big) e^{i\langle x, \xi\rangle}\, dx,$$

то

$$\big|\xi^\beta \big(D^\alpha \hat{g}\big)(\xi)\big| \leqslant \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n : j \leqslant \kappa} C_\beta^j \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|\big(D^{\beta-j} g\big)(x)\big| \big|D^j\big(x^\alpha\big)\big|\, dx.$$

Отсюда, пользуясь неравенством (6), получим, что

$$\big|\xi^\beta \big(D^\alpha \hat{g}\big)(\xi)\big| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n \colon j \leqslant \kappa} C_\beta^j \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|x^\alpha \big(D^\beta g\big)(x)\big|\, dx.$$

Продолжим эту оценку, следуя [2, с. 371] (как и в предложении 1). А именно:

1) представляем $\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta g)(x)|\, dx$ в виде суммы 2^n интегралов по непересекающимся подмножествам $\mathbb{R}^n$, описываемых n неравенствами вида $|x_k| \leqslant 1$ или $|x_k| > 1$;

2) в интегралах по множествам, в описании которых участвует неравенство $|x_k| > 1$, умножаем и делим подынтегральное выражение на x_k^2.

Тогда, пользуясь неравенством (8), получим, что

$$\big|\xi^\beta \big(D^\alpha \hat{g}\big)(\xi)\big| \leqslant \frac{(\sqrt{2})^{3n+1}}{(\sqrt{\pi})^n} 2^{|\beta|} \|g\|_\nu e^{\psi_\nu(\beta)} \sup_{\substack{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{Z}_+^n \colon \\ \omega_j \leqslant 2,\, j = 1, \dots, n}} e^{\varphi_\nu(\alpha+\omega)}.$$

Отсюда, благодаря дополнительному условию на семейство ψ и условию i_3) на φ, имеем при некоторых $m_\nu \in \mathbb{N}$ и $C_3 > 0$

$$\big|\xi^\beta \big(D^\alpha \hat{g}\big)(\xi)\big| \leqslant C_3 \|g\|_\nu e^{\psi_{\nu+m_\nu}(\beta)} e^{\varphi_{\nu+2}(\alpha)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Пусть $n_\nu = \max(m_\nu, 2)$. Тогда при некотором $C_4 > 0$

$$|\xi^\beta (D^\alpha \hat{g})(\xi)| \leqslant C_4 \|g\|_\nu e^{\psi_{\nu+n_\nu}(\beta)} e^{\varphi_{\nu+n_\nu}(\alpha)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{9}$$

Следовательно, $\hat{g} \in \mathscr{S}_{\psi_{\nu+n_\nu}}^{\varphi_{\nu+n_\nu}}$. Итак, $\hat{g} \in \mathscr{S}_\psi^\varphi$. Обозначим норму в $\mathscr{S}_{\psi_\nu}^{\varphi_\nu}$ через $\|\cdot\|_{(\nu)}$. Тогда из неравенства (9)

$$\|\hat{g}\|_{(\nu+n_\nu)} \leqslant C_4 \|g\|_\nu, \quad g \in \mathscr{S}_{\varphi_\nu}^{\psi_\nu}.$$

Отсюда следует, что отображение $\mathscr{F}$ действует из $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ в $\mathscr{S}_\psi^\varphi$ непрерывно.

Точно такими же рассуждениями показывается, что отображение $\mathscr{F}^{-1}$ действует из $\mathscr{S}_\psi^\varphi$ в $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ и является непрерывным. Кроме того, очевидно, линейное отображение $\mathscr{F}$ действует из $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ в $\mathscr{S}_\psi^\varphi$ инъективно. Таким образом, отображение $\mathscr{F}$ осуществляет изоморфизм между пространствами $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ и $\mathscr{S}_\psi^\varphi$. $\rhd$

3. Пространство периодических ультрадифференцируемых функций типа Румье в $\mathbb{R}^n$ и его характеризация

Пусть $C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ — пространство 2π-периодических по каждой переменной непрерывных в $\mathbb{R}^n$ функций f, $C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n) = C_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Каждой функции $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ ставим в соответствие ее ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_\alpha e^{i\langle \alpha, x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где коэффициент Фурье $\hat{f}_\alpha$ задается формулой

$$\hat{f}_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{[0,2\pi]^n} f(x) e^{-i\langle \alpha, x\rangle}\, dx.$$

Пусть $\mathscr{H} = \{h_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ — произвольное семейство выпуклых функций $h_\nu : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ с $h_\nu(0) = 0$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

j_1) $h_\nu(x) = h_\nu(|x_1|, \ldots, |x_n|)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

j_2) $\lim_{x\to\infty} \frac{h_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty$;

j_3) $h_{\nu+1}(x) \geqslant h_\nu(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и $\lim_{x\to\infty}(h_{\nu+1}(x) - h_\nu(x)) = +\infty$;

j_4) $\tau_\nu := \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n} e^{h_{\nu+1}^*(\ln^+|\alpha_1|,\ldots,\ln^+|\alpha_n|) - h_\nu^*(\ln^+|\alpha_1|,\ldots,\ln^+|\alpha_n|)} < \infty$.

Определим пространство $J(\mathscr{H})$ как внутренний индуктивный предел нормированных пространств

$$J(h_\nu) = \left\{ f \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n) : \mathscr{N}_\nu(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, \alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{e^{h_\nu(\alpha)}} < \infty \right\}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Следуя определениям теории ультрадифференцируемых функций (см, например, [10, 12–16]), пространство $J(\mathscr{H})$ можно отнести к классу пространств ультрадифференцируемых функций типа Румье в $\mathbb{R}^n$, нашедших многочисленные применения в теории дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [17] и библиографию там) и теории операторов свертки [18–20].

Далее, следующим образом введем пространство $\mathscr{C}(\mathscr{H})$. Для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ пусть $\mathscr{C}(h_\nu)$ — пространство, состоящее из функций $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, коэффициенты Фурье которых $\hat{f}_\alpha$ при некотором $a_\nu(f) > 0$ удовлетворяют оценке

$$|\hat{f}_\alpha| \leqslant a_\nu(f) e^{-h_\nu^*(\ln^+|\alpha_1|,\ldots,\ln^+|\alpha_n|)}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Так как (благодаря условию j_2)) для любого $\nu \in \mathbb{N}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{h_\nu^*(x)}{\|x\|} = +\infty$, то функции из $\mathscr{C}(h_\nu)$ бесконечно дифференцируемы. Наделим $\mathscr{C}(h_\nu)$ нормой

$$p_\nu(f) = \sup_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n} \left(\big|\hat{f}_\alpha\big| e^{h_\nu^*(\ln^+|\alpha_1|,\ldots,\ln^+|\alpha_n|)} \right).$$

Далее, поскольку $h_\nu^*(x) \geqslant h_{\nu+1}^*(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, то $p_{\nu+1}(f) \leqslant p_\nu(f)$ для произвольной функции $f \in C(h_\nu)$. Значит, пространство $\mathscr{C}(h_\nu)$ вложено в $\mathscr{C}(h_{\nu+1})$ непрерывно. При этом $\mathscr{C}(h_\nu)$ — собственное подпространство пространства $\mathscr{C}(h_{\nu+1})$. Действительно, имеются функции из $\mathscr{C}(h_{\nu+1})$, не принадлежащие $\mathscr{C}(h_\nu)$. Например, такова будет функция

$$f_{\nu+1}(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} e^{-h_{\nu+1}^*(\ln^+|\alpha_1|,\ldots,\ln^+|\alpha_n|)} e^{i\langle\alpha,x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Для нее $p_{\nu+1}(f_\nu) = 1$, а $p_\nu(f_\nu) = +\infty$, поскольку благодаря условиям j_2) и j_3) $\lim_{x\to\infty}(h_\nu^*(x) - h_{\nu+1}^*(x)) = +\infty$. Пусть $\mathscr{C}(\mathscr{H}) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty}\mathscr{C}(h_\nu)$. Линейное пространство $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ снабдим топологией индуктивного предела пространств $\mathscr{C}(h_\nu)$.

Справедлива следующая теорема, доказательство которой проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.1 в [21], и приводится здесь для полноты изложения.

Теорема 4. *Пространства $J(\mathscr{H})$ и $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ совпадают.*

$\lhd$ Пусть $f \in J(\mathscr{H})$. Покажем, что $f \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$. Так как $f \in J(h_\nu)$ для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$, то

$$\left|\left(D^\beta f\right)(x)\right| \leqslant \mathscr{N}_\nu(f)e^{h_\nu(\beta)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Отсюда и из представления

$$\hat{f}_\alpha(i\alpha)^\beta = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{[0,2\pi]^n}\left(D^\beta f\right)(x)e^{-i\langle\alpha,x\rangle}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

получим, что для любых $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|\hat{f}_\alpha| \leqslant \mathscr{N}_\nu(f)\frac{e^{h_\nu(\beta)}}{(|\alpha_1|^+)^{\beta_1}\cdots(|\alpha_n|^+)^{\beta_n}}.$$

Отсюда следует, что

$$|\hat{f}_\alpha| \leqslant \mathscr{N}_\nu(f)e^{-h_\nu^*(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)}, \quad \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Следовательно, $f \in \mathscr{C}(h_\nu)$ и, значит, $f \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$. Кроме того, из последнего неравенства следует, что $p_\nu(f) \leqslant \mathscr{N}_\nu(f)$ для $f \in J(h_\nu)$. Значит, пространство $J(h_\nu)$ вложено в $\mathscr{C}(h_\nu)$ непрерывно. Но тогда и $J(\mathscr{H})$ вложено в $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ непрерывно.

Пусть теперь $f \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$. Тогда $f \in \mathscr{C}(h_\nu)$ для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$. Значит,

$$|\hat{f}_\alpha| \leqslant p_\nu(f)e^{-h_\nu^*(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)}, \quad \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}^n. \tag{10}$$

Таким образом, при любых $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|\hat{f}_\alpha| \leqslant p_\nu(f)\frac{e^{h_\nu(\beta)}}{(|\alpha_1|^+)^{\beta_1}\cdots(|\alpha_n|^+)^{\beta_n}}.$$

Эта оценка означает, что $f \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Далее, пользуясь неравенством (10), условием j_4), для произвольных $x \in \mathbb{R}^n$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$\begin{aligned}
|(D^\beta f)(x)| &\leqslant \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n}|\hat{f}_\alpha|(|\alpha_1|^+)^{\beta_1}\cdots(|\alpha_n|^+)^{\beta_n}\\
&\leqslant p_\nu(f)\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n}e^{-h_\nu^*(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)}(|\alpha_1|^+)^{\beta_1}\cdots(|\alpha_n|^+)^{\beta_n}\\
&\leqslant \tau_\nu p_\nu(f)e^{\sup\limits_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n}\left(\beta_1\ln^+|\alpha_1|+\dots+\beta_n\ln^+|\alpha_n|-h_{\nu+1}^*(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)\right)}\\
&\leqslant \tau_\nu p_\nu(f)e^{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^n}(\langle\beta,t\rangle-h_{\nu+1}^*(t))}.
\end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись предложением 1 из [21], получим, что

$$|(D^\beta f)(x)| \leqslant \tau_\nu p_\nu(f)e^{h_{\nu+1}(\beta)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{11}$$

Итак, $f \in J(h_{\nu+1})$ и, значит, $f \in J(\mathscr{H})$. Из неравенства (11) следует, что

$$\mathscr{N}_{\nu+1}(f) \leqslant \tau_\nu p_\nu(f), \quad f \in \mathscr{C}(h_\nu).$$

Но тогда и вложение $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ в $J(\mathscr{H})$ непрерывно.

Из доказанных утверждений следует совпадение пространств $J(\mathscr{H})$ и $\mathscr{C}(\mathscr{H})$. $\rhd$

4. Об операторе периодизации в $\mathscr{S}^\varphi$

Отметим, что если $f \in S(\mathbb{R}^n)$, то для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ряд $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}(D^\beta f)(x+2\pi\alpha)$ сходится равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}^n$. Поэтому его сумма принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и, очевидно, является 2π-периодической по каждой переменной функцией.

Определение. Пусть $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega$. Определим на $\mathscr{S}^\psi$ оператор периодизации P, полагая

$$(Pf)(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} f(x+2\pi\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 5. *Пусть семейство $\mathscr{H} = \{h_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ выпуклых функций $h_\nu : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ с $h_\nu(0) = 0$, помимо условий $j_1)$–$j_4)$, удовлетворяет дополнительным условиям:*

$j_5)$ *для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует число $c_\nu > 0$ такое, что*

$$h_\nu(\alpha+\beta) \leqslant c_\nu + h_{\nu+1}(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n \cap [0,1]^n;$$

$j_6)$ *для любых $\nu, m \in \mathbb{N}$ найдется число $c_{\nu,m} > 0$ такое, что*

$$h_{\nu+1}(\alpha) \geqslant c_{\nu,m} + h_\nu(\alpha) + \sum_{k=1}^n m\ln(1+\alpha_k), \quad \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Пусть семейство φ состоит из функций $\varphi_\nu := h_{\nu|\mathbb{Z}_+^n}$, $\nu = 1,2,\ldots$

Тогда оператор P действует из $\mathscr{S}^\varphi$ в $J(\mathscr{H})$ и является непрерывным.

$\lhd$ Согласно следствию 1 из теоремы 1 в [3] отображение $\mathscr{F} : f \in \mathscr{S}^\varphi \to \hat{f}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathscr{S}^\varphi$ и $\mathscr{S}_\varphi$. В частности, отображение $\mathscr{F}$ действует непрерывно из $\mathscr{S}^\varphi$ в $\mathscr{S}_\varphi$. Причем, как следует из концовки доказательства теоремы 1 в [3], каково бы ни было $\nu \in \mathbb{N}$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ при некотором $C_{m,\nu} > 0$

$$\|\hat{f}\|_{m,\nu+1} \leqslant C_{m,\nu}\rho_{m+2n,\nu}(f), \quad f \in \mathscr{S}^{\varphi_\nu}. \tag{12}$$

Далее, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n$

$$\widehat{(Pf)}_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{[0,2\pi]^n}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} f(x+2\pi\alpha)e^{-i\langle\alpha,x\rangle}\,dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\int\limits_{[0,2\pi]^n} f(x+2\pi\alpha)e^{-i\langle\alpha,x\rangle}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle\alpha,x\rangle}\,dx = \frac{\hat{f}(-\alpha)}{(\sqrt{2\pi})^n}.$$

Следовательно,

$$(Pf)(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\hat{f}(-\alpha)e^{i\langle\alpha,x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что в силу неравенства (12), в частности,

$$\left|x^\beta\hat{f}(x)\right| \leqslant C_{m,\nu}\rho_{m+2n,\nu}(f)e^{\varphi_{\nu+1}(\beta)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \beta \in \mathbb{Z}^n.$$

Из этой оценки следует, что

$$\left|\hat{f}(-\alpha)\right| \leqslant C_{m,\nu}\rho_{m+2n,\nu}(f)e^{-\varphi^*_{\nu+1}(\ln^+|\alpha_1|,\ldots,\ln^+|\alpha_n|)}.$$

Отсюда, с учетом того, что $\varphi_{\nu+1} = h_{\nu+1|\mathbb{Z}_+^n}$, имеем

$$\left|\widehat{(Pf)}_\alpha\right| \leqslant K_{m,\nu}\rho_{m+2n,\nu}(f)e^{-h^*_{\nu+1}(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)},$$

где $K_{m,\nu} = \frac{C_{m,\nu}}{(\sqrt{2\pi})^n}$. Следовательно, $\left(\widehat{(Pf)}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \in \mathscr{C}(h_{\nu+1})$ и

$$p_{\nu+1}\left(\left(\widehat{(Pf)}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\right) \leqslant K_{m,\nu}\rho_{m+2n,\nu}(f), \quad f \in \mathscr{S}^{\varphi_\nu}.$$

Но тогда согласно концовке доказательства теоремы 4 $Pf \in J(h_{\nu+2})$ (и, значит, $Pf \in J(\mathscr{H})$), причем, при любом $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathscr{N}_{\nu+2}(Pf) \leqslant \tau_{\nu+1}K_{m,\nu}\rho_{m+2n,\nu}(f), \quad f \in \mathscr{S}^{\varphi_\nu}.$$

Из этого неравенства следует, что линейный оператор P действует из $\mathscr{S}^\varphi$ в $J(\mathscr{H})$ непрерывно. $\rhd$

Благодарность. Благодарю рецензента за ценные замечания.

Литература

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Т. 2: Пространства основных и обобщенных функций.—М.: Физматгиз, 1958.—308 с.
2. *Соловьев М. А.* Пространственно-подобная асимптотика вакуумных средних в нелокальной теории поля // Теорет. и матем. физика.—1982.—Т. 52, № 3.—С. 363–374.
3. *Луценко А. В., Мусин И. Х., Юлмухаметов Р. С.* О пространствах Гельфанда — Шилова // Уфимск. матем. журн.—2023.—Т. 15, № 3.—С. 91–99.
4. *Эдвардс Р. Е.* Функциональный анализ. Теория и приложения.— М.: Мир, 1969.—1070 с.
5. *Chung J., Chung S-Y, Kim D.* Equivalence of the Gelfand–Shilov Spaces // J. Math. Anal. Appl.—1996.—Vol. 203, № 3.—P. 828–839. DOI: 10.1006/jmaa.1996.0414.
6. *Мацаев В. И., Ронкин Л. И.* Квазианалитические классы функций от нескольких переменных // Зап. матем. отд. физ-матем. фак. и Харьковск. матем. общ.—1961.—Т. 27, № 4.—С. 49–57.
7. *Ронкин Л. И.* О квазианалитических классах функций нескольких переменных // Докл. АН СССР.—1962.—Т. 146, № 3.—С. 546–549.
8. *Lelong P.* Sur une propriété de quasi-analyticité des fonctions de plusieurs variables // C. R. Acad. Sci. Paris.—1951.—Vol. 232.—P. 1178–1180.
9. *Lelong P.* Extension d'un théoréme de Carleman // Ann. Inst. Fourier, Grenoble.—1962.—Vol. 12.—P. 627–641.
10. *Roumieu C.* Ultra-distribution définis sur $\mathbb{R}^n$ et sur certaines classes de variétés differentiables // J. Analyse Math.—1962.—Vol. 10.—P. 153–192. DOI: 10.1007/BF02790307.
11. *Thu Pham-Gia.* On a theorem of Lelong // Canad. Math. Bull.—1976.—Vol. 19, № 4—P. 505–506. DOI: 10.4153/CMB-1976-077-x.
12. *Roumieu C.* Sur quelques extensions de la notion de distribution // Ann. Sci. École Norm. Sup. Ser. 3.—1960.—Vol. 77, № 1.—P. 41–121. DOI: 10.24033/asens.1087.
13. *Komatsu H.* Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA, Math.—1973.—Vol. 20, № 1.—P. 25–105.
14. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results Math.—1990.—Vol. 17, № 3–4.—P. 206–237. DOI: 10.1007/BF03322459.
15. *Абанин А. В.* Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения.— М.: Наука, 2007.—222 с.
16. *Абанин А. В.* Ω-ультрараспределения // Изв. РАН. Сер. матем.—2008.—Т. 72, № 2.—С. 3–38. DOI: 10.4213/im1147.
17. *Boiti C., Jornet D., Oliaro A.* Regularity of partial differential operators in ultradifferentiable spaces and Wigner type transforms // J. Math. Anal. Appl.—2017.—Vol. 446, № 1.—P. 920–944. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.09.029.

18. *Meise R.* Sequence Space Representations For Zero-Solutions of Convolution Equations on Ultradifferentiable Functions of Roumieu Type // Stud. Math.—1989.—Vol. 92.—P. 211–230. DOI: 10.4064/sm-92-3-211-230.
19. *Полякова Д. А.* Об образе оператора свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций // Алгебра и анализ.—2024.—Т. 36, № 2.—С. 108–130.
20. *Полякова Д. А.* Описание ядра оператора свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Румье // Владикавк. матем. журн.—2024.—Т. 26, № 3.—С. 72–85. DOI: 10.46698/f8294-3012-1428-w.
21. *Луценко А. В., Мусин И. Х., Юлмухаметов Р. С.* О классе периодических функций в $\mathbb{R}^n$ // Уфимск. матем. журн.—2022.—Т. 14, № 4.—С. 73–79.

Статья поступила 8 ноября 2024 г.

Мусин Ильдар Хамитович
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: musin_ildar@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-2659-1147

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 87–100

ON GELFAND–SHILOV SPACES OF TYPE S

Musin, I. Kh.[1]

[1] Institute of Mathematics with Computing Centre
of the Ufa Federal Research Centre of RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia

E-mail: musin_ildar@mail.ru

Abstract. In the theory of generalized functions and the theory of differential equations spaces of rapidly decreasing infinitely differentiable functions are of considerable interest. This is due to the fact that when solving various problems of analysis in such spaces one can use the rich possibilities provided by the Fourier transform or the Laplace transform. One of such spaces is the Gelfand–Shilov spaces of type S. They arose in the mid-1950s in the works of I. M. Gelfand and G. E. Shilov during the study of the problem of uniqueness of the solution of Cauchy problems for partial differential equations. In the famous series of books by I. M. Gelfand and G. E. Shilov on generalized functions of the late 1950s – early 1960s the properties of the functions of these spaces are described in detail and a thorough Fourier analysis is carried out in them. By now, spaces of type S have found numerous applications also in the theory of pseudodifferential operators, time-frequency analysis. In the present paper, using two countable families φ and ψ of separately radial weight functions in $\mathbb{R}^n$, we introduce a space $\mathscr{S}_{\varphi}^{\psi}$ of functions of type S that is more general than the Gelfand–Shilov space S_{α}^{β}. We obtain a description of the space $\mathscr{S}_{\varphi}^{\psi}$ in terms of the Fourier transform of functions and consider the question of its non-triviality. The study of the periodization operator on one of the spaces of type S under consideration turned out to be related to the problem of describing the functions of the space of periodic ultradifferentiable functions of Roumieu type in terms of the decrease of their Fourier coefficients.

Keywords: Gelfand–Shilov spaces, Fourier transform, Fourier series.

AMS Subject Classification: 46F05, 42B05.

For citation: *Musin, I. Kh.* On Gelfand–Shilov Spaces of Type S, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 87–100 (in Russian). DOI: 10.46698/w6732-0632-5795-v.

References

1. *Gelfand, I. M. and Shilov, G. E.* Generalized Functions. Vol. 2. Spaces of Fundamental and Generalized Functions, New York, Academic Press, 1968.
2. *Soloviev, M. A.* Spacelike Asymptotic Behavior of Vacuum Expectation Values in Nonlocal Field Theory, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1982, vol. 52, no. 3, pp. 854–862. DOI: 10.1007/BF01038079.
3. *Lutsenko, A. V., Musin, I. Kh. and Yulmukhametov, R. S.* On Gelfand–Shilov Spaces, *Ufa Mathematical Journal*, 2023, vol. 15, no. 3, pp. 88–96. DOI: 10.13108/2023-15-3-88.
4. *Edwards, R. E. Functional Analysis. Theory and Applications*, New York–Toronto–London, Holt, Pineart and Winston, 1965.
5. *Chung, J., Chung, S.-Y. and Kim, D.* Equivalence of the Gelfand–Shilov Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1996, vol. 203, no. 3, pp. 828–839. DOI: 10.1006/jmaa.1996.0414.
6. *Matsaev V. I., Ronkin L. I.* Quasi-Analytic Classes of Functions of Several Variables, *Notes of the Mathematical Department of the Physics and Mathematics Faculty and the Kharkov Mathematical Society*, 1961, vol. 27, no. 4, pp. 49–57.
7. *Ronkin, L. I.* On Quasi-Analytic Classes of Functions of Several Variables, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1962, vol. 146, no. 3, pp. 546–549.
8. *Lelong, P.* Sur une Propriété de Quasi-Analyticité des Fonctions de Plusieurs Variables, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 1951, vol. 232, pp. 1178–1180.
9. *Lelong, P.* Extension d'un Théoréme de Carleman, *Annales de l'Institut Fourier*, 1962, vol. 12, pp. 627–641.
10. *Roumieu, C.* Ultra-Distribution Définis sur $\mathbb{R}^n$ et sur Certaines Classes de Variétés Differentiables, *Journal d'Analyse Mathematique*, 1962, vol. 10, pp. 153–192. DOI: 10.1007/BF02790307.
11. *Thu Pham-Gia.* On a Theorem of Lelong, *Canadian Mathematical Bulletin*, 1976, vol. 19, no. 4, pp. 505–506. DOI: 10.4153/CMB-1976-077-x.
12. *Roumieu, C.* Sur Quelques Extensions de la Notion de Distribution, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, Serie* 3, 1960, vol. 77, no. 1, pp. 41–121. DOI: 10.24033/asens.1087.
13. *Komatsu, H.* Ultradistributions, I. Structure Theorems and a Characterization, *Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect.* 1A, *Mathematics*, 1973, vol. 20, no. 1, pp. 25–105.
14. *Braun, R. W., Meise, R. and Taylor, B. A.* Ultradifferentiable Functions and Fourier Analysis, *Results in Mathematics*, 1990, vol. 17, no. 3–4, pp. 206–237. DOI: 10.1007/BF03322459.
15. *Abanin, A. V. Ultradifferentiable Functions and Ultradistributions*, Moscow, Nauka, 2007, 222 p. (in Russian).
16. *Abanin, A. V.* Ω-ultradistributions, *Izvestiya: Mathematics*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 207–240. DOI: 10.1070/IM2008v072n02ABEH002398.
17. *Boiti, C., Jornet, D. and Oliaro, A.* Regularity of Partial Differential Operators in Ultradifferentiable Spaces and Wigner Type Transforms, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2017, vol. 446, no. 1, pp. 920–944. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.09.029.
18. *Meise, R.* Sequence Space Representations for Zero-Solutions of Convolution Equations on Ultradifferentiable Functions of Roumieu Type, *Studia Mathematica*, 1989, vol. 92, pp. 211–230. DOI: 10.4064/sm-92-3-211-230.
19. *Polyakova, D. A.* On the Range of a Convolution Operator in Spaces of Ultradifferentiable Functions, *Algebra i Analiz*, 2024, vol. 36, no. 2, pp. 108–130 (in Russian).
20. *Polyakova, D. A.* On Kernels of Convolution Operators in the Roumieu Spaces of Ultradifferentiable Functions, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2024, vol. 26, no. 3, pp. 72–85 (in Russian). DOI: 10.46698/f8294-3012-1428-w
21. *Lutsenko, A. V., Musin, I. Kh. and Yulmukhametov, R. S.* On a Class of Periodic Functions in $\mathbb{R}^n$, *Ufa Mathematical Journal*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 69–75. DOI: 10.13108/2022-14-4-69.

Received November 8, 2024

Ildar Kh. Musin
Institute of Mathematics with Computing Centre
of the Ufa Federal Research Centre of RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Leading Researcher
E-mail: musin_ildar@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-2659-1147