Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 101–111

УДК 517.982
DOI 10.46698/s1056-5701-7829-j

О ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[#]

П. Р. Орынбаев[1], Б. Б. Тасоев[2,3]

[1] Каракалпакское отделение Института математики
им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
Узбекистан, 230100, Нукус, ул. Абдирова 2;
[2] Владикавказский научный центр РАН,
Россия, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса 1;
[3] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: paraxatorinbaev@gmail.com, tasoevbatradz@yandex.ru

Посвящается 70-летию профессора А. В. Абанина

Аннотация. В данной заметке получен критерий частично интегральной представимости положительных L^∞-однородных операторов, действующих в идеальных пространствах измеримых действительных функций, определенных на произведении измеримых пространств с σ-конечными мерами. Полученный результат является аналогом критерия Бухвалова об интегральной представимости линейных операторов, действующих в идеальных пространствах измеримых действительных функций, определенных на измеримых пространствах с σ-конечными мерами. Отметим, что при определенных условиях из полученного в данной работе результата выводится упомянутый ше критерий Бухвалова. Следовательно, полученный результат служит обобщением критерия Бухвалова. Основными инструментами данного исследования являются методы теории векторных решеток и идеальных функциональных пространств.

Ключевые слова: идеальное пространство, частично интегральный оператор, положительный оператор, интегральный оператор.

AMS Subject Classification: 46B42, 46B04.

Образец цитирования: *Орынбаев П. Р., Тасоев Б. Б.* О частично интегральном представлении линейных положительных операторов // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 101–111. DOI: 10.46698/s1056-5701-7829-j.

1. Введение

Теория частично интегральных операторов имеет многочисленные приложения в различных областях математики (см. [1–4]). Различные свойства этих операторов изучались в работах [5–8]. Следуя монографии [2], приведем наиболее общее определение частично интегрального оператора. *Частично интегральным оператором* называется оператор вида $P = C + L + M + N$, где

$$Cx(t,s) := c(t,s)x(t,s),$$

$$Lx(t,s) := \int_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\mu(\tau),$$

[#]Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-71-10094 (https://rscf.ru/project/24-71-10094/).

$$Mx(t,s) := \int\limits_T m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\nu(\sigma), \tag{1}$$

$$Nx(t,s) := \int\limits_{T\times S} n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\mu\otimes\nu(\tau,\sigma).$$

Здесь $(T,\mathfrak{A}(\mathfrak{T}),\mu)$, $(S,\mathfrak{A}(\mathfrak{S}),\mu)$ — измеримые пространства с сепарабельными мерами μ и ν соответственно, $\mu\otimes\nu$ — произведение мер μ и ν. Коэффициент $c=c(t,s)$, а также ядра $l=l(t,s,\tau)$, $m=m(t,s,\sigma)$ и $n=(t,s,\tau,\sigma)$ — измеримые функции, а интеграл понимается в смысле Лебега. Бухвалов в своей работе [10] привел критерий интегральной представимости линейных операторов, действующих в идеальных функциональных пространствах. Целью данной работы является доказать аналогичный критерий представимости положительного оператора в виде частично интегрального оператора вида (1). Необходимые сведения теории векторных решеток и положительных операторов можно найти в монографиях [10–12].

Всюду далее (Ω,Σ,μ), $(S,\mathscr{F},m)$ — измеримые пространства с σ-конечными полными мерами μ и m соответственно, $(\Omega\times S,\Sigma\otimes\mathscr{F},\mu\otimes m)$ — произведение этих пространств. Символом $\mathscr{L}^0(\mu):=\mathscr{L}^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ будем обозначать пространство всех действительных измеримых μ-почти всюду конечных функций, $L^0(\mu):=L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ — пространство классов эквивалентности функций из $\mathscr{L}^0(\Omega,\Sigma,\mu)$. Как обычно, функции $f,g\in\mathscr{L}^0(\mu)$ называются эквивалентными, если они равные μ-почти всюду.

2. Основной результат

Всюду далее E и F — идеальные пространства в $L^0(\Omega\times S,\Sigma\otimes\mathscr{F},\mu\otimes m)$, $E_+:=\{x\in E : x\geqslant 0\}$ и $T:\ E\to F$ — линейный оператор. Оператор T называется *положительным* и пишут $T\geqslant 0$, если $Tf\in F_+$ для всех $f\in E_+$, $L^\infty(\mu)$-*однородным*, если $T(hf)=hT(f)$ для всех $f\in E$ и $h\in L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$. Положительный оператор $T:E\to F$ называется *порядково σ-непрерывным*, если для любой последовательности $(f_n)_{n=1}^\infty\subset E$ такой, что $f_1\geqslant f_2\geqslant\ldots$ и $\inf_n f_n=\lim_n f_n=0$ следует $Tf_1\geqslant Tf_2\geqslant\ldots$ и $\inf_n Tf_n=0$. Символически, из условия $f_n\downarrow 0$ следует $Tf_n\downarrow 0$. Напомним, что порядковые и алгебраические операции в E и F вычисляются почти всюду поточечно. Таким образом, запись $f_n\downarrow 0$ означает, что $f_n(\omega,t)\geqslant f_{n+1}(\omega,t)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $\inf_n f_n(\omega,t)=\lim_n f_n(\omega,t)=0$ для $\mu\otimes m$-почти всех $(\omega,t)\in\Omega\times S$. Аналогично, запись $f_n\uparrow f$ будет означать, что $f_n(\omega,t)\leqslant f_{n+1}(\omega,t)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $\sup_n f_n(\omega,t)=\lim_n f_n(\omega,t)=f(\omega,t)$ для $\mu\otimes m$-почти всех $(\omega,t)\in\Omega\times S$.

Определение 1. Будем говорить, что оператор $T:E\to F$ является *частично интегральным*, если существует измеримая функция $k\in\mathscr{L}^0(\Omega\times S\times S,\Sigma\otimes\mathscr{F}\otimes\mathscr{F},\mu\otimes m\otimes m)$ такая, что справедливо представление

$$(Tf)(\omega,t)=\int\limits_S k(\omega,t,s)f(\omega,s)\,dm(s)$$

для всех $f\in E$ и для $\mu\otimes m$-почти всех $(\omega,t)\in\Omega\times S$.

Из определения видно, что частично интегральный оператор является $L^\infty(\mu)$-однородным.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ *сходится к нулю по мере* μ и при этом писать $f_n \to 0$ *по мере* μ, если $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю по мере μ на любом подмножестве в Ω конечной меры.

Лемма 1. *Пусть* (Ω, Σ, μ) *— пространство с* σ*-конечной мерой,* $k, f \in \mathscr{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$*,* $kf \in \mathscr{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *и последовательность* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ *такая, что* $0 \leqslant f_n \leqslant f$ μ*-почти всюду. Если* $f_n \to 0$ *по мере* μ*, то справедливо соотношение*

$$\int\limits_{\Omega} k(\omega) f_n(\omega)\, d\mu(\omega) \to 0.$$

$\lhd$ Предположим сначала, что $\mu(\Omega) < \infty$. Введем множества Ω_m по формуле $\Omega_m := \{\omega \in \Omega : |k(\omega)| \leqslant m\}$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\chi_{\Omega_m}|kf| \uparrow |kf| \in \mathscr{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ и в силу теоремы Леви справедливо равенство

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega_m} \big|k(\omega) f(\omega)\big|\, d\mu(\omega) = \int\limits_{\Omega} \big|k(\omega) f(\omega)\big|\, d\mu(\omega).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_m} \big|k(\omega) f(\omega)\big|\, d\mu(\omega) \leqslant \varepsilon$$

для всех $m \geqslant m(\varepsilon)$. Зафиксируем $m \geqslant m(\varepsilon)$. Так как на множестве Ω_m выполняется неравенство $|kf_n| \leqslant m|f_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то из условия леммы следует, что $kf_n \to 0$ по мере на множестве Ω_m. Следовательно, в виду теоремы Лебега выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \Bigg|\int\limits_{\Omega} k(\omega) f_n(\omega)\, d\mu(\omega)\Bigg| &\leqslant \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_m} \big|k(\omega) f(\omega)\big|\, d\mu(\omega) + \int\limits_{\Omega_m} \big|k(\omega) f_n(\omega)\big|\, d\mu(\omega) \\ &\leqslant \varepsilon + \int\limits_{\Omega_m} \big|k(\omega) f_n(\omega)\big|\, d\mu(\omega) \to \varepsilon \end{aligned}$$

при $n \to \infty$. Таким образом, в силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{\Omega} k(\omega) f_n(\omega)\, d\mu(\omega) \to 0 \tag{2}$$

при условии, что $\mu(\Omega) < \infty$.

Рассмотрим общий случай. Пусть $\Omega = \bigcup_{p=1}^{\infty} \Omega_p$, где $\mu(\Omega_p) < \infty$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Тогда $\chi_{\Omega_p}|kf| \uparrow |kf|$ всюду на Ω, и так как $kf \in \mathscr{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, то по теореме Леви выполняется соотношение

$$\lim_{p\to\infty} \int\limits_{\Omega_p} \big|k(\omega) f(\omega)\big|\, d\mu(\omega) = \int\limits_{\Omega} \big|k(\omega) f(\omega)\big|\, d\mu(\omega).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $p(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_p} \big|k(\omega) f(\omega)\big|\, d\mu(\omega) \leqslant \varepsilon$$

для всех $p \geqslant p(\varepsilon)$. Следовательно, в виду формулы (2) справедливы соотношения

$$\left|\int\limits_{\Omega} k(\omega) f_n(\omega)\, d\mu(\omega)\right| \leqslant \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_p} \big|k(\omega) f_n(\omega)\big|\, d\mu(\omega) + \int\limits_{\Omega_p} \big|k(\omega) f_n(\omega)\big|\, d\mu(\omega)$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_p} \big|k(\omega) f(\omega)\big|\, d\mu(\omega) + \int\limits_{\Omega_p} \big|k(\omega) f_n(\omega)\big|\, d\mu(\omega) \to \varepsilon$$

при $n \to \infty$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим требуемое. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть (Ω, Σ, μ), $(S, \mathscr{F}, m)$ — пространства с σ-конечными мерами и $k \in \mathscr{L}^0(\Omega \times S, \Sigma \otimes \mathscr{F})$. Тогда $k \geqslant 0$ $(k = 0)$ $\mu \otimes m$-почти всюду в том и только в том случае, когда $k(\omega, t) \geqslant 0$ $(k(\omega, t) = 0)$ для μ-почти всех $\omega \in \Omega$ при m-почти всех $t \in S$.*

$\lhd$ Пусть $k \geqslant 0$ $\mu \otimes m$-почти всюду и $A := \{(\omega, t) \in \Omega \times S : k(\omega, t) < 0\}$. Тогда выполняются равенства

$$0 = \mu \otimes m(A) = \int\limits_{S} \mu(A_t)\, dm(t),$$

где $A_t := \{\omega \in \Omega : (\omega, t) \in A\}$ $(t \in S)$. Следовательно, $\mu(A_t) = 0$ при m-почти всех $t \in S$. Последнее означает, что $k(\omega, t) \geqslant 0$ для μ-почти всех $\omega \in \Omega$ при m-почти всех $t \in S$.

Обратно. Пусть $k(\omega, t) \geqslant 0$ для μ-почти всех $\omega \in \Omega$ при m-почти всех $t \in S$. Тогда

$$\mu \otimes m(A) = \int\limits_{S} \mu(A_t)\, dm(t) = 0.$$

Следовательно, $k \geqslant 0$ $\mu \otimes m$-почти всюду. Случай $k = 0$ доказывается аналогично. $\rhd$

Лемма 3. *Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с σ-конечной мерой μ и X — идеальное пространство в $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда существует последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X_+$ такая, что $f_i \wedge f_j = 0$ для всех $i \neq j$, и всякий элемент $g \in X_+$ имеет представление*

$$g = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n,$$

где g_n из полосы B_{f_n} в X, порожденной элементом f_n, $n \in \mathbb{N}$.

$\lhd$ В виду [14, лемма IV.7.1, теоремы IV.5.2 и IV.5.3] существует семейство $\{f_\xi : \xi \in \Xi\} \subset X_+$ такое, что $f_i \wedge f_j = 0$ для всех $i \neq j$ $(i, j \in \Xi)$ и всякий элемент $g \in E_+$ имеет представление

$$g = \sup_{\xi\in\Xi} g_\xi,$$

где g_ξ принадлежит полосе B_{f_ξ} в X, порожденной элементом f_ξ для всех $\xi \in \Xi$. Остается показать, что множество Ξ не более, чем счетно.

Предположим сначала, что мера μ конечна. Пусть $\mathscr{C}(\mathbf{1})$ обозначает полную булеву алгебру классов эквивалентности характеристических функций множеств из σ-алгебры Σ. Тогда в силу [12, §1.1.6(1)] $\mathscr{C}(\mathbf{1})$ имеет счетный тип. Следовательно, в виду [14, теорема VI.2.3] и замечания, следующего за ней, подмножество $\{f_\xi : \xi \in \Xi\}$ не более, чем счетное подмножество в $X \subset L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Рассмотрим общий случай, когда мера μ является σ-конечной. Пусть $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, $0 < \mu(\Omega_n) < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Введем новую меру

$\mu_1 : \Sigma \to [0,1]$ по формуле

$$\mu_1(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A \cap \Omega_n)}{\mu(\Omega_n) 2^n}$$

для всех $A \in \Sigma$. Тогда μ_1 — конечная мера, эквивалентная μ, т. е. $\mu_1(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(A) = 0$ $(A \in \Sigma)$. Следовательно, $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $L^0(\Omega, \Sigma, \mu_1)$ совпадают как векторные решетки и, как было показано выше, $\{f_\xi : \xi \in \Xi\}$ не более чем счетное подмножество в $L^0(\Omega, \Sigma, \mu_1) = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Таким образом, множество Ξ не более чем счетно. Можно считать, что $\Xi = \mathbb{N}$. Равенство $\sup_{n \in \mathbb{N}} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ следует из того, что $g_i \wedge g_j = 0$ для всех $i \neq j$. $\rhd$

Теорема 1. *Пусть (Ω, Σ, μ) и $(S, \mathscr{F}, m)$ — пространства с σ-конечными мерами, E и F — идеальные пространства в $L^0(\Omega \times S, \Sigma \otimes \mathscr{F}, \mu \otimes m)$, $T :\ E \to F$ — положительный $L^\infty(\mu)$-однородный оператор. Тогда равносильны следующие утверждения.*

(1) *Существует измеримая функция $k \in \mathscr{L}^0(\Omega \times S \times S, \Sigma \otimes \mathscr{F} \otimes \mathscr{F})$ такая, что $k \geqslant 0$ $\mu \otimes m \otimes m$-почти всюду и справедливо представление*

$$(Tf)(\omega, t) = \int_S k(\omega, t, s) f(\omega, s)\, dm(s) \tag{3}$$

для всех $f \in E$ и $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega, t) \in \Omega \times S$.

(2) *Для любой последовательности $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ такой, что $0 \leqslant f_n \leqslant f \in E$, $f_n \to 0$ по мере $\mu \otimes m$ и любого множества $C \in \Sigma \otimes \mathscr{F}$ такого, что выполняется условие $\chi_C Tf \in L^1(\Omega \times S, \Sigma \otimes \mathscr{F}, \mu \otimes m)$, справедливо соотношение*

$$\int_\Omega \chi_C(\omega, t) Tf_n(\omega, t)\, d\mu(\omega) \to 0$$

для m-почти всех $t \in S$.

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ такая, что $0 \leqslant f_n \leqslant f \in E$, $f_n \to 0$ по мере $\mu \otimes m$. Возьмем произвольное множество $C \in \Sigma \otimes \mathscr{F}$ такое, что $\chi_C Tf \in L^1(\Omega \times S, \Sigma \otimes \mathscr{F}, \mu \otimes m)$. По лемме 2 $k(\omega, t, s) \geqslant 0$ для $\mu \otimes m$-почти всех (ω, s) при m-почти всех $t \in S$. Тогда в виду теоремы Тонелли (см. [13, теорема I.6.12]) и леммы 1 справедливы соотношения

$$\int_\Omega \chi_C(\omega, t) Tf_n(\omega, t)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega \left(\int_S \chi_C(\omega, t) k(\omega, t, s) f_n(\omega, s)\, dm(s) \right) d\mu(\omega)$$
$$= \int_{\Omega \times S} \chi_C(\omega, t) k(\omega, t, s) f_n(\omega, s)\, d\mu \otimes m(\omega, s) \to 0$$

для m-почти всех $t \in S$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Покажем сначала, что оператор T является порядково σ-непрерывным. Пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ такая, что $f_n \downarrow 0$ и $g := \inf_n Tf_n = \lim_n Tf_n \in F_+$. В силу [13, следствие IV.3.1] существует неубывающая последовательность множеств $(C_i)_{i=1}^{\infty} \subset \Sigma \otimes \mathscr{F}$ такая, что $\chi_{C_i} Tf_1 \in L^1(\Omega \times S, \Sigma \otimes \mathscr{F}, \mu \otimes m)$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant \chi_{C_i} Tf_1 \uparrow Tf_1$. По теореме Лебега и заданному предположению справедливы соотношения

$$0 \leqslant \int_\Omega \chi_{C_i}(\omega, t) g(\omega, t)\, d\mu(\omega) = \lim_n \int_\Omega \chi_{C_i}(\omega, t) Tf_n(\omega, t)\, d\mu(\omega) = 0$$

для m-почти всех $t \in S$ и всех $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\chi_{C_i}(\omega,t)g(\omega,t) = 0$ для μ-почти всех $\omega \in \Omega$ при m-почти всех $t \in S$ и всех $i \in \mathbb{N}$. В силу леммы 2 последнее означает, что $\chi_{C_i}(\omega,t)g(\omega,t) = 0$ для $\mu\otimes m$-почти всех $(\omega,t) \in \Omega\times S$ и всех $i \in \mathbb{N}$. Так как $0 \leqslant \chi_{C_i} g \uparrow g$, то получим $g = 0$ $\mu\otimes m$-почти всюду. Таким образом, T является порядково σ-непрерывным.

Возьмем произвольный $f \in E_+$ и обозначим через I_f идеал в E, порожденный элементом f. В силу [13, следствие IV.3.1] для $Tf \geqslant 0$ существует неубывающая последовательность множеств $(C'_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma \otimes \mathscr{F}$ такая, что $\chi_{C'_n} Tf \in L^1(\Omega\times S, \Sigma\otimes\mathscr{F}, \mu\otimes m)$ и $\chi_{C'_n} Tf \uparrow Tf$. Введем множества $C_1 := C'_1$, $C_n := C'_n \setminus C'_{n-1}$ для всех $n = 2, 3, \ldots$ Тогда $C_i \cap C_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$, и выполняется соотношение $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{C_n} Tf = Tf$, где сумма вычисляется $\mu\otimes m$-почти всюду. Так как для любой функции g из полосы B_f, порожденной функцией f, выполняется $\operatorname{supp}(g) \subset \operatorname{supp}(f)$, то последняя сумма справедлива для всех $g \in B_f$, т. е. имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{C_n} Tg = Tg \tag{4}$$

для всех $g \in B_f$.

Зафиксируем произвольный $n \in \mathbb{N}$. Так как $\chi_{C_n} Tg \in L^1(\mu\otimes m)$ для всех $g \in I_f$, то мы можем определить оператор $\overline{T}_n : I_f \to L^0(S, \mathscr{F}, m)$ по формуле

$$\big(\overline{T}_n g\big)(t) := \int\limits_{\Omega} \chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t)\, d\mu(\omega)$$

для m-почти всех $t \in S$ и для всех $g \in I_f$. Тогда $\overline{T}_n \geqslant 0$ и удовлетворяет всем условиям теоремы Бухвалова [9, теорема 1]. Поэтому существует функция $\overline{k}_n \in \mathscr{L}^0(\Omega\times S\times S)$ такая, что выполняется равенство

$$\int\limits_{\Omega} \chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t)\, d\mu(\omega) = \int\limits_{\Omega\times S} \overline{k}_n(\omega,s,t) g(\omega,s)\, d\mu\otimes m(\omega,s)$$

для m-почти всех $t \in S$ и для всех $g \in I_f$. В виду [10, лемма 4] $\overline{k} \geqslant 0$ $\mu\otimes m\otimes m$-почти всюду. Применяя теорему Фубини к правой части последнего равенства, получим

$$\int\limits_{\Omega} \chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t)\, d\mu(\omega) = \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{S} \overline{k}_n(\omega,s,t) g(\omega,s)\, dm(s) \right) d\mu(\omega)$$

для m-почти всех $t \in S$ и для всех $g \in I_f$. Следовательно, в силу $L^{\infty}(\mu)$-однородности оператора T выполняются равенства

$$\int\limits_{A} \chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t)\, d\mu(\omega) = \int\limits_{\Omega} \chi_A(\omega)\chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t)\, d\mu(\omega)$$

$$= \int\limits_{\Omega} \chi_{C_n}(\omega,t)(T\chi_A g)(\omega,t)\, d\mu(\omega) = \int\limits_{\Omega} \left(\int_{S} \overline{k}_n(\omega,s,t)\chi_A(\omega) g(\omega,t)\, dm(s) \right) d\mu(\omega)$$

$$= \int\limits_{A} \left(\int\limits_{S} \overline{k}_n(\omega,s,t) g(\omega,s)\, dm(s) \right) d\mu(\omega)$$

для всех $A \in \Sigma$, m-почти всех $t \in S$ и всех $g \in I_f$. Тогда равны подынтегральные выражения, т. е. имеет место равенство

$$\chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t) = \int\limits_S \overline{k}_n(\omega,s,t)g(\omega,s)\,dm(s) \tag{5}$$

для всех $g \in I_f$ и $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega,t) \in \Omega \times S$ (т. е. равенство (5) выполняется m-почти всюду для μ-почти всех ω). Положим по определению

$$k_n(\omega,t,s) := \overline{k}_n(\omega,s,t)$$

для всех $(\omega,t,s) \in \Omega \times S \times S$. Тогда $k_n \in L^0(\Omega \times S \times S)$, и подставляя функцию k вместо $\overline{k}_n$ в формулу (5), получим

$$\chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t) = \int\limits_S k_n(\omega,t,s)g(\omega,s)\,dm(s) \tag{6}$$

для всех $g \in I_f$ и $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega,t) \in \Omega \times S$.

Покажем, что формула (6) справедлива для любого элемента из полосы B_f в E, порожденной элементом $f \in E$. Достаточно показать справедливость формулы (6) для положительных элементов. Пусть $0 \leqslant g \in B_f$. Тогда последовательность $g_i := g \wedge if$ $(i \in \mathbb{N})$ содержится в I_f и удовлетворяет условию $0 \leqslant g_i \uparrow g$. Кроме того, в виду (6) имеет место неравенство

$$\int\limits_S k_n(\omega,t,s)g_i(\omega,s)\,dm(s) \leqslant \chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t)$$

для $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega,t) \in \Omega \times S$ и для всех $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, в виду порядково σ-непрерывности T и теоремы Леви справедливы равенства

$$\chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t) = \lim_{i\to\infty} \chi_{C_n}(\omega,t)(Tg_i)(\omega,t) = \int\limits_S k_n(\omega,s,t)g(\omega,s)\,dm(s)$$

для $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega,t) \in \Omega \times S$. Таким образом, мы получили, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует функция $k_n \in \mathscr{L}^0(\Omega \times S \times S)_+$ такая, что справедливо представление

$$\chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t) = \int\limits_S k_n(\omega,t,s)g(\omega,s)\,dm(s) \tag{7}$$

для всех $g \in B_f$ и $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega,t) \in \Omega \times S$. В силу формулы (4), следствия из теоремы Леви и порядково σ-непрерывности T выполняются равенства

$$\begin{aligned} Tg(\omega,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(\chi_{C_n}Tg)(\omega,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_S k_n(\omega,t,s)g(\omega,s)\,dm(s) \\ &= \int\limits_S \sum_{n=1}^{\infty} k_n(\omega,t,s)g(\omega,s)\,dm(s) \end{aligned} \tag{8}$$

для всех $g \in B_f$ и $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega, t) \in \Omega \times S$. Следовательно, для всех $g \in B_f$ существует $\sum_{n=1}^{\infty} k_n(\omega, t, s) g(\omega, s) < \infty$ $\mu \otimes m \otimes m$-почти всюду. Положим по определению

$$k_f(\omega, t, s) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n(\omega, t, s), & \text{если } (\omega, s) \in \operatorname{supp}(f), \\ 0, & \text{если } (\omega, s) \in \Omega \times S \setminus \operatorname{supp}(f), \end{cases} \tag{9}$$

для всех $(\omega, t, s) \in \Omega \times S \times S$. Тогда $0 \leqslant k_f \in \mathscr{L}^0(\Omega \times S \times S)$, и в виду формулы (8), а также соотношения $\operatorname{supp}(g) \subset \operatorname{supp}(f)$, получим

$$Tg(\omega, t) = \int\limits_S \sum_{n=1}^{\infty} k_n(\omega, t, s) g(\omega, s)\, dm(s) = \int\limits_S k_f(\omega, t, s) g(\omega, s)\, dm(s)$$

для всех $g \in B_f$ и $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega, t) \in \Omega \times S$. Таким образом, справедливо представление

$$Tg(\omega, t) = \int\limits_S k_f(\omega, t, s) g(\omega, s)\, dm(s) \tag{10}$$

для всех $g \in B_f$ и $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega, t) \in \Omega \times S$.

Так как мера $\mu \otimes m$ σ-конечна, то по лемме 3 существует последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset E_+$ такая, что $f_i \wedge f_j = 0$ для всех $i \neq j$, и всякий элемент $g \in E_+$ имеет представление

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n, \tag{11}$$

где $0 \leqslant g_n$ из полосы B_{f_n} в E, порожденной элементом f_n $(n \in \mathbb{N})$. Пусть $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \in E_+$, где $0 \leqslant g_n \in B_{f_n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда в виду формулы (10) найдется последовательность $(k_{f_n})_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}^0(\Omega \times S \times S)_+$ такая, что

$$Tg_n(\omega, t) = \int\limits_S k_{f_n}(\omega, t, s) g_n(\omega, s)\, dm(s) \tag{12}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Из определения (9) ясно, что $\operatorname{supp}(k_{f_n}(\cdot, t, \cdot)) \subset \operatorname{supp}(f_n)$ для всех $t \in S$ и $n \in \mathbb{N}$. Поэтому мы можем определить функцию k по формуле

$$k(\omega, t, s) = \begin{cases} k_{f_n}(\omega, t, s), & \text{если } (\omega, s) \in \operatorname{supp}(f_n) \\ 0, & \text{если } (\omega, s) \in \Omega \times S \setminus \Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}(f_n) \Big). \end{cases}$$

для всех $(\omega, t, s) \in \Omega \times S \times S$. Тогда $k = \sum_{n=1}^{\infty} k_{f_n} \in \mathscr{L}^0(\Omega \times S \times S)_+$ и в силу порядково σ-непрерывности T, следствия теоремы Леви и формул (11), (12) справедливы равенства

$$Tg(\omega, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (Tg_n)(\omega, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_S k_{f_n}(\omega, t, s) g_n(\omega, s)\, dm(s)$$

$$= \int\limits_S \sum_{n=1}^{\infty} k_{f_n}(\omega, t, s) g_n(\omega, s)\, dm(s) = \int\limits_S k(\omega, t, s) g(\omega, s)\, dm(s)$$

для всех $0 \leqslant g \in E$ и $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega, t) \in \Omega \times S$. Следовательно, в виду разложения $g = g^+ - g^-$ для любого $g \in E$ получим представление

$$Tg(\omega, t) = \int_S k(\omega, t, s) g(\omega, s)\, dm(s)$$

для всех $g \in E$ и $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega, t) \in \Omega \times S$. $\triangleright$

Литература

1. *Romanovsky V. I.* Sur une classe d'equations int'egrales lin'eaires // Acta Math.—1932.—Vol. 59.—P. 99–208. DOI: 10.1007/BF02546501.
2. *Appel J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations.—N. Y.: Marcel Dekker, 2000.—560 p.
3. *Appel J. M., Eletskikh I. A., Kalitvin A. S.* A note on the Fredholm property of partial integral equations of Romanovskij type // J. Integral Equ. Appl.—2004.—Vol. 16, № 1.—P. 25–32. DOI: 10.1216/jiea/1181075256.
4. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Линейные операторы и уравнения с частными интегралами // Соврем. матем. Фундам. направления.—2019.—Т. 65, № 3.—С. 390–433. DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433.
5. *Kudaybergenov K. K., Arziev A. D.* The spectrum of an element in a Banach–Kantorovich algebra over a ring of measurable functions // Adv. Oper. Theory.—2022.—Vol. 7, № 10.—P. 2–15. DOI: 10.1007/s43036-021-00176-9.
6. *Kudaybergenov K. K., Arziev A. D., Orinbaev P. R., Tanirbergen A. K.* The Mercer's theorem for partial integral operators // J. Math. Sci.—2023.—Vol. 271, № 6.—P. 749–761. DOI: 10.1007/s10958-023-06747-w.
7. *Арзиев А. Д., Кудайбергенов К. К., Орынбаев П. Р., Танирберген А. К.* Частично интегральные операторы на пространствах Банаха — Канторовича // Мат. заметки.—2023.—Т. 114, № 1.—С. 18–37. DOI: 10.4213/mzm13703.
8. *Eshkabilov Yu. Kh., Kucharov R. R.* Partial integral operators of Fredholm type on Kaplansky–Hilbert module over L_0 // Vladikavkaz Math. J.—2021.—Vol. 23, № 3.—P. 80–90. DOI: 10.46698/w5172-0182-0041-c.
9. Бухвалов А.В. Критерий интегральной представимости линейных операторов // Функцион. анализ и его прил.—1975.—Т. 9, № 1.—С. 51.
10. *Бухвалов А. В.* Об интегральном представлении линейных операторов // Зап. науч. сем. ЛОМИ.—1974.—Т. 47.—С. 5–14.
11. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—Dordrecht: Springer, 2006.—376 p. DOI: 10.1007/978-1-4020-5008-4.
12. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—624 с.
13. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.
14. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.—408 с.

Статья поступила 30 октября 2024 г.

Орынбаев Парахатдиин Рахман улы
Каракалпакское отделение Института математики
им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
младший научный сотрудник
УЗБЕКИСТАН, 230100, Нукус, ул. Абдирова 2;
E-mail: paraxatorinbaev@gmail.com

Тасоев Батрадз Ботазович
Владикавказский научный центр РАН,
старший научный сотрудник
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямся 1;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0001-8573-4721

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 101–111

ON PARTIAL INTEGRAL REPRESENTATION OF LINEAR POSITIVE OPERATORS

Orinbaev, P. R.[1] and Tasoev, B. B.[2,3]

[1] Karakalpak branch of V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Sciences,
2 Abdirov St., Nukus 230100, Uzbekistan;
[2] Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
1 Williams St., Village of Mikhailovskoye 363110, Russia;
[3] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: paraxatorinbaev@gmail.com, tasoevbatradz@yandex.ru

Abstract. In this paper, we obtain a criterion for partial integral representability of positive L^{∞}-homogeneous operators acting in ideal spaces of measurable real functions defined on the product of measurable spaces with σ-finite measures. The result obtained is a counterpart of Bukhvalov's criterion for integral representability of linear operators acting in ideal spaces of measurable real functions defined on measurable spaces with σ-finite measures. Note that under certain conditions, the above-mentioned Bukhvalov criterion can be derived from the result obtained in this paper. Consequently, the result obtained is a generalization of Bukhvalov's criterion. The main tools of this study are the above-mentioned Bukhvalov criterion and the methods of vector lattice theory.

Keywords: ideal space, partial integral operator, positive operator, integral operator.

AMS Subject Classification: 46B42, 46B04.

For citation: *Orinbaev, P. R. and Tasoev, B. B.* On Partial Integral Representation of Linear Positive Operators, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 101–111 (in Russian). DOI: 10.46698/s1056-5701-7829-j.

References

1. *Romanovsky, V. I.* Sur Une Classe d'Equations Int'egrales Lin'eaires, *Acta Mathematica*, 1932, vol. 59, pp. 99–208. DOI: 10.1007/BF02546501.
2. *Appel, J. M., Kalitvin, A. S. and Zabrejko, P. P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations*, New York, Marcel Dekker, 2000, 560 p.
3. *Appel, J. M., Eletskikh, I. A. and Kalitvin, A. S.* A Note on the Fredholm Property of Partial Integral Equations of Romanovskij Type, *Journal of Integral Equations and Applications*, 2004, vol. 16, no. 1, pp. 25–32. DOI: 10.1216/jiea/1181075256.
4. *Kalitvin, A. S. and Kalitvin, V. A.* Linear Operators and Partial Integral Equations, *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya* [Contemporary Mathematics. Fundamental Directions], 2019, vol. 65, no. 3, pp 390–433 (in Russian). DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433.
5. *Kudaybergenov, K. K. and Arziev A. D.* The Spectrum of an Element in a Banach–Kantorovich Algebra over a Ring of Measurable Functions, *Advances in Operator Theory*, 2022, vol. 7, no. 10, pp. 2–15. DOI: 10.1007/s43036-021-00176-9.
6. *Kudaybergenov, K. K., Arziev, A. D., Orinbaev, P. R. and Tanirbergen, A. K.* The Mercer's Theorem for Partial Integral Operators, *Journal of Mathematical Sciences*, 2023, vol. 271, no. 6, pp. 749–761. DOI: 10.1007/s10958-023-06747-w.
7. *Arziev, A. D., Kudaybergenov, K. K., Orinbaev, P. R. and Tangirbergen, A. K.* Partial Integral Operators on Banach–Kantorovich Spaces, *Mathematical Notes*, 2023, vol. 114, no. 1, pp. 15—29. DOI: 10.1134/S0001434623070027.
8. *Eshkabilov, Yu. Kh. and Kucharov, R. R.* Partial Integral Operators of Fredholm Type on Kaplansky–Hilbert Module over L_0, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2021, vol. 23, no. 3, pp. 80–90. DOI: 10.46698/w5172-0182-0041-c.

9. *Buhvalov, A. V.* Criterion for Integral Representability of Linear Operators, *Funkcional'nyj analiz i ego prilozhenija* [Functional Analysis and Its Applications], 1975, vol. 9, no. 1, pp. 51 (in Russian).
10. *Buhvalov, A. V.* On the Integral Representation of Linear Operators, *Zapiski Nauchnyh Seminarov LOMI*, 1974, vol. 47, pp. 5–14 (in Russian).
11. *Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. Positive Operators*, Dordrecht, Springer, 2006. DOI: 10.1007/978-1-4020-5008-4.
12. *Kusraev, A. G. Dominated Operators*, Dordrecht, Springer, 2000, 446 p. DOI: 10.1007/978-94-015-9349-6.
13. *Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. Funkcionalvnyy analiz* [Functional Analysis], Moscow, Nauka, 1984. (in Russian).
14. *Vulikh, B. Z. Vvedenie v teoriyu poluuporyadochennyh prostranstv* [Introduction to the Theory of Semi-Ordered Spaces], Moscow, Fizmatgiz, 1961, 408 p. (in Russian).

Received October 30, 2024

Parakhatdiin R. Orinbaev
Karakalpak branch of V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Sciences,
2 Abdirov St., Nukus 230100, Uzbekistan,
Junior Researcher
E-mail: paraxatorinbaev@gmail.com

Batradz B. Tasoev
Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
1 Williams St., Village of Mikhailovskoye 363110, Russia,
Senior Researcher;

Southern Mathematical Institute VSC RAS
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Senior Researcher
E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0001-8573-4721