Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 112–126

УДК 517.538 : 517.574
DOI 10.46698/v3523-1431-1350-j

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С РАВНОМЕРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ИХ РОСТ[#]

Б. Н. Хабибуллин[1,2]

[1] Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112;
[2] Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
Россия, 450077, Уфа, ул. Октябрьской революции, 3 а
E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Посвящается 70-летию профессора А. В. Абанина

Аннотация. Пусть $M = M_{\mathsf{up}} - M_{\mathsf{low}}$ — разность субгармонических функций на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Сначала обсуждается следующая общая задача. Каковы условия на распределение точек Z на $\mathbb{C}$, при которых найдется целая ненулевая функция f, обращающаяся в нуль на Z и удовлетворяющая неравенству $|f| \leqslant e^M$ на $\mathbb{C}$? Из известных результатов для общей задачи приведен критерий из одной из наших работ с соавторами. Следующий шаг — обсуждение частной задачи, когда $M_{\mathsf{up}} = b|\mathrm{Im}|$ — модуль мнимой части с числовым множителем $b \geqslant 0$, а M_{low} — преобразование Пуассона положительной четной функции w на вещественной оси $\mathbb{R}$, возрастающей на положительной полуоси $\mathbb{R}^+$, и с конечным логарифмическим интегралом. Исследование распределений единственности для таких классов целых функций актуально, к примеру, в теории ультрадифференцируемых функций и ультрараспределений. Весьма значительный вклад в эту теорию содержится в ряде фундаментальных работ А. В. Абанина, включающих в себя и его известную монографию. Именно такие классы целых функций возникают после преобразования Фурье — Лапласа пробных функций на компактах. В этом направлении в статье обсуждаются пределы применимости теории Бёрлинга — Мальявена, а также приводится наш с соавторами критерий, но только для нулевой функции $w = 0$. Заключительный основной результат статьи распространяет последний критерий на случаи ненулевой функции $w \neq 0$.

Ключевые слова: целая функция, распределение точек, распределение корней, субгармоническая функция, распределение масс, класс Картрайт, логарифмический интеграл, интеграл Пуассона, ультрадифференцируемая функция, ультрараспределение.

AMS Subject Classification: 30D20, 30D15, 31A05.

Образец цитирования: *Хабибуллин Б. Н.* Распределения единственности для целых функций с равномерными ограничениями на их рост // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 112–126. DOI: 10.46698/v3523-1431-1350-j.

1. Введение. Постановки задач

1.1. Основные начальные определения, обозначения и соглашения. *Пустое множество* обозначаем символом $\emptyset$, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ — множество всех *натуральных чисел*, $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, а $\overline{\mathbb{N}}_0 := \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ — верхнее порядковое пополнение $\mathbb{N}_0$

[#] Исследование выполнено при поддержке Министерства Просвещения Российской Федерации (соглашение № 073-03-2025-039 от 16.01.2025 г.).

со стандартным отношением порядка $\leqslant$ и точной верхней гранью $+\infty := \sup \mathbb{N}_0 \notin \mathbb{N}_0$ с неравенствами $n \leqslant +\infty$ при всех $n \in \overline{\mathbb{N}}_0$. *Множества всех действительных чисел* $\mathbb{R}$ с отношением порядка $\leqslant$ рассматриваем и как *вещественную ось* в *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ с евклидовой нормой-модулем $|z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\Im z)^2}$ и *положительной полуосью* $\mathbb{R}^+ := \bigl\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\bigr\}$. Порядковое пополнение $\mathbb{R}$ верхней и нижней гранями $+\infty := \sup \mathbb{R} = \inf \varnothing \notin \mathbb{R}$ и $-\infty := \inf \mathbb{R} = \sup \varnothing \notin \mathbb{R}$ дает ее *расширение* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ с естественными операциями и исключениями вместе с соглашением $0 \cdot (\pm\infty) := 0 =: (\pm\infty) \cdot 0$, если не оговорено иное. Для величины $x \in \overline{\mathbb{R}}$ через $x^+ := \sup\{0, x\}$ и $x^- := (-x)^+$ обозначаем соответственно *положительную* и *отрицательную часть* x, $|x| := x^+ + x^-$. Кроме того, $\overline{\mathbb{R}}^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{C}_\infty$ — *расширенная* плоскость $\mathbb{C}$ с «бесконечно удаленной точкой» $\infty \notin \mathbb{C} \subset \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Через $D(r) := \bigl\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\bigr\} \subseteq \mathbb{C}$ и $\overline{D}(r) := \bigl\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\bigr\} \subseteq \mathbb{C}_\infty$ обозначаем соответственно *открытый* и *замкнутый круги радиуса* $r \in \overline{\mathbb{R}}$ *с центром в нуле.*

Величины c из $\overline{\mathbb{R}}$ или $\mathbb{C}_\infty$ рассматриваются одновременно и как постоянные функции, обозначаемые тем же символом c. Так, для функции f и некоторой величины c пишем $f = c$ на X, когда f принимает значение c на всем множестве X. Соответственно, $f \neq c$ на X, когда f не принимает значение c хотя бы на одном элементе из X.

Функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ на X *положительная* (соответственно *строго положительная*) на X, если $f(X) \subseteq \overline{\mathbb{R}}^+$ (соответственно $0 \notin f(X) \subseteq \overline{\mathbb{R}}^+$), и *отрицательная* (соответственно *строго отрицательная*) на X, если $f(X) \subseteq -\overline{\mathbb{R}}^+$ (соответственно $0 \notin f(X) \subseteq -\overline{\mathbb{R}}^+$). Функции $f^+\colon x \underset{x\in X}{\longmapsto} (f(x))^+$ и $f^- := (-f)^+$ — соответственно *положительная* и *отрицательная части функции* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ на $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ *возрастающая* (соответственно *строго возрастающая*) на подмножестве $S \subseteq X$, если для любых $x_1, x_2 \in S$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) < f(x_2)$). И f (строго) *убывающая,* если $-f$ (строго) возрастающая.

Функцию $Z\colon S \to \overline{\mathbb{N}}_0$ называем *распределением точек на* множестве точек S с *кратностями* $Z(z) \in \overline{\mathbb{N}}_0$ *точек* $z \in S$ *в* Z. Распределение точек Z *сосредоточено на* некотором *подмножестве* из S, если кратность Z в любой точке вне этого множества равна нулю, и Z сосредоточено *вне* некоторого множества, если кратность Z в любой точке этого множества равна нулю. Если S наделено топологией, то *носитель* $\operatorname{supp} Z$ — замыкание множества точек, где Z сосредоточено, а Z *отделено от* $z \in S$, если $z \notin \operatorname{supp} Z$. Если f — голоморфная на *открытом множестве* $O \subseteq \mathbb{C}$ функция, то распределение точек

$$\operatorname{Zero}_f\colon z \underset{z\in O}{\longmapsto} \sup\left\{p \in \mathbb{R} : \limsup_{z\neq w\to z} \frac{|f(w)|}{|w-z|^p} < +\infty\right\} \in \overline{\mathbb{N}}_0 \tag{1}$$

называем *распределением корней* функции f на O. Распределение корней нулевой функции на O — функция, равная $+\infty$. В случае, когда $D \subseteq \mathbb{C}$ — *область,* т. е. открытое связное множество, существование голоморфной функции $f \neq 0$ на D с распределением корней $\operatorname{Zero}_f = Z$ эквивалентно конечности $Z(D) \subseteq \mathbb{N}_0$ распределения точек Z и дискретности в D его носителя $\operatorname{supp} Z$.

Голоморфная на открытом множестве $O \subseteq \mathbb{C}$ функция f *обращается в нуль на* распределении точек Z на O, *если* $\operatorname{Zero}_f \geqslant Z$ *на* O. Распределение точек Z на O называем *распределением единственности для* некоторого *класса* H *голоморфных на* O *функций,* если любые две голоморфные на O функции $f \in H$ и $g \in H$ с обращающейся в нуль на Z разностью $f - g$ совпадают, т. е. $f = g$ на O. Распределение точек Z на O называем *распределением единственности по* некоторой *функции* $M\colon O \to \overline{\mathbb{R}}$ *на* O, если Z —

распределение единственности для класса всех голоморфных функций, удовлетворяющих неравенству $\ln|f| \leqslant M$ на O. В противном случае распределение точек Z называем соответственно *распределением неединственности* для класса H или по функции M. Так, Z — распределение неединственности по функции M на области D, если и только если найдется голоморфная на D функция $F \neq 0$, которая обращается в нуль на Z и удовлетворяет неравенству $\ln|F| \leqslant M$ на D.

Субгармонической функции $u\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ на области $D \subset \mathbb{C}$ при $u \neq -\infty$ соответствует борелевская конечная на компактах мера [1, гл. 3, п. 3.5], [2, гл. 3, п. 3.7]

$$\varDelta_u := \frac{1}{2\pi}\Delta u, \text{ где } \Delta \text{ — \textit{оператор Лапласа},} \tag{2}$$

действующий в смысле теории обобщенных функциях на D. Меру $\varDelta_u$ называем *риссовским распределением масс* функции u. По определению риссовское распределение масс субгармонической функции $u = -\infty$ на D — это внешняя мера, равная $+\infty$ на любом непустом подмножестве из D. Класс всех субгармонических на $D \subset \mathbb{C}$ функций обозначаем через $\mathsf{sbh}(D)$. Векторное пространство над $\mathbb{C}$ всех голоморфных на открытом подмножестве $O \subseteq \mathbb{C}$ функций обозначаем через $\mathsf{Hol}(O)$.

1.2. Постановка общей задачи и известные критерии для нее. В данной статье рассматривается только случай области $D := \mathbb{C}$ и распределений точек Z на $\mathbb{C}$. Соответственно голоморфные на $D = \mathbb{C}$ функции f *целые* и образуют класс $\mathsf{Hol}(\mathbb{C})$.

Обсуждаемая далее **задача в общей постановке** состоит в следующем. *При каких соотношениях между распределением точек Z на $\mathbb{C}$ и функцией $M\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ распределение точек Z — распределение* (*не*)*единственности по функции M на* $\mathbb{C}$? Саму функцию M в контексте этой общей задачи называем *мажорантой.*

Последние наиболее общие по сравнению с предшествующими решения этой задачи даны в нашей совместной с Ф. Б. Хабибуллиным статье [3] в терминах исключительно распределения точек Z, когда M — разность субгармонических на $\mathbb{C}$ функций. Критерий был получен нами для распределений (не)единственности по функциям

$$M := M_{\mathsf{up}} - M_{\mathsf{low}}, \quad M_{\mathsf{up}} \in \mathsf{sbh}(D), \quad M_{\mathsf{low}} \in \mathsf{sbh}(D), \quad \varDelta_M := \varDelta_{M_{\mathsf{up}}} - \varDelta_{M_{\mathsf{low}}}, \tag{3}$$

заданных или представимых в виде разности субгармонических функций $M_{\mathsf{up}} \neq -\infty$ и $M_{\mathsf{low}} \neq -\infty$ с риссовским распределением *зарядов* $\varDelta_M$. При этом значения $M(z)$ однозначно определены в каждой точке $z \in D$, где $M_{\mathsf{low}}(z) \neq -\infty$. При формулировке теоремы-критерия 1 ниже *удобно полагать* $M(z) := +\infty$ при $M_{\mathsf{low}}(z) = -\infty$.

В $\mathsf{sbh}(\mathbb{C})$ выделим класс всех *положительных субгармонических функций с единичной логарифмической полунормировкой сверху в бесконечно удаленной точке* $\infty \in \mathbb{C}_\infty$ *и нулевым значением в нуле,* обозначаемый и определяемый как

$$\mathsf{Pot}_0^{+1} := \left\{ p \in \mathsf{sbh}(\mathbb{C}) :\ p \geqslant 0 \text{ on } \mathbb{C},\ \limsup_{z\to\infty} \frac{p(z)}{\ln|z|} \leqslant 1,\ p(0) = 0 \right\}. \tag{4}$$

Теорема 1 [3, теорема 3]**.** *Для любого распределения точек Z на $\mathbb{C}$, отделенного от нуля, и каждой функции M из* (3) *при условиях* $M_{\mathsf{low}}(z)(0) \neq -\infty$ *и*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \left(\int_0^{2\pi} M_{\mathsf{up}}\Bigl(z + \frac{1}{(1+P+|z|)^P} e^{i\theta}\Bigr)\, \mathrm{d}\theta - M_{\mathsf{up}}(z) \right) < +\infty \quad \text{\textit{при некотором} } P \in \mathbb{R}^+ \tag{5}$$

следующие три высказывания эквивалентны:

1) Z *— распределение единственности по функции* M.

2) *Для класса* Y *всех функций* $p \in \mathsf{Pot}_0^{+1}$, *для которых* $|\varDelta_M|$*-суммируема функция* $z \underset{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}{\longmapsto} p(1/\bar{z})$, *имеет место равенство*

$$\sup_{p\in Y}\left(\sum_{z\in\mathbb{C}} Z(z)p\Bigl(\frac{1}{\bar{z}}\Bigr)-\int\limits_{\mathbb{C}} p\Bigl(\frac{1}{\bar{z}}\Bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_M(z)\right)=+\infty. \tag{6}$$

3) *При некотором* $0 < R \in \mathbb{R}^+$ *при выборе в роли* Y *класса всех бесконечно дифференцируемых функций* $p \in \mathsf{Pot}_0^{+1}$, *гармонических в дополнении* $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(R)$, *равных нулю на некоторой окрестности нуля и удовлетворяющих условию жесткой логарифмической единичной нормировки* $p(z) = \ln|z| + O\bigl(1/|z|\bigr)$ *при* $z \to \infty$ *вблизи бесконечно удаленной точки, имеет место равенство* (6).

1.3. Функции класса Картрайт и постановка частной задачи. Далее рассматриваются специальные виды функций-мажорант M из (3). Для *целой функции* f величина

$$\mathsf{type}_f := \limsup_{z\to\infty}\frac{\ln^+|f(z)|}{|z|} \in \overline{\mathbb{R}}^+ \tag{7}$$

— ее верхний тип при порядке 1, или просто *тип* целой функции f. Если $\mathsf{type}_f \in \mathbb{R}^+$, то функция f называется *целой функцией конечной степени* [4–5] или *целой функцией экспоненциального типа* [6–10]. Для произвольной функции $u\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ на $\mathbb{C}$

$$\mathsf{type}[u] := \limsup_{z\to\infty}\frac{u^+(z)}{|z|} \in \overline{\mathbb{R}} \tag{8}$$

— (верхний) *тип* (роста) функции u *при порядке* 1 (около $+\infty$), или просто *тип* функции u без упоминания далее порядка 1 [4, 6, 10]. Функция u конечного типа, если $\mathsf{type}[u] \in \mathbb{R}^+$. Так, $\mathsf{type}_f \overset{(8)}{=} \mathsf{type}\bigl[\ln|f|\bigr]$ в обозначении (7), а f — целая функция экспоненциального типа, если и только если $u := \ln|f|$ — субгармоническая функция конечного типа. Интеграл от функции $v\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ вида

$$J[v] := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{v(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

часто называют *логарифмическим интегралом* функции v [7–9]. *Субгармоническую на* $\mathbb{C}$ *функцию* u *конечного типа* $\mathsf{type}[u] < +\infty$ с *конечным логарифмическим интегралом* $J[u^+] \overset{(9)}{<} +\infty$ называем *субгармонической функцией класса Картрайт* [11–16]. Целая функция f экспоненциального типа называется *целой функцией класса Картрайт* [4–6], если $u := \ln|f|$ — функция класса Картрайт, т. е. $J\bigl[\ln^+|f|\bigr] \overset{(9)}{<} +\infty$.

Если для полунепрерывной сверху функции $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ конечен логарифмический интеграл $J\bigl[|w|\bigr] \overset{(9)}{<} +\infty$, то определено полунепрерывное сверху на $\mathbb{C}$ *преобразование Пуассона* $\mathsf{P}w$ такой функции [11–12; 14–16], определяемое как

$$\mathsf{P}w\colon z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\Im z|w(t)}{(\Im z)^2+(\operatorname{Re} z-t)^2}\,\mathrm{d}t & \text{при } z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\\ w(z) & \text{при } z\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{10}$$

Одну из ключевых ролей при исследовании ультрадифференцируемых функций на интервалах в $\mathbb{R}$ играют классы целых функций экспоненциального типа, определяемые при $-\infty < a < b < +\infty$ в обозначениях А. В. Абанина [17; п. 1.5.1], [18; § 4] как

$$\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([a,b]) := \left\{ f \in \mathsf{Hol}(\mathbb{C}) : \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\bigl(h_{[a,b]}(\Im z) - \mathsf{P}w(z)\bigr)} < +\infty \right\}, \tag{11}$$

$$h_{[a,b]} \colon y \underset{y\in\mathbb{R}}{\longmapsto} by^+ - ay^-, \quad h_{[a,b]}(\Im z) \underset{z\in\mathbb{C}}{=} b\Im^+ z - a\Im^- z, \tag{12}$$

$w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ — *положительная четная функция, возрастающая на* $\mathbb{R}^+$, с *конечным логарифмическим интегралом* $J[w] < +\infty$ и со свойством

$$\textit{суперпозиция } w \circ \exp \colon x \underset{x\in\mathbb{R}}{\longmapsto} w(e^x) \quad \textit{выпукла}. \tag{13}$$

Иные специальные свойства функции w из [17, подраздел 1.3] или [18, § 4] не потребуются.

В последующих параграфах решается **общая задача в частном случае**, когда *функция-мажоранта* M из (3) задана или представима в виде разности $M \overset{(3)}{=} M_{\mathsf{up}} - M_{\mathsf{low}}$ специальных субгармонических, как отмечается в леммах 1 и 3 ниже, функций

$$M_{\mathsf{up}} \overset{(12)}{:=} h_{[a,b]} \circ \Im, \quad M_{\mathsf{low}} \overset{(10)}{:=} \mathsf{P}w. \tag{14}$$

Именно такими весовыми функциями и характеризуются классы преобразований Фурье — Лапласа пробных функций — одного из ключевых объектов в теории ультрараспределений для пространств ультрадифференцируемых функций. Эта теория детально изложена и проработана в монографии А. В. Абанина [17] с богатой библиографией и обширным набором классических и его результатов сразу для нескольких переменных.

2. Распределения единственности в рамках теории Бёрлинга — Мальявена

Теория Бёрлинга — Мальявена, разработана в статьях А. Бёрлинга и П. Мальявена [19, 20]. Она развивалась в работах Ж.-П. Кахана [21] и Р. Редхеффера [22], в монографиях Л. де Бранжа [23], П. Кусиса [7–9], В. П. Хавина и Б. Ерикке [5], в нашей [10], а некоторые дополнения к ней — в статьях И. Ф. Красичкова-Терновского [24], нашей [25], Дж. Машреги, Ф. Назарова и В. П. Хавина [26], нашей с Е. Г. Кудашевой [14–16], а также многих других. Часть теории Бёрлинга — Мальявена, связанная с теоремой Бёрлинга — Мальявена о радиусе полноты, может трактоваться как исследование распределений единственности для классов $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([a,b])$ из (11)–(12).

Лемма 1. *Функция-суперпозиция* $h_{[a,b]} \circ \Im$ *обладает следующими свойствами:*

1) $h_{[a,b]} \circ \Im(z) \underset{z\in\mathbb{C}}{=} \sup_{s\in[ia,ib]} \operatorname{Re} s\bar{z}$ — *опорная функция на* $\mathbb{C}$ *отрезка* $[ia,ib] \subset i\mathbb{R}$.

2) $h_{[a,b]} \circ \Im$ — *субгармоническая функция конечного типа*

$$\mathsf{type}[h_{[a,b]} \circ \Im] = \max\{|a|,|b|\} \tag{15}$$

и принадлежит классу Картрайт, поскольку равна нулю на $\mathbb{R}$.

3) *Ее риссовское распределение масс* $\varDelta_{h_{[a,b]}\circ\Im}$ *из* (2) *сосредоточено на* $\mathbb{R}$ *и задается явной линейной функцией распределения на* $\mathbb{R}$

$$t \underset{t\in\mathbb{R}}{\longmapsto} \frac{b-a}{2\pi} t \quad \textit{и равенством} \quad \int\limits_{(c,d)} f \,\mathrm{d}\varDelta_{h_{[a,b]}\circ\Im} = \frac{b-a}{2\pi} \int\limits_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

для любой интегрируемой по Риману функции f *на промежутке* $(c,d) \subset \mathbb{R}$.

$\lhd$ Равенство в п. 1 следует из вида (12) функции $h_{[a,b]}$, которая изначально и определялась в [17, 18] как опорная функция компакта — в данном случае отрезка $[ia, ib] \subset i\mathbb{R}$. Опорная функция компакта — выпуклая функция, а следовательно, и субгармоническая на $\mathbb{C}$, что дает п. 2, где (15) следует из определения (8) типа функции и ее вида (12) в данном случае. В силу гармоничности функции $h_{[a,b]} \circ \Im \overset{(12)}{=} \Im^+ - a\Im^-$ на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ из второй формулы Грина легко следует, что носитель риссовское распределение масс $\varDelta_{h_{[a,b]}\circ\Im}$ лежит на вещественной оси с плотностью, равной согласно (2) деленной на 2π сумме производных по внутренним нормалям к верхней и нижней полуплоскостям на $\mathbb{R}$. Вычисление этих производных по внутренним нормалям, являющихся здесь частными производными по мнимой части комплексного числа, дают (16) из п. 3. $\rhd$

Для функции w на $\mathbb{R}$ можно различными способами определить субгармоническую на $\mathbb{C}$ функцию, сужения которой на $\mathbb{R}$ совпадают с w. Отметим два самых рапространенных. Радиальный вариант такого распространения тривиален.

Лемма 2 [27, предложение 1]**.** *Для четной функции* $w\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ *функция* $z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} w(|z|)$ *субгармоническая, если и только если* w *возрастающая на* $\mathbb{R}^+$ *и имеет место* (13).

Замечание 1. Функции с выпуклой суперпозицией (13), особенно в контексте леммы 2, часто называют функциями, выпуклыми относительно логарифма ln. Последние можно определять как всевозможные суперпозиции выпуклых функций с функцией ln. Из элементарных свойств выпуклых функций следует, что функция w при условии (13) обладает всюду левыми и правыми производными и существует такое счетное $N_w \subset \mathbb{R}$, что функция w дифференцируема на $\mathbb{R}\setminus N_w$.

Лемма 3 ([17, п. 1.4], [18, § 4], [12, теорема 4])**.** *Если* $w\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ *— четная функция, равная нулю в окрестности нуля, возрастающая на* $\mathbb{R}^+$*, с выпуклой функцией-суперпозицией* $w\circ\exp$ *из* (13) *и конечным логарифмическим интегралом* $J[w] < +\infty$*, то преобразование Пуассона* $\mathsf{P}w$ *этой функции* w *обладает следующими свойствами:*

1) $\mathsf{P}w$ *— субгармоническая на* $\mathbb{C}$ *функция, гармоническая на* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.
2) $\mathsf{P}w$ *нулевого типа* $\mathsf{type}[\mathsf{P}w] = 0$.
3) *Симметричность* $\mathsf{P}w(\pm z) \underset{z\in\mathbb{C}}{=} \mathsf{P}w(\bar z)$ *относительно* $\mathbb{R}$ *и* $i\mathbb{R}$.
4) *Риссовское распределение масс* $\varDelta_{\mathsf{P}w}$ *сосредоточено на* $\mathbb{R}$ *с функцией распределения*

$$\varDelta_w^{\mathbb{R}}\colon x \longmapsto \frac{x}{\pi^2}\mathtt{PV}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{w(t)}{t(t-x)}\,\mathrm{d}t \quad \text{в каждой точке } x\in\mathbb{R}\setminus N_w, \tag{17}$$

где главное значение $\mathtt{PV}\int$ *определено всюду на* $\mathbb{R}\setminus N_w$ *для счетного* $N_w\subset\mathbb{R}$,

$$\varDelta_w^{\mathbb{R}}(x) := \inf_{x<t\in\mathbb{R}\setminus N_w}\varDelta_w^{\mathbb{R}}(t) \quad \text{в каждой точке } x\in N_w, \tag{18}$$

а функция распределения $\varDelta_w^{\mathbb{R}}$ *возрастающая непрерывная справа нечетная на* $\mathbb{R}$.

Распределение точек Z на $\mathbb{C}$ удовлетворяет *условию Бляшке вне* $\mathbb{R}$ [10–16], если

$$\sum_{|z|\geqslant 1} Z(z)\Bigl|\Im\frac{1}{z}\Bigr| < +\infty. \tag{19}$$

Распределению точек Z *на* $\mathbb{C}$ сопоставим возрастающую на $\mathbb{R}$ *функцию* ее *распределения*

$$Z^{\mathbb{R}}\colon x \underset{0\neq x\in\mathbb{R}}{\longmapsto} \frac{x}{|x|}\sum_{\left|z-\frac{x}{2}\right|\leqslant\frac{|x|}{2}} Z(z) + \frac{x^+}{|x|}Z(0), \quad Z^{\mathbb{R}}(0) := Z(0),$$

на $\mathbb{R}$ *по расширяющимся кругам с центрами на* $\mathbb{R}$ *и касающимся мнимой оси в нуле.*

Следуя аналогии с [20], [19, предложение 3.4], распределение точек Z на $\mathbb{C}$ *внешней плотности Кахана не больше* $c \in \mathbb{R}^+$, если выполнено *условию Бляшке* (19) *вне* $\mathbb{R}$ и найдется *возрастающая липшицева функция* $k\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с липшицевой постоянной

$$\sup_{\substack{x_1,x_2\in\mathbb{R},\\ x_1\neq x_2}} \frac{k(x_2)-k(x_1)}{x_2-x_1}<+\infty$$

не большей, чем c, для которой *конечен логарифмический интеграл* $J\bigl[|Z^{\mathbb{R}}-k|\bigr]<+\infty$. Точная нижняя грань таких c — это *внешняя плотность Кахана* $\overline{\mathrm{Kah}}(Z)$ для Z.

Если распределение точек Z на $\mathbb{C}$ сосредоточено на счетном носителе $\operatorname{supp} Z$ и конечно в каждой точке, то оно допускает *нумерацию,* а именно: сначала выбор подмножества целых чисел $N\subset\mathbb{Z}:=\mathbb{N}_0\cup(-\mathbb{N})$, а затем конструкция специальной функции из N в $\mathbb{C}$ в виде построения *последовательности* $(z_n)_{n\in N}$ *комплексных чисел,* где каждое число $z\in\mathbb{C}$ повторяется ровно $Z(z)$ раз. Мощность выбора таких нумераций даже континуум, если носитель $\operatorname{supp} Z$ бесконечен. При этом для каждой нумерации Z и всякого $S\subset\mathbb{C}$ и функции $f\colon S\to\overline{\mathbb{R}}$ или $f\colon S\to\mathbb{C}$ имеет место равенство

$$\sum_{z\in S} Z(z)f(z)=\sum_{z_n\in S} f(z_n), \tag{20}$$

когда сумма справа или слева в (20) корректно определена. Если для Z существует некоторая нумерация $(z_n)_{n\in N}$ на $\mathbb{C}$, для которой можно подобрать число $c\in\mathbb{R}^+$ и *последовательность попарно различных целых чисел* $(m_n)_{n\in N}$ с конечной суммой

$$\sum_{n\in N}\left|\frac{1}{z_n}-\frac{c}{m_n}\right|<+\infty,$$

то *внешняя плотность Редхеффера от* Z *вдоль* $\mathbb{R}$ не превышает числа c [10, 16, 22, 24, 25], а сама она равна точной нижней грани таких чисел $c\in\mathbb{R}^+$. *Внешнюю плотность Р. Редхеффера для* Z далее обозначаем как $\overline{\mathrm{Red}}(Z)$.

Лемма 4 [16, 21, 22, 25]**.** *Внешние плотности Кахана и Редхеффера совпадают.*

Теорема 2. *Если длина* $b-a$ *отрезка* $[a,b]$ *строго меньше* $2\pi\overline{\mathrm{Kah}}(Z)=2\pi\overline{\mathrm{Red}}(Z)$, *то* Z *— распределение единственности для класса* $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([a,b])$, *а если* $b-a$ *строго больше* $2\pi\overline{\mathrm{Kah}}(Z)=2\pi\overline{\mathrm{Red}}(Z)$, *то* Z *— распределение неединственности для класса* $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([a,b])$.

$\lhd$ Распределение (не)единственности Z для $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([a,b])$ остается таковым при любом сдвиге отрезка $[a,b]$ вдоль вещественной оси. Поэтому достаточно рассматривать лишь случай $b>0$, т. е. $a=-b$ и $b-a=2b$. Докажем сначала вторую часть.

Пусть $2b>2\pi\overline{\mathrm{Kah}}(Z)=2\pi\overline{\mathrm{Red}}(Z)$. По теореме Бёрлинга — Малявена о радиусе полноты [7–10, 20–26], сформулированной в терминах целых функций, это означает существование целой ненулевой функции $f\neq 0$ эспоненциального типа $\mathsf{type}_f<b$, ограниченной на $\mathbb{R}$ и обращающейся в нуль на Z. При этом по субгармонической версии [14–15, теорема 1] теоремы Бёрлинга — Малявена о мультипликаторе [7–9, 20, 26] для субгармонической функции $\mathsf{P}w$ нулевого типа $\mathsf{type}[\mathsf{P}w]=0$ найдется целая функция h экспоненциального типа $\mathsf{type}_h<b-\mathsf{type}_f$, ограниченная на $\mathbb{R}$, для которой ограничена сверху на $\mathbb{R}$ субгармоническая функция $\mathsf{P}w+\ln|h|$ типа $\mathsf{type}\bigl[\mathsf{P}w+\ln|h|\bigr]\leqslant\mathsf{type}[\mathsf{P}w]+\mathsf{type}\bigl[\ln|h|\bigr]<b-\mathsf{type}_f$. Следовательно, сумма трех субгармонических функций $\ln|f|+\mathsf{P}w+\ln|h|$ ограничена сверху на $\mathbb{R}$ и представляет собой функцию класса Картрайт типа

$$\mathsf{type}\bigl[\ln|f|+\mathsf{P}w+\ln|h|\bigr]\leqslant\mathsf{type}\bigl[\ln|f|\bigr]+\mathsf{type}\bigl[\mathsf{P}w+\ln|h|\bigr]<\mathsf{type}_f+(b-\mathsf{type}_f)=b.$$

Отсюда для субгармонической функции $\ln|f|+\mathsf{P}w+\ln|h|$ класса Картрайт в силу ограниченности сверху этой суммы на $\mathbb{R}$ для некоторой постоянной $C\in\mathbb{R}$ имеет место неравенство $\ln|f|+\mathsf{P}w+\ln|h|\leqslant b|\Im|+C$ на $\mathbb{C}$. Следовательно, для целой функции $F:=fh\neq 0$, обращающейся в нуль на $\mathrm{Zero}_f\geqslant Z$, имеем $\ln|F|+\mathsf{P}w\leqslant b|\Im|+C$. Таким образом, сконструирована ненулевая целая функция $F\in\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([-b,b])$, обращающаяся в нуль на Z. Это значит, что Z — распределение неединственности для $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([-b,b])$.

Пусть теперь $2b<2\pi\overline{\mathrm{Kah}}(Z)=2\pi\overline{\mathrm{Red}}(Z)$ и целая функция $f\in\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([-b,b])$ обращается в нуль на Z. Тогда тем более $f\in\mathscr{H}_0([-b,b])$ с нулевой вместо исходной w функцией. По упоминавшейся выше классической теореме Бёрлинга — Малявена о радиусе полноты целая функция f — нулевая. Следовательно, Z — распределение неединственности для пространства $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([-b,b])$ в этом рассматриваемом случае $b<\pi\overline{\mathrm{Kah}}(Z)$. ▷

Замечание 2. В случае совпадения длины $b-a$ с умноженными на 2π внешними плотностями Кахана $\overline{\mathrm{Kah}}(Z)$, Редхеффера $\overline{\mathrm{Red}}(Z)$ или иными, равными им из [7–9], [20–25], возможна любая ситуация, даже при нулевой функции $w=0$, поскольку эти плотности не меняются при изменении значений распределения точек Z на конечные натуральные числа в конечном числе точек. Более того, эти внешние плотности не меняются даже при прибавлении к Z любого распределения точек Z_0 с конечной суммой

$$\sum_{z\in\mathbb{C}}\frac{Z_0(z)}{|z|}<+\infty, \tag{21}$$

как и при вычитании из Z распределения точек $Z_0\leqslant Z$ с ограничением (21). Следовательно, такие внешние плотности распределений точек Z не могут дать полное описание распределений (не)единственности даже для пространства $\mathscr{H}_0([a,b])$ с нулевой функцией $w=0$ на $\mathbb{R}$. Поэтому необходимо привлечение иных, уже гораздо более тонких характеристик распределений точек Z, которые должны «чувствовать» изменение значений распределения точек Z на единицу даже в одной точке. Этот пробел был ликвидирован в наших работах [11, 12]. Результаты их полностью решают частную задачу для пространства $\mathscr{H}_0([a,b])$ с нулевой функцией $w=0$ на $\mathbb{R}$ и соответственно $\mathsf{P}w=0$ на $\mathbb{C}$. Пространства $\mathscr{H}_0([a,b])$ часто назывались *пространствами Бернштейна,* представляющими собой вариант равномерных пространств Пэли — Винера.

3. Случай субгармонической мажоранты класса Картрайт и критерий для пространств Бернштейна

Будут приведены критерии распределения единственности для пространств $\mathscr{H}_0([a,b])$ и, более общо, по субгармоническим функциям-мажорантам M класса Картрайт, когда в $M\overset{(3)}{:=}M_{\mathsf{up}}-M_{\mathsf{low}}$ вычитаемая функция M_{low} *нулевая на* $\mathbb{C}$, а функция M_{up} — субгармоническая функция класса Картрайт. Для формулировки этих критериев потребуются специальные классы тестовых, или пробных, функций на $\mathbb{R}$. В [12, п. 1.3.2] класс тестовых функций $\mathscr{P}_0$ определяется как множество всех *полунепрерывных сверху на* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *положительных функций* $v\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^+$ со следующими тремя свойствами:

1) *Финитность,* состоящая в существовании для каждой из функций v какого-нибудь отрезка $[-R_v,R_v]\subset\mathbb{R}$, для которого v равна нулю на его дополнении $\mathbb{R}\setminus[-R_v,R_v]$.

2) *Логарифмическая единичная полунормировка сверху вблизи нуля*

$$\limsup_{0\neq x\to 0}\frac{v(x)}{-\ln|x|}\leqslant 1. \tag{22}$$

3) При любом $x\in\mathbb R\setminus\{0\}$ найдется число $r_x\in\bigl(0,|x|\bigr]$, для которого выполнено *неравенство об интегральном логарифмическом среднем*

$$v(x)\leqslant\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}v(x+t)\ln\Bigl|\frac{t+r}{t-r}\Bigr|\frac{\mathrm dt}{t}\quad\text{при всех } x\in\mathbb R\setminus\{0\} \text{ и } r\in(0,r_x). \tag{23}$$

В [12, п. 1.3.2] класс $\mathscr P_0$ обозначался как $R\mathscr P_0$.

Для определения более узких классов тестовых функций напомним определение преобразования Гильберта функций в необходимой нам форме.

Если для непрерывно дифференцируемой функции v на $\mathbb R\setminus\{0\}$ с возможной единственной логарифмической особенностью в нуле сходится (суммируем) интеграл

$$J_1\bigl[v|\bigr]:=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|v(t)|}{1+|t|}\mathrm dt,$$

то *прямое преобразование Гильберта* $\mathsf Hv$ функции v определяется как

$$\mathsf Hv\colon x\underset{x\in\mathbb R\setminus\{0\}}{\longmapsto}\frac1\pi\,\mathsf{PV}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{x-t}\mathrm dt:=\frac1\pi\lim_{0<\varepsilon\to0}\int\limits_{\{t\in\mathbb R\colon\,|t-x|>\varepsilon\}}\frac{v(t)}{x-t}\mathrm dt,\quad x\in\mathbb R\setminus\{0\}, \tag{24}$$

где в промежуточном равенстве $\mathsf{PV}\int$ — *главное значение интеграла в смысле Коши. Обратное преобразование Гильберта* отличается от прямого (24) только знаком:

$$(\mathsf H^{-1}v)(x):=\frac1\pi\,\mathsf{PV}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{t-x}\mathrm dt=(-\mathsf Hv)(x),\qquad\text{для всех } x\in\mathbb R\setminus\{0\}. \tag{25}$$

Как обычно, для открытого $O\subseteq\mathbb R$ и $1\leqslant m\in\overline{\mathbb N}_0$ через $C^m(O)$ обозначаем класс всех m раз непрерывно дифференцируемых на O функций.

При $2\leqslant m\in\overline{\mathbb N}_0$ через $\mathscr P_0^m$ обозначаем, несколько упрощая обозначение из [11, определение 1], класс всех положительных функций $v\in C^m\bigl(\mathbb R\setminus\{0\}\bigr)$, финитных в отмеченном выше в п. 1 смысле и с логарифмической единичной нормировкой вблизи нуля (22), для которых *обратное преобразование Гильберта* (25) *возрастает как на положительной открытой полуоси* $\mathbb R^+\setminus 0$, *так и на отрицательной* $-\mathbb R^+\setminus 0$. Для этих тестовых классов имеет место равенство и цепочка включений [12; предложение 1]

$$\mathscr P_0\cap C^\infty\bigl(\mathbb R\setminus\{0\}\bigr)=\mathscr P_0^\infty\subset\dots\subset\mathscr P_0^3\subset\mathscr P_0^2\subset\mathscr P_0. \tag{26}$$

Теорема 3 ([11, теорема 1], [12, основная теорема]). *Пусть M — субгармоническая функция класса Картрайт типа $\mathsf{type}[M]$, гармоническая на $\mathbb C\setminus\mathbb R$, равная нулю на некоторой окрестности нуля, а также $M(z)=M(\bar z)$ при всех $z\in\mathbb C$. Если для некоторого положительного числа $\varepsilon>0$ конечна точная верхняя грань*

$$\sup_{|\Im z|\leqslant\varepsilon}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}M(z+\varepsilon e^{i\theta})\mathrm d\theta-M(z)\right)<+\infty,$$

то для любого распределения точек Z с $0\notin\operatorname{supp}Z$ равносильны три высказывания:

1) *Z — распределение единственности по функции M.*

2) *Для самого широкого в (26) тестового класс $X := \mathscr{P}_0$ выполняется соотношение*

$$\sup_{v\in X}\left(\sum_{z\in\mathbb{C}} Z(z)\mathsf{P}v(z) - c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(t)\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathbb{R}}(t)\right) = +\infty, \tag{27}$$

где $\varDelta_M^{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — возрастающая непрерывная справа функция распределения на $\mathbb{R}$ риссовского распределения масс $\varDelta_M$, сосредоточенного на $\mathbb{R}$, определяемая по правилу (см. [12, теорема 4, модификация п. 3ii])

$$\varDelta_M^{\mathbb{R}}\colon x \longmapsto \frac{\mathsf{type}[M]}{\pi}x + \frac{x}{\pi^2}\mathsf{PV}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{M(t)}{t(t-x)}\mathrm{d}t \quad \text{в каждой точке } x\in\mathbb{R}\setminus N_M, \tag{28}$$

где главное значение $\mathsf{PV}\int$ определено всюду на $\mathbb{R}\setminus N_M$ для счетного $N_M\subset\mathbb{R}$,

$$\varDelta_M^{\mathbb{R}}(x) := \inf_{x<t\in\mathbb{R}\setminus N_M}\varDelta_M^{\mathbb{R}}(t) \quad \text{в каждой точке } x\in N_M. \tag{29}$$

3) *Для самого узкого тестового класса $X := \mathscr{P}_0^\infty$ из (26) выполнено (27).*

Пример 1. Функция $M := h_{[-b,b]}\circ\Im$ из леммы 1 удовлетворяет условиям теоремы 3. В частности, из теоремы 3, используя зависимость распределений единственности для пространств $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([a,b])$ только от длины $b-a$ отрезка $[a,b]$ и лемму 1 с п. 2 и формулой (16), соответствующей формулам (28)–(29), легко получаем

Следствие 1. *Для любого распределения точек Z при $0\notin \operatorname{supp} Z$ равносильны следующие три высказывания:*

1) *Z — распределение единственности для пространства $\mathscr{H}_0([a,b])$.*

2) *Для наибольшего по включению в (26) класса $X := \mathscr{P}_0$ выполняется соотношение*

$$\sup_{v\in X}\left(\sum_{z\in\mathbb{C}} Z(z)\mathsf{P}v(z) - \frac{b-a}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(t)\mathrm{d}t\right) = +\infty. \tag{30}$$

3) *Для наименьшего по включению в (26) класса $X := \mathscr{P}_0^\infty$ выполнено (30).*

Замечание 3. В нашей краткой обзорной заметке [16] заключительный результат [16; теорема 9] и вытекающее из него [16; следствие 10] сформулированы некорректно. Приведенное здесь следствие 1 исправляет эту погрешность. При этом заключительная пара некорректных утверждений из [16] формулировалась как некоторая трактовка верных основных результатов наших работ [15–16]. В переводной версии [28] краткого обзора [16] эти заключительные результаты из [16] также будут скорректированы.

4. Критерий распределения единственности для пространств $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}\bigl([a,b]\bigr)$

Теорема 4. *Если Z — распределение точек на $\mathbb{C}$, отделенное от нуля, выбраны $-\infty<a<b<-\infty$ и $w\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ — четная функция, возрастающая на $\mathbb{R}^+$ и равная нулю в окрестности нуля, с выпуклой суперпозицией $w\circ\exp$ из (13) и конечным логарифмическим интегралом $J[w]<+\infty$, то равносильны следующие три высказывания:*

1) *Z — распределение единственности для пространства $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}\bigl([a,b]\bigr)$.*

2) *Для более широкого, чем класс* $\mathscr{P}_0$, *класса* X *положительных полунепрерывных сверху на* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *функций* v *с предельным значением* $\lim_{|t|\to\infty} v(t)=0$, *с логарифмическая единичной полунормировкой* (22) *вблизи нуля, удовлетворяющих неравенству об интегральном логарифмическом среднем* (23) *на* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *с функцией распределения* $\varDelta^{\mathbb{R}}_{\mathsf{P}w}$, *определенной равенствами* (17)–(18), *выполнено соотношение*

$$\sup_{v\in X}\left(\sum_{z\in\mathbb{C}} Z(z)\mathsf{P}v(z)-\frac{b-a}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}\varDelta^{\mathbb{R}}_{\mathsf{P}w}(t)\right)=+\infty, \tag{31}$$

где точная верхняя грань рассматривается только по тем функциям $v\in X$, *для которых конечны оба интеграла в левой части* (31).

3) *Для более узкого, чем класс* $\mathscr{P}_0^\infty$, *класса* X *всех положительных на* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *бесконечно дифференцируемых функций* v, *равных нулю вне некоторого отрезка* $[-R_v,R_v]$, *с жесткой логарифмическая единичной нормировкой вблизи нуля*

$$\bigl|v(x)+\ln|x|\bigr|=O(1)\quad \textit{при } 0\neq|x|\to 0 \tag{32}$$

и с обратным преобразованием Гильберта $\mathsf{H}^{-1}v\overset{(25)}{=}-\mathsf{H}v$, *возрастающим как на положительной* $\mathbb{R}^+\setminus 0$, *так и на отрицательной* $-\mathbb{R}^+\setminus 0$ *полуосях, выполнено* (31).

$\lhd$ Очевидно, функция $M_{\mathsf{up}}:=h_{[a,b]}\circ\Im=b\Im^+-a\Im^-$ удовлетворяет условию (5) теоремы 1 при выборе, к примеру, $P:=1$. Распределения масс субгармонических функций $M_{\mathsf{up}}:=h_{[a,b]}\circ\Im$ и $M_{\mathsf{low}}:=\mathsf{P}w$ задаются функциям распределений на $\mathbb{R}$, явно определенными соответственно в (16) и (17)–(18). При этом для функций V на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ имеют место равенства

$$\int_{\mathbb{C}} V\,\mathrm{d}\varDelta_{M_{\mathsf{up}}}\overset{(16)}{=}\frac{b-a}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}V(t)\,\mathrm{d}t,\qquad \int_{\mathbb{C}} V\,\mathrm{d}\varDelta_{\mathsf{P}w}\overset{(17)}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}V(t)\,\mathrm{d}\varDelta^{\mathbb{R}}_{\mathsf{P}w}(t), \tag{33}$$

когда интегралы от функции V корректно определены и конечны.

Преобразование инверсии переменной $z\mapsto 1/\bar z$ сохраняет субгармоничность. В теореме 1 от функций p перейдем к функциям $V\colon z\mapsto p(1/\bar z)$. При этом суммируемость по полной вариации $|\varDelta_M|$ риссовского распределения зарядов разности M субгармонических на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функций V обеспечивается конечностью суммы интегралов

$$\frac{b-a}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}V(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}V(t)\,\mathrm{d}\varDelta^{\mathbb{R}}_{\mathsf{P}w}(t)<+\infty. \tag{34}$$

Тогда эквивалентности $1\Leftrightarrow 2\Leftrightarrow 3$ теоремы 1 при $M_{\mathsf{up}}:=h_{[a,b]}\circ\Im$ и $M_{\mathsf{low}}:=\mathsf{P}w$ запишутся с учетом равенств (33) как равносильность следующих трех высказываний:

1) Z — распределение единственности для пространства $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}\bigl([a,b]\bigr)$.

2) Для класса Y всех субгармонических положительных на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функций V с логарифмической единичной полунормировкой сверху вблизи нуля

$$\limsup_{0\neq z\to 0}\frac{V(z)}{-\ln|z|}\leqslant 1,$$

для которых конечна сумма двух интегралов (34), имеет место равенство

$$\sup_{V\in Y}\left(\sum_{z\in\mathbb{C}} Z(z)V(z)-\frac{b-a}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} V(t)\,\mathrm{d}t+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} V(t)\,\mathrm{d}\Delta^{\mathbb{R}}_{\mathsf{P}w}(t)\right)=+\infty. \tag{35}$$

3) При некотором $0<r\in\mathbb{R}^+$ при выборе в роли Y класса всех бесконечно дифференцируемых субгармонических на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функций $V\geqslant 0$, гармонических в проколотом круге $D(r)\setminus\{0\}$, равных нулю вне некоторого круга радиуса, зависящего от V, с жесткой логарифмической единичной нормировкой вблизи нуля, определяемой как $\sup_{0<|z|<r}\bigl|V(z)+\ln|z|\bigr|<+\infty$, имеет место равенство (35).

В этой частной версии теоремы 1 в п. 2–3 используются лишь сужения функций V на вещественную ось. В наших работах [11, 12], и прежде всего в части [12, §§ 3–4], дается детальное полное описанию сужений на $\mathbb{R}$ субгармонических функций класса Картрайт и потенциалов Йенсена с полюсом в нуле, определения которых здесь не приводим. Отметим лишь, что функции V из п. 2 — это пределы возрастающих последовательностей потенциалов Йенсена с полюсом в нуле, а функции V из п. 3 — это частные случаи таких потенциалов Йенсена. На этой основе простой анализ такого соответствия между классами функций V из п. 2–3 показывает, что сужения на $\mathbb{R}$ функций V из классов Y в п. 2 — это в точности функции v из класса X в п. 2 теоремы 4, а сужения на $\mathbb{R}$ функций V из класса Y в п. 3 образуют даже более узкий класс, нежели класс X из п. 3 теоремы 4. Это соответствие и завершает доказательство теоремы 4. $\triangleright$

Замечание 4. Для используемых в теореме 1 классов функций v конечность первого интеграла в (34) уже влечет конечность второго. Доказательство этого факта здесь опускаем, поскольку он представляет собой очень частный случай довольно общего результата об интегралах по риссовским распределениям масс субгармонических функций класса Картрайт и других классов, который будет рассмотрен в ином месте. Следовательно, в заключающей части п. 2 точную верхнюю грань допускается рассматривать по тем функциям $v\in X$, для которых суммируем первый интеграл в левой части (31).

Замечание 5. При $w=0$ теорема 4 также развивает и усиливает следствие 1, расширяя класс тестовых функций v в п. 2 следствия 1 и сужая его в п. 3 следствия 1.

Благодарность. В заключение выражаю глубокую признательность рецензенту за ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению изложения и уточнению отдельных деталей.

Литература

1. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции.—М.: Мир, 1980.—304 с.
2. *Ransford Th.* Potential Theory in the Complex Plane.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.—232 p.
3. *Khabibullin B. N., Khabibullin F. B.* Necessary and sufficient conditions for zero subsets of holomorphic functions with upper constraints in planar domains // Lobachevskii J. Math.—2021.—Vol. 42, № 4.—P. 800–810. DOI: 10.1134/S1995080221040120.
4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: ГИТТЛ, 1956.—632 с.
5. *Havin V., Jöricke B.* The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis.—Berlin: Springer-Verlag, 1994.—xii+543 p.
6. *Levin B. Ja.* Lectures on Entire Functions.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996.—248 p.—(Translations of Mathematical Monographs; Vol. 150).
7. *Koosis P.* The Logarithmic Integral. I.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.—574 p.—(Cambridge Stud. Adv. Math.; Vol. 12).
8. *Koosis P.* The Logarithmic Integral. II.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.—606 p.—(Cambridge Stud. Adv. Math.; Vol. 21).

9. *Koosis P.* Leçons sur le Théorème de Beurling et Malliavin.—Montréal, QC: Les Publications CRM, 1996.—230 p.
10. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности.—Уфа. РИЦ БашГУ, 2012.—192 с.—URL: matem.anrb.ru/sites/default/files/userfiles/u35721/expkhbn.pdf.
11. *Хабибуллин Б. Н., Талипова Г. Р., Хабибуллин Ф. Б.* Подпоследовательности нулей для пространств Бернштейна и полнота систем экспонент в пространствах функций на интервале // Алгебра и анализ.—2014.—Т. 26, № 2.—С. 185–215.
12. *Байгускаров Т. Ю., Талипова Г. Р., Хабибуллин Б. Н.* Подпоследовательности нулей для классов целых функций экспоненциального типа, выделяемых ограничениями на их рост // Алгебра и анализ.—2016.—Т. 28, № 2.—С. 1–33.
13. *Хабибуллин Б. Н., Шмелева А. В.* Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей. I. Классический случай // Алгебра и анализ.—2019.—Т. 31, № 1.—С. 156–210.
14. *Хабибуллин Б. Н., Кудашева Е. Г.* Субгармонические дополнения к теоремам Бёрлинга — Мальявена. I. О мультипликаторе // Математика и теоретические компьютерные науки.—2023.—Т. 1, № 3.—С. 59–76.
15. *Khabibullin B. N., Kudasheva E. G.* Subharmonic Additions to the Beurling–Malliavin Theorems. I. On the Multiplier // Lobachevskii J. Math.—2024.—Vol. 45, № 4.—P. 1866–1874. DOI:10.1134/S1995080224601395.
16. *Хабибуллин Б. Н., Кудашева Е. Г.* Субгармонические дополнения к теоремам Бёрлинга — Мальявена. II. О радиусе полноты // Математика и теоретические компьютерные науки.—2023.—Т. 1, № 4.—P. 105–117. DOI: 10.26907/2949-3919.2023.4.105-117.
17. *Абанин А. В.* Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения.—М.: Наука, 2007.—222 с.
18. *Абанин А. В.* Ω-ультрараспределения // Изв. РАН. Сер. матем.—2008.—Т. 72, № 2.—С. 3–38. DOI: 10.4213/im1147.
19. *Beurling A., Malliavin P.* On Fourier transforms of measures with compact support // Acta Math.—1962.—Vol. 107.—P. 291–309. DOI: 10.1007/BF02545792.
20. *Beurling A., Malliavin P.* On the closure of characters and the zeros of entire functions // Acta Math.—1967.—Vol. 118.—P. 79–93. DOI: 10.1007/BF02392477.
21. *Kahane J.-P.* Travaux de Beurling et Malliavin // Séminaire Bourbaki (14e année, 1961/62, exposés 223–240, Talk no. 225).—1962.—№ 7.— P. 27–39.
22. *Redheffer R. M.* Completeness of sets of complex exponentials // Adv. Math.—1977.—Vol. 24.—P. 1–62.
23. *de Branges L.* Hilbert Spaces of Entire Functions.—Englewood Cliffs. N. J.: Prentice-Hall, 1968.
24. *Красичков-Терновский И. Ф.* Интерпретация теоремы Бёрлинга — Мальявена о радиусе полноты // Матем. сборник.—1989.—Т. 180, № 3.—С. 397–423.
25. *Хабибуллин Б. Н.* Неконструктивные доказательства теоремы Бёрлинга — Мальявена о радиусе полноты и теоремы неединственности для целых функций // Известия РАН. Серия матем.—1994.—Т. 58, № 4.—С. 125–148.
26. *Машреги Дж., Назаров Ф. Л., Хавин В. П.* Теорема Бёрлинга — Мальявена о мультипликаторе: седьмое доказательство // Алгебра и анализ.—2005.—Т. 17, № 5.—С. 3–68.
27. *Khabibullin B. N., Tamindarova N. R.* Subharmonic test functions and the distribution of zero sets of holomorphic functions // Lobachevskii J. Math.—2017.—Т. 38, № 1.—С. 38–43. DOI: 10.1134/S1995080217010115.

Статья поступила 24 октябрь 2024 г.

Хабибуллин Булат Нурмиевич
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112;

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
профессор кафедры математики и статистики
РОССИЯ, 450077, Уфа, ул. Октябрьской революции, 3 а
E-mail: khabib-bulat@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-1308-4461

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 112–126

UNIQUENESS DISTRIBUTIONS FOR ENTIRE FUNCTIONS WITH UNIFORM CONSTRAINTS ON THEIR GROWTH

Khabibullin, B. N.[1,2]

[1] Institute of Mathematics with Computing Centre
of the Ufa Federal Research Centre of RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia;
[2] Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla,
3 a October Revolution St., Ufa 450077, Russia

E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Abstract. Let $M = M_{\mathsf{up}} - M_{\mathsf{low}}$ be the difference of subharmonic functions on the complex plane $\mathbb{C}$. First, we discuse the following general problem: What are the conditions for the distribution of points Z on $\mathbb{C}$, under which there is an entire nonzero function f that vanishes on Z and satisfies the inequality $|f| \leqslant e^M$ on $\mathbb{C}$? We formulate some known results for the general problem from one of our papers with co-authors. The next step is to discuss a specific problem of when $M_{\mathsf{up}} = b|\mathrm{Im}|$ is the module of the imaginary part with a numerical multiplier $b \geqslant 0$, and M_{low} is the Poisson transformation of a positive even function w on the real axis $\mathbb{R}$, increasing on the positive semi-axis $\mathbb{R}^+$, and with a finite logarithmic integral. A very significant contribution to this theory is contained in a number of fundamental works by A. V. Abanin, including his known monograph. It is precisely such classes of entire functions that arise after the Fourier–Laplace transform of test functions on compacts. In this direction, the article discusses the limits of applicability of the Beurling–Malliavin theory, and also provides our criterion with co-authors, but only for the zero function $w = 0$. The final main result of the article extends the last criterion to the cases of a nonzero function $w \neq 0$.

Keywords: entire function, point distribution, zero distribution, subharmonic function, mass distribution, Cartwright class, logarithmic integral, Poisson integral, ultradifferentiable function, ultradistribution.

AMS Subject Classification: 30D20, 30D15, 31A05.

For citation: *Khabibullin, B. N.* Uniqueness Distributions for Entire Functions with Uniform Constraints on Their Growth, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 112–126. (in Russian). DOI: 10.46698/v3523-1431-1350-j.

References

1. *Hayman, W. and Kennedy, P. Subharmonic Functions, Vol.* 1, London Mathematical Society Monographs, no. 9, London, Academic Press, 1976, xvii+284 p.
2. *Ransford, Th. Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge, Cambridge University Press, 1995, 232 p.
3. *Khabibullin, B. N. and Khabibullin, F. B.* Necessary and Sufficient Conditions for Zero Subsets of Holomorphic Functions with Upper Constraints in Planar Domains, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, no. 4, pp. 800–810. DOI: 10.1134/S1995080221040120.
4. *Levin, B. Ja. Distribution of Zeros of Entire Functions*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 5, Providence, RI, American Mathematical Society, 1980.
5. *Havin, V. and Jöricke, B. The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*, Berlin, Springer-Verlag, 1994, xii+543 p.
6. *Levin, B. Ja. Lectures on Entire Functions*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 150, Providence, RI, American Mathematical Society, 1996, 248 p.
7. *Koosis, P. The Logarithmic Integral. I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 12, Cambridge, Cambridge University Press, 1988, 574 p.
8. *Koosis, P. The Logarithmic Integral. II*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 21, Cambridge, Cambridge University Press, 1992, 606 p.
9. *Koosis, P. Leçons sur le Théorème de Beurling et Malliavin*, Montréal, QC, Les Publications CRM, 1996, 230 p.

10. *Khabibullin, B. N. Polnota sistem e'ksponent i mnozhestva edinstvennosti* [Completeness of exponential systems and sets of uniqueness], Ufa, Bashkir State University, 2012, 192 p. (in Russian).
11. *Khabibullin, B. N., Talipova, G. R. and Khabibullin, F. B.* Zero Subsequences for Bernsteins Spaces and the Completeness of Exponential Systems in Spaces of Functions on an Interval, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2015, vol. 26, no. 2, pp. 319–340. DOI: 10.1090/S1061-0022-2015-01340-X.
12. *Bayguskarov, T. Yu., Talipova, G. R. and Khabibullin, B. N.* Subsequences of Zeros for Classes of Entire Functions of Exponential Type, Allocated by Restrictions on Their Growth, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2017, vol. 28, no. 2, pp. 127–151. DOI: 10.1090/spmj/1442.
13. *Khabibullin, B. N. and Shmelyova, A. V.* Balayage of Measures and Subharmonic Functions on a System of Rays. I. Classic Case, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2020, vol. 31, no. 1, pp. 117–156. DOI: 10.1090/spmj/1589.
14. *Khabibullin, B. N. and Kudasheva, E. G.* Subharmonic Additions to the Beurling–Malliavin Theorems. I. On the Multiplier. *Matematika i teoreticheskie komp'iuterny'e nauki* [Mathematics and Theoretical Computer Science], 2023, vol. 1, no. 3, pp. 59–76 (in Russian).
15. *Khabibullin, B. N. and Kudasheva, E. G.* Subharmonic Additions to the Beurling–Malliavin Theorems. I. On the Multiplier, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2024, vol. 45, no. 4, pp. 1841–1849. DOI: 10.1134/S1995080224601395.
16. *Khabibullin, B. N. and Kudasheva, E. G.* Subharmonic Additions to the Beurling–Malliavin Theorems. I. On the Radius of Completeness, *Matematika i teoreticheskie komp'iuterny'e nauki* [Mathematics and Theoretical Computer Science], 2023, vol. 1, no. 4, pp. 104–115 (in Russian). DOI: 10.26907/2949-3919.2023.4.105-117.
17. *Abanin, A. V. Ul'tradifferentciruemy'e funktcii i ul'traspredeleniia* [Ultradifferentiable functions and ultradistributions], Moscow, Nauka, 2007, 222 p.
18. *Abanin, A. V* Ω-Ultradistributions, *Izvestiya: Mathematics*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 207–240. DOI: 10.1070/IM2008v072n02ABEH002398.
19. *Beurling, A. and Malliavin, P.* On Fourier Transforms of Measures with Compact Support, *Acta Mathematica*, 1962, vol. 107, pp. 291–309. DOI: 10.1007/BF02545792.
20. *Beurling, A. and Malliavin, P.* On the Closure of Characters and the Zeros of Entire Functions, *Acta Mathematica*, 1967, vol. 118, pp. 79–93. DOI: 10.1007/BF02392477.
21. *Kahane J.-P.* Travaux de Beurling et Malliavin, *Séminaire Bourbaki* (14e année, 1961/62, exposés 223–240, Talk no. 225), 1962, no. 7, pp. 27–39.
22. *Redheffer, R. M.* Completeness of Sets of Complex Exponentials, *Advances in Mathematics*, 1977, vol. 24, pp. 1–62.
23. *de Branges, L. Hilbert Spaces of Entire Functions*, Englewood Cliffs. N.J., Prentice-Hall, 1968.
24. *Krasichkov-Ternovskii, I. F.* An Interpretation of the Beurling–Malliavin Theorem on the Radius of Completeness, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1990, vol. 66, no. 2, pp. 405–429. DOI: 10.1070/SM1990v066n02ABEH001178.
25. *Khabibullin, B. N.* Nonconstructive Proofs of the Beurling–Malliavin Theorem on the Radius of Completeness, and Nonuniqueness Theorems for Entire Functions, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1995, vol. 45, no. 1, pp. 125–149. DOI: 10.1070/IM1995v045n01ABEH001622.
26. *Mashreghi, J., Nazarov, F. L. and Havin, V. P.* Beurling–Malliavin Multiplier Theorem: the Seventh Proof, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2006, vol. 17, no. 5, pp. 699–744. DOI: 10.1090/S1061-0022-06-00926-5.
27. *Khabibullin, B. N. and Tamindarova, N. R.* Subharmonic Test Functions and the Distribution of Zero Sets of Holomorphic Functions, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2017, vol. 38, no. 1, pp. 38–43. DOI: 10.1134/S1995080217010115.

Received October 24, 2024

Bulat N. Khabibullin
Institute of Mathematics with Computing Centre
of the Ufa Federal Research Centre of RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Chief Scientific Officer;

Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla,
3 a October Revolution St., Ufa 450077, Russia,
Professor
E-mail: khabib-bulat@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-1308-4461