Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 3, С. 5–20

УДК 517.956.2
DOI 10.46698/i3311-3054-4734-g

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮТИВНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА[#]

О. И. Бжеумихова[1]

[1] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173

E-mail: bzhoksana@gmail.com

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач в цилиндрической области, а также некоторых спектральных задач для линейного эллиптического уравнения второго порядка с инволютивным отклонением аргумента по выделенной переменной в младших членах. Данная работа состоит из двух частей. Объектом исследования первой части является изучение разрешимости краевых задач, в том числе нелокальных краевых задач, для линейного эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и с общим инволютивным отклонением аргумента по выделенной переменной. Для таких задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящих в уравнение) решений. Во второй части работы для эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами и с линейным инволютивным отклонением аргумента по выделенной переменной изучается разрешимость некоторых спектральных задач. А именно, исследуется влияние параметров на единственность и неединственность регулярных решений. Полученные результаты показывают, что наличие в уравнении инволюции (инволютивного отклонения аргумента) может существенно повлиять как на условия разрешимости, так и на корректность задач.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, инволюция, краевая задача, спектральные задачи, регулярные решения, существование, единственность.

AMS Subject Classification: 35J40, 35P05.

Образец цитирования: *Бжеумихова О. И.* Эллиптические уравнения с инволютивным отклонением аргумента // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 3.—С. 5–20. DOI: 10.46698/i3311-3054-4734-g.

1. Введение

В последние десятилетия исследование дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, особенно тех, которые имеют инволютивное отклонение, стало одним из наиболее динамично развивающихся направлений.

Отображение $\varphi(t)$, для которого $\varphi^2(t) = \varphi(\varphi(t)) = t$, называется *инволюцией* или *инволютивным отображением* (см. [1]).

Теория краевых задач для дифференциальных уравнений, имеющих инволюцию, была предметом изучения многих исследователей (см., например, [2–22] и библиографию в них). В работах [2–5] изучены вопросы корректности задач и качественные свойства решений уравнений с инволюцией. Исследованию разрешимости и свойств решений как

[#]Исследование выполнено при финансовой поддержке Внутреннего гранта КБГУ, договор № 8.

обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений в частных производных с инволютивным отклонением аргумента, были посвящены статьи [6–19]. Отметим, что в работах [20–22] изучались спектральные задачи для дифференциальных уравнений с инволюцией. Заметим, что большинство указанных статей посвящены одномерным задачам для уравнений с постоянными коэффициентами и с линейной инволюцией.

Операторы с инволюцией возникают в некоторых геометрических задачах [23, с. 98], в теории фильтрации [24, с. 61], теории прогнозирования и при изучении субгармонических колебаний [25, с. 271].

Изучаемые в настоящей работе дифференциальные уравнения с инволюцией, а также методы исследования краевых задач для них имеют существенные отличия от известных ранее. Ранее они рассматривались лишь в случае уравнений с постоянными коэффициентами и с линейной инволюцией, в которых основным методом исследования был метод Фурье. В данной статье доказаны теоремы существования решений краевых задач для эллиптических уравнений с переменными коэффициентами и с общей инволюцией по выделенной переменной в цилиндрической области. Также в работе для одного частного случая исследовано влияние параметров эллиптических уравнений с инволюцией на единственность и неединственность решений краевых задач. Получены теоремы, определяющие условия единственности и неединственности решений.

2. Постановка задач

Пусть Ω — ограниченная область из пространства R^n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с гладкой границей Γ. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_{tt}(x,t) + \Delta u(x,t) + a(x,t)u(x,t) + b(x,t)u(x,\varphi(t)) = f(x,t), \tag{1}$$

где $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $\varphi(t)$ — заданная на отрезке $[0,T]$ инволюция, Δ — оператор Лапласа, действующий по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Задача 1. Найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Q, удовлетворяющее условиям

$$u(x,t)\,|_S = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

где $S = \Gamma \times (0,T)$.

Задача 2. Найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Q, удовлетворяющее (2), а также условиям

$$u_t(x,0) = 0, \quad u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Задача 3. Найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Q, удовлетворяющее (2), а также условиям

$$u(x,0) = \alpha u(x,T), \quad u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

где α — действительное число.

Заметим, что в случае $\alpha = 1$ тождества (5) представляют собой нелокальное условие Ионкина [26].

Задачи 1 и 2 хорошо изучены в случае $b(x,t) = 0$ (см., например, [27]). Если же $b(x,t) \neq 0$ и при наличии переменных коэффициентов разрешимость краевых задач 1 и 2 для уравнения (1) представляется неизученной.

Нелокальные задачи для эллиптических уравнений без инволюции были исследованы А. Л. Скубачевским [28, 29], А. К. Гущиным и В. П. Михайловым [30], а их разрешимость в работах в [31, 32]. Отметим, что для таких задач с инволюцией подобные вопросы ранее не затрагивались.

3. Исследование разрешимости задач

Пусть $w(x)$ принадлежит пространству $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Omega} w^2(x,t)\,dx \leqslant c_0 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,t)\,dx \tag{6}$$

с постоянной c_0, определяющейся лишь областью Ω [33].

Доказательство разрешимости исследуемых задач будем проводить методом продолжения по параметру [34, с. 146] и априорных оценок.

Для задачи 1 справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для функций $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $\varphi(t)$ выполняются условия:*

$$a(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad b(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \varphi(t) \in C^1([0,T]), \tag{7}$$

$$a(x,t) < 0 \ \text{ при } \ (x,t) \in \overline{Q}, \quad -\varphi_1 \leqslant \varphi'(t) \leqslant -\varphi_0 < 0 \ \text{ при } \ t \in [0,T], \tag{8}$$

$$\frac{1}{c_0} + \frac{2}{T^2} - \min_{\overline{Q}} a(x,t) - \sqrt{\varphi_1}\max_{\overline{Q}} |b(x,t)| > 0. \tag{9}$$

Тогда для любой функции $f(x,t) \in L_2(Q)$ задача 1 *имеет единственное решение $u(x,t) \in W_2^2(Q)$.*

$\lhd$ Пусть $\rho = \mathrm{const} \in [0,1]$. Рассмотрим вспомогательное семейство краевых задач: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в области Q решением уравнения*

$$u_{tt}(x,t) + \Delta u(x,t) + a(x,t)u(x,t) + \rho b(x,t)u(x,\varphi(t)) = f(x,t), \tag{10}$$

и удовлетворяющую условиям (2), (3).

Согласно теореме о методе продолжения по параметру, краевая задача (10), (2), (3) будет разрешима в пространстве $W_2^2(Q)$ при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ для всех чисел ρ из отрезка $[0,1]$, если:

1) задача (10), (2), (3) разрешима в пространстве $W_2^2(Q)$ при $\rho = 0$;

2) для всевозможных решений $u(x,t)$ краевой задачи (10), (2), (3) имеет место равномерная по ρ априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^2(Q)} \leqslant M_0 \|f\|_{L_2(Q)}, \tag{11}$$

с постоянной M_0, определяющейся функциями $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $\varphi(t)$, а также областью Ω и числом T.

Хорошо известно, что при $\rho = 0$ задача (10), (2), (3) разрешима в пространстве $W_2^2(Q)$ при выполнении условий (7), а также условия $1/c_0 + 2/T^2 - a(x,t) > 0$ (условие выполняется вследствие (9)) [27].

Покажем теперь, что для всевозможных решений $u(x,t)$ краевой задачи (10), (2), (3) имеет место равномерная по ρ оценка (11).

Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_Q \big[u_{tt}(x,t)+\Delta u(x,t)+a(x,t)u(x,t)+\rho b(x,t)u(x,\varphi(t))\big]\,u(x,t)\,dxdt$$
$$=-\int\limits_Q f(x,t)u(x,t)\,dxdt.$$

Применяя формулу интегрирования по частям с учетом условий (2), (3), получим

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q u_{x_i}^2(x,t)\,dxdt+\int\limits_Q u_t^2(x,t)\,dxdt-\int\limits_Q a(x,t)u^2(x,t)\,dxdt$$
$$-\,\rho\int\limits_Q b(x,t)u(x,\varphi(t))u(x,t)\,dxdt=-\int\limits_Q f(x,t)u(x,t)\,dxdt.$$

Принимая во внимание (6), а также неравенство

$$\int\limits_Q u_t^2(x,t)\,dxdt\geqslant\frac{2}{T^2}\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt,$$

и применяя неравенства Юнга и Гельдера, будем иметь

$$\left[\frac{1}{c_0}+\frac{2}{T^2}-\min_{\overline{Q}}a(x,t)\right]\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt\leqslant\frac{\delta^2}{2}\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt$$
$$+\frac{1}{2\delta^2}\int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt+\max_{\overline{Q}}|b(x,t)|\left(\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt\right)^{\frac12}\left(\int\limits_Q u^2(x,\varphi(t))\,dxdt\right)^{\frac12}. \quad (12)$$

Выполнив в последнем интеграле, содержащем инволюцию, замену $z=\varphi(t)$ и учитывая (8), можем от (12) перейти к неравенству:

$$\left[\frac{1}{c_0}+\frac{2}{T^2}-\min_{\overline{Q}}a(x,t)-\sqrt{\varphi_1}\max_{\overline{Q}}|b(x,t)|\right]\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt$$
$$\leqslant\frac{\delta^2}{2}\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt+\frac{1}{2\delta^2}\int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt.$$

Используя условия (9) и считая δ достаточно малым, из последнего неравенства следует оценка

$$\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt\leqslant M_1\int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt, \quad (13)$$

где постоянная M_1 определяется функциями $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $\varphi(t)$, а также областью Ω и числом T.

Таким образом, из оценки (13) получаем, что для всевозможных решений $u(x,t)$ задачи (10), (2), (3) имеет место равномерная по ρ априорная оценка (11).

Выше изложенные рассуждения означают, что краевая задача (10), (2), (3) будет разрешима в пространстве $W_2^2(Q)$ для всех чисел ρ из отрезка $[0,1]$, включая случай $\rho = 1$. Следовательно, краевая задача 1 также будет иметь решение в том же пространстве.

Единственность решений краевой задачи 1 в пространстве $W_2^2(Q)$ очевидна. Теорема доказана. $\rhd$

Для задачи 2 справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (7), (8), *а также условие*

$$\frac{1}{c_0} - \min_{\overline{Q}} a(x,t) - \sqrt{\varphi_1}\max_{\overline{Q}} |b(x,t)| > 0. \tag{14}$$

Тогда для любой функции $f(x,t) \in L_2(Q)$ *задача* 2 *имеет единственное решение* $u(x,t) \in W_2^2(Q)$.

$\lhd$ Для чисел $\rho \in [0,1]$ рассмотрим задачу (10), (2), (4). При $\rho = 0$ и при выполнении условий теоремы 2 задача (10), (2), (4) будет разрешима в пространстве $W_2^2(Q)$ для любой функции $f(x,t) \in L_2(Q)$ (см. [27]).

Для решений $u(x,t)$ задачи (10), (2), (4) при всех $\rho \neq 0$ и при выполнении условий теоремы 2 имеет место следующая оценка:

$$\int\limits_Q u_t^2(x,t)\,dxdt + \int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt \leqslant N\int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt, \tag{15}$$

где постоянная N определяется функциями $a(x,t)$, $b(x,t)$, $\varphi(t)$ и областью Ω.

Из разрешимости задачи (10), (2), (4) при $\rho = 0$ в пространстве $W_2^2(Q)$, а также из оценки (15) и из теоремы о методе продолжения по параметру следует разрешимость задачи 2 в том же пространстве. Единственность очевидна. $\rhd$

Перейдем к изучению разрешимости нелокальной задачи 3.

Пусть α_1 и α_2 — фиксированные числа такие, что

$$1 - \alpha^2 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_1 = \max\bigl(1-\alpha^2, 0\bigr), \quad \alpha_2 = \alpha_1 - \bigl(1-\alpha^2\bigr).$$

Теорема 3. *Пусть для функций* $a(x,t)$ *и* $b(x,t)$, *заданной инволюции* $\varphi(t)$ *и числа* α_2 *выполняются условия:*

$$a(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad a(x,y) \leqslant -a_0 < 0 \ \text{ при } \ (x,t) \in \overline{Q}, \tag{16}$$

$$b(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \sqrt{t}\,|b(x,t)| \leqslant b_0\sqrt{\varphi(t)} \quad (\forall\,(x,t) \in \overline{Q}), \tag{17}$$

$$\varphi(t) \in C^1([0,T]), \quad -\varphi_1 \leqslant \varphi'(t) \leqslant -\varphi_0 < 0 \ \text{ при } \ t \in [0,T], \tag{18}$$

$$\frac{\alpha_2^2}{2T} + \frac{2\alpha_2}{T} + 2Tb_0\sqrt{\varphi_1} < 2Ta_0 + \frac{T}{c_0}. \tag{19}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, *задача* 3 *имеет единственное решение, принадлежащее пространству* $W_2^2(Q)$.

$\lhd$ Следуя [32], рассмотрим нелокальную краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$u_{tt}(x,t) + \Delta u(x,t) - \varepsilon\Delta u_{tt}(x,t) + a(x,t)u(x,t) + b(x,t)u(x,\varphi(t)) = f(x,t) \tag{20}$$

($\varepsilon > 0$), *удовлетворяющую условиям* (2) *и* (5).

Покажем, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ (величину числа ε_0 уточним ниже) и при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ краевая задача (20), (2), (5) будет иметь решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^2(Q)$, $\Delta u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$. Сделаем это с помощью хороших априорных оценок.

Для получения первой априорной оценки умножим уравнение (20) на функцию $-tu(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. После несложных преобразований будем иметь:

$$\frac{\alpha_1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx + \int\limits_Q \left[tu_t^2(x,t) + \sum_{i=1}^n tu_{x_i}^2(x,t) + a_0 tu^2(x,t) + \varepsilon\sum_{i=1}^n tu_{x_i t}^2(x,t)\right] dxdt$$
$$+ \frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,T)\,dx \leqslant \frac{\alpha_2}{2}\int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx + \frac{\varepsilon\alpha_2}{2}\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,T)\,dx \tag{21}$$
$$+ \left|\int\limits_Q tb(x,t)u(x,t)u(x,\varphi(t))\,dxdt\right| + \left|\int\limits_Q tu(x,t)f(x,t)\,dxdt\right|.$$

Оценим третий интеграл правой части (21) с помощью неравенства Гёльдера и сделаем замену $z = \varphi(t)$:

$$\left|\int\limits_Q tb(x,t)u(x,t)u(x,\varphi(t))\,dxdt\right| \leqslant \left(\int\limits_Q tb^2(x,t)u^2(x,\varphi(t))\,dxdt\right)^{\frac12}\left(\int\limits_Q tu^2(x,t)\,dxdt\right)^{\frac12}$$
$$\leqslant b_0\sqrt{\varphi_1}\left(\int\limits_Q \varphi(t)u^2(x,\varphi(t))\,dxdt\right)^{\frac12}\left(\int\limits_Q tu^2(x,t)\,dxdt\right)^{\frac12} = b_0\sqrt{\varphi_1}\int\limits_Q tu^2(x,t)\,dxdt. \tag{22}$$

Из неравенств (21) и (22) в случае $\alpha_2 = 0$ очевидным образом вытекает нужная первая априорная оценка, поэтому в дальнейшем считаем α_2 положительным.

Для произвольной функции $v(x,t)$ имеет место следующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega v^2(x,T)\,dxdt \leqslant \frac{\delta_0^2}{T}\int\limits_Q tv_t^2(x,t)\,dxdt + \left(\frac{2}{T^2} + \frac{1}{\delta_0^2 T}\right)\int\limits_Q tv^2(x,t)\,dxdt, \tag{23}$$

где δ_0 — произвольное положительное число (для доказательства этого неравенства достаточно в равенстве

$$\int\limits_\Omega v^2(x,T)\,dxdt = \frac{2}{T^2}\int\limits_Q tv^2(x,t)\,dxdt + \frac{2}{T^2}\int\limits_Q t^2 v(x,t)v_t(x,t)\,dxdt$$

применить ко второму слагаемому правой части неравенство Юнга).

Используя неравенство (23) для функции $u(x,T)$ и для каждой производной $u_{x_i}(x,T)$, $i = 1,\ldots,n$, а также применяя неравенство Юнга и учитывая (6) и (22), нетрудно от неравенства (21) перейти к следующему:

$$\begin{gathered}\frac{\alpha_1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx+\left[1-\frac{\delta_0^2\alpha_2}{2T}\right]\int\limits_Q tu_t^2(x,t)\,dxdt+\frac12\int\limits_Q\sum_{i=1}^n tu_{x_i}^2(x,t)\,dxdt\\ +\left[a_0-\frac{\alpha_2}{2}\left(\frac{2}{T^2}+\frac{1}{\delta_0^2T}\right)-b_0\sqrt{\varphi_1}+\frac{1}{2c_0}\right]\int\limits_Q tu^2(x,t)\,dxdt\\ +\varepsilon\left[1-\frac{\delta_0^2\alpha_2}{2T}\right]\int\limits_Q\sum_{i=1}^n tu_{x_it}^2(x,t)\,dxdt+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,T)\,dx\\ \leqslant\frac{\varepsilon\alpha_2}{2}\left(\frac{2}{T^2}+\frac{1}{\delta_0^2T}\right)\int\limits_Q\sum_{i=1}^n tu_{x_i}^2(x,t)\,dxdt+\frac{\delta^2T}{2}\int\limits_Q tu^2(x,t)\,dxdt+\frac{1}{2\delta^2}\int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt.\end{gathered}\tag{24}$$

Условие (19), а также возможность выбора числа δ сколь угодно малым означают, что если число ε_0 принадлежит интервалу $\left(0;\frac{2T^2}{\alpha_2^2+4\alpha_2}\right)$, то при $\varepsilon<\varepsilon_0$ из (24) вытекает априорная оценка

$$\begin{gathered}\int\limits_Q\left[tu_t^2(x,t)+tu^2(x,t)+\sum_{i=1}^n tu_{x_i}^2(x,t)+\varepsilon\sum_{i=1}^n tu_{x_it}^2(x,t)\right]dxdt\\ +\int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx+\varepsilon\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,T)\,dx\leqslant R_1\int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt,\end{gathered}\tag{25}$$

с постоянной R_1, определяющейся функциями $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $\varphi(t)$, областью Ω и числами α и T.

На следующем шаге умножим уравнение (20) на функцию $t\Delta u(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q:

$$\begin{gathered}\int\limits_Q\left[\sum_{i=1}^n tu_{x_it}^2(x,t)+t(\Delta u(x,t))^2+a_0\sum_{i=1}^n tu_{x_i}^2+\varepsilon t\left(\Delta u_t(x,t)\right)^2\right]dxdt\\ +\frac{\alpha_1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,T)\,dx+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\int\limits_\Omega\left(\Delta u(x,T)\right)^2\,dx+\int\limits_Q tb(x,t)\Delta u(x,t)u(x,\varphi(t))\,dxdt\\ \leqslant\frac{\alpha_2}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,T)\,dx+\frac{\varepsilon\alpha_2}{2}\int\limits_\Omega\left(\Delta u(x,T)\right)^2\,dx+\int\limits_Q t\Delta u(x,t)f(x,t)\,dxdt.\end{gathered}\tag{26}$$

Повторив выкладки, которые привели к оценке (25), применив неравенство Юнга, а также с учетом самой оценки (25) получим из (26) следующую априорную оценку:

$$\begin{gathered}\int\limits_Q\left[\sum_{i=1}^n tu_{x_it}^2(x,t)+t(\Delta u(x,t))^2+\varepsilon t\left(\Delta u_t(x,t)\right)^2\right]dxdt+\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,T)\,dx\\ +\varepsilon\int\limits_\Omega\left(\Delta u(x,T)\right)^2\,dx\leqslant R_2\int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt,\end{gathered}\tag{27}$$

где постоянная R_2 определяется функциями $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $\varphi(t)$, областью Ω и числами α и T.

Далее, умножив уравнение (20) на функцию $-t\Delta u_{tt}(x,t)$ и проинтегрировав по цилиндру Q, получим:

$$\int\limits_Q \left[\sum_{i=1}^n t u^2_{x_i tt}(x,t) + t(\Delta u_t(x,t))^2 + a_0 \sum_{i=1}^n t u^2_{x_i t}(x,t) + \varepsilon t\left(\Delta u_{tt}(x,t)\right)^2\right] dxdt$$
$$+\frac{\alpha_1}{2}\int\limits_\Omega \left[(\Delta u(x,T))^2 + a_0\sum_{i=1}^n u^2_{x_i}(x,T)\right] dx \leqslant \frac{\alpha_2}{2}\int\limits_\Omega \left[(\Delta u(x,T))^2 + a_0\sum_{i=1}^n u^2_{x_i}(x,T)\right] dx$$
$$+\int\limits_Q tb(x,t)\Delta u_{tt}(x,t)u(x,\varphi(t))\,dxdt + \int\limits_Q (tf(x,t))'_t \Delta u_t\,dxdt.$$

Аналогично, повторяя предыдущие рассуждения, используя оценки (25) и (27), а также применяя неравенство Юнга, получим следующую априорную оценку:

$$\begin{aligned}&\int\limits_Q \left[\sum_{i=1}^n t u^2_{x_i tt}(x,t) + t(\Delta u_t(x,t))^2 + \varepsilon t\left(\Delta u_{tt}(x,t)\right)^2\right] dxdt\\ &+\int\limits_\Omega (\Delta u(x,T))^2\,dx \leqslant R_3\int\limits_Q \left[f^2(x,t)+f_t^2(x,t)\right] dxdt,\end{aligned} \tag{28}$$

где постоянная R_3 определяется функциями $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $\varphi(t)$, областью Ω и числами α и T.

В свою очередь, из (28) следует, что выполняются равномерные по ε оценки

$$\int\limits_Q \left[u^2_{tt}(x,t) + \sum_{i=1}^n u^2_{x_i t}(x,t) + \varepsilon^2\left(\Delta u_{tt}(x,t)\right)^2\right] dxdt \leqslant R_4\int\limits_Q \left[f^2(x,t)+f_t^2(x,t)\right] dxdt,$$

$$\int\limits_Q \left(\Delta u(x,t)\right)^2\,dxdt \leqslant R_5\int\limits_Q \left[f^2(x,t)+f_t^2(x,t)\right] dxdt,$$

постоянные R_4 и R_5, в которых определяются лишь функциями $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $\varphi(t)$, областью Ω и числами α и T. Данные неравенства выводятся аналогично оценкам, приведенным в работе [32].

Полученных соотношений уже достаточно для осуществления процедуры предельного перехода. Для этого выберем последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ чисел из интервала $(0,\varepsilon_0)$, сходящуюся к нулю. Далее, из семейства $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^\infty$ решений краевых задач (20), (2), (5) в случае $\varepsilon=\varepsilon_m$ выберем подсемейство $\{u_{m_k}(x,t)\}_{m=1}^\infty$ такое, что для некоторой функции $u(x,t)$ имеют место сходимости при $k\to\infty$: $u_{m_k}(x,t)\to u(x,t)$ слабо в $W_2^2(Q)$, $\varepsilon_{m_k}\Delta u_{m_k tt}(x,t)\to 0$ слабо в $L_2(Q)$, $u_{m_k}(x,0)\to u(x,0)$ слабо в $W_2^2(\Omega)$, $u_{m_k}(x,T)\to u(x,T)$ слабо в $W_2^2(\Omega)$ (в силу свойства рефлексивности гильбертова пространства это возможно). Очевидно, что предельная функция $u(x,t)$ и будет искомым решением краевой задачи 3 при выполнении условий (16)–(19).

Единственность в пространстве $W_2^2(Q)$ решения нелокальной задачи 3 следует из оценки (25), справедливой при выполнении условия (19). Из неравенства (25) следует, что для решения $u(x,t)$ нелокальной задачи 3 в случае $f(x,t)\equiv 0$ выполняется условие

$u(x,0)=0$, т. е. функция $u(x,t)$ будет решением однородной краевой задачи из пространства $W_2^2(Q)$ для эллиптического уравнения. Следовательно, решение нелокальной задачи 3 единственно. Теорема доказана. $\rhd$

4. Влияние параметров на корректность задачи Дирихле для эллиптического уравнения с инволюцией

Рассмотрим частный случай уравнения (1)

$$u_{tt}(x,t)+\Delta u(x,t)+\lambda u(x,t)+\mu u(x,T-t)=0, \tag{29}$$

где λ и μ — действительные параметры.

Целью этого раздела работы является исследование влияния параметров λ и μ на единственность и неединственность решений задачи (29), (2), (3), т. е. задачи Дирихле.

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная в пространстве $L_2(\Omega)$ последовательность собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа с упорядоченной по убыванию последовательностью собственных чисел $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$. Хорошо известно, что последовательности $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ существуют и собственные числа γ_k — отрицательные [35].

Обозначим через $\mu_{k,m}$ числа $\mu_{k,m}=-\lambda-\gamma_k+m^2\pi^2/T^2$, где $k,m\in N$.

Рассмотрим вначале случай $\lambda\in(-\infty,-\gamma_1)$.

Теорема 4. *Пусть λ — фиксированное число из промежутка $(-\infty,-\gamma_1)$. Тогда:*

1) *Если $|\mu|<-\lambda-\gamma_1$, то однородная задача* (29), (2), (3) *имеет только тождественно нулевое решение.*

2) *Если $\mu\geqslant-\lambda-\gamma_1$ и $\mu=\mu_{k,m}$ для натуральных чисел $m=2l-1$, $l,k=1,2,\ldots$, то однородная задача* (29), (2), (3) *имеет бесконечно много ненулевых решений, если же $\mu\neq\mu_{k,m}$, то задача* (29), (2), (3) *имеет только тождественно нулевое решение.*

3) *Если $\mu\leqslant\lambda+\gamma_1$ и $\mu=-\mu_{k,m}$ для натуральных чисел $m=2l$, $l,k=1,2,\ldots$, то однородная задача* (29), (2), (3) *имеет бесконечно много ненулевых решений, если же $\mu\neq-\mu_{k,m}$, то задача* (29), (2), (3) *имеет только тождественно нулевое решение.*

$\lhd$ Пусть для числа μ выполняется неравенство $|\mu|<-\lambda-\gamma_1$. Тогда при таких μ для уравнения (29) выполняются условия теоремы 3.1. Следовательно, однородная первая краевая задача для уравнения (29) имеет только тождественно нулевое решение.

Решение однородной первой краевой задачи для уравнения (29) можно представить рядом Фурье

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)w_k(x),$$

где функции $u_k(t)$ являются решениями следующей задачи:

$$u_k''(t)+(\gamma_k+\lambda)u_k(t)+\mu u_k(T-t)=0,\quad t\in[0,T], \tag{30}$$

$$u_k(0)=u_k(T)=0. \tag{31}$$

Дифференцируя дважды уравнение (30) с учетом равенств

$$\begin{gathered}u_k''(T-t)=-(\gamma_k+\lambda)u_k(T-t)-\mu u_k(t),\\ u_k(T-t)=-\frac{1}{\mu}\left[u_k''(t)+(\gamma_k+\lambda)u_k\right],\end{gathered} \tag{32}$$

получим уравнение

$$u_k^{(4)}(t) + 2(\gamma_k + \lambda)u_k''(t) + \left[(\gamma_k + \lambda)^2 - \mu^2\right] u_k(t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{33}$$

кроме того из (30) и (31) имеют место условия

$$u_k''(0) = u_k''(T) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \tag{34}$$

Пусть $\mu \geqslant -\lambda - \gamma_1$ и число μ совпадает с одним из чисел $\mu_{k,m}$ для некоторых натуральных чисел $l, k = 1, 2, \dots, m = 2l-1$. При таких значениях μ и λ краевая задача (33), (31), (34) имеет ненулевые решения $u_{k,m}(t) = A_k \sin\left(\frac{\pi m}{T}\, t\right)$, где $A_k = \text{const}$. Подставляя $u_{k,m}(t)$ в (32), получим

$$u_{k,m}(T - t) = A_k \sin\left(\frac{\pi m}{T}\, t\right).$$

С другой стороны,

$$u_{k,m}(T - t) = A_k \sin\left[\frac{\pi m}{T}\,(T - t)\right] = (-1)^{m+1} A_k \sin\left(\frac{\pi m}{T}\, t\right),$$

откуда следует, что $(-1)^{m+1} = 1$ верно для нечетного числа m.

Из приведенных рассуждений вытекает, что любая функция вида

$$u_{m,k}(x, t) = A_k \sin\left(\frac{\pi m}{T}\, t\right) w_k(x) \tag{35}$$

будет решением однородной первой краевой задачи для уравнения (29) при $\mu = \mu_{k,m}$ с нечетным числом m.

Пусть теперь $\mu \geqslant -\lambda - \gamma_1$ и число μ не совпадает ни с одним из чисел $\mu_{k,m}$. Краевая задача (33), (31), (34) имеет ненулевые решения лишь в случае, когда определитель системы, порожденной условиями (31), (34), обращается в нуль, т. е. при $\mu = \mu_{k,m}$. Поскольку $\mu \neq \mu_{k,m}$, то функции $u_k(t) \equiv 0$ $(k = 1, 2, \dots)$ для всех $t \in [0, T]$, тогда $u(x, t) \equiv 0$.

Проведя аналогичные рассуждения, легко проверить, что функция (35) вновь будет решением однородной первой краевой задачи для уравнения (29) в случае, если $\mu \leqslant \lambda + \gamma_1$ и $\mu = -\mu_{k,m}$ с четным числом m, если же $\mu \neq -\mu_{k,m}$, то задача (29), (2), (3) имеет только тождественно нулевое решение. Теорема полностью доказана. $\triangleright$

Рассмотрим теперь случай $\lambda \in [-\gamma_1, \infty)$.

Теорема 5. *Пусть λ — фиксированное число из промежутка $[-\gamma_1, \infty)$. Тогда:*

1) *Если $\mu > \lambda + \gamma_1$ и $\mu = \mu_{k,m}$ для чисел $m = 2l - 1$, $l, k = 1, 2, \dots$, то однородная задача* (29), (2), (3) *имеет бесконечно много ненулевых решений, если же $\mu \neq \mu_{k,m}$ для $m = 2l - 1$, то задача* (29), (2), (3) *имеет только тождественно нулевое решение.*

2) *Если $\mu < -\lambda - \gamma_1$ и $\mu = -\mu_{k,m}$ для $m = 2l$, $l, k = 1, 2, \dots$, то однородная задача* (29), (2), (3) *имеет бесконечно много ненулевых решений, если же $\mu \neq -\mu_{k,m}$ для $m = 2l$, то задача* (29), (2), (3) *имеет только тождественно нулевое решение.*

3) *Если $|\mu| < \lambda + \gamma_1$ и $\mu = \mu_{k,m}$ для $m = 2l - 1$, $l, k = 1, 2, \dots$ или $\mu = -\mu_{k,m}$ для $m = 2l$, $l, k = 1, 2, \dots$, то однородная задача* (29), (2), (3) *имеет бесконечно много ненулевых решений, если же $\mu \neq \mu_{k,m}$ для $m = 2l - 1$ или $\mu \neq -\mu_{k,m}$ для $m = 2l$, то задача* (29), (2), (3) *имеет только тождественно нулевое решение.*

4) *Если $\lambda = -\gamma_k + \pi^2 m^2/2T^2$ и $\mu = \pi^2 m^2/2T^2$ для $m = 2l - 1$, $l, k = 1, 2, \dots$ или $\mu = -\pi^2 m^2/2T^2$ для $m = 2l$, $l, k = 1, 2, \dots$, то однородная задача* (29), (2), (3) *имеет бесконечно много ненулевых решений.*

5) *Если* $\lambda = -\gamma_k$, $\mu = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, *однородная задача* (29), (2), (3) *имеет только тождественно нулевое решение.*

$\lhd$ Решение задачи (29), (2), (3) при $\lambda \in [-\gamma_1, \infty)$ вновь определим рядом

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) w_k(x).$$

Для функции $u_k(t)$, чисел λ и μ должны выполняться равенства (33), (31), (34) и (32).

Пусть $\mu > \lambda + \gamma_1$ и число λ из промежутка $[-\gamma_1, \infty)$, тогда для таких λ и μ

$$u_k(t) = A_k e^{\sqrt{y_k}\, t} + B_k e^{-\sqrt{y_k}\, t} + C_k \cos\left(\sqrt{z_k}\, t\right) + D_k \sin\left(\sqrt{z_k}\, t\right),$$

где $y_k = \mu - \lambda - \gamma_k$, $z_k = \mu + \lambda + \gamma_k$, $k = 1, 2, \ldots$

Для чисел A_k, B_k, C_k, D_k с учетом условий (31), (34) выполняются равенства

$$\begin{aligned}
&A_k + B_k + C_k = 0,\\
&A_k e^{\sqrt{y_k}\, T} + B_k e^{-\sqrt{y_k}\, T} + C_k \cos\left(\sqrt{z_k}\, T\right) + D_k \sin\left(\sqrt{z_k}\, T\right) = 0,\\
&y_k A_k + y_k B_k - z_k C_k = 0,\\
&y_k A_k e^{\sqrt{y_k}\, T} + y_k B_k e^{-\sqrt{y_k}\, T} - z_k C_k \cos\left(\sqrt{z_k}\, T\right) - z_k D_k \sin\left(\sqrt{z_k}\, T\right) = 0.
\end{aligned}$$

Определитель системы $\Delta_k = -8\mu^2 \sinh\left(\sqrt{y_k}\, T\right) \sin\left(\sqrt{z_k}\, T\right)$ обращается в нуль для всех $\mu = \mu_{k,m}$. Следовательно, функции $u_k(t)$ будут ненулевыми, причем для этой функции будут выполняться условия (32) при $\mu = \mu_{k,m}$ с нечетным числом m. Искомыми ненулевыми решениями первой краевой задачи для уравнения (29) будут функции $u_{m,k}(x,t) = D_k \sin\left(\frac{m\pi}{T}\, t\right) w_k(x)$, $m = 2l - 1$, $l = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что если μ не совпадает ни с одним из чисел $\mu_{k,m}$ при $m = 2l - 1$, то $\Delta_k \neq 0$. Следовательно, система будет иметь только тривиальное решение и $u_k(t) \equiv 0$, а значит, $u(x,t) \equiv 0$.

Пусть теперь $\mu < -\lambda - \gamma_1$ и $\lambda \in [-\gamma_1, \infty)$. Тогда функции $u_k(t)$ имеют вид

$$u_k(t) = A_k \cos\left(\sqrt{-y_k}\, t\right) + B_k \sin\left(\sqrt{-y_k}\, t\right) + C_k e^{\sqrt{-z_k}\, t} + D_k e^{-\sqrt{-z_k}\, t},$$

условия (31) и (34) порождают систему, определитель которой обращается в нуль при $\mu = -\mu_{k,m}$. Следовательно, задача (33), (31), (34) имеет ненулевые решения $u_{k,m}(t) = B_k \sin\left(\frac{\pi m}{T}\, t\right)$. Тогда

$$u_{k,m}(T - t) = (-1)^{m+1} B_k \sin\left(\frac{\pi m}{T}\, t\right), \tag{36}$$

с другой стороны, из (32)

$$u_{k,m}(T - t) = -B_k \sin\left(\frac{\pi m}{T}\, t\right), \tag{37}$$

откуда, приравнивая правые части (36) и (37), получим, что равенство верно для четных чисел m. Таким образом, однородная первая краевая задача для уравнения (29) имеет ненулевое решение $u_{m,k}(x,t) = B_k \sin\left(\frac{\pi m}{T}\, t\right) w_k(x)$ при $\mu = -\mu_{k,m}$ для $m = 2l$, $k, l = 1, 2, \ldots$ Если же $\mu \neq -\mu_{k,m}$ для $m = 2l, l = 1, 2, \ldots$, то система имеет только нулевое решение и $u_k(t) = 0$, следовательно $u(x,t) \equiv 0$.

При $|\mu| < \lambda + \gamma_1$ имеет место равенство

$$u_k(t) = A_k \cos\left(\sqrt{-y_k}\, t\right) + B_k \sin\left(\sqrt{-y_k}\, t\right) + C_k \cos\left(\sqrt{z_k}\, t\right) + D_k \sin\left(\sqrt{z_k}\, t\right).$$

Вновь удовлетворяя $u_k(t)$ условиям (31) и (34), получим систему, определитель которой равен нулю при $\mu = \pm\mu_{k,m}$, причем для этой функции будут выполняться условия (32) при $\mu = \mu_{k,m}$ для $m = 2l-1$ и $\mu = -\mu_{k,m}$ для $m = 2l$ ($l = 1, 2, \dots$). Следовательно, краевая задача (29), (2), (3) вновь имеет ненулевые решения $u_{m,k}(x,t) = D_k \sin\left(\frac{m\pi}{T}\, t\right) w_k(x)$ при $\mu = \mu_{k,m}$ для $m = 2l-1$ и $u_{m,k}(x,t) = B_k \sin\left(\frac{\pi m}{T}\, t\right) w_k(x)$ при $\mu = -\mu_{k,m}$ для $m = 2l$ ($l = 1, 2, \dots$). Если же $\mu \neq \mu_{k,m}$ для $m = 2l-1$ и $\mu \neq -\mu_{k,m}$ для $m = 2l$, то коэффициенты A_k, B_k, C_k и D_k одновременно обращаются в нуль и функции $u_k(t) \equiv 0$ ($k = 1, 2, \dots$) при для всех $t \in [0, T]$, а значит $u(x,t) \equiv 0$.

В случае 4) непосредственно проверяется, что при $\lambda = -\gamma_k + \pi^2 m^2/2T^2$ и $\mu = \pi^2 m^2/2T^2$, для $m = 2l-1$ ($l, k = 1, 2, \dots$) или $\mu = -\pi^2 m^2/2T^2$ для $m = 2l$ ($l, k = 1, 2, \dots$), задача (30), (31) будет иметь решение $u_{k,m}(t) = A_k \sin\left(\frac{\pi m}{T}\, t\right)$. Тогда однородная первая краевая задача для уравнения (29) имеет бесконечно много ненулевых решений.

Рассмотрим теперь случай 5). При таких значениях λ и μ легко проверить, что $u_k(t) \equiv 0$, подставляя $\lambda = -\gamma_k$ и $\mu = 0$, $k = 1, 2, \dots$, в уравнение (30) и удовлетворяя (31), а, следовательно, задача (29), (2), (3) имеет только тождественно нулевое решение.

Из приведенных выше рассуждений следует, что теорема полностью доказана. $\rhd$

5. Заключение

В работе получены достаточные условия разрешимости краевых задач 1–3 для эллиптических дифференциальных уравнений с инволютивным отклонением аргумента в младших членах. Установленные результаты легко обобщаются на более общие уравнения — на уравнения с младшими производными $u_t(x,t)$ и $u_x(x,t)$ (с соответствующими коэффициентами), на уравнения с переменными коэффициентами в старшей части.

Особое место среди изученных задач занимает задача 3. Эта задача в случае $\alpha = 1$ соответствует известной задаче Н. И. Ионкина [26] (см. также [32]), исследованию которой посвящено весьма большое количество статей и диссертаций. Отметим, что в настоящей работе допускается случай $\alpha = -1$ (т. е. случай с «анти-условием Ионкина»), а также случай $|\alpha| > 1$, но при этом величина отклонения числа α от 1 определяется функциями $a(x,t)$ и $b(x,t)$, размером области Ω, числом T, а также собственно инволюцией $\varphi(t)$.

Заметим также следующее. Имея разрешимость задачи 3, нетрудно получить разрешимость еще одной задачи Н. И. Ионкина. А именно, задачи с заменой условия (5) на условия

$$u_t(x,0) = \alpha u_t(x,T), \quad u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Доказанные результаты и особенно теоремы 4 и 5 показывают, что наличие в уравнении инволютивного отклонения может существенно повлиять на условия разрешимости и вообще на корректность задачи.

Автор выражает благодарность профессору А. И. Кожанову за неоднократные обсуждения и ценные советы при выполнении данной работы.

Литература

1. *Shisha O., Mehr C. B.* On involutions // J. Res. Natl. Bur. Stand. B, Math. Math. Phys.—1967.—Vol. 71 B, № 1.—P. 19–20.
2. *Андреев А. А.* Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения.—2004.—Т. 40, № 8.—С. 1126–1128.

3. *Андреев А. А., Огородников Е. Н.* К постановке и обоснованию корректности начальной краевой задачи для одного класса нелокальных вырождающихся уравнений гиперболического типа // Вестн. Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2006.—№ 43.—С. 44–51. DOI: 10.14498/vsgtu452.
4. *Ashyralyev A., Sarsenbi A.* Well-posedness of a parabolic equation with involution // Numer. Funct. Anal. Optim.—2017.—Vol. 38, № 10.—P. 1295–1304. DOI: 10.1080/01630563.2017.1316997.
5. *Сарсенби А. А.* Некорректная задача для уравнения типа теплопроводности с инволюцией // Журн. Средневолжского матем. общества.—2019.—Т. 21, № 1.—С. 48–59. DOI: 10.15507/2079-6900.21.201901.48-59.
6. *Винер И. Я.* Дифференциальные уравнения с инволюциями // Дифференц. уравнения.—1969.—Т. 5, № 6.—С. 1131–1137.
7. *Винер И. Я.* Дифференциальные уравнения в частных производных с инволюциями // Дифференц. уравнения.—1970.—Т. 6, № 7.—С. 1320–1322.
8. *Gupta Chaitan P.* Two-point boundary value problems involving reflection of the argument // Int. J. Math. Math. Sci.—1987.—Vol. 10, № 2.—P. 361–371. DOI: 10.1155/S0161171287000425.
9. *Кальменов Т. Ш., Шалданбаев А. Ш.* Об одном рекуррентном методе решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения второго порядка // Мат. тр.—2010.—Т. 13, № 2.—С. 128–138.
10. *Ashyralyev A., Sarsenbi A. M.* Well-posedness of an elliptic equation with involution // Electron. J. Differ. Equ.—2015.—Vol. 2015, № 284.—P. 1–8.
11. *Cabada A., Tojo F. A. F.* Differential Equations with Involutions.—Amsterdam–Paris–Beijing: Atlantic Press, 2015.—153 p.—(Atlantis Briefs in Differential Equations. Vol. 2). DOI: 10.2991/978-94-6239-121-5.
12. *Iskakova U. A., Torebek B. T.* Certain method of solving ill-posed Cauchy–Robin problem for the Laplace operator // News of NAS RK. Phys.-Math. Ser.—2016.—Vol. 6, № 310.—P. 115–120.
13. *Shaldanbayev A. Sh., Shomanbayeva M. T., Achmetova S. T.* About Cantor of the range of the operator of the periodic regional task for the heat conductivity equation with the deviating argument // News of NAS RK. Phys.-Math. Ser.—2016.—Vol. 3, № 307.—P. 148–157.
14. *Sadybekov M. A., Dildabek G., Ivanova M. B.* On an inverse problem of reconstructing a heat conduction process from nonlocal data // Adv. Math. Phys.—2018.—Vol. 2018.—P. 1–8. DOI: 10.1155/2018/8301656.
15. *Al-Salti N., Kirane M., Torebek B. T.* On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation // Hacet. J. Math. Stat.—2019.—Vol. 48, № 3.—P. 669–681.
16. *Турметов Б. Х.* Об одном обобщении третьей краевой задачи для уравнения Лапласа // Челяб. физ.-мат. журн.—2019.—Т. 4, № 1.—С. 33–41. DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14103.
17. *Yarka U., Fedushko S., Veselý P.* The Dirichlet problem for the perturbed elliptic equation // Mathematics.—2020.—Vol. 8, № 12 : 2108.—P. 1–13. DOI: 10.3390/math8122108.
18. *Алтынбек Д. Н., Муратбекова М. А.* Вопросы разрешимости некоторых краевых задач для уравнения высокого порядка с инволюцией // Междунар. научно-практическая конф. «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» посвященная 30-летию независимости Республики Казахстан и 20-летию Казахстанского филиала МГУ им. М. В. Ломоносова.—Нур-Султан: Казахстанский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова, 2021.—С. 85–88.
19. *Kozhanov A. I., Bzheumikhova O. I.* Elliptic and parabolic equations with involution and degeneration at higher derivatives // Mathematics.—2022.—Vol. 10, № 18 : 3325.—P. 1–10. DOI: 10.3390/math10183325.
20. *Крицков Л. В., Сарсенби А. М.* Спектральные свойства одной нелокальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией // Дифференц. уравнения.—2015.—Т. 51, № 8.—С. 990–996. DOI: 10.1134/S0374064115080026.
21. *Baskakov A. G., Uskova N. B.* Fourier method for first order differential equations with involution and groups of operators // Ufa Math. J.—2018.—Vol. 10, № 3.—P. 11–34. DOI: 10.13108/2018-10-3-11.
22. *Бурлуцкая М. Ш.* О некоторых свойствах дифференциальных уравнений и смешанных задач с инволюцией // Вестн. ВГУ. Сер.: Физика. Математика.—2019.—№ 1.—С. 91–100.
23. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения.—М.: Мир, 1967.—548 с.
24. *Герсеванов Н. М.* Итерационное исчисление и его приложения.—М.: Машстройиздат, 1950.—68 с.
25. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний.—М.: Наука, 1964.—368 с.
26. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения.—1977.—Т. 13, № 2.—С. 294–304.
27. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.—М.: Наука, 1973.—576 с.
28. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I // Соврем. матем. Фундам. направл.—2007.—Т. 26.—С. 3–132.

29. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II // Соврем. матем. Фундам. направл.—2009.—Т. 33.—С. 3–179.
30. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О непрерывности решений одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения // Мат. сб.—1995.—Т. 186, № 2.—С. 37–58.
31. *Kozhanov A. I.* Nonlocal problems with integral conditions for elliptic equations // Compl. Var. Elliptic Equ.—2018.—Vol. 64, № 5.—P. 741–752. DOI: 10.1080/17476933.2018.1501038.
32. *Кожанов А. И., Дюжева А. В.* Корректность обобщенной задачи Самарского — Ионкина для эллиптических уравнений в цилиндрической области // Дифференц. уравнения.—2023.—Т. 59, № 2.—С. 223–235. DOI: 10.31857/S0374064123020085.
33. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.—М.: Наука, 1988.—336 с.
34. *Треногин В. А.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1980.—495 с.
35. *Triebel H.* Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.—Heidelberg: Barth, 1995.

Статья поступила 24 декабря 2024 г.

Бжеумихова Оксана Игоревна
Кабардино-Балкарский государственный
университет им. Х. М. Бербекова,
старший преподаватель
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: bzhoksana@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6730-9203

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 3, P. 5–20

ELLIPTIC EQUATIONS WITH INVOLUTIVE DEVIATION OF THE ARGUMENT

Bzheumikhova, O. I.[1]

[1] Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov,
173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia
E-mail: bzhoksana@gmail.com

Abstract. This paper is devoted to the solvability of boundary value problems in a cylindrical domain and certain spectral problems for a second-order linear elliptic equation with involutive deviation of the argument in lower-order terms with respect to a selected variable. The paper consists of two parts. In the first part we investigate the solvability of boundary value problems, including nonlocal ones, for a second-order linear elliptic equation with variable coefficients and general involutive deviation of the argument with respect to a selected variable. We establish existence and uniqueness theorems for regular solutions (those possessing all generalised derivatives in the Sobolev sense that appear in the equation). In the second part we investigate the solvability of certain spectral problems for an elliptic equation with constant coefficients and linear involutive deviation of the argument with respect to a selected variable. Specifically, we analyse how various parameters affect the uniqueness and non-uniqueness of regular solutions to boundary value problems. These results show that the presence of involution (involutive deviation of the argument) in the equation can substantially impact both the solvability conditions and the well-posedness of the problems.

Keywords: elliptic equations, involution, boundary value problem, spectral problems, regular solutions, existence, uniqueness.

AMS Subject Classification: 35J40, 35P05.

For citation: *Bzheumikhova, O. I.* Elliptic Equations with Involutive Deviation of the Argument, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 3, pp. 5–20 (in Russian). DOI: 10.46698/i3311-3054-4734-g.

References

1. *Shisha, O. and Mehr, C. B.* On Involutions, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 1967, vol. 71 B, no. 1, pp. 19–20.
2. *Andreev, A. A.* Analogs of Classical Boundary Value Problems for a Second-Order Differential Equation with Deviating Argument, *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 8, p. 1192–1194. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000049836.04104.6f.
3. *Andreev, A. A. and Ogorodnikov, E. N.* On the Formulation and Justification of the Correctness of the Initial Boundary Value Problem for One Class of Nonlocal Degenerate Equations of Hyperbolic Type, *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnincheskogo Univiversiteta. Ser. Fiziko-Matematicheskie Nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2006, no. 43, pp. 44–51 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu452.
4. *Ashyralyev, A. and Sarsenbi, A.* Well-Posedness of a Parabolic Equation with Involution, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2017, vol. 38, no. 10, pp. 1295–1304. DOI: 10.1080/01630563.2017.1316997.
5. *Sarsenbi, A. A.* The Ill-Posed Problem for the Heat Transfer Equation with Involution, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva* [Middle Volga Mathematical Society Journal], 2019, vol. 21, no. 1, pp. 48–59 (in Russian). DOI: 10.15507/2079-6900.21.201901.48-59.
6. *Viner, I. Ya.* Differential Equations with Involutions, *Differentsial'nye Uravneniya* [Differential Equations], 1969, vol. 5, no. 6, pp. 1131–1137 (in Russian).
7. *Viner, I. Ya.* Partial Differential Equations with Involutions, *Differentsial'nye Uravneniya* [Differential Equations], 1970, vol. 6, no. 7, pp. 1320–1322 (in Russian).
8. *Gupta, Ch. P.* Two-Point Boundary Value Problems Involving Reflection of the Argument, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1987, vol. 10, no. 2, pp. 361–371. DOI: 10.1155/S0161171287000425.
9. *Kal'menov, T. Sh. and Shaldanbaev, A. Sh.* On a Recurrent Method for Solving a Singularly Perturbed Cauchy Problem for a Second Order Equation, *Siberian Advances in Mathematics*, 2011, vol. 21, no. 4, pp. 274–281. DOI: 10.3103/S1055134411040055.
10. *Ashyralyev, A. and Sarsenbi, A. M.* Well-posedness of an Elliptic Equation with Involution, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015, vol. 2015, no. 284, pp. 1–8.
11. *Cabada, A. and Tojo, F. A. F. Differential Equations with Involutions*, Atlantis Briefs in Differential Equations, vol. 2, Amsterdam–Paris–Beijing, Atlantic Press, 2015, 153 p. DOI: 10.2991/978-94-6239-121-5.
12. *Iskakova, U. A. and Torebek, B. T.* Certain Method of Solving Ill-Posed Cauchy–Robin Problem for the Laplace Operator, *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-Mathematical Series*, 2016, vol. 6, no. 310, pp. 115–120.
13. *Shaldanbayev, A. Sh., Shomanbayeva, M. T. and Achmetova, S. T.* About Cantor of the Range of the Operator of the Periodic Regional Task for the Heat Conductivity Equation with the Deviating Argument, *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-Mathematical Series*, 2016, vol. 3, no. 307, pp. 148–157.
14. *Sadybekov, M. A., Dildabek, G. and Ivanova, M. B.* On an Inverse Problem of Reconstructing a Heat Conduction Process from Nonlocal Data, *Advances in Mathematical Physics*, 2018, vol. 2018, pp. 1–8. DOI: 10.1155/2018/8301656.
15. *Al-Salti, N., Kirane, M. and Torebek, B. T.* On a Class of Inverse Problems for a Heat Equation with Involution Perturbation, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2019, vol. 48, no. 3, pp. 669–681.
16. *Turmetov, B. Kh.* On one Generalization of the Third Boundary Value Problem for the Laplace Equation, *Chelyabinskiy Fiziko-Matematicheskiy Zhurnal* [Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal], 2019, vol. 4, no. 1, pp. 33–41 (in Russian). DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14103.
17. *Yarka, U., Fedushko, S. and Veselý, P.* The Dirichlet Problem for the Perturbed Elliptic Equation, *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 12 : 2108, pp. 1–13. DOI: 10.3390/math8122108.
18. *Altynbek, D. N. and Muratbekova, M. A.* Solvability Issues of Some Boundary Value Problems for a High-Order Equation with Involution, *Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya «Problemy sovremennoy fundamental'noy i prikladnoy matematiki» posvyashchennaya 30-letiyu nezavisimosti Respubliki Kazakhstan i 20-letiyu Kazakhstanskogo filiala MGU imeni M. V. Lomonosova* [International Scientific and Practical Conference «Problems of Modern Fundamental and Applied Mathematics» Dedicated to the 30th Anniversary of Independence of the Republic of Kazakhstan and the 20th Anniversary of the Kazakhstan Branch of M. V. Lomonosov Moscow State University], Nur-Sultan, Kazakhstan Branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov, 2021, pp. 85–88 (in Russian).

19. *Kozhanov, A. I. and Bzheumikhova, O. I.* Elliptic and Parabolic Equations with Involution and Degeneration at Higher Derivatives, *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 18 : 3325, pp. 1–10. DOI: 10.3390/math10183325.
20. *Kritskov, L. V. and Sarsenbi, A. M.* Spectral Properties of a Nonlocal Problem for a Second-Order Differential Equation with an Involution, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 8, pp. 984–990. DOI: 10.1134/S0012266115080029.
21. *Baskakov, A. G. and Uskova, N. B.* Fourier Method for First Order Differential Equations with Involution and Groups of Operators, *Ufa Mathematical Journal*, 2018, vol. 10, no. 3, pp. 11–34. DOI: 10.13108/2018-10-3-11.
22. *Burlutskaya, M. Sh.* On Some Properties of Differential Equations and Mixed Problems with an Involution, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 1, pp. 91–100 (in Russian).
23. *Bellman, R. and Cook, K. Differentsial'no-raznostnyye uravneniya* [Differential-Difference Equations], Moscow, Mir, 1967, 548 p. (in Russian).
24. *Gersevanov, N. M. Iteratsionnoye ischisleniye i yego prilozheniya* [Iterative Calculus and its Applications], Moscow, Mashstroyizdat, 1950, 68 p. (in Russian).
25. *Pliss, V. A. Nelokal'nyye problemy teorii kolebaniy* [Nonlocal Problems of the Theory of Oscillations], Moscow, Nauka, 1964, 368 p. (in Russian).
26. *Ionkin, N. I.* The Solution of a Certain Boundary Value Problem of the Theory of Heat Conduction with a Nonclassical Boundary Condition, *Differentsial'nye Uravneniya* [Differential Equations], 1977, vol. 13, no 2, pp. 294–304 (in Russian).
27. *Ladyzhenskaya, O. A. and Uraltseva, N. N. Lineynyye i kvazilineynyye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type], Moscow, Nauka, 1973, 576 p. (in Russian).
28. *Skubachevskii, A. L.* Nonclassical Boundary Value Problems. I, *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 155, no. 2, pp. 199–334. DOI: 10.1007/s10958-008-9218-9.
29. *Skubachevskii, A. L.* Nonclassical Boundary Value Problems. II, *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 166, no. 4, pp. 377–561. DOI: 10.1007/s10958-010-9873-5.
30. *Gushchin, A. K. and Mikhailov, V. P.* On the Continuity of the Solutions of a Class of Non-Local Problems for an Elliptic Equation, *Sbornik: Mathematics*, 1995, vol. 186, no 2, pp. 197–219. DOI: 10.1070/SM1995v186n02ABEH000012.
31. *Kozhanov, A. I.* Nonlocal Problems with Integral Conditions for Elliptic Equations, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2018, vol. 64, no. 5, pp. 741–752. DOI: 10.1080/17476933.2018.1501038.
32. *Kozhanov, A. I. and Dyuzheva, A. V.* Well-Posedness of the Generalized Samarskii–Ionkin Problem for Elliptic Equations in a Cylindrical Domain, *Differencial'nye Uravneniya* [Differential Equations], 2023, vol. 59, no. 2, pp. 223–235 (in Russian). DOI: 10.31857/S0374064123020085.
33. *Sobolev, S. L. Nekotoryye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike* [Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics], Moscow, Nauka, 1988, 336 p. (in Russian).
34. *Trenogin, V. A. Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Moscow, Nauka, 1980, 495 p. (in Russian).
35. *Triebel, H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, Heidelberg, Barth, 1995.

Received December 24, 2024

Oksana I. Bzheumikhova
Kabardino-Balkarian State University
named after H. M. Berbekov,
173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia,
Senior Lecturer
E-mail: bzhoksana@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6730-9203