

УДК 512.542

DOI 10.46698/o5301-6902-4904-1

КОНЕЧНЫЕ НЕРАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ, ГРАФЫ ГРЮНБЕРГА — КЕГЕЛЯ  
КОТОРЫХ ИЗОМОРФНЫ ГРАФУ «БАЛАЛАЙКА». СЛУЧАЙ  $q \leq 3$ <sup>#</sup>

А. С. Кондратьев<sup>1</sup>, Н. А. Минигулов<sup>1,2</sup>, М. С. Нирова<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,  
Уральский математический центр,  
Россия, 620108, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;

<sup>2</sup> Уральский федеральный университет,  
Россия, 620062, Екатеринбург, ул. Мира, 19;

<sup>3</sup> Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,  
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173

E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru, n.a.minigulov@imm.uran.ru, nirova\_m@mail.ru

*70-летию В. А. Койбаева посвящается*

**Аннотация.** Граф Грюнберга — Кегеля  $\Gamma(G)$  (или граф простых чисел) конечной группы  $G$  — это граф, в котором вершинами служат все простые делители порядка группы  $G$ , и две различные вершины  $p$  и  $q$  смежны тогда и только тогда, когда  $G$  содержит элемент порядка  $pq$ . Одним из популярных направлений исследований в теории конечных групп является изучение групп с заданными свойствами их графов Грюнберга — Кегеля. В 2012–2013 гг. первый автор описал конечные группы с графом Грюнберга — Кегеля как для группы  $\text{Aut}(J_2)$ , так и для группы  $A_{10}$ . Графы Грюнберга — Кегеля этих групп изоморфны (как абстрактные графы) графу «балалайка». Граф «балалайка» — это граф на четырех вершинах, степени которых равны 1, 2, 2 и 3. Обобщая упомянутые результаты А. С. Кондратьева, мы рассматриваем проблему описания конечных групп, графы Грюнберга — Кегеля которых изоморфны графу «балалайка». В 2018 г. А. С. Кондратьев и Н. А. Минигулов доказали, что если  $G$  — конечная неразрешимая группа и граф  $\Gamma(G)$  изоморфен графу «балалайка», то фактор-группа  $G/S(G)$  группы  $G$  по ее разрешимому радикалу  $S(G)$  почти проста. Кроме того, были классифицированы все конечные почти простые группы, графы Грюнберга — Кегеля которых изоморфны подграфам графа «балалайка». В двух работах 2022 г. А. С. Кондратьев и Н. А. Минигулов описали все конечные разрешимые группы с графом Грюнберга — Кегеля, изоморфным графу «балалайка». Кроме того, были классифицированы конечные неразрешимые группы  $G$ , графы Грюнберга — Кегеля которых изоморфны графу «балалайка», в следующих двух случаях: (1) группа  $G$  не содержит элементов порядка 6; (2) группа  $G$  содержит элемент порядка 6 и вершина степени 1 графа  $\Gamma(G)$  делит  $|S(G)|$ . В этой работе продолжается исследование проблемы и изучается ее важный новый случай, когда в конечной неразрешимой группе  $G$  с графом Грюнберга — Кегеля, изоморфным графу «балалайка», вершина степени 1 графа  $\Gamma(G)$  не превосходит 3.

**Ключевые слова:** конечная группа, неразрешимая группа, граф Грюнберга — Кегеля, граф «балалайка».

**AMS Subject Classification:** 20D10, 20D60, 05C25.

**Образец цитирования:** Кондратьев А. С., Минигулов Н. А., Нирова М. С. Конечные неразрешимые группы, графы Грюнберга — Кегеля которых изоморфны графу «балалайка». Случай  $q \leq 3$  // Владикавказ. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 3.—С. 90–100. DOI: 10.46698/o5301-6902-4904-1.

---

<sup>#</sup>Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2025-1549.

© 2025 Кондратьев А. С., Минигулов Н. А., Нирова М. С.

### 1. Введение

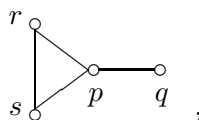
Пусть  $G$  — конечная группа. Через  $\pi(G)$  обозначается множество всех различных простых делителей порядка группы  $G$ , а через  $\omega(G)$  — множество порядков элементов из  $G$ . *Графом Грюнберга — Кегеля* (или *графом простых чисел*)  $\Gamma(G)$  конечной группы  $G$  называется граф, в котором множеством вершин является множество всех простых делителей порядка группы  $G$  и две различные вершины  $p$  и  $q$  смежны тогда и только тогда, когда в группе  $G$  существует элемент порядка  $pq$ . «Балалайка» — граф на 4 вершинах, степени которых равны 1, 2, 2 и 3.

Первый автор описал конечные группы с графом Грюнберга — Кегеля как у группы  $\text{Aut}(J_2)$  (см. [1]) и как у группы  $A_{10}$  (см. [2]). Графы Грюнберга — Кегеля этих групп изоморфны (как абстрактные графы) графу «балалайка».

В [3] была поставлена более общая проблема: описать конечные группы, графы Грюнберга — Кегеля которых изоморфны графу «балалайка».

В [3] А. С. Кондратьев и Н. А. Минигулов доказали, что если  $G$  — конечная неразрешимая группа и граф  $\Gamma(G)$  изоморфен графу «балалайка», то фактор-группа  $G/S(G)$  группы  $G$  по ее разрешимому радикалу  $S(G)$  почти проста, и классифицировали все конечные почти простые группы  $G$ , графы  $\Gamma(G)$  которых изоморфны подграфам графа «балалайка». В [4] А. С. Кондратьев и Н. А. Минигулов описали все конечные разрешимые группы, графы Грюнберга — Кегеля которых изоморфны графу «балалайка». Также в [5] они классифицировали конечные неразрешимые группы  $G$ , графы  $\Gamma(G)$  которых изоморфны графу «балалайка» в следующих двух случаях: (1) группа  $G$  не содержит элементов порядка 6; (2) группа  $G$  содержит элемент порядка 6 и вершина  $q$  графа  $\Gamma(G)$  делит  $|S(G)|$ .

В данной работе мы продолжаем исследование проблемы. Пусть  $G$  — конечная неразрешимая группа, граф  $\Gamma(G)$  изоморфен графу «балалайка», т. е. граф  $\Gamma(G)$  имеет вид

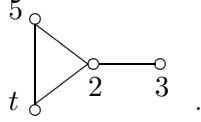


где  $r$ ,  $s$ ,  $p$  и  $q$  — некоторые попарно различные простые числа. Положим  $S = S(G)$  и  $\overline{G} = G/S$ . Ввиду [3] группа  $\overline{G}$  почти проста известного вида. Положим  $L = \text{Soc}(\overline{G})$ . Предположим далее также, что  $S(G) \neq 1$ ,  $G$  содержит элемент порядка 6 и  $q$  не делит  $|S|$ . Поскольку группа  $\overline{G}$  неразрешима, имеем  $2 \in \pi(\overline{G})$  и  $|\pi(\overline{G})| \in \{3, 4\}$ . Если  $3 \notin \pi(\overline{G})$ , то ввиду [6–8] имеем  $\overline{G} \in \{Sz(8), Sz(32), \text{Aut}(Sz(32))\}$  и, следовательно,  $\pi(\overline{G}) = \pi(G)$ ; противоречие с тем, что  $3 \in \pi(G)$ . Поэтому  $3 \in \pi(\overline{G})$ .

Мы доказываем следующую теорему.

**Теорема.** Пусть  $G$  — конечная неразрешимая группа,  $\overline{G} := G/S(G)$ , граф  $\Gamma(G)$  как абстрактный граф изоморфен графу «балалайка» с  $q \leq 3$ . Если  $G$  содержит элемент порядка 6 и  $q$  не делит  $|S(G)|$ , то  $p = 2$ ,  $q = 3$ ,  $\overline{G} \cong A_5$  или  $S_5$ ,  $\{r, s\} = \{t, 5\}$  для некоторого простого числа  $t > 5$  и  $t \in \pi(S(G)) \subseteq \{2, 5, t\}$ .

**Замечание.** Утверждение теоремы реализуется. Пусть  $G = Z \times ((V_1 \times V_2) \rtimes L)$ , где  $Z \cong \mathbb{Z}_2$ ,  $L \cong SL_2(5)$ ,  $V_1$  — любой точный 2-мерный  $GF(t)(\sqrt{5})L$ -модуль для любого простого числа  $t > 5$  ( $V_1L$  — группа Фробениуса с ядром  $V_1$  и дополнением  $L$ ) и  $V_2$  — естественный 2-мерный  $GF(5)L$ -модуль. Тогда граф  $\Gamma(G)$  изоморфен «балалайке», и имеет вид



Можно доказать, что случай  $\overline{G} \cong S_5$  утверждения теоремы также реализуется.

## 2. Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [9–15].

Если группа  $G$  действует на группе  $H$ , то будем говорить, что неединичный элемент  $g \in G$  действует на  $H$  свободно (или без неподвижных точек), если  $C_H(g) = 1$ .

Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательстве наших результатов.

Следующее утверждение хорошо известно и легко доказывается.

**Лемма 1.** Пусть  $G$  — конечная квазипростая группа,  $F$  — поле характеристики  $p > 0$ ,  $V$  — абсолютно неприводимый  $FG$ -модуль и  $\beta$  — характер Брауэра модуля  $V$ . Если  $g$  — элемент простого порядка, отличного от  $p$ , из  $G$ , то

$$\dim C_V(g) = (\beta|_{\langle g \rangle}, 1|_{\langle g \rangle}) = \frac{1}{|g|} \sum_{x \in \langle g \rangle} \beta(x).$$

**Лемма 2** [14, теорема VII.1.16]. Пусть  $G$  — конечная группа,  $F = GF(p^m)$  — поле определения характеристики  $p > 0$  для абсолютно неприводимого  $FG$ -модуля  $V$ ,  $\langle \sigma \rangle = \text{Aut}(F)$ ,  $V_0$  обозначает модуль  $V$ , рассматриваемый как  $GF(p)G$ -модуль, и  $W = V_0 \otimes_{GF(p)} F$ . Тогда

(1)  $W = \bigoplus_{i=1}^m V^{\sigma^i}$ , где  $V^{\sigma^i}$  — модуль, алгебраически сопряженный с  $V$  посредством  $\sigma^i$ ;  
 (2)  $V_0$  является неприводимым  $GF(p)G$ -модулем и, в частности,  $W$  реализуется как неприводимый  $GF(p)G$ -модуль  $V_0$ ;

(3) с точностью до изоморфизма модулей неприводимые  $GF(p)G$ -модули находятся во взаимно однозначном соответствии с классами алгебраической сопряженности неприводимых  $\overline{GF(p)}G$ -модулей.

**Лемма 3** [12, теорема 5.3.11]. Пусть  $p$  — простое число и  $P$  — конечная  $p$ -группа. Тогда  $P$  обладает характеристической подгруппой  $C$ , называемой критической подгруппой в  $P$ , со следующими свойствами:

- (a) группа  $C/Z(C)$  элементарная абелева;
- (b)  $[P, C] \leq Z(C)$ ;
- (c)  $C_P(C) = Z(C)$ ;
- (d) каждый нетривиальный  $p'$ -автоморфизм группы  $P$  индуцирует на  $C$  нетривиальный автоморфизм.

**Лемма 4** [5, лемма 11]. Пусть  $p, q$  и  $r$  — попарно различные простые числа и  $G$  — конечная группа вида  $G = P \rtimes (T \rtimes \langle x \rangle)$ , где  $P$  — нетривиальная  $p$ -группа,  $T$  —  $q$ -группа,  $|x| = r$  и  $C_G(P) = Z(P)$ . Пусть  $C$  — критическая подгруппа в  $T$  и  $[T, \langle x \rangle] \neq 1$ . Тогда либо  $C_P(x) \neq 1$ , либо  $Z(T) \leq Z(C) \leq C_T(x)$ ,  $q = 2$ ,  $r = 1 + 2^n$  — простое число Ферма и  $[C, \langle x \rangle]$  — экстраспециальная группа порядка  $2^{2n+1}$ .

**Лемма 5** [16, лемма 1]. Пусть  $G$  — конечная группа,  $N$  — нормальная подгруппа в  $G$ ,  $G/N$  — группа Фробениуса с ядром  $F$  и циклическим дополнением  $C$ . Если  $(|F|, |N|) = 1$  и  $F$  не содержится в  $NC_G(N)/N$ , то  $s|C| \in \omega(G)$  для некоторого  $s \in \pi(N)$ .

**Лемма 6** [17, предложение 3.2]. Пусть  $G$  — конечная группа,  $H \trianglelefteq G$ ,  $G/H \cong L_2(q)$ , где  $q$  нечетно,  $q > 5$ , и  $C_H(t) = 1$  для некоторого элемента  $t$  порядка 3 из  $G$ . Тогда  $H = 1$ .

**Лемма 7** [17, предложение 4.2; 18, теорема 8.2]. Пусть  $G$  — конечная группа,  $1 \neq H \trianglelefteq G$  и  $G/H \cong L_2(2^n)$ , где  $n \geq 2$ . Предположим, что  $C_H(t) = 1$  для некоторого элемента  $t$  порядка 3 из  $G$ . Тогда  $H = O_2(G)$  и  $H$  является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка  $2^{2^n}$  в  $G$ , каждая из которых как  $G/H$ -модуль изоморфна естественному  $GF(2^n)SL_2(2^n)$ -модулю.

Пусть  $p$  — простое число,  $q = p^l$ ,  $P$  — алгебраическое замыкание поля  $GF(q)$ ,  $n \geq 2$ ,  $L = SL_n(q)$  — специальная линейная группа степени  $n \geq 2$  над полем  $GF(q)$  и  $\bar{L} = SL_n(P)$ . Пусть  $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$  — фундаментальные веса группы  $\bar{L}$ . Каждый неприводимый  $P\bar{L}$ -модуль имеет старший вес  $\omega = a_1\omega_1 + \dots + a_{n-1}\omega_{n-1}$  для некоторых неотрицательных целых чисел  $a_1, \dots, a_{n-1}$ . Этот старший вес называется  $q$ -ограниченным, если  $a_i < q$  для  $i = 1, \dots, n-1$ . Ввиду известной теоремы Стейнберга [9, § 13, теорема 43] ограничение на  $L$  неприводимого  $P\bar{L}$ -модуля с  $q$ -ограниченным старшим весом неприводимо, и совокупность таких ограничений образует полный набор неприводимых  $PL$ -модулей. Далее  $M(\omega)$  обозначает ограничение на  $L$  неприводимого  $P\bar{L}$ -модуля со старшим весом  $\omega$  из этой совокупности.

**Лемма 8.** Пусть  $n = 2$ ,  $h$  — полупростой элемент нечетного порядка  $k$  из  $L$  и  $M(\omega)$  — неприводимый  $PL$ -модуль со старшим весом  $\omega = a\omega_1$ , где  $1 \leq a < q$ . Предположим, что  $a = \sum_{j=0}^{l-1} a_j p^j$  —  $p$ -адическое разложение числа  $a$ . Тогда

(1) если  $p$  нечетно, то  $Z(L)$  лежит в ядре представления группы  $L$ , соответствующего модулю  $M(\omega)$ , тогда и только тогда, когда число  $a$  четно;

(2) элемент  $h$  имеет ненулевую неподвижную точку в  $M(\omega)$  тогда и только тогда, когда существует такое неотрицательное целое число  $b$ , что  $bk \leq a$ ,  $a - bk$  четно и  $(a - bk)/2 = \sum_{j=0}^{l-1} b_j p^j$ , где  $0 \leq b_j \leq a_j$  для всех  $j = 0, \dots, l-1$ .

◁ Утверждение (1) хорошо известно (см., например, [19, лемма 7]).

Утверждение (2) следует из [20, теорема 3]. ▷

Нам понадобится также следующий фрагмент таблицы комплексных неприводимых характеров группы  $SL_2(t)$ , где  $t$  нечетно,  $z$  — единственная инволюция из  $SL_2(t)$ ,  $a$  и  $b$  — элементы порядков  $t-1$  и  $t+1$  из  $SL_2(t)$  соответственно и  $\epsilon = (-1)^{(t-1)/2}$  (см. [21, § 38] или [22, табл. 4]).

Таблица 1

Фрагмент таблицы характеров группы  $SL_2(t)$  при нечетном  $t$

	1	$z$	$a^m$ ( $1 \leq m \leq (t-3)/2$ )	$b^n$ ( $1 \leq n \leq (t-1)/2$ )
1	1	1	1	1
$\psi$	$t$	$t$	1	-1
$\chi_k$ ( $1 \leq k \leq (t-3)/2$ )	$t+1$	$(-1)^k(t+1)$	$2 \cos \frac{2km\pi}{t-1}$	0
$\theta_l$ ( $1 \leq l \leq (t-1)/2$ )	$t-1$	$(-1)^l(t-1)$	0	$-2 \cos \frac{2lm\pi}{t+1}$
$\xi_1$	$(t+1)/2$	$\epsilon(t+1)/2$	$(-1)^m$	0
$\xi_2$	$(t+1)/2$	$\epsilon(t+1)/2$	$(-1)^m$	0
$\eta_1$	$(t-1)/2$	$-\epsilon(t-1)/2$	0	$(-1)^{n+1}$
$\eta_2$	$(t-1)/2$	$-\epsilon(t-1)/2$	0	$(-1)^{n+1}$

### 3. Доказательство теоремы

Пусть  $G$  — группа, удовлетворяющая условиям теоремы, и  $S = S(G)$ .

Предположим, что  $q = 2$ . Тогда  $p = 3$  и  $S = O(G)$ . Поскольку в  $\overline{G}$  есть четверная подгруппа, ввиду [12, теорема 5.3.16] имеем  $S = O_3(G)$  и, следовательно,  $|\pi(\overline{G})| = 4$ . Но числа  $r$  и  $s$  больше 3, поэтому они делят  $|\overline{G}|$ , смежны в графе  $\Gamma(\overline{G})$  и не смежны с 2 в этом графе. Если граф  $\Gamma(\overline{G})$  несвязен, то это противоречит [7, 8]. Если граф  $\Gamma(\overline{G})$  связан, то это противоречит [23].

Итак,  $q = 3$ , следовательно,  $p = 2$  и  $r, s > 3$ . Если  $r$  и  $s$  не делят  $|S|$ , то  $S = O_2(G)$ , следовательно,  $\pi(\overline{G}) = \pi(G)$  и вершины  $r$  и  $s$  смежны в графе  $\Gamma(\overline{G})$ , что противоречит [7] или [23]. Поэтому без ограничения общности можно считать, что  $r$  делит  $|S|$ . Пусть  $Q \in \text{Syl}_3(G)$ . Разрешимая группа  $SQ$  содержит  $\{r, s, 3\}$ -холлову подгруппу  $U$ . Так как граф  $\Gamma(U)$  несвязен, а  $W := U \cap S$  является нормальным 3-дополнением в  $U$ , на котором неединичные элементы из  $Q$  действуют без неподвижных точек, по теореме Грюнберга — Кегеля [24, теорема А] подгруппа  $U$  является группой Фробениуса с ядром  $W$  и дополнением  $Q$ . По свойствам группы Фробениуса (см., например, [12, теорема 10.3.1])  $W = F(U) = O_r(W) \times O_s(W)$  и  $Q$  — циклическая 3-группа. Отсюда ввиду [3, 6–8, 23] следует, что цоколь  $L$  группы  $\overline{G}$  изоморфен одной из групп  $L_3(5)$ ,  $L_3(17)$ ,  $U_3(7)$  или  $L_2(t)$ , где либо  $t \in \{8, 25, 49\}$ , либо  $t \geq 5$  — простое число такое, что  $|\pi(t^2 - 1)| \leq 3$ . Поскольку  $W$  является  $\{r, s\}$ -холловой подгруппой в  $S$ , а все такие подгруппы в разрешимой группе  $S$  сопряжены, имеем  $G = SN_G(W)$  и, следовательно,  $\overline{G} = SN_G(W)/S \cong N_G(W)/N_S(W)$ .

Пусть  $N = N_G(W)$ . Тогда  $S(N) = N_S(W) = W \rtimes P$ , где  $P \in \text{Syl}_2(S(N))$ . Ясно, что

$$O_{r'}(S(N)) = O_s(W)C_P(O_r(W)) \quad \text{и} \quad O_{r',r}(S(N)) = O_{r'}(S(N))O_r(W).$$

Ввиду [12, теорема 6.3.2] имеем  $C_{S(N)}(O_r(W)) \leq O_{r',r}(S(N))$ . Положим  $\tilde{N} = N/O_{r'}(S(N))$ . Тогда

$$S(\tilde{N}) = O_r(\tilde{W})P = O_r(\tilde{N}) \times \tilde{P} \quad \text{и} \quad C_{\tilde{N}}(O_r(\tilde{N})) \leq O_r(\tilde{N}).$$

Если  $L \cong L_2(5)$ , то утверждение теоремы выполняется. Поэтому в дальнейшем будем считать, что  $L \not\cong L_2(5)$ .

Предположим, что  $L \cong L_2(7)$ . Тогда можно считать, что  $r$  не делит  $|L_2(7)|$ . Поскольку ввиду [11] группа  $L_2(7)$  содержит группу Фробениуса  $F$  порядка 21, группа  $\tilde{N}$  содержит подгруппу вида  $O_r(\tilde{N}) \times F$ . Но тогда ввиду леммы 5 группа  $\tilde{N}$  содержит элемент порядка  $3r$ . Получили противоречие. Поэтому  $L \not\cong L_2(7)$ .

Пусть  $x$  — элемент порядка 3 из  $\tilde{Q}$ . Можно считать, что  $x$  нормализует подгруппу  $\tilde{P}$ . Рассмотрим подгруппу  $O_r(\tilde{N}) \times (\tilde{P} \times \langle x \rangle)$ .

Покажем сначала, что  $[\tilde{P}, \langle x \rangle] = 1$ . Предположим противное, т. е.  $[\tilde{P}, \langle x \rangle] \neq 1$ .

Пусть  $C$  — критическая подгруппа в 2-группе  $\tilde{P}$  (см. лемму 3). Применим леммы 3 и 4 к подгруппе  $O_r(\tilde{N}) \times (\tilde{P} \times \langle x \rangle)$ . Тогда  $C$  — характеристическая подгруппа в  $\tilde{P}$ ,  $[\tilde{P}, C], Z(\tilde{P}), \Phi(C) \leq Z(C) \leq C_{\tilde{P}}(x)$  и  $[C, \langle x \rangle] \cong Q_8$ . Подгруппы  $O_r(\tilde{N}C)$  и  $O_r(\tilde{N}Z(C))$  нормальны в группе  $\tilde{N}$ . Положим  $H = \tilde{N}/O_r(\tilde{N}Z(C))$ ,  $V = O_r(\tilde{N}C)/O_r(\tilde{N}Z(C))$ . Тогда  $V$  — нормальная элементарная абелева 2-подгруппа в  $H$ ,  $C_H(V) = O_2(H)$  и  $H/O_2(H) \cong \overline{G}$ . В частности,  $V$  есть точный  $GF(2)L$ -модуль такой, что  $|[V, \langle x \rangle]| = 4$  для  $\langle x \rangle = \Omega_1(\overline{Q})$ . Ясно, что циклическая 3-группа  $\tilde{Q}$  точно действует на четверной группе  $[V, \langle x \rangle]$ , поэтому  $|\tilde{Q}| = 3$ . Отсюда следует, что группа  $L$  не изоморфна группам  $L_2(8)$ ,  $L_2(17)$  и  $L_3(17)$ , силовские 3-подгруппы которых циклические порядка 9. Ясно, что модуль  $V$  имеет композиционный фактор  $V_0$  размерности, не меньшей 2. Пусть  $K$  — алгебраическое замыкание поля  $GF(2)$ . По лемме 2 для точного неприводимого  $GF(2)L$ -модуля  $V_0$  существует

класс  $\{W_1, \dots, W_m\}$  алгебраической сопряженности точных (абсолютно) неприводимых  $KL$ -модулей с полем определения  $GF(2^m)$  такой, что  $V_0 \otimes_{GF(2)} K = \bigoplus_{i=1}^m W_i$ . Обозначим через  $W_0$  модуль  $W_1$ , рассматриваемый как  $GF(2^m)L$ -модуль. Тогда модуль  $V_0$  можно отождествить с модулем  $W_0$ , рассматриваемым как  $GF(2)L$ -модуль. Поэтому мы имеем  $\dim V_0 = m \dim W_0$  и  $\dim C_{V_0}(x) = m \dim C_{W_0}(x)$ . Следовательно,

$$\dim[V_0, \langle x \rangle] = \dim V_0 - \dim C_{V_0}(x) = m(\dim W_0 - \dim C_{W_0}(x)) = 2.$$

По таблицам 2-модулярных брауэровых характеров групп  $L_3(5)$  и  $U_3(7)$  (см. [15]) и лемме 1 легко получаем, что эти соотношения в случае, когда группа  $L$  изоморфна  $L_3(5)$  или  $U_3(7)$ , не выполняются. Поэтому  $L \cong L_2(t)$ , где либо  $t \in \{25, 49\}$ , либо  $t$  — простое число такое, что  $t > 7$  и  $|\pi(t^2 - 1)| = 3$ . Применяя нашу таблицу 1, 2-модулярную матрицу разложения группы  $L_2(t)$  из [25, раздел VIII] и лемму 1, приходим к противоречию с доказанным выше соотношением  $\dim[V_0, \langle x \rangle] = 2$ .

Итак,  $[\tilde{P}, \langle x \rangle] = 1$ . Поэтому цоколь почти простой группы  $\tilde{N}/S(\tilde{N})$  централизует фактор-группу  $S(\tilde{N})/O_r(\tilde{N})$ . Пусть  $E$  — последний член ряда коммутантов группы  $\tilde{N}/O_r(\tilde{N})$ , т. е.  $E$  — слой этой группы. Тогда  $E$  — квазипростая группа такая, что  $E/Z(E) \cong L$ , и  $F^*(\tilde{N})/O_r(\tilde{N}) = (S(\tilde{N})/O_r(\tilde{N})) \circ E$ . Ввиду [11, таблица 5] группа  $E$  изоморфна  $L_3(5)$ ,  $L_3(17)$ ,  $U_3(7)$ ,  $L_2(t)$  или  $SL_2(t)$ . Если группа  $E$  изоморфна  $L_3(5)$ ,  $L_3(17)$  или  $U_3(7)$ , то по [10, таблицы 8.3, 8.5] имеем  $A_4 < E$ , откуда ввиду леммы 5 группа  $\tilde{N}$  содержит элемент порядка  $3r$ . Получили противоречие. Если  $E \cong L_2(t)$ , то ввиду лемм 6 и 7 в группе  $G$  есть элемент порядка  $3r$ . Получили противоречие. Поэтому  $E \cong SL_2(t)$  и  $t$  нечетно.

Предположим, что  $r$  не делит  $t$ . Ясно, что 3 делит  $t^2 - 1$ . Если 3 делит  $t - 1$ , то  $E$  содержит группу Фробениуса вида  $T : 3$ , где  $T$  — силовская подгруппа порядка  $t$  в  $E$ , откуда ввиду леммы 5 группа  $\tilde{N}$  содержит элемент порядка  $3r$ . Получили противоречие. Поэтому 3 делит  $t + 1$  и, следовательно,  $t > 7$  — простое число и  $r$  либо не делит  $|E|$ , либо делит  $t - 1$  (поскольку группа  $E$  имеет точно один класс циклических подгрупп порядка  $t + 1$ , а вершины  $r$  и 3 не смежны).

Предположим, что  $r$  делит  $|E|$ . Тогда  $r$  делит  $t - 1$  и  $s = t > 7$ . Пусть  $R \in Syl_r(E)$ . Можно считать, что  $C_E(R) = \langle a \rangle$ . Поэтому каждый  $r$ -блок  $B$  характеров группы  $E$  имеет циклическую дефектную группу  $D(B)$ , лежащую в  $R$ , и, следовательно, порядок группы  $N_E(D(B))/C_E(D(B))$  не превосходит 2. По теореме Дейда [26, теорема 68.1] число вершин дерева Брауэра каждого  $r$ -блока характеров группы  $E$  равно 1 или 3 и, следовательно, каждый неприводимый  $r$ -модулярный брауэров характер группы  $E$  совпадает с ограничением некоторого комплексного неприводимого характера группы  $E$  на множество  $E|_{r'}$  всех  $r'$ -элементов этой группы. Пусть  $V_\beta$  — абсолютно неприводимый  $E$ -модуль с  $r$ -модулярным брауэровым характером  $\beta$ , на котором элемент  $x$  действует свободно. Тогда ввиду леммы 1 имеем

$$\dim C_{V_\beta}(x) = \frac{\beta(1) + 2\beta(x)}{3} = 0.$$

Отсюда  $\beta(1) + 2\beta(x) = 0$ . Но  $\beta = \chi|_{E|_{r'}}$  для некоторого  $\chi \in \text{Irr}(E)$ . Можно считать, что  $x = b^{(t+1)/3}$ . Из таблицы 1 легко видеть, что  $1_E(x) = 1$ ,  $\psi(x) = -1$ ,  $\chi_k(x) = 0$  для всех  $k$ ,  $\theta_l(x)$  равно 1 при  $l \equiv \pm 1 \pmod{3}$  и  $-2$  при  $l \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $\xi_{1/2}(x) = 0$ ,  $\eta_{1/2}(x) = (-1)^{(t+1)/3} + 1$ . Поскольку  $\beta(1) + 2\beta(x) = 0$ , получаем, что  $t = 5 = r$ ; противоречие.

Таким образом,  $r$  не делит  $|E|$ . Тогда  $|\pi(E)| = 3$  и, следовательно, ввиду [6] имеем  $t = s = 17$ . Каждый неприводимый  $r$ -модулярный брауэров характер  $\beta$  группы  $E$  совпа-

дает с некоторым комплексным неприводимым характером группы  $E$ . Рассуждая, как в предыдущем абзаце, получим противоречие.

Итак, можно считать, что  $r$  делит  $t$  и  $s$  не делит  $|S|$ . Поэтому  $|\pi(E)| = 4$ . Имеем  $t = r^l$ , где  $l = 1$  при  $t = r$  и  $l = 2$  при  $t \in \{25, 49\}$ . Применим лемму 8 при  $k = 3$ . Пусть  $K$  — алгебраическое замыкание поля  $GF(r)$  и  $M(\omega)$  — точный неприводимый  $KE$ -модуль со старшим весом  $\omega = a\omega_1$  ( $1 \leq a < t$ ), на котором элемент  $x$  порядка 3 из  $E$  действует свободно. Предположим, что  $a = \sum_{j=0}^{l-1} a_j r^j$  —  $r$ -адическое разложение числа  $a$ . Покажем, что  $a = 1$  при  $t = r$  и  $a \in \{1, r\}$  при  $t \in \{25, 49\}$ . Предположим противное. Тогда  $1 \neq a \neq r$ . По п. (1) леммы 8 число  $a$  нечетно. Покажем, что выполняется условие п. (2) леммы 8 о существовании для  $x$  ненулевой неподвижной точки в  $M(\omega)$ . Если  $t \in \{25, 49\}$ , то выполнимость этого условия проверяется непосредственным перебором. Пусть  $t = r$ . Тогда  $a = a_0$  и  $1 < a < r$ . Пусть  $d$  — остаток от деления числа  $a$  на 3, т. е.  $a = 3c + d$  для некоторых неотрицательных целых чисел  $c$  и  $d$ , где  $0 \leq d < 3$ . Если  $d = 0$ , то при  $b = c$  получаем, что  $3b = a$ ,  $a - 3b = 0$  четно и  $(a - 3b)/2 = 0/2 = 0 < a_0 = a$ , т. е. проверяемое условие выполняется. Если  $d = 2$ , то при  $b = c$  получаем, что  $3b < a$ ,  $a - 3b = 2$  четно и  $(a - 3b)/2 = 2/2 = 1 < a_0 = a$ , т. е. проверяемое условие выполняется. Итак,  $d = 1$ . Поскольку  $a > 1$  нечетно, положительное число  $c$  четно и, следовательно,  $c > 1$ . Тогда  $a = 3c + 1 = 3(c - 1) + 4$  и при  $b = c - 1$  получаем, что  $3b < a$ ,  $a - 3b = 4$  четно и  $(a - 3b)/2 = 4/2 = 2 \leq a_0 = a$ , т. е. проверяемое условие выполняется. Полученное противоречие показывает, что  $a = 1$  при  $t = r$  и  $a \in \{1, r\}$  при  $t \in \{25, 49\}$ . Хорошо известно, что модуль  $M(\omega_1)$  является естественным 2-мерным  $KE$ -модулем, а модуль  $M(r\omega_1)$  в случае  $t \in \{25, 49\}$  алгебраически сопряжен с  $M(\omega_1)$  посредством скручивания Фробениуса. Ввиду [27, предложение 4.7] все эти модули являются  $r'$ -полурегулярными, т. е. все нетривиальные  $r'$ -элементы из  $E$  действуют на них свободно. Отсюда следует, что вершины  $r$  и  $s$  не смежны в графе  $\Gamma(G)$ . Получили противоречие.

Теорема доказана.

## Литература

1. Кондратьев А. С. Конечные группы с графом простых чисел, как у группы  $\text{Aut}(J_2)$  // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—2012.—Т. 18, № 3.—С. 131–138.
2. Кондратьев А. С. Конечные группы с графом простых чисел, как у группы  $A_{10}$  // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—2013.—Т. 19, № 1.—С. 136–143.
3. Kondrat'ev A. S., Minigulov N. A. Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group  $A_{10}$  // Siberian Electr. Math. Rep.—2018.—Vol. 15.—P. 1378–1382. DOI: 10.17377/semi.2018.15.113.
4. Kondrat'ev A. S., Minigulov N. A. Finite solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN.—2022.—Vol. 28, № 2.—P. 269–273. DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-269-273.
5. Kondrat'ev A. S., Minigulov N. A. On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw // Commun. Math. Stat.—2022.—Vol. 10, № 4.—P. 653–657. DOI: 10.1007/s40304-021-00242-x.
6. Кондратьев А. С., Храпцов И. В. О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—2010.—Т. 16, № 3.—С. 150–158.
7. Кондратьев А. С., Храпцов И. В. О конечных четырёхпримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—2011.—Т. 17, № 4.—С. 142–159.
8. Кондратьев А. С., Храпцов И. В. Письмо в редакцию // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—2022.—Т. 28, № 1.—С. 276–277. DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-276-277.
9. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле.—М.: Мир, 1975.—263 с.
10. Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M. The Maximal Subgroups of the Low-Dimensional Finite Classical Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013.—438 p.
11. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of Finite Groups.—Oxford: Clarendon Press, 1985.—252 p.

12. Gorenstein D. Finite Groups.—New York: Harper and Row, 1968.—527 p.
13. Huppert B. Endliche Gruppen I.—Berlin: Springer-Verlag, 1967.—793 p.
14. Huppert B., Blackburn N. Endliche Gruppen II.—Berlin: Springer-Verlag, 1982.—531 p.
15. Jansen C., Lux K., Parker R., Wilson R. An Atlas of Brauer Characters.—New York: Clarendon Press, 1995.—327 p.
16. Мазуров В. Д. Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика.—1997.—Т. 36, № 1.—С. 37–53.
17. Stewart W. B. Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers // Proc. London Math. Soc.—1973.—Vol. s3-26, № 4.—P. 653–680. DOI: 10.1112/plms/s3-26.4.653.
18. Higman G. Odd Characterizations of Finite Simple Groups: Lecture Notes.—Michigan: Univ. Michigan, 1968.—77 p.
19. Zavarnitsine A. V. Fixed points of large prime-order elements in the equicharacteristic action of linear and unitary groups // Siberian Electr. Math. Rep.—2011.—Vol. 8.—P. 333–340.
20. Кондратьев А. С., Осиновская А. А., Супруненко И. Д. О поведении элементов простого порядка из цикла Зингера в представлениях специальной линейной группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—2013.—Т. 19, № 3.—С. 179–186.
21. Dornhoff L. Group Representation Theory, Part A: Ordinary Representation Theory.—New York: Marcel Decker, 1971.—254 p.
22. Белоногов В. А. О малых взаимодействиях в конечных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—1992.—Т. 2.—С. 3–18.
23. Минигулов Н. А. Конечные почти простые 4-примарные группы со связным графом Грюнберга — Кегеля // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—2019.—Т. 25, № 4.—С. 142–146. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-142-146.
24. Williams J. S. Prime graph components of finite groups // J. Algebra.—1981.—Vol. 69, № 2.—P. 487–513. DOI: 10.1016/0021-8693(81)90218-0.
25. Burkkhardt R. Der zerlegungsmatrizen der gruppen  $PSL(2, p^f)$  // J. Algebra.—1976.—Vol. 40, № 1.—P. 75–96. DOI: 10.1016/0021-8693(76)90088-0.
26. Dornhoff L. Group Representation Theory, Part B: Modular Representation Theory.—New York: Marcel Decker, 1972.—270 p.
27. Fleischmann P., Lempken W., Tiep P. H. Finite  $p'$ -semiregular groups // J. Algebra.—1997.—Vol. 188, № 2.—P. 547–579. DOI: 10.1006/jabr.1996.6858.

Статья поступила 27 апреля 2025 г.

Кондратьев Анатолий Семенович  
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,  
Уральский математический центр,  
ведущий научный сотрудник отдела алгебры и топологии  
РОССИЯ, 620108, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16  
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-3073-3064>

Минигулов Николай Александрович  
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,  
Уральский математический центр,  
научный сотрудник отдела алгебры и топологии  
РОССИЯ, 620108, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16;  
Уральский федеральный университет,  
доцент кафедры алгебры и фундаментальной информатики  
РОССИЯ, 620062, Екатеринбург, ул. Мира, 19  
E-mail: n.a.minigulov@imm.uran.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-4995-2320>

Нирова Марина Сефовна  
Кабардино-Балкарский государственный университет  
им. Х. М. Бербекова,  
заведующая кафедрой алгебры и дифференциальных уравнений  
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173  
E-mail: nirova\_m@mail.ru  
<https://orcid.org/0009-0008-7388-0922>

FINITE NON-SOLVABLE GROUPS WHOSE GRUENBERG–KEGEL GRAPHS  
ARE ISOMORPHIC TO THE PAW. CASE  $q \leq 3$ Kongdrat'ev, A. S.<sup>1</sup>, Minigulov, N. A.<sup>1,2</sup> and Nirova, M. S.<sup>3</sup><sup>1</sup> N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,  
Ural Mathematical Center,

16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russia;

<sup>2</sup> Ural Federal University,

19 Mira St., Ekaterinburg 620062, Russia;

<sup>3</sup> Kabardino-Balkarian State University,

173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia

E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru,

n.a.minigulov@imm.uran.ru, nirova\_m@mail.ru

**Abstract.** The Gruenberg–Kegel graph  $\Gamma(G)$  (or the prime graph) of a finite group  $G$  is the graph such that the vertex set is the set of all prime divisors of the order of  $G$  and two different vertices  $p$  and  $q$  are adjacent if and only if there exists an element of order  $pq$  in  $G$ . One of popular directions of researches in finite group theory is the study of finite groups with given properties of their Gruenberg–Kegel graphs. In 2012–2013 the first author described finite groups with the Gruenberg–Kegel graph as for the group  $\text{Aut}(J_2)$  and as for the group  $A_{10}$ . The Gruenberg–Kegel graphs of groups  $A_{10}$  and  $\text{Aut}(J_2)$  are isomorphic (as abstract graphs) to the paw. The paw is the graph with four vertices whose degrees are 1, 2, 2, and 3. Generalizing these results, we consider the problem of describing finite groups such that the Gruenberg–Kegel graphs of these groups are isomorphic to the paw. In 2018 Kondrat'ev and Minigulov proved that if  $G$  is a finite non-solvable group and the graph  $\Gamma(G)$  is isomorphic to the paw, then the quotient group  $G/S(G)$  of the group  $G$  by its solvable radical  $S(G)$  is almost simple. Moreover, they classified all finite almost simple groups  $G$  such that the graphs  $\Gamma(G)$  of these groups are isomorphic to subgraphs of the paw. In 2022 Kondrat'ev and Minigulov described all finite solvable groups such that the Gruenberg–Kegel graph is isomorphic to the paw. Moreover, they classified finite non-solvable groups  $G$ , where the Gruenberg–Kegel graphs of these groups are isomorphic to the paw, in the following cases: (1)  $G$  does not contain elements of order 6; (2)  $G$  has an element of order 6 and the vertex of degree 1 of the graph  $\Gamma(G)$  divides  $|S(G)|$ . In this manuscript we continue the investigation of this problem and study its important new case of a finite non-solvable group  $G$  such that the Gruenberg–Kegel graph of this group is isomorphic to the paw, where the vertex of degree 1 of the graph  $\Gamma(G)$  does not exceed 3.

**Keywords:** finite group, non-solvable group, Gruenberg–Kegel graph, paw.

**AMS Subject Classification:** 20D10, 20D60, 05C25.

**For citation:** Kondrat'ev, A. S., Minigulov, N. A. and Nirova, M. S. Finite Non-Solvable Groups Whose Gruenberg–Kegel Graphs are Isomorphic to the Paw. Case  $q \leq 3$ , *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 3, pp. 90–100 (in Russian). DOI: 10.46698/o5301-6902-4904-1.

## References

1. Kondrat'ev, A. S. Finite Groups Having the Same Prime Graph as the Group  $\text{Aut}(J_2)$ , *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2013, vol. 283, suppl. 1, pp. 78–85. DOI: 10.1134/S0081543813090071.
2. Kondrat'ev, A. S. Finite Groups that Have the Same Prime Graph as the Group  $A_{10}$ , *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 285, suppl. 1, pp. 99–107. DOI: 10.1134/S0081543814050113.
3. Kondrat'ev, A. S. and Minigulov, N. A. Finite Almost Simple Groups Whose Gruenberg–Kegel Graphs as Abstract Graphs are Isomorphic to Subgraphs of the Gruenberg–Kegel Graph of the Alternating Group  $A_{10}$ , *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2018, vol. 15, pp. 1378–1382. DOI: 10.17377/semi.2018.15.113.
4. Kondrat'ev, A. S. and Minigulov, N. A. Finite Solvable Groups Whose Gruenberg–Kegel Graphs are Isomorphic to the Paw, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 269–273. DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-269-273.

5. Kondrat'ev, A. S. and Minigulov, N. A. On Finite Non-Solvable Groups Whose Gruenberg–Kegel Graphs are Isomorphic to the Paw, *Communications in Mathematics and Statistics*, 2022, vol. 10, no. 4, pp. 653–657. DOI: 10.1007/s40304-021-00242-x.
6. Kondrat'ev, A. S. and Khramtsov, I. V. On Finite Triprimary Groups, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 3, pp. 150–158 (in Russian).
7. Kondrat'ev, A. S. and Khramtsov, I. V. On Finite Tetraprimary Groups, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2012, vol. 279, suppl. 1, pp. 43–61. DOI: 10.1134/S0081543812090040.
8. Kondrat'ev, A. S. and Khramtsov, I. V. Letter to the Editors, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 276–277 (in Russian).
9. Steinberg, R. *Lectures on Chevalley Groups*, New Haven, Yale University, 1967, 277 p.
10. Bray, J. N., Holt, D. F. and Roney-Dougal, C. M. *The Maximal Subgroups of the Low-Dimensional Finite Classical Groups*, Cambridge, Cambridge University Press, 2013, 438 p.
11. Conway, J. H., Curtis, R. T., Norton, S. P., Parker, R. A. and Wilson, R. A. *Atlas of Finite Groups*, Oxford, Clarendon Press, 1985, 252 p.
12. Gorenstein, D. *Finite Groups*, New York, Harper and Row, 1968, 527 p.
13. Huppert, B. *Endliche Gruppen I*, Berlin, Springer-Verlag, 1967, 793 p.
14. Huppert, B. and Blackburn, N. *Endliche Gruppen II*, Berlin, Springer-Verlag, 1982, 531 p.
15. Jansen, C., Lux, K., Parker, R. and Wilson, R. *An Atlas of Brauer Characters*, New York, Clarendon Press, 1995, 327 p.
16. Mazurov, V. D. Characterizations of Finite Groups by Sets of Orders of Their Elements, *Algebra and Logic*, 1997, vol. 36, no. 1, pp. 182–192. DOI: 10.1007/BF02671616.
17. Stewart, W. B. Groups Having Strongly Self-Centralizing 3-Centralizers, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1973, vol. s3-26, no. 4, pp. 653–680. DOI: 10.1112/plms/s3-26.4.653.
18. Higman, G. *Odd Characterizations of Finite Simple Groups: Lecture Notes*, Michigan, University Michigan, 1968, 77 p.
19. Zavarnitsine, A. V. Fixed Points of Large Prime-Order Elements in the Equicharacteristic Action of Linear and Unitary Groups, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2011, vol. 8, pp. 333–340.
20. Kondrat'ev, A. S., Osinovskaya, A. A. and Suprunenko, I. D. On the Behavior of Elements of Prime Order from a Zinger Cycle in Representations of a Special Linear Group, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 285, suppl. 1, pp. 108–115. DOI: 10.1134/S0081543814050113.
21. Dornhoff, L. *Group Representation Theory, Part A: Ordinary Representation Theory*, New York, Marcel Decker, 1971, 254 p.
22. Belonogov, V. A. On Small Interactions in Finite Groups, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 1992, vol. 2, pp. 3–18 (in Russian).
23. Minigulov, N. A. Finite Almost Simple 4-Primary Groups with Connected Gruenberg–Kegel Graph, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2020, vol. 309, suppl. 1, pp. 93–97. DOI: 10.1134/S0081543820040112.
24. Williams, J. S. Prime Graph Components of Finite Groups, *Journal of Algebra*, 1981, vol. 69, no. 2, pp. 487–513. DOI: 10.1016/0021-8693(81)90218-0.
25. Burkhardt, R. Der Zerlegungsmatrizen der Gruppen  $PSL(2, p^f)$ , *Journal of Algebra*, 1976, vol. 40, no. 1, pp. 75–96. DOI: 10.1016/0021-8693(76)90088-0.
26. Dornhoff, L. *Group Representation Theory, Part B: Modular Representation Theory*, New York, Marcel Decker, 1972, 270 p.
27. Fleischmann, P., Lempken, W. and Tiep, P. H. Finite  $p'$ -Semiregular Groups, *Journal of Algebra*, 1997, vol. 188, no. 2, pp. 547–579. DOI: 10.1006/jabr.1996.6858.

Received April 27, 2025

ANATOLII S. KONDRAT'EV

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,  
Ural Mathematical Center,

16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russia,

Leading Researcher of Department of Algebra and Topology

E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

<https://orcid.org/0000-0003-3073-3064>

NIKOLAI A. MINIGULOV

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,  
Ural Mathematical Center,

16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russia,

*Researcher of Department of Algebra and Topology;*

Ural Federal University,

19 Mira St., Ekaterinburg 620062, Russia,

*Associate Professor of Department of Algebra and Fundamental Informatics*

E-mail: [n.a.minigulov@imm.uran.ru](mailto:n.a.minigulov@imm.uran.ru)

<https://orcid.org/0000-0003-4995-2320>

MARINA S. NIROVA

Kabardino-Balkarian State University,

173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia,

*Head of Department of Algebra and Differential Equations*

E-mail: [nirova\\_m@mail.ru](mailto:nirova_m@mail.ru)

<https://orcid.org/0009-0008-7388-0922>