Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 3, С. 127–135

УДК 512.54
DOI 10.46698/a1967-7824-2561-m

О ПОРОЖДЕНИИ НЕКОТОРЫХ МАТРИЧНЫХ ГРУПП ТРЕМЯ ИНВОЛЮЦИЯМИ, ДВЕ ИЗ КОТОРЫХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫ#

Т. Б. Шаипова[1]

[1] Институт математики и фундаментальной информатики СФУ,
Россия, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: 663431@ mail.ru

70-летию В. А. Койбаева посвящается

Аннотация. Группу, порожденную тремя инволюциями, две их которых перестановочны, назовем $(2\times 2, 2)$-порожденной. Известно, что специальная линейная группа $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ (соответственно ее фактор-группа по центру $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$) является $(2\times 2, 2)$-порожденной тогда и только тогда, когда $n \geqslant 5$ и $n \neq 6$ (соответственно когда $n \geqslant 5$). Ясно, что общая линейная группа $GL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не является $(2\times 2, 2)$-порожденной, поскольку в ней есть матрицы с определителем, отличным от ± 1, а определитель любой ее инволюции равен ± 1. Известно также, что группа $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ является $(2\times 2, 2)$-порожденной тогда и только тогда, когда $n \geqslant 5$ и 4 не делит n. В данной статье задача о $(2\times 2, 2)$-порожденности рассматривается для группы матриц $GL_n^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ с определителем ± 1 над кольцом целых гауссовых чисел и ее фактор-группы по центру $PGL_n^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.

Ключевые слова: общая и проективная линейные группы, кольцо целых гауссовых чисел, порождающие тройки инволюций.

AMS Subject Classification: 20H25.

Образец цитирования: *Шаипова Т. Б.* О порождении некоторых матричных групп тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 3.—С. 127–135. DOI: 10.46698/a1967-7824-2561-m.

1. Введение

Группу, порожденную тремя инволюциями, две их которых перестановочны, будем называть $(2\times 2, 2)$-порожденной. Класс таких групп замкнут относительно гомоморфных образов, если по определению единичную группу считаем таковой и не исключаем совпадения двух или всех трех инволюций.

В работах [1, 2] доказана $(2\times 2, 2)$-порожденность проективной специальной линейной группы $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ при $n \geqslant 7$. Размерности $n \leqslant 6$ рассмотрены в [3, 4]. Оказалось, что специальная линейная группа $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ (соответственно $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$) тогда и только тогда является $(2\times 2, 2)$-порожденной,

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ, соглашение № 075-02-2025-1790.

© 2025 Шаипова Т. Б.

когда $n \geqslant 5$ и $n \neq 6$ (соответственно когда $n \geqslant 5$). Ясно, что общая линейная группа $GL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не является $(2\times 2,2)$-порожденной, поскольку в ней есть матрицы с определителем, отличным от ± 1, а определитель любой ее инволюции равен ± 1. В [5] доказано, что группа $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда $n \geqslant 5$ и 4 не делит n. В данной статье задача о $(2\times 2,2)$-порожденности рассматривается для группы матриц $GL_n^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ с определителем ± 1 над кольцом целых гауссовых чисел и ее фактор-группы по центру $PGL_n^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Доказана теорема.

Теорема. а) *При $n = 2,3,4$ группы $GL_n^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PGL_n^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не являются $(2\times 2,2)$-порожденными.*

б) *При $n \geqslant 5$, исключая $GL_6^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, группы $GL_n^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PGL_n^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ являются $(2\times 2,2)$-порожденными.*

Вопрос о $(2\times 2,2)$-порожденности группы $GL_6^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ остается открытым. Отметим также, что из доказательства теоремы можно получить порождающие тройки инволюций, две из которых перестановочны, для группы $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ при $n = 4k+2 \geqslant 10$ и для группы $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ при $n = 4k \geqslant 8$, см. замечание в конце статьи.

2. Обозначения и предварительные результаты

Зафиксируем в виде леммы утверждение, которое непосредственно следует из определения $(2\times 2,2)$-порожденной группы, указанного во введении.

Лемма 1. *Класс $(2\times 2,2)$-порожденных групп замкнут относительно гомоморфных образов.*

Далее используем следующие обозначения и сокращения: K — коммутативное кольцо с единицей 1, $\langle M\rangle$ — подгруппа, порожденная непустым множеством M из какой-либо группы, $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ — кольцо целых гауссовых чисел, E_n — единичная матрица степени n, а e_{rs} — $(n\times n)$-матрица с 1 на позиции (r,s) и нулями в остальных местах. Матрицы

$$t_{rs}(x) = E_n + xe_{rs}, \quad r,s = 1,2,\ldots,n,\ r\neq s,\ x\in K,$$

называются *элементарными трансвекциями*, которые мы будем называть просто трансвекциями.

Для сопряженного элемента и коммутатора любых двух элементов из группы, используем сокращения $a^b = bab^{-1}$ и соответственно $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Положим

$$t_{rs}(K) = \{t_{rs}(k) : k\in K\}, \quad r,s = 1,2,\ldots,n,\ r\neq s,$$

и зафиксируем матрицы-перестановки:

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2 [5]**.** *Пусть d — диагональный элемент группы $GL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, μ — матрица-перестановка, соответствующая циклу $(1\,2\ldots n)$. Тогда для любого $j = 1, 2, \ldots, n-1$ подгруппа M, порожденная двумя трансвекциями $t_{j+1j}(1)$, $t_{j+1j}(i)$ и мономиальным элементом $d\mu$, содержит $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.*

3. Доказательство основной теоремы

Случай $\mathbf{n = 2}$. Существует гомоморфизм группы $GL_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ на группу $PSL_2(9)$ [5, с. 147]. Поскольку индекс подгруппы $GL_2^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ в группе $GL_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ равен 2, а группа $PSL_2(9)$ простая, то существует гомоморфизм группы $GL_2^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ на группу $PSL_2(9)$, причем центр группы $GL_2^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ лежит в ядре этого гомоморфизма. Поэтому $PSL_2(9)$ также является гомоморфным образом группы $PGL_2^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Группа $PSL_2(9)$ не является $(2\times 2, 2)$-порожденной [6]. Следовательно, по лемме 1, группы $GL_2^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PGL_2^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не будут $(2\times 2, 2)$-порожденными.

Случай $\mathbf{n = 3}$. Фактор-кольцо $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})/I$ по идеалу I, порожденному элементом $1+i$, изоморфно полю порядка 2. Поэтому существует гомоморфизм φ_I группы $GL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ на группу $SL_3(2)$. Следовательно, и $\varphi_I(GL_3^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})) = SL_3(2)$. Поскольку центр группы $GL_3^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ лежит в ядре гомоморфизма φ_I, то $SL_3(2)$ также является гомоморфным образом группы $PGL_3^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Группа $SL_3(2)$ не является $(2\times 2, 2)$-порожденной [6]. Поэтому, в силу леммы 1, не будут $(2\times 2, 2)$-порожденными группы $GL_3^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PGL_3^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.

Случай $\mathbf{n = 4}$. Так как группа $SL_4(2)$ не является $(2\times 2, 2)$-порожденной [6], доказательство того, что группы $GL_4^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PGL_4^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не являются $(2\times 2, 2)$-порожденными, аналогично как и при $n = 3$.

Случай $\mathbf{n = 6}$. Группы $PGL_6^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_6^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ изоморфны в силу равенства

$$GL_6^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) = SL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})\big\langle\, \mathrm{diag}(i,i,i,i,i,i)\big\rangle.$$

В работе [4] установлена $(2\times 2, 2)$-порожденность группы $PSL_6^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, значит такой будет и группа $PGL_6^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.

Случай нечетного $\mathbf{n > 3}$. В силу [4] группа $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ является $(2\times 2, 2)$-порожденной. Пусть группа $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается инволюциями α, β, γ, первые две из которых перестановочны. Так как $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ совпадает со своим коммутантом, то по лемме 2 из [6] она порождается парой элементов — инволюцией α и произведением $\beta\gamma$. Индекс $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ в $GL_n^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ равен 2. Поэтому $GL_n^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается инволюциями α, $-\beta$, $-\gamma$, первые две из которых перестановочны. Действительно, $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) = \langle \alpha, \beta\gamma\rangle < \langle \alpha, -\beta, -\gamma\rangle$ и $\det(-\beta) = \det(-\gamma) = -1$ в силу нечетности n. Поэтому $GL_n^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) = \langle \alpha, -\beta, -\gamma\rangle$. Таким образом, подгруппа $GL_n^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ является $(2\times 2, 2)$-порожденной. Следовательно, $(2\times 2, 2)$-порожденной будет и группа $PGL_n^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, по лемме 1.

Случай $\mathbf{n = 4k}$. Покажем, что матрицы α, β, γ, первые две из которых перестановочны, порождают группу $GL_n^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Пусть $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$, где

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -i & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Представим матрицы α, β, γ в компактном виде и в дальнейшем будем использовать это представление матриц:

$$\alpha = t_{21}(1)t_{78}(1)\,\mathrm{diag}(1,-1,-1,1,\ldots,1,-1,-1,1),$$

$$\beta = \mathrm{diag}(1,\ldots,1,-i,\ldots,-i)\tau,$$

$$\gamma = \tau\mu,$$

где матрицы τ и μ такие же, как в параграфе 2. Положим также

$$eta = \beta\gamma = \mathrm{diag}(-i,\ldots,-i,1,\ldots,1)\mu.$$

Тогда

$$\alpha^{\eta} = t_{n1}(i)t_{32}(1)\,\mathrm{diag}(1,1,-1,-1,1,\ldots,1,-1,-1),$$

$$\alpha^{\eta^2} = t_{43}(1)t_{12}(1)\,\mathrm{diag}(-1,1,1,-1,-1,1,\ldots,1,-1),$$

$$[\alpha,\alpha^{\eta}] = t_{31}(-1)t_{n-1\,1}(i),$$

$$\left([\alpha,\alpha^{\eta}]\alpha^{\eta^2}\right)^2 = t_{32}(-i)t_{41}(1)t_{42}(i)t_{n-1\,2}(-1),$$

$$\theta = \left(\left([\alpha,\alpha^{\eta}]\alpha^{\eta^2}\right)^2\right)^{\eta} = t_{43}(-i)t_{52}(i)t_{53}(1)t_{n3}(-i),$$

$$[\theta,[\alpha,\alpha^\eta]] = t_{41}(i)t_{51}(-1)t_{n1}(i),$$
$$[\alpha,[\theta,[\alpha,\alpha^\eta]]] = t_{n-1\,1}(i),$$
$$[\alpha,[\theta,[\alpha,\alpha^\eta]]]^\beta = t_{2n}(1),$$
$$\xi = \Big[[\theta,[\alpha,\alpha^\eta]]\,,[\alpha,[\theta,[\alpha,\alpha^\eta]]]^\beta\Big] = t_{21}(-i),$$
$$\xi^\eta = t_{32}(-i),$$
$$(t_{32}(-i))^\eta = t_{43}(-i),$$
$$(t_{43}(-i))^\eta = t_{54}(1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(t_{n-1\,n-2}(1))^\eta = t_{n\,n-1}(1).$$

Коммутируя последовательно полученные выше трансвекции и учитывая нечетность числа $(\frac{n}{2}-1)$, получаем

$$[\dots[t_{21}(-i),t_{32}(-i)],t_{43}(-i)],\dots,t_{\frac{n}{2}\,\frac{n}{2}-1}(i)],t_{\frac{n}{2}+1\,\frac{n}{2}}(1)],t_{\frac{n}{2}+2\,\frac{n}{2}+1}(1)],\dots,t_{n\,n-1}(1)] = t_{n1}(i).$$

Так как $((t_{n\,n-1}(1))^\eta)^\beta = t_{n\,1}(1)$, то обе трансвекции $t_{n1}(1)$ и $t_{n1}(i)$ и мономиальный элемент η лежат в M. По лемме 2, они все вместе порождают группу $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. А поскольку определитель матрицы γ равен -1, то $M = GL_n^{\pm1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.

Случай $\mathbf{n=4k+2\geqslant 10}$. Рассмотрим сначала случай $n=10$. Пусть матрицы μ, τ, τ' такие же, как в параграфе 2 и

$$\alpha = t_{21}(i)t_{910}(i)\operatorname{diag}(1,-1,-1,1,\dots,1,-1,-1,1),$$

$$\beta = \tau,$$
$$\gamma = \tau'\operatorname{diag}(1,1,\dots,1,-1)t_{510}(1),$$
$$\eta = \beta\gamma = \mu\operatorname{diag}(1,1,\dots,1,-1)t_{510}(1).$$

Положим $M = \langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$. Вычисления показывают, что

$$\alpha^\eta = t_{32}(i)t_{101}(-i)\operatorname{diag}(1,1,-1,-1,1,\dots,1,-1,-1),$$
$$[\alpha,\alpha^\eta] = t_{31}(1)t_{91}(1),$$
$$[\alpha,\alpha^\eta]^\eta = t_{42}(1)t_{102}(1),$$
$$[\alpha,\alpha^\eta]^{\eta^2} = t_{13}(-1)t_{53}(1)t_{63}(1),$$
$$\left(\alpha[\alpha,\alpha^\eta]^{\eta^2}\right)^2 = t_{23}(i),$$
$$\left(\left(\alpha[\alpha,\alpha^\eta]^{\eta^2}\right)^2\right)^{\eta^{-1}} = t_{12}(i),$$
$$\left(\left(\left(\alpha[\alpha,\alpha^\eta]^{\eta^2}\right)^2\right)^{\eta^{-1}}\right)^\eta = t_{34}(i),$$
$$\left(\left(\left(\left(\alpha[\alpha,\alpha^\eta]^{\eta^2}\right)^2\right)^{\eta^{-1}}\right)^\eta\right)^\eta = t_{45}(i).$$

Далее,

$$[t_{23}(i), t_{31}(1)t_{91}(1)] = t_{21}(i),$$
$$(t_{21}(i))^{\beta} = t_{910}(i),$$
$$(t_{910}(i))^{\eta^{-1}} = t_{89}(i),$$
$$(t_{89}(i))^{\eta^{-1}} = t_{78}(i),$$
$$(t_{78}(i))^{\eta^{-1}} = t_{67}(i),$$
$$(t_{67}(i))^{\eta^{-1}} = t_{56}(i).$$

Итак, мы получили трансвекции $t_{j\,j+1}(i)$, $j = 1,\ldots,9$, а следовательно, и $t_{10-j+1\;10-j}(i)$, $j = 1,\ldots,9$. Таким образом, в подгруппе M лежат все трансвекции $t_{j\,j+1}(i)$, $t_{j+1\,j}(i)$, $j = 1,\ldots,9$, а следовательно, и все мономиальные матрицы

$$n_j(i) = E_n + i(e_{j\,j+1} + e_{j+1\,j}) - (e_{jj} + e_{j+1\,j+1}), \quad j = 1,\ldots,9.$$

Например, при $j = 1$ имеем

$$n_1(i) = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, $(t_{45}(i))^{\eta} = t_{56}(i)t_{51}(i)$. Так как трансвекция $t_{56}(i) \in M$, то и $t_{51}(i) \in M$. С другой стороны, число $\left(\frac{10}{2} - 1\right)$ четно, поэтому, коммутируя последовательно лежащие в M трансвекции $t_{21}(i)$, $t_{32}(i)$, $t_{43}(i)$, $t_{54}(i)$, получаем

$$[t_{21}(i), t_{32}(i)] = t_{31}(-1),$$
$$[t_{31}(-1), t_{43}(i)] = t_{41}(-i),$$
$$[t_{41}(i), t_{54}(i)] = t_{51}(-1).$$

Включения $t_{51}(1), t_{51}(i) \in M$ приводят к тому, что вся подгруппа $t_{51}(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ лежит в M. Подгруппа, порожденная мономиальными матрицами $n_j(i)$, $j = 1,\ldots,9$, содержит мономиальный элемент $d\mu$ как в лемме 2. По этой лемме $SL_{10}(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \leqslant M$. Поскольку определители матриц β и γ равны -1, то мы получаем равенство $M = GL_{10}^{\pm 1}(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ и, следовательно, группа $GL_{10}^{\pm 1}(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ является $(2\times 2, 2)$-порожденной. В силу леммы 1 группа $PGL_{10}^{\pm 1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ также является $(2\times 2, 2)$-порожденной. Таким образом, для $n = 10$ теорема доказана.

В общем случае для $n = 4k + 2 \geqslant 10$

$$\alpha = t_{21}(i)t_{n-1\,n}(i)\,\mathrm{diag}(1, -1, -1, 1, \ldots, 1, -1, -1, 1),$$

$$\beta = \tau,$$
$$\gamma = \tau'\,\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, -1)t_{\frac{n}{2}\,n}(1),$$
$$\eta = \beta\gamma = \mu\,\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, -1)t_{\frac{n}{2}\,n}(1).$$

Дальнейшие вычисления показывают, что

$$\alpha^\eta = t_{32}(i)t_{n\,1}(-i)\,\mathrm{diag}(1,1,-1,-1,1,\ldots,1,-1,-1),$$

$$[\alpha,\alpha^\eta] = t_{31}(1)t_{n-1\,1}(1),$$

$$[\alpha,\alpha^\eta]^\eta = t_{42}(1)t_{n\,2}(1),$$

и так далее, как в случае $n = 10$, мы получим трансвекции $t_{j\,j+1}(i)$, $j = 1,\ldots,n-1$, а следовательно, и $t_{n-j\;n-j+1}(i)$, $j = 1,\ldots,n-1$. Таким образом, в подгруппе M лежат все трансвекции $t_{j\,j+1}(i)$, $t_{j+1\,j}(i)$, $j = 1,\ldots,n-1$, а следовательно, и все мономиальные матрицы

$$n_j(i) = E_n + i(e_{j\,j+1} + e_{j+1\,j}) - (e_{jj} + e_{j+1\,j+1})$$

при $j = 1,\ldots,n-1$, и

$$\Big(t_{\frac{n}{2}-1\;\frac{n}{2}}(i)\Big)^\eta = t_{\frac{n}{2}\;\frac{n}{2}+1}(i)t_{\frac{n}{2}\;\frac{n}{2}-1}(i).$$

Далее доказательство завершается также, как и при $n = 10$. Таким образом, теорема доказана.

Замечание. Отметим, что из указанного выше доказательства при $n = 4k+2$ можно получить порождающие тройки инволюций, две из которых перестановочны, для группы $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ при $n = 4k+2 \geqslant 10$ и для группы $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ при $n = 4k \geqslant 8$. Действительно, при $n = 4k \geqslant 8$ группа $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается инволюциями

$$\alpha = t_{21}(i)t_{n-1n}(i)\,\mathrm{diag}(1,-1,-1,1,\ldots,1,-1,-1,1),$$
$$\beta = \tau,$$
$$\gamma = \tau'\,\mathrm{diag}(1,1,\ldots,1,-1)t_{\frac{n}{2}n}(i),$$

а при $n = 4k+2 \geqslant 10$ группа $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается инволюциями

$$\alpha = t_{21}(i)t_{n-1n}(i)\,\mathrm{diag}(1,-1,-1,1,\ldots,1,-1,-1,1),$$

$$\beta = \mathrm{diag}(-1,\ldots,-1,1,\ldots,1)\tau,$$

$$\gamma = \mathrm{diag}(i,\ldots,i,-i)\tau' t_{\frac{n}{2}n}(i).$$

$\lhd$ Доказательство этого утверждение подобно приведенному выше доказательству при $n = 4k+2$. $\rhd$

Литература

1. *Levchuk D. V., Nuzhin Ya. N.* On generation of the group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute // Журн. Сиб. федер. ун-та. Сер. Матем. и физ.—2008.—Т. 1, вып. 2.—С. 133–139 (in English).
2. *Левчук Д. В.* Порождаемость группы $SL_7(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.—2009.—Т. 9, № 1.—С. 35–38.
3. *Гвоздев Р. И., Нужин Я. Н., Шаипова Т. Б.* О порождении групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика.—2022.—Т. 40.—С. 49–62. DOI: 10.26516/1997-7670.2022.40.49.
4. *Всемирнов М. А., Гвоздев Р. И., Нужин Я. Н., Шаипова Т. Б.* О порождении групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны. II // Матем. заметки.—2024.—Т. 115, № 3.—С. 317–329. DOI: 10.4213/mzm14048.

5. *Нужин Я. Н., Шаипова Т. Б.* О порождении групп $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика.—2024.—Т. 50.—С. 143–151. DOI: 10.26516/1997-7670.2024.50.143.
6. *Нужин Я. Н.* О порождающих множествах инволюций простых конечных групп // Алгебра и логика.—2019.—Т. 58, № 3.—С. 426–434. DOI: 10.33048/alglog.2019.58.310.

Статья поступила 29 апреля 2025 г.

Шаипова Татьяна Борисовна
Институт математики и фундаментальной информатики СФУ,
старший преподаватель
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: 663431@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 3, P. 127–135

ON THE GENERATION OF CERTAIN MATRIX GROUPS BY THREE INVOLUTIONS TWO OF WHICH COMMUTE

Shaipova, T. B.[1]
[1] Institute of Mathematics and Computer Science of SibFU,
79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia
E-mail: 663431@mail.ru

Abstract. A group generated by three involutions two of which commute, is called $(2\times 2,2)$-generated. It is known that the special linear group $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ over the ring of the Gaussian integers $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ (respectively, its quotient group by the center $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$) is $(2\times 2,2)$-generated if and only if $n\geqslant 5$ and $n\neq 6$ (respectively, when $n\geqslant 5$). It is clear that the general linear group $GL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ is not $(2\times 2,2)$-generated, since it contains matrices with determinant different from ±1, and the determinant of any of its involutions is equal to ±1. It is also known that the group $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ is generated by three involutions if and only if two of them commute when $n\geqslant 5$ and 4 does not divide n. In this paper we consider the problem on $(2\times 2,2)$-generation for the matrix group $GL_n^{\pm1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ with determinant ±1 over the ring of the Gaussian integers and for its quotient group by the center $PGL_n^{\pm1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.

Keywords: general and projective linear groups, the ring of Gaussian integers, generating triples of involutions.

AMS Subject Classification: 20H25.

For citation: *Shaipova, T. B.* On the Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of which Commute, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 3, pp. 127–135 (in Russian). DOI: 10.46698/a1967-7824-2561-m.

References

1. *Levchuk, D. V. and Nuzhin, Ya. N.* On Generation of the Group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by Three Involutions, Two of Which Commute, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2008, vol. 1, no. 2, pp. 133–139.
2. *Levchuk, D. V.* On the Generation of the Group $SL_7(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by Three Involutions, Two of Which Commute, *Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2009, vol. 9, no. 1 pp. 35–38 (in Russian).
3. *Gvozdev, R. I., Nuzhin, Ya. N. and Shaipova, T. B.* On Generation of the Groups $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ and $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by Three Involutions, Two of Which Commute, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 40, pp. 49–62 (in Russian). DOI: 10.26516/1997-7670.2022.40.49.

4. *Vsemirnov, M. A., Gvozdev, R. I., Nuzhin, Ya. N. and Shaipova T. B.* On the Generation of the Groups $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ and $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by Three Involutions Two of Which Commute. II, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 115, pp. 289–300. DOI: 10.1134/S0001434624030015.
5. *Nuzhin, Ya. N. and Shaipova, T. B.* On Generation of the Groups $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by Three Involutions, Two of which Commute, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 50, pp. 143–151 (in Russian). DOI: 10.26516/1997-7670.2024.50.143.
6. *Nuzhin, Ya. N.* Generating Sets of Involutions of Finite Simple Groups, *Algebra and Logic*, 2019, vol. 58, no. 3, pp. 288–293. DOI: 10.1007/s10469-019-09547-x.

Received April 29, 2025

Tatyana B. Shaipova
Institute of Mathematics and Computer Science of SibFU,
79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia,
Senior Lecturer
E-mail: 663431@mail.ru