Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 3, С. 21–27

УДК 519.17
DOI 10.46698/y5679-0662-9249-a

О ДВУДОЛЬНЫХ Q-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГРАФАХ ДИАМЕТРА, НЕ БОЛЬШЕГО 5[#]

В. В. Биткина[1], А. А. Махнев[2,3]

[1] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46,
[2] Хайнаньский университет,
Китай, 570228, Хэйкоу, Хайнань, пр. Ренмин, 58;
[3] Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
E-mail: bviktoriyav@mail.ru, makhnev@imm.uran.ru

70-летию В. А. Койбаева посвящается

Аннотация. Пусть u — вершина двудольного Q-полиномиального дистанционно регулярного графа Γ диаметра $D \geqslant 3$, $\Sigma = \Gamma_D(u)$ и $\Lambda = \Sigma_2$. Тогда Λ — дистанционно регулярный Q-полиномиальный граф. В случаях $D = 4$ и $D = 5$ граф Λ является сильно регулярным Q-полиномиальным. Половинный граф Γ_2 сильно регулярен и Λ — окрестность вершины в дополнении к Γ_2. Поэтому необходимое условие Q-полиномиальности Γ — это сильная регулярность окрестностей и антиокрестностей вершин в Λ. Двудольный дистанционно регулярный граф Γ диаметра $D \in \{4,5\}$ назовем почти Q-полиномиальным, если окрестности и антиокрестности вершин в дополнении его половинного графа сильно регулярны. Имеется два допустимых массива пересечений Q-полиномиальных графов: $\{10,9,8,7,6;1,2,3,4,10\}$ (свернутый 10-куб) и $\{55,54,50,35,10;1,5,20,45,55\}$. Эти графы имеют сильно регулярные графы Λ (параметры $(126,25,8,4)$ и $(210,99,48,45)$) и окрестности вершин в Λ (параметры $(25,8,4,2)$ и $(99,48,22,24)$). Имеются два допустимых массива пересечений, отвечающих графам на 704 вершинах: $\{26,25,24,2,1;1,2,24,25,26\}$ и $\{36,34,32,4,1;1,4,32,34,36\}$. В работе изучаются почти Q-полиномиальные графы диаметра 5. Доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{26,25,24,2,1;1,2,24,25,26\}$ и $\{36,35,32,4,1;1,4,32,35,36\}$ не существуют.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, Q-полиномиальный граф, двудольный граф.

AMS Subject Classification: 05E30, 05C50.

Образец цитирования: *Биткина В. В., Махнев А. А.* О двудольных Q-полиномиальных графах диаметра, не большего 5 // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 3.—С. 21–27. DOI: 10.46698/y5679-0662-9249-a.

Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если вершины u, w находятся на расстоянии i в графе Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0,\ldots,b_{d-1};c_1,\ldots,c_d\}$,

[#] Исследование выполнено при поддержке Естественно научного фонда Китая, проект №12171126, и гранта Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

если значения $b_i = b_i(u,w)$ и $c_i = c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i. Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Числа пересечений графа p^l_{ij}, параметры Крейна q^l_{ij} и Q-полиномиальный граф определены в [1] (стр. 43 и 48 соответственно).

Для двудольного дистанционно регулярного графа Γ половинным графом называется связная компонента в Γ_2. Для антиподального дистанционно регулярного графа Γ антиподальным частным Γ' называется граф, вершинами которого являются антиподальные классы графа Γ и две вершины u', w' смежны, если некоторые вершины $u \in u'$, $w \in w'$ смежны в Γ. Пусть u — вершина двудольного Q-полиномиального дистанционно регулярного графа Γ диаметра $D > 3$, $\Sigma = \Gamma_D(u)$ и $\Lambda = \Sigma_2$. Тогда Λ — дистанционно регулярный Q-полиномиальный граф (Джон Кохман [2]). Имеется два допустимых массива пересечений Q-полиномиальных графов: $\{10,9,8,7,6;1,2,3,4,10\}$ (свернутый 10-куб) и $\{55,54,50,35,10;1,5,20,45,55\}$. Эти графы имеют сильно регулярные графы Λ (параметры (126, 25, 8, 4) и (210, 99, 48, 45)) и окрестности вершин в Λ (параметры $(25,8,4,2)$ и (99, 48, 22, 24)). В [3] доказано, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{55,54,50,35,10;1,5,20,45,55\}$ не существует. Имеются два допустимых массива пересечений, отвечающих графам на 704 вершинах: $\{26,25,24,2,1;1,2,24,25,26\}$ и $\{36,35,32,4,1;1,4,32,35,36\}$. Антиподальные частные этих графов сильно регулярны с параметрами (352, 26, 0, 2) и (352, 36, 0, 4) соответственно.

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{26,25,24,2,1;1,2,24,25,26\}$ *не существует.*

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{36,35,32,4,1;1,4,32,35,36\}$ *не существует.*

Напомним, что сильно регулярный граф без треугольников существует тогда и только тогда, когда существует его двудольное удвоение диаметра 5 (см. из [1, теорема 1.11.1, п. (vi)]). Отсюда имеем следствие.

Следствие. *Сильно регулярные графы с параметрами* $(352,26,0,2)$ *и* $(352,36,0,4)$ *не существуют.*

1. Тройные числа пересечений

Для доказательств теорем используются тройные числа пересечений [2].

2. Граф с массивом $\{26,25,24,2,1;1,2,24,25,26\}$

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{26,25,24,2,1;1,2,24,25,26\}$. Тогда антиподальное частное — сильно регулярный граф с параметрами (352,26,0,2), половинный граф сильно регулярен с параметрами $(352,325,300,300)$. Далее, Γ имеет $1+26+325+325+26+1$ вершин, спектр: $26^1, 6^{143}, 4^{208}, -4^{208}, -6^{143}, -26^1$, числа пересечений:

$p^1_{11}=0$, $p^1_{12}=25$, $p^1_{22}=0$, $p^1_{23}=300$, $p^1_{33}=0$, $p^1_{34}=25$, $p^1_{45}=1$;
$p^2_{11}=2$, $p^2_{13}=24$, $p^2_{22}=300$, $p^2_{24}=24$, $p^2_{33}=300$, $p^2_{44}=2$, $p^2_{35}=1$;
$p^3_{12}=24$, $p^3_{14}=2$, $p^3_{23}=300$, $p^3_{33}=0$, $p^3_{34}=24$, $p^3_{25}=1$;
$p^4_{13}=25$, $p^4_{22}=300$, $p^4_{24}=25$, $p^4_{33}=300$, $p^4_{44}=0$, $p^4_{15}=1$;
$p^5_{14}=26$, $p^5_{23}=325$,

и матрицу Q дуальных собственных значений

$$\begin{pmatrix} 1 & 143 & 208 & 208 & 143 & 1 \\ 1 & 33 & 32 & -32 & -33 & -1 \\ 1 & \frac{11}{5} & -\frac{16}{5} & -\frac{16}{5} & \frac{11}{5} & 1 \\ 1 & -\frac{11}{5} & -\frac{16}{5} & \frac{16}{5} & \frac{11}{5} & -1 \\ 1 & -33 & 32 & 32 & -33 & 1 \\ 1 & -143 & 208 & -208 & 143 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $\{ijh\} = \left\{ {uvw \atop ijh} \right\}$, $[ijh] = \left[{uvw \atop ijh} \right]$.

Положим $\Sigma = \Gamma_2(u)$, $\Lambda = \Sigma_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени $p^2_{22} = 300$ на $k_2 = 325$ вершинах.

Лемма 2.1. *Пусть $d(u,v) = d(u,w) = 2$, $d(v,w) = 4$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

$[113] = [131] = 2$, $[133] = 22$;

$[222] = 277$, $[224] = [242] = 23$;

$[313] = [331] = 23$, $[315] = [351] = 1$, $[333] = 277$;

$[422] = 22$, $[424] = [442] = 2$;

$[533] = 1$.

$\lhd$ Упрощения формул $(*)$. $\rhd$

По лемме 2.1 имеем $[222] = 277$.

Пусть $d(u,v) = 2$. Напомним, что $p^4_{22} = 300$, $p^4_{24} = 25$, поэтому число ребер между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$ в графе Λ равно $277 \cdot 25 = 6925$.

С другой стороны, указанное число равно $300(299 - \lambda)$, где λ — среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$, поэтому $299 - \lambda = 23.083$ и $\lambda = 275.917$.

Лемма 2.2. *Пусть $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

$[111] = r_1 - 22$, $[113] = [131] = -r_1 + 24$, $[133] = r_1$;

$[222] = -r_1 + 299$, $[224] = [242] = r_1$, $[244] = -r_1 + 24$;

$[311] = -r_1 + 24$, $[313] = [331] = r_1$, $[333] = -r_1 + 299$, $[335] = [353] = 1$;

$[422] = r_1$, $[424] = [442] = -r_1 + 24$, $[444] = r_1 - 22$;

$[533] = 1$,

где $22 \leqslant r_1 \leqslant 24$.

$\lhd$ Положив $r_1 = [224]$ и упростив формулы $(*)$ согласно [3], получим требуемые равенства. $\rhd$

По лемме 2.2 имеем $275 \leqslant [222] \leqslant 277$.

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Пусть $d(u,v) = 2$. Подсчитаем число f_4 пар вершин y, z на расстоянии 4 в графе Σ, где $y \in \left\{ {uv \atop 24} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 22} \right\}$. С одной стороны, по лемме 2.1 имеем $[224] = 23$, поэтому $f_4 = 25 \cdot 23 = 575$. С другой стороны, по лемме 2.2 имеем $[244] = -r_1 + 24$, поэтому $f_4 = -\sum_i r^i_1 + 24 \cdot 300 = 575$, $\sum_i r^i_1 = 6625$ и $\sum_i r^i_1/300 = 22.083$.

Подсчитаем число f_2 пар вершин y, z на расстоянии 2 в графе Σ, где $y \in \left\{ {uv \atop 24} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 22} \right\}$. С одной стороны, по лемме 2.1 имеем $[222] = 277$, поэтому $f_2 = 25 \cdot 277 = 6925$. С другой стороны, по лемме 2.2 имеем $[242] = r_1$, поэтому $f_4 = \sum_i r^i_1 = 6925$ и $\sum_i r^i_1/300 = 23.083$.

Противоречие с тем, что $\sum_i r^i_1/300 = 22.083$.

Теорема 1 доказана. $\rhd$

3. Граф с массивом $\{36, 35, 32, 4, 1; 1, 4, 32, 35, 36\}$

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{36, 35, 32, 4, 1; 1, 4, 32, 35, 36\}$. Тогда антиподальное частное — сильно регулярный граф с параметрами (352,36,0,4), половинный граф сильно регулярен с параметрами (352,315,282,280). Далее, Γ имеет $1 + 36 + 315 + 315 + 36 + 1 = 704$ вершин, спектр: $36^1, 8^{120}, 4^{231}, -4^{231}, -8^{120}, -36^1$, числа пересечений:

$p^1_{11} = 0$, $p^1_{12} = 35$, $p^1_{22} = 0$, $p^1_{23} = 280$, $p^1_{33} = 0$, $p^1_{34} = 35$, $p^1_{45} = 1$;
$p^2_{11} = 4$, $p^2_{13} = 32$, $p^2_{22} = 282$, $p^2_{24} = 32$, $p^2_{33} = 282$, $p^2_{44} = 4$, $p^2_{35} = 1$;
$p^3_{12} = 32$, $p^3_{14} = 4$, $p^3_{23} = 282$, $p^3_{33} = 0$, $p^3_{34} = 32$, $p^3_{25} = 1$;
$p^4_{13} = 35$, $p^4_{22} = 280$, $p^4_{24} = 35$, $p^4_{33} = 280$, $p^4_{44} = 0$, $p^4_{15} = 1$;
$p^5_{14} = 36$, $p^5_{23} = 315$,
и матрицу Q дуальных собственных значений

$$\begin{pmatrix} 1 & 120 & 231 & 231 & 120 & 1 \\ 1 & \frac{80}{3} & \frac{77}{3} & -\frac{77}{3} & -\frac{80}{3} & -1 \\ 1 & \frac{8}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{8}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{8}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{11}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ 1 & -\frac{80}{3} & \frac{77}{3} & \frac{77}{3} & -\frac{80}{3} & 1 \\ 1 & -120 & 231 & -231 & 120 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $\{ijh\} = \left\{ {uvw \atop ijh} \right\}$, $[ijh] = \left[{uvw \atop ijh} \right]$.

Положим $\Sigma = \Gamma_2(u)$, $\Lambda = \Sigma_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени $p^2_{22} = 282$ на $k_2 = 315$ вершинах.

Лемма 3.1. *Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2$, $d(v, w) = 4$. Тогда выполняются следующие утверждения:*
$[113] = [131] = 4$, $[133] = 28$;
$[222] = 251$, $[224] = [242] = 31$;
$[313] = [331] = 31$, $[315] = [351] = 1$, $[333] = 251$;
$[422] = 28$, $[424] = [442] = 4$;
$[533] = 1$.

$\lhd$ Упрощения формул $(*)$. $\rhd$

По лемме 3.1 имеем $[222] = 251$.

Пусть $d(u, v) = 2$. Напомним, что $p^4_{22} = 280$, $p^4_{24} = 35$, поэтому число ребер между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$ в графе Λ равно $251 \cdot 35 = 8785$.

С другой стороны, указанное число равно $280(279 - \lambda)$, где λ — среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$, поэтому $279 - \lambda = 31.375$ и $\lambda = 247.625$.

Лемма 3.2. *Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$. Тогда выполняются следующие утверждения:*
$[111] = r_1 - 28$, $[113] = [131] = -r_1 + 32$, $[133] = r_1$;
$[222] = -r_1 + 281$, $[224] = [242] = r_1$, $[244] = -r_1 + 32$;
$[311] = -r_1 + 32$, $[313] = [331] = r_1$, $[333] = -r_1 + 281$, $[335] = [353] = 1$;
$[422] = r_1$, $[424] = [442] = -r_1 + 32$, $[444] = r_1 - 28$;
$[533] = 1$,
где $28 \leqslant r_1 \leqslant 32$.

$\lhd$ Упрощения формул $(*)$. $\rhd$

По лемме 2.2 имеем $249 \leqslant [222] \leqslant 253$.

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. Пусть $d(u,v)=2$. Подсчитаем число f_4 пар вершин y, z на расстоянии 4 в графе Σ, где $y \in \left\{ {uv \atop 24} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 22} \right\}$. С одной стороны, по лемме 3.1 имеем $[224]=31$, поэтому $f_4 = 35 \cdot 31 = 1085$. С другой стороны, по лемме 3.2 имеем $[244] = -r_1+32$, поэтому $f_4 = -\sum_i r_1^i + 32 \cdot 280 = 1085$, $\sum_i r_1^i = 7875$ и $\sum_i r_1^i/280 = 28.125$.

Подсчитаем число f_2 пар вершин y, z на расстоянии 2 в графе Σ, где $y \in \left\{ {uv \atop 24} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 22} \right\}$. С одной стороны, по лемме 3.1 имеем $[222]=251$, поэтому $f_2 = 35 \cdot 251 = 8785$. С другой стороны, по лемме 3.2 имеем $[242] = r_1$, поэтому $f_2 = \sum_i r_1^i = 8785$ и $\sum_i r_1^i/280 = 31.375$.

Противоречие с тем, что $\sum_i r_1^i/280 = 28.125$.

Теорема 2 доказана.$\rhd$

Литература

1. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs.—New York: Springer-Verlag, 1989.—495 p. DOI: 10.1007/978-3-642-74341-2.
2. *Coolsaet K., Jurishich A.* Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // J. Comb. Theory, Series A.—2008.—Vol. 115, № 6.—P. 1086–1095. DOI: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.
3. *Vidali J.* Using symbolic computation to prove nonexistence of distance-regular graphs // Electron. Journal of Comb.—2018.—Vol. 25, № 4. Article № P4.21. DOI: 10.37236/7763.

Статья поступила 23 февраля 2025 г.

Биткина Виктория Васильевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры прикладной математики и информатики
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: bviktoriyav@mail.ru

Махнев Александр Алексеевич
Хайнаньский университет,
профессор кафедры алгебры
КИТАЙ, 570228, Хэйкоу, Хайнань, пр. Ренмин, 58;
Институт математики и механики УрО РАН,
главный научный сотрудник отдела алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 3, P. 21–27

ON BIPARTITE Q-POLYNOMIAL GRAPHS OF DIAMETER NOT GREATER THAN 5

Bitkina, V. V.[1] and Makhnev, A. A.[2,3]

[1] North Ossetian State University,
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia
[2] Hainan Provincial University,
58 Renmin Ave., Haikou 570228, Hainan, China;
[3] N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia;
E-mail: bviktoriyav@mail.ru, makhnev@imm.uran.ru

Abstract. Let u be a vertex of a bipartite Q-polynomial distance-regular graph Γ of diameter $D \geqslant 3$, $\Sigma = \Gamma_D(u)$, and $\Lambda = \Sigma_2$. Then Λ is a distance-regular Q-polynomial graph. In the cases $D = 4$ and $D = 5$ the graph Λ is strongly regular Q-polynomial. The half graph Γ_2 is strongly regular and Λ is a neighbourhood of a vertex in the complement of Γ_2. Therefore, a necessary condition for Q-polynomiality of Γ is the strong regularity of neighbourhoods and antineighbourhoods of vertices in Λ. A bipartite distance-regular graph Γ of diameter $D \in \{4, 5\}$ is called almost Q-polynomial if neighbourhoods and antineighbourhoods of vertices in its half-graph are strongly regular. There are two admissible intersection arrays of Q-polynomial graphs: $\{10, 9, 8, 7, 6; 1, 2, 3, 4, 10\}$ (a folded 10-cube) and $\{55, 54, 50, 35, 10; 1, 5, 20, 45, 55\}$. These graphs have strongly regular graphs Λ (parameters $(126, 25, 8, 4)$ and $(210, 99, 48, 45)$) and neighbourhoods of vertices in Λ (parameters $(25, 8, 4, 2)$ and $(99, 48, 22, 24)$). There are two admissible intersection arrays corresponding to graphs on 704 vertices: $\{26, 25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25, 26\}$ and $\{36, 34, 32, 4, 1; 1, 4, 32, 34, 36\}$. In this manuscript we study almost Q-polynomial graphs of diameter 5. We obtain that distance-regular graphs with intersection arrays $\{26, 25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25, 26\}$ and $\{36, 35, 32, 4, 1; 1, 4, 32, 35, 36\}$ do not exist.

Keywords: distance-regular graph, Q-polynomial graph, bipartite graph.

AMS Subject Classification: 05E30, 05C50.

For citation: *Bitkina, V. V. and Makhnev, A. A.* On Bipartite Q-Polynomial Graphs of Diameter Not Greater than 5, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 3, pp. 21–27 (in Russian). DOI: 10.46698/y5679-0662-9249-a.

References

1. *Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A. Distance-Regular Graphs*, New York, Springer-Verlag, 1989. DOI: 10.1007/978-3-642-74341-2.
2. *Coolsaet, K. and Jurishich, A.* Using Equality in the Krein Conditions to Prove Nonexistence of Certain Distance-Regular Graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Ser.* A, 2008, vol. 115, no. 6, pp. 1086–1095. DOI: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.
3. *Vidali J.* Using Symbolic Computation to Prove Nonexistence of Distance-Regular Graphs, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2018, vol.25, no. 4, Article no. P4.21. DOI: 10.37236/7763.

Received February 23, 2025

Viktoriya V. Bitkina
North Ossetian State University,
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
E-mail: bviktoriyav@mail.ru

Alexander A. Makhnev
Hainan Provincial University,
58 Renmin Ave., Haikou 570228, Hainan, China,
Professor of the Department of Algebra
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia,
Principal Researcher of the Department of Algebra and Topology
E-mail: `makhnev@imm.uran.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713