Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 3, С. 60–67

УДК 519.17
DOI 10.46698/e5951-0245-2570-i

О КОДАХ В ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ ДИАМЕТРА 3

А. Х. Журтов[1], **З. С. Гериева**[1]

[1] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173

E-mail: zhurtov_a@mail.ru, zuhra.geri17@gmail.com

70-летию В. А. Койбаева посвящается

Аннотация. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d. Для $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u, w) = i$. Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 с собственным значением $\theta_1 = a_3$. Для графа Шилла число $a = a_3$ делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Граф Шилла имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; c_1, c_2, a(b-1)\}$. А. Юришич и Я. Видали нашли массивы пересечений дистанционно регулярных графов диаметра 3, содержащих максимальный локально регулярный 1-код, совершенный относительно последней окрестности. Оказалось, что такой граф Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ (и сильно регулярный граф Γ_3) или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$ (и является графом Шилла). В работе изучаются графы Γ, содержащие максимальный локально регулярный 1-код. Для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{a^2, a^2-1, c; 1, c, a(a-1)\}$ и $a < 1000$, $c < 1000$ кратности собственных значений целые только в случаях $(a, c) = (3, 4)$ (и $q^1_{13} < 0$), $(a, c) = (5, 3)$, $(a, c) = (9, 18)$ (и $q^3_{33} < 0$), $(a, c) = (21, 49)$ (и $q^3_{33} < 0$), $(a, c) = (21, 9)$. Таким образом, остались только массивы $\{25, 24, 3; 1, 3, 20\}$ и $\{441, 440, 9; 1, 9, 420)\}$. При этом дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{a^2, a^2-1, c; 1, c, a(a-1)\}$ не существует. Как следствие, дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{25, 24, 3; 1, 3, 20\}$ и $\{441, 440, 9; 1, 9, 420)\}$ также не существуют.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, сильно регулярный граф, граф Шилла.

AMS Subject Classification: 05E30, 05C50.

Образец цитирования: *Журтов А. Х., Гериева З. С.* О кодах в дистанционно регулярных графах диаметра 3 // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 3.—С. 60–67. DOI: 10.46698/e5951-0245-2570-i.

Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначим через $\lambda(a,b)$ (через $\mu(a,b)$), если $d(a,b)=1$ (если $d(a,b)=2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-*подграфом.*

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0,\dots,b_{d-1};c_1,\dots,c_d\}$, если значения $b_i=b_i(u,w)$ и $c_i=c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i. Положим $a_i=k-b_i-c_i$ и $k_i=|\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Числа пересечений графа p^l_{ij} и параметры Крейна q^l_{ij} определены в [2] (с. 43 и 48 соответственно).

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d. Для $i\in\{1,2,\dots,d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u,w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u,w)=i$.

Графом Шилла называется *дистанционно регулярный граф диаметра* 3 с собственным значением $\theta_1=a_3$ [1]. Для графа Шилла число $a=a_3$ делит k и полагают $b=b(\Gamma)=k/a$. Граф Шилла имеет массив пересечений $\{ab,(a+1)(b-1),b_2;c_1,c_2,a(b-1)\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра $d=2e+1$. Подмножество вершин, попарно находящихся на расстоянии d, называется e-кодом.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра $d=2e+1$, содержащим e-код C. Тогда $|C|\leqslant p^d_{dd}+2$. Если равенство достигается, то C называется *максимальным кодом.* Далее, в случае равенства $v=|C|(k+1)$ код C называется *совершенным.*

Аналогично, $|C|-1\leqslant k_d/\sum_{i=0}^{e}p^d_{id}$. Если равенство достигается в этой границе, то код C называется *совершенным относительно последней окрестности.*

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра $d=2e+1$, содержащим максимальный e-код C. Тогда $c_d\leqslant a_dp^d_{dd}$. Если равенство достигается, то C называется *локально регулярным кодом.*

Юришич и Видали нашли массивы пересечений дистанционно регулярных графов диаметра 3, содержащих максимальный локально регулярный 1-код, совершенный относительно последней окрестности [3]. Оказалось, что такой граф Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1),cp,a+1;1,c,ap\}$ (и сильно регулярный граф Γ_3) или $\{a(p+1),(a+1)p,c;1,c,ap\}$ (и Γ — граф Шилла), где $a=a_3$, $p=p^3_{33}$, $c=c_2$.

Мы изучим вопрос, что надо добавить к сильной регулярности Γ_3 (или к тому, что Γ является графом Шилла), чтобы выполнялось заключение теоремы Юришича — Видали.

Сначала изучаются графы Γ, содержащие локально регулярный 1-код, для которых Γ_3 является сильно регулярным графом.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, содержащий локально регулярный 1-код C. Если Γ_3 является сильно регулярным графом, $p=p^3_{33}$, то $c_3=a_3p$ и Γ имеет массив пересечений $\{a_3(p+1),c_2t,a_3+1;1,c_2,a_3p\}$.*

Следствие 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, содержащий максимальный совершенный локально регулярный 1-код C. Если Γ_3 является сильно регулярным графом, $p=p^3_{33}$, то Γ имеет массив пересечений $\{a_3(p+1),c_2p,a_3+1;1,c_2,a_3p\}$.*

Дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 имеет массив пересечений $\{r(c_2+1)+a_3,rc_2,a_3+1;1,c_2,r(c_2+1)\}$ [4].

Теорема 2. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3. Если Γ содержит максимальный 1-код, $p=p^3_{33}$, то $r=p$, $a_3=c_2+1$ и Γ имеет массив пересечений $\{(p+1)(c_2+1),pc_2,c_2+2;1,c_2,p(c_2+1)\}$.*

Если Γ — граф из заключения теоремы 2, то Γ_3 — псевдогеометрический граф для $GQ(p+1, c_2+1)$, $\bar{\Gamma}_2$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(p+1, 2c_2+2)$. Если $c_2 \leqslant 4$, то Γ имеет массив пересечений $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$ и не существует ввиду границы Кулена — Пака [1].

Гипотеза 1. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{(p+1)(c_2+1), pc_2, c_2+2; 1, c_2, p(c_2+1)\}$ не существует.

Теперь изучим графы Шилла, содержащие локально регулярный 1-код.

Теорема 3. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Шилла, содержащий локально регулярный 1-код C, $p = p^3_{33}$. Тогда $p = b-1$ и Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$.*

Имеется два способа сделать массив пересечений $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$ двупараметрическим. Если граф Шилла Γ с $b_2 = c_2$ имеет собственное значение $\theta_2 = 0$, то он имеет массив пересечений $\{b(b+1)s, (bs+s+1)(b-1), bs; 1, bs, (b^2-1)s\}$. Аналогично, если граф Шилла Γ с $b_2 = c_2$ не имеет треугольников, то он имеет массив пересечений $\{a^2, a^2-1, c; 1, c, a(a-1)\}$.

Рассмотрим дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{xy+yz, yz-y, xy-x; 1, x+z, yz\}$, где $x+z = xy-x$. Тогда Γ имеет неглавные собственные значения $xy+y-1$, 0, $-x(y-2)$ кратностей $m_1 = (xy-2x-1)(y^2-2)x(y-1)y/((2x+1)(y-2))$, $m_2 = (xy^2-2xy-y+1)(xy-2x-1)(y^2-2)y/(xy+y-1)(y-2)^2)$, $m_3 = (xy^2-2xy-y+1)(y-1)y^2/((2x+1)(y-2)^2)$.

Далее, $k_2 = y^2(xy-2x-1)$, $k_3 = xy(z-1)(y-1)/z$, поэтому z делит $xy(y-1)$. Ввиду целочисленности m_3 число $(y-2)^2$ делит $y^2(y-1)^2$ и $y \in \{3, 4\}$. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{6x, 3x-3, 2x; 1, 2x, 3x\}$ или $\{12x, 4x-4, 3x; 1, 3x, 8x\}$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{6x, 3x-3, 2x; 1, 2x, 3x\}$, то Γ имеет неглавные собственные значения $3x+2$, 0, $-x$ кратностей $42(x-1)x/(2x+1)$, $21(3x-2)(x-1)/(3x+2)$, $18(3x-2)/(2x+1)$. Отсюда $(2x+1)$ делит 63, $(3x+2)$ делит 140 и $x=4$. Противоречие с тем, что граф с массивом $\{24, 9, 8; 1, 8, 12\}$ не существует.

Итак, дистанционно регулярный граф с $b_2 = c_2$ и собственным значением $\theta_2 = 0$ не существует.

Далее изучаются графы Шилла Γ с $b_2 = c_2$, не имеющие треугольников.

В [5] доказано, что граф Шилла с $b_2 = sc_2$ без треугольников имеет собственные значения

$$\theta_2 = (-c_2s - c_2 + \sqrt{c_2^2s^2 + 4b^2 + c_2^2 - 2(2bc_2 - c_2^2)s - 4c_2}/2,$$
$$\theta_3 = -(c_2s + c_2 + \sqrt{c_2^2s^2 + 4b^2 + c_2^2 - 2(2bc_2 - c_2^2)s - 4c_2}/2.$$

Для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{a^2, a^2-1, c; 1, c, a(a-1)\}$ и $a < 1000$, $c < 1000$ кратности собственных значений целые только в случаях $(a, c) = (3, 4)$ (и $q^1_{13} < 0$), $(a, c) = (5, 3)$, $(a, c) = (9, 18)$ (и $q^3_{33} < 0$), $(a, c) = (21, 49)$ (и $q^3_{33} < 0$), $(a, c) = (21, 9)$. Таким образом, остались только массивы $\{25, 24, 3; 1, 3, 20\}$ и $\{441, 440, 9; 1, 9, 420\}$.

Теорема 4. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{a^2, a^2-1, c; 1, c, a(a-1)\}$ не существует.*

Следствие 2. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{25, 24, 3; 1, 3, 20\}$ и $\{441, 440, 9; 1, 9, 420\}$ не существуют.*

1. Доказательство теоремы 1 и следствия 1

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, содержащий локально регулярный 1-код C. Тогда $c_3 = a_3 p$.

Если Γ_3 является сильно регулярным графом, то по [6] имеем $b_2 = a_3+1$, $b_1 = c_2 t$ и $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{c_3}(k,t)$. В частности, $v = (k+1)(1+kt/c_3)$ и $1 + kt/c_3 = p + 2$. Отсюда $kt = a_3 p(p + 1)$.

Итак, $k = a_3(p+1)$, $k_2 = kt = a_3 p(p+1)$, $v = (p+2)(k+1)$, $k_3 = (p+1)t(a_3+1)/p$ и Γ имеет массив пересечений $\{a_3(p+1), c_2 t, a_3+1; 1, c_2, a_3 p\}$. Для чисел пересечений имеем равенства

$$p^1_{11} = a_3p-c_2t+a_3-1, \quad p^1_{12} = c_2t, \quad p^1_{22} = (a_3p-c_2-1)t, \quad p^1_{23} = (a_3+1)t, \quad p^1_{33} = (a_3+1)t/p;$$

$$p^2_{11} = c_2, \quad p^2_{12} = a_3p - c_2 - 1, \quad p^2_{13} = a_3 + 1, \quad p^2_{22} = a_3pt - a_3p + a_3 + c_2 - t + 1,$$
$$p^2_{23} = (a_3 + 1)(t - 1), \quad p^2_{33} = (a_3 + 1)t/p;$$

$$p^3_{12} = a_3p, \quad p^3_{13} = a_3, \quad p^3_{22} = a_3p(t-1), \quad p^3_{23} = a_3t, \quad p^3_{33} = -(a_3p-a_3t-pt+p-t)/p = p.$$

Поэтому $-a_3p + a_3t + pt - p + t = p^2$ и $t = p$. Теорема 1 доказана.

2. Доказательство теорем 2 и 3

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{r(c_2+1)+a_3, rc_2, a_3+1; 1, c_2, r(c_2+1)\}$ [4]. Далее, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{r(c_2+1)}(r(c_2 + 1) + a_3, r)$.

Если Γ содержит максимальный 1-код C, $p = p^3_{33}$, то $|C| = p + 2$. Ввиду границы Дельсарта для коклик графа $\bar{\Gamma}_3$ имеем $|C| = p + 2 = 1 + (r(c_2 + 1) + a_3)r/(r(c_2 + 1))$. Отсюда $p + 1 = (r(c_2 + 1) + a_3)/(c_2 + 1)$, $c_2 + 1$ делит a_3 и $p + 1 = r + a_3/(c_2 + 1)$.

Положим $a_3 = m(c_2 + 1)$. Тогда

$$p^1_{11} = c_2m + m + r - 1, \quad p^1_{12} = c_2r, \quad p^1_{22} = (c_2 + 1)(r - 1)r,$$
$$p^1_{23} = (c_2m + m + 1)r, \quad p^1_{33} = (c_2m + m + 1)m;$$

$$p^2_{11} = c_2, \quad p^2_{12} = (c_2 + 1)(r - 1), \quad p^2_{13} = c_2m + m + 1,$$
$$p^2_{22} = c_2r^2 + c_2m - c_2r + r^2 + c_2 + m - 2r + 1,$$
$$p^2_{23} = (c_2m + m + 1)(r - 1), \quad p^2_{33} = (c_2m + m + 1)m;$$
$$p^3_{12} = (c_2 + 1)r, \quad p^3_{13} = (c_2 + 1)m, \quad p^3_{22} = (c_2 + 1)(r - 1)r,$$
$$p^3_{23} = (c_2 + 1)mr, \quad p^3_{33} = c_2m^2 - c_2m + m^2 + r - 1.$$

Так как $p^3_{33} + 1 = r + m$, то $c_2m^2 - c_2m + m^2 - m = 0$ и $a_3 = c_2 + 1$. Теперь $r = p$ и Γ имеет массив пересечений $\{p(c_2 + 1) + c_2 + 1, pc_2, c_2 + 2; 1, c_2, p(c_2 + 1)\}$. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 3. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Шилла с $b_2 = c_2$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a + 1)(b - 1), c_2; 1, c_2, a(b - 1)\}$.

Если Γ содержит локально регулярный 1-код C, то $c_3 = a_3p^3_{33}$ и $p = b - 1$. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{a(p + 1), (a + 1)p, c; 1, c, ap\}$. $\rhd$

3. Тройные числа пересечений

В доказательстве теорем используются тройные числа пересечений [7].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{ {u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w,u_i)=r_i$, $\left[\begin{smallmatrix}u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{smallmatrix}\right]=\left|\left\{\begin{smallmatrix}u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{smallmatrix}\right\}\right|$. Числа $\left[\begin{smallmatrix}u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{smallmatrix}\right]$ называются *тройными числами пересечений*. Для фиксированной тройки вершин u_1,u_2,u_3 вместо $\left[\begin{smallmatrix}u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{smallmatrix}\right]$ будем писать $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W=d(u,v)$, $U=d(v,w)$, $V=d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x=u$ такая, что $d(x,u)=0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh]=\delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h]=\delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0]=\delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u,v,w\}$, и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим:

$$\sum_{l=1}^{d}[ljh]=p^U_{jh}-[0jh],\quad \sum_{l=1}^{d}[ilh]=p^V_{ih}-[i0h],\quad \sum_{l=1}^{d}[ijl]=p^W_{ij}-[ij0]. \qquad (+)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j|>W$ или $i+j<W$ имеем $p^W_{ij}=0$, поэтому $[ijh]=0$ для всех $h\in\{0,\dots,d\}$. Положим $S_{ijh}(u,v,w)=\sum_{r,s,t=0}^{d}Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\left[\begin{smallmatrix}uvw\\ rst\end{smallmatrix}\right]$. Если параметр Крейна $q^h_{ij}=0$, то $S_{ijh}(u,v,w)=0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\}=\left\{\begin{smallmatrix}uvw\\ ijh\end{smallmatrix}\right\}$, $[ijh]=\left[\begin{smallmatrix}uvw\\ ijh\end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]'=\left[\begin{smallmatrix}uwv\\ ihj\end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]^*=\left[\begin{smallmatrix}vuw\\ jih\end{smallmatrix}\right]$ и $[ijh]^\sim=\left[\begin{smallmatrix}wvu\\ hji\end{smallmatrix}\right]$. В случаях $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=2$ или $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=3$ вычисление чисел $[ijh]'=\left[\begin{smallmatrix}uwv\\ ihj\end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]^*=\left[\begin{smallmatrix}vuw\\ jih\end{smallmatrix}\right]$ и $[ijh]^\sim=\left[\begin{smallmatrix}wvu\\ hji\end{smallmatrix}\right]$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

4. Доказательство теоремы 4

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{a^2,a^2-1,c;1,c,a(a-1)\}$. Тогда Γ имеет $1+(p+1)(c_2+1)+p(p+1)(c_2+1)+(p+1)(c_2+2)=(p+2)((p+1)(c_2+1)+1)$ вершин, спектр $((p+1)(c_2+1))^1,14^{55},-1^{220},-6^{99}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 55 & 220 & 99\\ 1 & 35/2 & -5 & -27/2\\ 1 & -5/4 & -5 & 21/4\\ 1 & -15/2 & 20 & -27/2\end{pmatrix}.$$

Из [6] граф Γ_3 сильно регулярен.

Лемма 1. *Числа пересечений графа Γ равны:*

(1) $p^1_{11}=p+c_2$, $p^1_{12}=pc_2$, $p^1_{22}=(p^2-p)(c_2+1)$, $p^1_{23}=p(c_2+2)$, $p^1_{33}=c_2+2$;

(2) $p^2_{11}=c_2$, $p^2_{12}=(p-1)(c_2+1)$, $p^2_{13}=p(c_2+1)$, $p^2_{22}=p^2(c_2+1)-p(c_2+2)+2c_2+2$, $p^2_{23}=(p-1)(c_2+2)$, $p^2_{33}=c_2+2$;

(3) $p^3_{12}=p(c_2+1)$, $p^3_{13}=c_2+1$, $p^3_{22}=(p^2-p)(c_2+1)$, $p^3_{23}=p(c_2+1)$, $p^3_{33}=p$.

$\lhd$ Прямые вычисления. $\rhd$

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $\{rst\}=\left\{\begin{smallmatrix}uvw\\ rst\end{smallmatrix}\right\}$ и $[rst]=\left[\begin{smallmatrix}uvw\\ rst\end{smallmatrix}\right]$. Положим $\Sigma=\Gamma_3(u)$, $\Lambda=\Sigma_2$. Тогда Λ является регулярным графом степени $p^3_{23}=p(c_2+1)$ на $k_3=(p+1)(c_2+2)$ вершинах.

Лемма 2. *Пусть $d(u,v)=d(u,w)=3$, $d(v,w)=1$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) $[122]=c_2p-c_2+p+r_{13}-1$, $[123]=[132]=c_2-r_{13}+1$, $[133]=r_{13}$;

2) $[211]=c_2+p-r_{12}$, $[212]=[221]=c_2p-c_2+r_{12}$, $[222]=r_{14}$, $[223]=[232]=c_2p^2-2c_2p+p^2+c_2-p-r_{12}-r_{14}$, $[223]=[232]=c_2p-2c_2+2p+r_5-r_6-r_7-4$, $[233]=-c_2p^2+3c_2p-p^2-c_2+2p-r_{12}-r_{14}$;

3) $[311]=r_{12}$, $[312]=[321]=c_2-r_{12}$, $[322]=c_2p^2-2c_2p+p^2+c_2-2p-r_{13}-r_{14}+1$, $[323]=[332]=-c_2p^2+3c_2p-p^2-2c_2+3p+r_{12}+r_{13}+r_{14}-1$, $[333]=c_2p^2-3c_2p+p^2+2c_2-2p-r_{12}-r_{13}-r_{14}+1$, где $0\leqslant r_{13}\leqslant c_2+1$, $r_{12}\leqslant c_2$.

$\lhd$ Упрощения формул (+). $\rhd$

По лемме 2 имеем $[322]=c_2p^2-2c_2p+p^2+c_2-2p-r_{13}-r_{14}+1$. Так как $\{u,w\}\cup\Lambda(u)\cup\Lambda(w)$ содержит $2p(c_2+1)+2-[322]$ вершин, то $pc_2-c_2\leqslant[322]\leqslant p(c_2+1)$.

Лемма 3. *Пусть $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=3$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) $[122]=c_2p^2-2c_2p+p^2+c_2-2p+r_{35}-r_{36}-r_{37}+1$, $[123]=[132]=-c_2p^2+3c_2p-p^2-c_2+3p-r_{35}+r_{36}+r_{37}-1$, $[133]=c_2p^2-3c_2p+p^2+2c_2-3p+r_{35}-r_{36}-r_{37}+2$;

2) $[212]=c_2p-c_2+p+r_{37}-1$, $[213]=c_2-r_{37}+1$, $[221]=c_2p-c_2+p+r_{34}+1$, $[222]=r_{36}$, $[223]=c_2p^2-2c_2p+p^2+c_2-2p-r_{34}-r_{36}+1$, $[231]=c_2-r_{34}+1$, $[232]=c_2p^2-2c_2p+p^2+c_2-2p-r_{36}-r_{37}+1$, $[233]=-c_2p^2+3c_2p-p^2-2c_2+3p+r_{34}+r_{36}+r_{37}-2$;

3) $[312]=c_2-r_{37}+1$, $[313]=r_{37}$, $[321]=c_2-r_{34}+1$, $[322]=c_2p-c_2+p-r_{35}+r_{37}-1$, $[323]=r_{34}+r_{35}-r_{37}$, $[331]=r_{34}$, $[332]=r_{35}$, $[333]=p-r_{34}-r_{35}-1$,
где $r_{34},r_{37}\leqslant c_2+1$, $r_{37}\leqslant r_{34}+r_{35}\leqslant p-1$.

$\lhd$ Упрощения формул (+). $\rhd$

По лемме 3 имеем $[322]=c_2p-c_2+p-r_{35}+r_{37}-1$. Как и выше, $pc_2-c_2\leqslant[322]\leqslant p(c_2+1)$.

Найдем число ребер d между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$. Так как $p^3_{13}=c_2+1$, $p^3_{23}=p(c_2+1)$, $p^3_{33}=p$, то $(c_2+1+p)(pc_2-c_2)\leqslant d\leqslant(c_2+1+p)p(c_2+1)$.

С другой стороны, $d=p(c_2+1)(pc_2+p-1-\lambda)$, поэтому $(c_2+1+p)(pc_2-c_2)/(p(c_2+1))\leqslant pc_2+p-1-\lambda\leqslant c_2+1+p$ и $pc_2-c_2-2\leqslant\lambda\leqslant pc_2+p-1-(c_2+1+p)(pc_2-c_2)/(p(c_2+1))$, где λ — среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$.

Лемма 4. *Пусть $d(u,v)=d(u,w)=3$, $d(v,w)=2$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) $[122]=c_2p+p-r_{32}$, $[123]=[132]=r_{32}$, $[133]=c_2-r_{32}+1$;

2) $[211]=c_2-r_{39}$, $[212]=c_2p^2-2c_2p+p^2+c_2-2p-r_{30}-r_{31}+r_{33}+2$, $[213]=-c_2p^2+3c_2p-p^2-2c_2+3p+r_{29}+r_{30}+r_{31}-r_{33}-2$, $[221]=c_2p-2c_2+p+r_{29}+r_{31}-2$, $[222]=r_{30}$, $[223]=c_2p^2-2c_2p+p^2+2c_2-2p-r_{29}-r_{30}-r_{31}+2$, $[231]=c_2-r_{31}+2$, $[232]=-c_2p-c_2+p+r_{31}-r_{33}-2$, $[233]=r_{33}$;

3) $[311]=r_{29}$, $[312]=-c_2p^2+3c_2p-p^2-2c_2+3p+r_{30}+r_{31}-r_{33}-3$, $[313]=c_2p^2-3c_2p+p^2+3c_2-3p-r_{29}-r_{30}-r_{31}+r_{33}+4$, $[321]=c_2-r_{29}-r_{31}+1$, $[322]=c_2p^2-2c_2p+p^2+2c_2-3p-r_{30}+r_{32}+2$, $[323]=-c_2p^2+3c_2p-p^2-3c_2+4p+r_{29}+r_{30}+r_{31}-r_{32}-4$, $[331]=r_{31}$, $[332]=p-r_{31}-r_{32}+r_{33}$, $[333]=r_{32}-r_{33}$,
где $r_{32}\leqslant c_2+1$, $r_{39}\leqslant c_2$, $r_{29}+r_{31}\leqslant c_2+1$, $r_{33}\leqslant r_{32}$, $r_{31}+r_{32}-r_{33}\leqslant p$.

$\lhd$ Упрощения формул (+). $\rhd$

По лемме 4 имеем $[322]=c_2p^2-2c_2p+p^2+2c_2-3p-r_{30}+r_{32}+2$.

Симметризация $[123]=[132]=r_{32}=r'_{32}$, $[222]=r_{30}=r'_{30}$, $[233]=r_{33}=r'_{33}$, $[311]=r_{29}=r'_{29}$, $[313]=c_2p^2-3c_2p+p^2+3c_2-3p-r_{29}-r_{30}-r_{31}+r_{33}+4=[331]'=r'_{31}$, поэтому $c_2p^2-3c_2p+p^2+3c_2-3p+4=r_{29}+r_{30}+r_{31}-r_{33}+r'_{31}$.

$\lhd$ Доказательство теоремы 4. Пусть $d(u,v)=3$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин y, z на расстоянии 1 в графе Γ, где $y\in\left\{{uv \atop 31}\right\}$ и $z\in\left\{{uv \atop 32}\right\}$. С одной стороны, по лемме 2 имеем $[321]=c_2-r_{12}$, где $r_{12}\leqslant c_2$, поэтому $0\leqslant f_1\leqslant(c_2+1)c_2$. С другой стороны, по лемме 4 имеем $[311]=r_{29}$, поэтому $0\leqslant f_1=\sum_i r^i_{29}\leqslant(c_2+1)c_2$ и $0\leqslant\sum_i r^i_{29}/(p(c_2+1))\leqslant c_2/p$.

Подсчитаем число f_2 пар вершин y, z на расстоянии 2 в графе Γ, где $y \in \left\{ {uv \atop 31} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 32} \right\}$. С одной стороны, по лемме 2 имеем $pc_2 - c_2 \leqslant [322] \leqslant p(c_2+1)$, поэтому $(c_2+1)c_2(p-1) \leqslant f_2 \leqslant (c_2+1)p(c_2+1)$. С другой стороны, по лемме 4 имеем $[312] = [321]' = c_2 - r'_{29} - r'_{31} + 1$, поэтому $(c_2+1)c_2(p-1) \leqslant f_2 = -\sum_i((r'_{29})^i + (r'_{31})^i) + (c_2+1)p(c_2+1) \leqslant (c_2+1)p(c_2+1)$, $0 \leqslant \sum_i((r'_{29})^i + (r'_{31})^i) \leqslant (c_2+1)(p+c_2)$ и $0 \leqslant \sum_i((r'_{29})^i + (r'_{31})^i)/(p(c_2+1)) \leqslant (p+c_2)/p$.

Подсчитаем число g_1 пар вершин y, z на расстоянии 1 в графе Γ, где $y \in \left\{ {uv \atop 33} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 32} \right\}$. С одной стороны, по лемме 3 имеем $[321] = c_2 - r_{34} + 1$, где $r_{34} \leqslant c_2 + 1$, поэтому $0 \leqslant g_1 \leqslant p(c_2+1)$. С другой стороны, по лемме 4 имеем $[331] = r_{31}$, поэтому $0 \leqslant g_1 = \sum_i r^i_{31} \leqslant p(c_2+1)$ и $0 \leqslant \sum_i r^i_{31}/(p(c_2+1)) \leqslant 1$.

Если $r_{31} = 0$, то равенство $[232] = -c_2p - c_2 + p + r_{31} - r_{33} - 2$ влечет $c_2p + c_2 + r_{33} + 2 \leqslant p$. Аналогично, если $r_{31} = 1$, то $c_2p + c_2 + r_{33} + 1 \leqslant p$. В любом случае имеем противоречие. $\triangleright$

Литература

1. *Koolen J., Park J.* Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb.—2010.—Vol. 31, № 8.—P. 2064–2073. DOI: 10.1016/j.ejc.2010.05.012.
2. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs.—Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989.—495 p. DOI: 10.1007/978-3-642-74341-2.
3. *Jurishich A., Vidali J.* Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Des. Codes Cryptogr.—2012.—Vol. 65.—P. 29–47.
4. *Нирова М. С.* О дистанционно регулярных графах Γ с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 // Сиб. электрон. матем. изв.—2018.—Т. 15.—С. 175–185. DOI: 10.17377/semi.2018.15.017.
5. *Белоусов И. Н.* Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = sc_2$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—2018.—Т. 24, № 3.—С. 16–26. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-16-26.
6. *Махнева А. А., Нирова М. С.* Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = c_2$ // Матем. заметки.—2018.—Т. 103, № 5.—С. 730–744. DOI: 10.4213/mzm11503.
7. *Coolsaet K., Jurishich A.* Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // J. Comb. Theory, Ser. A.—2008.—Vol. 115.—P. 1086–1095. DOI: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.

Статья поступила 1 апреля 2025 г.

Журтов Арчил Хазешевич
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
научный руководитель кафедры алгебры и дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: zhurtov_a@mail.ru

Гериева Зухра Султановна
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
аспирант кафедры алгебры и дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: zuhra.geri17@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 3, P. 60–67

ON CODES IN DISTANCE-REGULAR GRAPHS OF DIAMETER 3

Zhurtov, A. Kh.[1] and Gerieva, Z. S.[1]

[1] Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia

E-mail: zhurtov_a@mail.ru, zuhra.geri17@gmail.com

Abstract. Let Γ be a distance-regular graph of diameter d. For $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ the graph Γ_i is defined on the vertex set of Γ and two vertices u, w are adjacent in Γ_i if and only if $d_\Gamma(u, w) = i$. The Shilla graph is a distance-regular graph of diameter 3 with the eigenvalue $\theta_1 = a_3$. For the Shilla graph the number $a = a_3$

divides k and we set $b = b(\Gamma) = k/a$. The Shilla graph has intersection array $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; c_1, c_2, a(b-1)\}$. Jurisic and Vidali found intersection arrays of distance-regular graphs of diameter 3 containing the maximal locally regular 1-code perfect with respect to the last neighborhood. Moreover, such graph Γ has intersection arrays $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ (and is a strongly regular graph Γ_3) or $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$ (and is a Shilla graph). In this manuscript we study graphs Γ such that it contains the maximal locally regular 1-code. For a distance-regular graph with intersection array $\{a^2, a^2-1, c; 1, c, a(a-1)\}$ and $a < 1000$, $c < 1000$, the multiplicities of the eigenvalues are integer only in the cases $(a, c) = (3, 4)$ (and $q^1_{13} < 0$), $(a, c) = (5, 3)$, $(a, c) = (9, 18)$ (and $q^3_{33} < 0$), $(a, c) = (21, 49)$ (and $q^3_{33} < 0$), $(a, c) = (21, 9)$. Thus, only arrays $\{25, 24, 3; 1, 3, 20\}$ and $\{(441, 440, 9; 1, 9, 420)\}$ remain. Moreover, a distance-regular graph with intersection array $\{a^2, a^2-1, c; 1, c, a(a-1)\}$ does not exist. As a consequence, distance-regular graphs with intersection arrays $\{25, 24, 3; 1, 3, 20\}$ and $\{(441, 440, 9; 1, 9, 420)\}$ do not exist.

Keywords: distance-regular graph, strongly regular graph, Shilla graph.

AMS Subject Classification: 05E30, 05C50.

For citation: *Zhurtov, A. Kh. and Gerieva, Z. S.* On Codes in Distance-Regular Graphs of Diameter 3, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 3, pp. 60–67 (in Russian). DOI: 10.46698/e5951-0245-2570-i.

References

1. *Koolen, J. and Park, J.* Shilla Distance-Regular Graphs, *European Journal of Combinatorics*, 2010, Vol. 31, no. 8. pp. 2064–2073. DOI: 10.1016/j.ejc.2010.05.012.
2. *Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A. Distance-Regular Graphs*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1989, 495 p. DOI: 10.1007/978-3-642-74341-2.
3. *Jurishich, A. and Vidali, J.* Extremal 1-Codes in distance-Regular Graphs of Diameter 3, *Designs, Codes and Cryptography*, 2012, vol. 65, pp. 29–47.
4. *Nirova, M. S.* On Distance-Regular Graphs Γ with Strongly Regular Graphs Γ_2 and Γ_3, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2018, vol. 15, pp. 175–185. DOI: 10.17377/semi.2018.15.017.
5. *Belousov, I. N.* Distance-Regular Graphs Γ with $b_2 = sc_2$, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* (*Supplement Issues*), 2019, vol. 307, no. 1, pp. S23–S33. DOI: 10.1134/S0081543819070034.
6. *Makhnev, A. A. and Nirova, M. S.* On Distance-Regular Shilla Graphs, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, no. 5, pp. 780–792. DOI: 10.1134/S0001434618050103.
7. *Coolsaet, K. and Jurishich, A.* Using Equality in the Krein Conditions to Prove Nonexistence of Certain Distance-Regular Graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2008, vol. 115, no. 6, pp. 1086–1095. DOI: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.

Received April 1, 2025

Archil Kh. Zhurtov
Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky St., Nalchik, 360004, Russia,
Scientific Director of the Department of Algebra and Differential Equations
E-mail: zhurtov_a@mail.ru@mail.ru

Zukhra S. Gerieva
Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky St., Nalchik, 360004, Russia,
Postgraduate Student at the Department of Algebra and Differential Equations
E-mail: zuhra.geri17@gmail.com