Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 3, С. 68–74

УДК 512.542
DOI 10.46698/w4978-1776-4637-t

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, СУБСПЕКТРАЛЬНЫХ КОНЕЧНЫМ ПОЧТИ ПРОСТЫМ ГРУППАМ[#]

А. Х. Журтов[1], Д. В. Лыткина[2], В. Д. Мазуров[3]

[1] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173;
[2] Новосибирский государственный университет,
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2;
[3] Институт математики им. С. Л. Соболева,
Новосибирск, 630090, пр. Ак. Коптюга, 4

E-mail: zhurtov_a@mail.ru, daria.lytkin@gmail.com, vic.mazurov@gmail.com

К 70-летию Владимира Амурхановича Койбаева

Аннотация. Спектром $\omega(G)$ конечной группы G называется множество порядков элементов группы G. Это множество замкнуто относительно делимости его элементов, поэтому оно однозначно восстанавливается по своему подмножеству $\mu(G)$, состоящему из максимальных по делимости элементов $\omega(G)$. Две группы называются изоспектральными, если их спектры совпадают. Конечная группа G называется распознаваемой по спектру в классе конечных групп (распознаваемой), если любая конечная группа, спектр которой совпадает с $\omega(G)$, изоморфна G. В недавнем обзоре, посвященном распознаваемости конечных групп, в частности, отмечен нерешенный вопрос о распознаваемости симметрической группы S_{10} всех подстановок степени 10. Трудность исследования этого вопроса объясняется, в частности, обилием конечных простых групп, субспектральных S_{10}, т. е. простых групп, спектры которых являются подмножествами $\omega(S_{10})$. В настоящей работе излагается методика нахождения групп, субспектральных данной группе, и для каждой знакопеременной группы L перечисляются субспектральные S_{10} накрытия L, основания которых являются неприводимыми модулями представлений L над конечными полями.

Ключевые слова: спектр, распознаваемость по спектру, накрытие.

AMS Subject Classification: 20D05.

Образец цитирования: *Журтов А. Х., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.* О конечных группах, субспектральных конечным почти простым группам // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 3.—С. 68–74. DOI: 10.46698/w4978-1776-4637-t.

Введение

Спектром $\omega(G)$ конечной группы G называется множество порядков элементов группы G. Это множество замкнуто относительно делимости его элементов, поэтому оно однозначно восстанавливается по своему подмножеству $\mu(G)$, состоящему из максимальных по делимости элементов $\omega(G)$. Две группы называются *изоспектральными*, если их спектры совпадают. Конечная группа G называется *распознаваемой по спектру* в классе конечных групп (для краткости: распознаваемой), если любая конечная группа, спектр которой совпадает с $\omega(G)$, изоморфна G.

[#]Работа второго и третьего автора выполнена за счет Российского научного фонда, проект № 23-41-10003.

Вопросам распознаваемости конечных групп посвящен недавний обзор [1]. В нем, в частности, отмечен нерешенный вопрос о распознаваемости симметрической группы S_{10} всех подстановок степени 10. Трудность исследования этого вопроса объясняется, в частности, обилием конечных простых групп, субспектральных S_{10}, т. е. простых групп, спектры которых являются подмножествами $\omega(S_{10})$.

В настоящей работе излагается методика нахождения групп, субспектральных данной группе, и для каждой знакопеременной группы L перечисляются субспектральные S_{10} накрытия L, основания которых являются неприводимыми модулями представлений L над конечными полями.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, субспектральная S_{10}, N — ее нормальная элементарная абелева p-подгруппа порядка p^m, на которой G действует неприводимо при сопряжении. Если G/N изоморфна простой знакопеременной группе A_n, то G изоморфна одной из групп L таблицы 1. В этой таблице символ $p^m.A_n$, где p — конкретное простое число, означает такое расширение элементарной абелевой группы N порядка p^m посредством знакопеременной группы A_n, при котором сопрягающее действие G на N является неприводимым.*

1. Предварительные факты

Лемма 1. *Если L — почти простая группа, субспектральная симметрической группы степени 10, то L находится в таблице 2.*

$\lhd$ Множество $\pi = \{2, 3, 5, 7\}$ состоит из всех простых делителей порядка группы $S_{10} \simeq \mathrm{Aut}(A_{10})$. В работе А. В. Заварницина [2] перечислены все простые группы G, для которых $\pi(G) \subseteq \pi$. Это A_5, A_6, $L_2(7)$, $U_4(2)$, $L_2(8)$, $U_3(3)$, A_7, $U_3(5)$, $L_3(4)$, A_8, A_9, J_2, A_{10}, $U_4(3)$, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, $L_2(49)$, $S_4(7)$. Две последние группы этого списка содержат элемент порядка $25 \notin \omega(S_{10})$. Множество $\mu(L)$ для перечисленных групп G можно извлечь из таблиц характеров групп $\mathrm{Aut}\, G$ [3], доказав тем самым справедливость леммы. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть G — конечная группа, V — ее неприводимый модуль над полем характеристики $p > 0$, φ — соответствующий брауэров характер, a — элемент из G, порядок n которого взаимно прост с p. Тогда размерность d подпространства неподвижных точек a в V равна*

$$d = \frac{1}{n} \sum_{x \in \langle a \rangle} \varphi(x).$$

$\lhd$ Поскольку порядок a не делится на p, ограничение φ на $\langle a \rangle$ является обыкновенным (комплексным) характером группы $A = \langle a \rangle$, и скалярное произведение $(\varphi|_A, 1|_A)$ равно числу тривиальных композиционных факторов пространства V, рассматриваемого в качестве A-модуля (см. [4, §§ 81–83] о связи брауэровых характеров с обыкновенными характерами). Так как число $(\varphi|_A, 1|_A)$ равно d, то лемма доказана. $\rhd$

Лемма 3. *Пусть $H = V\langle a \rangle$ — полупрямое произведение элементарной абелевой p-подгруппы V на циклическую группу $\langle a \rangle$ порядка m. Полупрямое произведение H тогда и только тогда содержит элемент порядка pm, когда $\bar{a}^m + \bar{a}^{m-1} + \dots + \bar{a} \neq 0$, где $\bar{a}$ — линейное преобразование подгруппы V, рассматриваемой как векторное пространство над полем порядка p, определенное равенством*

$$v\bar{a} = v^a = a^{-1} v a$$

для любого $v \in V$.

◁ Пусть $v \in V$. Тогда

$$(va)^m = \underbrace{a^{-m}(va)(va)\dots(va)}_{m \text{ сомножителей}} = v^{a^m} + v^{a^{m-1}} + \dots + v^a$$

$$= v\bar{a}^m + v\bar{a}^{m-1} + \dots + v\bar{a} = v(\bar{a}^m + \bar{a}^{m-1} + \dots + \bar{a}).$$

Если порядок va равен m для любого $v \in V$, то $(\bar{a}^m + \bar{a}^{m-1} + \dots + \bar{a})$ — нулевое преобразование пространства V. С другой стороны, если это преобразование ненулевое, то найдется v из подгруппы V, для которого $(va)^m \neq 1$, т. е. порядок элемента $va \in H$ равен pm. ▷

Таблица 1

Неприводимые накрытия простых знакопеременных групп подстановок, субспектральные симметрической группе S_{10} степени 10 $\mu(S_{10}) = \{8, 9, 12, 14, 15, 20, 21, 30\}$

L	$\mu(L)$	Примечание
A_5	$\{2, 3, 5\}$	
$2.A_5$	$\{4, 6, 10\}$	Нерасщепляемое расширение группы порядка 2 посредством A_5 (накрывающая группа для A_5)
$2 \times A_5$	$\{6, 10\}$	
$2^4_1.A_5$	$\{3, 4, 5\}$	Расширение естественного модуля группы $L_2(4) \simeq A_5$ посредством A_5
$2^4_2.A_5$	$\{4, 5, 6\}$	
$3 \times A_5$	$\{6, 15\}$	
$3^4.A_5$	$\{5, 9, 12\}$	
$3^6.A_5$	$\{6, 9, 15\}$	
$5 \times A_5$	$\{10, 15\}$	
$5^3.A_5$	$\{10, 15\}$	
$7^4.A_5$	$\{5, 14, 21\}$	
A_6	$\{3, 4, 5\}$	
$2.A_6$	$\{6, 8, 10\}$	Накрывающая группа для A_6
$2 \times A_6$	$\{4, 6, 10\}$	
$2^4.A_6$	$\{5, 6, 8\}$	
$2^{16}.A_6$	$\{6, 8, 10\}$	
$3 \times A_6$	$\{12, 15\}$	
$3^4.A_6$	$\{4, 9, 15\}$	
$3^6.A_6$	$\{9, 12, 15\}$	
$5 \times A_6$	$\{15, 20\}$	
A_7	$\{4, 5, 6, 7\}$	
$2.A_7$	$\{8, 10, 12, 14\}$	Факторгруппа накрывающей группы A_7
$2 \times A_7$	$\{4, 6, 10, 14\}$	
$2^6.A_7$	$\{7, 8, 10, 12\}$	
$2^{14}.A_7$	$\{8, 10, 12, 14\}$	
$2^{20}.A_7$	$\{8, 10, 12, 14\}$	
$3.A_7$	$\{12, 15, 21\}$	
$3 \times A_7$	$\{12, 15, 21\}$	
A_8	$\{4, 6, 7, 15\}$	
$2.A_8$	$\{8, 12, 14, 30\}$	Накрывающая группа A_8
$2 \times A_8$	$\{4, 12, 14, 30\}$	
$2^4.A_8$	$\{8, 12, 14, 15\}$	
$2^6.A_8$	$\{6, 7, 8, 10, 15\}$	
$2^{14}.A_8$	$\{8, 12, 14, 30\}$	
$2^{20}.A_8$	$\{8, 12, 14, 15\}$	
$2^{64}.A_8$	$\{8, 12, 14, 30\}$	
$3 \times A_8$	$\{12, 15, 21\}$	
A_9	$\{7, 9, 10, 12, 15\}$	
$2^8.A_9$	$\{8, 9, 12, 14, 30\}$	
$3 \times A_9$	$\{9, 12, 21, 30\}$	
A_{10}	$\{8, 9, 10, 12, 15, 21\}$	

Таблица 2

Почти простые группы, субспектральные S_{10}

L	$\mu(L)$
$A_5 \simeq L_2(4)$	$\{2,3,5\}$
$A_5.2 \simeq S_5$	$\{4,5,6\}$
A_6	$\{3,4,5\}$
$A_6.2_1 \simeq S_6$	$\{4,5,6\}$
$A_6.2_2$	$\{3,8,10\}$
$A_6.2_3$	$\{3,5,8\}$
$A_6.2^2$	$\{6,8,10\}$
$L_2(7)$	$\{3,4,7\}$
$L_2(7).2$	$\{6,7,8\}$
$U_4(2) \simeq S_4(3)$	$\{5,9,12\}$
$U_4(2).2$	$\{9,10,12\}$
$L_2(8)$	$\{2,7,9\}$
$L_2(8).3$	$\{6,7,9\}$
$U_3(3)$	$\{7,8,12\}$
$U_3(3).2$	$\{7,8,12\}$
A_7	$\{4,5,6,7\}$
$A_7.2 \simeq S_7$	$\{7,10,12\}$
$U_3(5).2$	$\{7,8,12,20\}$
$L_3(4)$	$\{3,4,5,7\}$
$L_3(4).3$	$\{4,6,15,21\}$
$L_3(4).6$	$\{8,12,15,21\}$
A_8	$\{4,6,7,15\}$
$A_8.2 \simeq S_8$	$\{7,8,10,12,15\}$
A_9	$\{7,9,10,12,15\}$
$A_9.2 \simeq S_9$	$\{8,9,12,14,15,20\}$
J_2	$\{6,7,8,10,12,15\}$
A_{10}	$\{8,9,10,12,15,21\}$
$A_{10}.2 \simeq S_{10}$	$\{8,9,12,14,20,21,30\}$
$U_4(3).2$	$\{8,9,10,12,14\}$
$S_6(2)$	$\{7,8,9,10,12,15\}$
$2^8.S_6(2)$	$\{8,9,10,12,14,15\}$
$O_8^+(2)$	$\{7,8,9,10,12,15\}$

2. Доказательство теоремы 1

$\lhd$ Нас интересует спектр группы $p^d.L$, где $p \in \{2,3,5,7\}$, d — степень неприводимого представления простой группы L из таблицы 2 над полем характеристики p, при условии, что $p^d.L$ субспектральна S_{10}. Для этой цели используем таблицы брауэровых характеров группы L [5] и, в некоторых случаях, непосредственно сами представления из [6].

Алгоритм наших действий объясним на следующем примере. Пусть $L \simeq S_6(2) \simeq \operatorname{Aut} L$. По [3] $\mu(L) = \{7,8,9,10,12,15\}$. Пусть вначале $p \neq 2$.

Если $p = 3$, то лемма 2 и соответствующая таблица в [5] показывает, что в любом неприводимом модуле V группы $S_6(2)$ над полем характеристики 3 один из элементов порядка 8 имеет неподвижную точку, и поэтому расширение V посредством $S_6(2)$ содержит элемент порядка 24, не принадлежащий спектру S_{10}.

Если $p = 5$, то аналогично для любого V в $V.S_6(2)$ есть элемент порядка 35, т. е. $V.S_6(2)$ не субспектральна S_{10}.

Если $p = 7$, то в $V.S_6(2)$ есть элемент порядка 35, поскольку силовская 5-подгруппа в $S_6(2)$ нециклическая.

Пусть теперь $p = 2$. Таблица характеров Брауэра группы $S_6(2)$ и леммы 2 и 3 показывают, что $\omega(2^s.S_6(2))$ не содержится в $\omega(\operatorname{Aut} S_{10})$ для $s \neq 6$ и 8.

С помощью информации из [6] о представлении $S_6(2)$ степени 6 над полем порядка 2 и леммы 3 нетрудно подсчитать, что $2^6.S_6(2)$ содержит элемент порядка $24 \notin \omega(S_{10})$, а

$$\mu\big(2^8.S_6(2)\big) = \{8, 9, 10, 12, 14, 15\} \subseteq \mu(\operatorname{Aut} A_{10}).$$

Аналогичные рассуждения доказывают теорему 1. $\triangleright$

Литература

1. *Grechkoseeva M. A., Mazurov V. D., Shi W. J., Vasil'ev, A. V.* Finite groups isospectral to simple groups // Commun. Math. Stat.—2023.—Vol. 11.—P. 169–194.
2. *Zavarnitsine A. V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Сиб. электрон. матем. изв.—2009.—Т. 6.—С. 1–12 (in English).
3. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of Finite Groups.—Oxford: Clarendon Press, 1985.
4. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.—М.: Наука, 1969.
5. *Jansen C., Lux K., Parker R., Wilson R.* An Atlas of Brauer Characters.—New York: Oxford Univ. Press, 1995.
6. Atlas of Finite Group Representations — Version 3.—URL: http://brauer.maths.qmul.ak.uk/Atlas/v3.

Статья поступила 12 апреля 2025 г.

Журтов Арчил Хазешович
Кабардино-Балкарский государственный университет
им. Х. М. Бербекова,
научный руководитель кафедры алгебры и дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: zhurtov_a@mail.ru

Лыткина Дарья Викторовна
Новосибирский государственный университет,
профессор кафедры алгебры и математической логики
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
E-mail: daria.lytkin@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5052-3972

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева,
главный научный сотрудник лаборатории алгебры
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4
E-mail: vic.mazurov@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-3028-8490

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 3, P. 68–74

ON FINITE GROUPS SUBSPECTRAL TO FINITE ALMOST SIMPLE GROUPS

Zhurtov, A. Kh.[1], Lytkina, D. V.[2] and Mazurov, V. D.[3]

[1] Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia;
[2] Novosibirsk State University,
2 Pirogova St., Novosibirsk 630090, Russia;
[3] Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
4 Ak. Koptyg Ave., Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: zhurtov_a@mail.ru, daria.lytkin@gmail.com, vic.mazurov@gmail.com

Abstract. Spectrum $\omega(G)$ of a finite group G is the set of element orders of G. This set is closed under divisibility of its elements, therefore it can be uniquely defined by its subset $\mu(G)$ consisting of maximal under divisibility elements of $\omega(G)$. Two groups are said to be isospectral, if their spectra coincide. A finite group G is called recognizable by spectrum in the class of finite groups (or recognaizable), if every finite group whose spectrum coincides with $\omega(G)$ is isomorphic to G. In a recent survey dedicated to recognizability of finite groups, an unsolved question is mentioned about recognizability of symmetric group S_{10} of all permutations of degree 10. Difficulty of this problem is, in particular, due to a wast number of finite simple groups, which are subspectral to S_{10}, i. e. simple groups whose spectra are subsets of $\omega(S_{10})$. This paper gives a method of finding all groups subspectral to a given group, and for every alternating group L the list of subspectral to S_{10} covers of L are given, whose basements are irreducible modules of representations of L over finite fields.

Keywords: spectrum, recognizability by spectrum, cover.

AMS Subject Classification: 20D05.

For citation: *Zhurtov, A. Kh., Lytkina, D. V. and Mazurov, V. D.* On Finite Groups Subspectral to Finite Almost Simple Groups, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 3, pp. 68–74 (in Russian). DOI: 10.46698/w4978-1776-4637-t.

References

1. *Grechkoseeva, M. A., Mazurov, V. D., Shi, W. J. and Vasil'ev, A. V.* Finite Groups Isospectral to Simple Groups, *Communications in Mathematics and Statistics*, 2023, vol. 11, pp. 169–162.
2. *Zavarnitsin, A. V.* Finite Simple Groups With Narrow Prime Spectrum, *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2009, vol. 6, pp. 1–12.
3. *Conway, J. H., Curtis, R. T., Norton, S. P., Parker, R. A. and Wilson, R. A. Atlas of Finite Groups*, Oxford, Clarendon Press, 1985.
4. *Curtis, C. and Reiner, I. Representation Theory of Finite Groups*, New York, London, John Wiley and Sons, 1962.
5. *Jansen, C., Lux, K., Parker, R. and Wilson, R. An Atlas of Brauer Characters*, New York, Oxford University Press, 1995.
6. *Atlas of Finite Group Representations — Version 3.* URL: http://brauer.maths.qmul.ak.uk/Atlas/v3.

Received April 12, 2025

Archil Kh. Zhurtov
Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia,
Scientific Director of the Department of Algebra and Differential Equations
E-mail: zhurtov_a@mail.ru

Daria V. Lytkina
Novosibirsk State University,
2 Pirogov St., Novosibirsk 630090, Russia,
Professor of the Department of Algebra and Mathematical Logic
E-mail: `daria.lytkin@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0002-5052-3972

Victor D. Mazurov
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
4 Ak. Koptyg Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
Chief Researcher of the Algebra Laboratory
E-mail: `vic.mazurov@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0003-3028-8490