Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 3, С. 75–81

УДК 512.542
DOI 10.46698/h4871-7742-3837-a

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ АБЕЛЕВОЙ И МИНИМАЛЬНОЙ НЕАБЕЛЕВОЙ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

В. И. Зенков[1,2]

[1] Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Россия, 620108, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
[2] Уральский федеральный университет,
Россия, 620062, Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: `V1I9Z52@mail.ru`

70-летию В. А. Койбаева посвящается

Аннотация. Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G. Через $M = M_G(A, B)$ (соответственно $m = m_G(A, B)$) обозначается множество всех минимальных по включению (соответственно по порядку) пересечений вида $A \cap B^g$, где $g \in G$. Положим $\mathrm{min}_G(A, B) = \langle m\rangle$ и $\mathrm{Min}_G(A, B) = \langle M\rangle$. В 1994 г. автор доказал, что если A и B — абелевы подгруппы из G, то $\mathrm{Min}_G(A, B) \leqslant F(G)$. В данной работе дается другое доказательство этого результата. Кроме того, построена конечная группа G, содержащая абелеву подгруппу A, минимальную неабелеву подгруппу B и элементы g_1 и g_2 такие, что $A \cap B^{g_1} \leqslant F(G)$, $A \cap B^{g_2} \nleqslant F(G)$, $|A \cap B^{g_1}| = |A \cap B^{g_2}|$ и $A \cap B^{g_1}$, $A \cap B^{g_2} \in \mathrm{min}_G(A, B)$. Приведен пример группы G такой, что для некоторых $g_1, g_2 \in G$ имеем $A \cap B^{g_1}$, $A \cap B^{g_2} \in \mathrm{Min}_G(A, B)$, $A \cap B^{g_1} \leqslant F(G)$ и $A \cap B^{g_2} \nleqslant F(G)$. Показано также, что существует группа G с нильпотентными подгруппами A и B такими, что $m \subset M$ и $\mathrm{min}_G(A, B) < \mathrm{Min}_G(A, B)$.

Ключевые слова: конечная группа, абелева подгруппа, пересечение подгрупп.

AMS Subject Classification: 20D10, 20D60, 05C25.

Образец цитирования: *Зенков В. И.* О пересечении абелевой и минимальной неабелевой подгрупп в конечных группах // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 3.—С. 75–81. DOI: 10.46698/h4871-7742-3837-a.

1. Введение

Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G. Рассмотрим множество всех пересечений вида $A \cap B^g$, $g \in G$. Определим в этом множестве два подмножества: $M = M_G(A, B)$ — множество всех минимальных по включению пересечений и $m = m_G(A, B)$ — множество всех минимальных по порядку пересечений. По определению имеем $m \subseteq M$, и для подгрупп $\langle m\rangle = \mathrm{min}_G(A, B)$ и $\langle M\rangle = \mathrm{Min}_G(A, B)$ имеем $\mathrm{min}_G(A, B) \leqslant \mathrm{Min}_G(A, B)$. Вообще говоря, в некоторых случаях $m \subset M$ и $\mathrm{min}_G(A, B) < \mathrm{Min}_G(A, B)$. Например, в группе $G = \Sigma_4$ для подгрупп $A \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и $B < A$, $B \simeq C_4$ имеем $M = \{B, \langle t\rangle^f, \langle t\rangle^{f^2}\}$, где t — инволюция из B и f — элемент порядка три из G, а $m = \{\langle t\rangle^f, \langle t\rangle^{f^2}\}$. Следовательно, $M \supset m$ и $A = \mathrm{Min}_G(A, B) > \mathrm{min}_G(A, B) = O_2(G)$. В то же время $M_G(B, A) = m_G(B, A) = \{\Omega_1(B)\}$. Поэтому $\mathrm{Min}_G(B, A) = \mathrm{min}_G(B, A) = \Omega_1(B) < O_2(G)$.

Отметим, что в рассматриваемом примере одна из подгрупп абелева, а вторая минимальная неабелева. И именно по причине неабелевости хотя бы одной из подгрупп, возможно появление таких примеров, так как в случае, когда подгруппы A и B абелевы, согласно [1] справедлива

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, A и B — абелевы подгруппы из G. Тогда $\mathrm{Min}_G(A,B) \leqslant F(G)$.*

Оригинальное доказательство этого утверждения, приведенное в [1], опирается на одну теорему единственности, в общем виде принадлежащую Виланду [2, теорема 2.9], и теорему Бэра — Судзуки [2, теорема 2.12], которая, впрочем, легко следует из теоремы Виланда. Теорема Виланда гласит, что если некоторая подгруппа A субнормальна в каждой содержащей ее максимальной подгруппе из G, то либо A субнормальна в G, либо A лежит в единственной максимальной подгруппе M из G. Если A нильпотентна, то легко показать по индукции, что субнормальная нильпотентная подгруппа из G лежит в $F(G)$, что сделано, например, в [2, теорема 2.2]. В нашей ситуации мы будем применять эту теорему единственности к абелевой подгруппе A. Этот круг вопросов подробно обсуждается в [2, раздел 2A]. Доказательство того, что в любой конечной группе G для любых абелевых подгрупп A и B из G имеем $\mathrm{Min}_G(A,B) \leqslant F(G)$, приведенное в [2, теорема 2.18], также, как и оригинальное, опирается на теорему Бэра — Судзуки.

В данной работе мы приведем другое доказательство этой теоремы, которое не использует теорему Бэра — Судзуки, а целиком основано на версии упомянутой теоремы Виланда для нильпотентной подгруппы, а именно, на следующем предложении, имеющим самостоятельный интерес.

Предложение. *Пусть G — конечная группа, A — нильпотентная подгруппа из G и $A \leqslant F(M)$ для любой максимальной подгруппы M из G, содержащей A. Если $A \nleqslant F(G)$, то A лежит в единственной максимальной подгруппе из G.*

Как уже было отмечено, теорема 1 вместе с новым доказательством, предложенным автором монографии [2] Айзексом, вошла и обсуждалась в [2, введение и раздел 2A] вместе со следствиями из теоремы.

Доказана также следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть группа G равна $G_1 \times G_2$, где $G_1 \simeq C_p$, p — простое, а $G_2 = G_3 \leftthreetimes G_4$, где $G_3 \simeq E_{p^2}$, $G_4 \simeq SL_2(p)$ и G_4 действует на G_3 как подгруппа из $\mathrm{Hol}(E_{p^2})$. Пусть A — абелева и B — нильпотентная подгруппы из G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathrm{min}_G(A,B) \nleqslant F(G)$;

(2) $p = 2$, $A \simeq E_4$ *и* $A \nleqslant G_2$, $B \simeq D_8$ *и* $B \nleqslant G_2$.

Теорема 2 дает принципиальный ответ на вопрос о том, всегда ли $\mathrm{min}_G(A,B) \leqslant F(G)$, поскольку по [3] при выполнении условий теоремы 2 найдутся пересечение $D_1 = A \cap B^{g_1}$ порядка 2, не лежащее в $F(G)$ и пересечение $D_2 = A \cap B^{g_2}$ порядка 2, лежащее в $F(G)$, для соответствующих элементов g_1 и g_2 из G. Однако следует заметить, что соответствующий пример построен только для $p = 2$. Поэтому возникает вопрос о справедливости выполнения включения $\mathrm{min}_G(A,B) \leqslant F(G)$ в случае, когда порядок абелевой подгруппы A нечетен, а подгруппа B нильпотентна. Этот вопрос поставлен автором в [4, вопрос 16] и до сих пор открыт. Теорема 2 говорит о том, что при выполнении ее условий для нечетных простых чисел имеем $\mathrm{min}_G(A,B) \leqslant F(G)$, что является частичным ответом на [4, вопрос 16]. В общем случае из [5, теорема] следует лишь то, что $A \cap B^g \leqslant F(G)$ для некоторого g из G. Но если подгруппы A и B обе нильпотентны, то как для $p = 2$, так и для некоторых нечетных чисел, существуют примеры групп, в которых $\mathrm{min}_G(A,B) \cap F(G) = 1$. Для $p = 2$ это группа $G = E_9 \leftthreetimes D_8$ с точным действием D_8 на E_9, а для простого числа Мерсенна, равного 2^n-1, группа $G=(E_{2^n}\leftthreetimes(2^n-1))\wr(2^n-1)$. Поэтому случай абелевой подгруппы A и нильпотентной подгруппы B представляет особый интерес.

2. Предварительные сведения

Обозначения в основном стандартны, их можно найти в [2, 6].

Если n — натуральное число и p — простое число, то C_n обозначает циклическую группу порядка n, E_{p^n} — элементарную абелеву группу порядка p^n, Σ_n — симметрическую группу подстановок на n символах.

Приведем доказательство предложения.

$\lhd$ Доказательство предложения. По условию предложения подгруппа A субнормальна в M. Следовательно, A субнормальна в любой подгруппе H из G, содержащей A. Тогда по теореме Виланда (см. [2, теорема 2.9]) либо A лежит в единственной максимальной подгруппе из G, либо A субнормальна в G. Но если A субнормальна, то согласно [2, теорема 2.2] подгруппа A лежит в $F(G)$, что противоречит условию предложения. Поэтому A лежит в единственной максимальной подгруппе из G. $\rhd$

3. Доказательство теорем

Докажем теорему 1.

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Допустим, что теорема 1 неверна и G — контрпример минимального порядка к теореме 1. В группе G выберем подгруппы A и B с условием $\mathrm{Min}_G(A,B)\nleqslant F(G)$ таким образом, чтобы число $|A||B|$ было минимальным.

Рассмотрим максимальную подгруппу H из G, содержащую A. Пусть $D=A\cap B^g\in M_G(A,B)$. Тогда $D=A\cap(H\cap B^g)\in M_H(A,H\cap B^g)$. Действительно, если $D>D_1\in M_H(A,H\cap B^g)$, то $A\cap B^g>A\cap(H\cap B^g)^h$ для некоторого h из H. Следовательно, $A\cap B^g>A\cap H\cap B^{gh}=A\cap B^{gh}$. Противоречие с тем, что $D\in M_G(A,B)$. Отсюда по индукции $\mathrm{Min}_G(A,B)\leqslant F(H)$ для любой максимальной подгруппы H из G. Согласно предложению $\mathrm{Min}_G(A,B)$ лежит в единственной максимальной подгруппе H из G.

Допустим, что $D=A\cap B^g\leqslant Z(G)$. Тогда для любого элемента h из G имеем $A\cap B^{gh}\geqslant A\cap B^g$. Действительно, $A\geqslant A\cap B^g$ и $B^g\geqslant A\cap B^g$. Поэтому $B^{gh}=(B^g)^h\geqslant(A\cap B^g)^h=A\cap B^g$. Значит, в этом случае D — наименьший элемент в $M_G(A,B)$ и $\mathrm{Min}_G(A,B)=D\leqslant Z(G)\leqslant F(G)$. Противоречие с выбором G. Следовательно, $D=A\cap B^g\nleqslant Z(G)$ для любого элемента g из G. Но тогда $\langle A,B^g\rangle\leqslant C_G(D)\leqslant H$. Поэтому $\langle B^G\rangle\leqslant H$.

Если $A\nleqslant\langle B^G\rangle$, то $D\cap\langle B^G\rangle=A\cap\langle B^G\rangle\cap B^g=A_1\cap B^g$, где $A_1=A\cap\langle B^G\rangle$ для любого элемента g из G. Поэтому выбор числа $|A||B|$ влечет, что $\mathrm{Min}_G(A_1,B)\leqslant F(G)$. Но $\mathrm{Min}_G(A_1,B)=\mathrm{Min}_G(A,B)$. Противоречие с выбором G.

Если $A\leqslant\langle B^G\rangle$, то $A\leqslant F(H)\cap\langle B^G\rangle\leqslant F(\langle B^G\rangle)\leqslant F(G)$. Но тогда и $\mathrm{Min}_G(A,B)\leqslant F(G)$. Снова противоречие с выбором G. $\rhd$

Далее докажем теорему 2.

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. Пусть выполняются условия теоремы 2. Заметим, что импликация (2) $\Rightarrow$ (1) следует из [3, п. 2].

Докажем, что (1) $\Rightarrow$ (2). Для этого среди всех подгрупп A и B из G, для которых выполняются условия теоремы 2 и условие (1), выберем подгруппы A и B так, чтобы число $|A||B|$ было минимальным.

Лемма 1. *Подгруппа B неабелева.*

$\lhd$ Допустим, что подгруппа B абелева. Тогда по теореме 1 имеем $\mathrm{Min}_G(A,B) \leqslant F(G)$. Так как $\mathrm{min}_G(A,B) \leqslant \mathrm{Min}_G(A,B)$, то $\mathrm{min}_G(A,B) \leqslant F(G)$. Противоречие с (1). $\rhd$

Лемма 2. *Подгруппа B не содержит силовскую p-подгруппу из G.*

$\lhd$ Допустим, что $B \geqslant S$, где $S \in Syl_p(G)$. Тогда $O_p(B)$ — неабелева подгруппа из B. Следовательно, в факторгруппе $\overline{G} = G/F(G)$ имеем $\overline{O_p(B)} \in \mathrm{Syl}_p(\overline{G})$. Так как $\overline{G} \simeq SL_2(p)$, то при $p \geqslant 3$ имеем $\overline{B} \leqslant C_{\overline{G}}(\overline{O_p(B)}) \simeq C_{2p}$. Значит, подгруппа B лежит в полном прообразе в G циклической подгруппы порядка $2p$ из $\overline{G}$. Если порядок подгруппы B при этом четен, то B содержит инволюцию, инвертирующую подгруппу $G_3 = F(G_2)$, содержащуюся в B, что противоречит нильпотентности подгруппы B. Поэтому при $p \geqslant 3$ подгруппа $\overline{B}$ является p-группой. При $p = 2$ это очевидно, так как в этом случае $G \simeq C_2 \times \Sigma_4$.

Итак, $B \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Поэтому выбор числа $|A||B|$ и равенство $A \cap B^g = O_p(A) \cap B^g$ влечет, что A — p-группа. Без ограничения общности, $A \leqslant B$ и $A \cap B = A$. Так как $A \cap B^g \leqslant B \cap B^g = F(G)$ для $B \neq B^g$, то $A \cap B = A \nleqslant F(G)$. Но тогда $|A \cap B^g| < |A \cap B|$ для $B^g \neq B$. Поэтому $\mathrm{min}_G(A,B) \leqslant F(G)$. Противоречие с (1). $\rhd$

Лемма 3. *Подгруппа B неабелева порядка p^3 и экспоненты p при $p \geqslant 3$ и $B \simeq D_8$ при $p = 2$, и $B \nleqslant G_2$ при любом p.*

$\lhd$ Рассмотрим случай $p = 2$. В этой ситуации $G \simeq C_2 \times \Sigma_4$. По лемме 1 подгруппа B неабелева. Следовательно, $O_2(B)$ — неабелева подгруппа. Но тогда $O_2(B) \nleqslant O_2(G)$ и, в силу нильпотентности подгруппы B, имеем $B = O_2(B)$. По лемме 2 имеем $B \notin Syl_2(G)$. Значит, $B \simeq D_8$. Если $B \leqslant G_2$, то и $A \leqslant G_2$ в силу выбора числа $|A||B|$. Снова, без ограничения общности, $A < B \in \mathrm{Syl}_p(G_2)$, $A \cap B = A$ и $A \cap B^g \leqslant B \cap B^g \leqslant F(G)$ для $B^g \neq B$. Но $A \nleqslant F(G)$. Следовательно, $|A \cap B^g| < |A \cap B| = |A|$ для $B^g \neq B$. Поэтому $\mathrm{min}_G(A,B) \leqslant F(G)$. Противоречие с (1).

Рассмотрим случай $p > 2$. В этой ситуации по лемме 1 подгруппа B неабелева и неабелева силовская подгруппа в ней может быть только силовской 2-подгруппой или силовской p-подгруппой из-за того, что в факторгруппе $\overline{G} = G/F(G)$ силовские подгруппы имеют ранг 1. Но если силовская 2-подгруппа в B неабелева, то $O_2(B) \simeq Q_8$. Так как в группе $\overline{G} \simeq SL_2(p)$ имеем $C_{\overline{G}}(\overline{O_2(B)}) = Z(\overline{G}) \simeq C_2$, то $O(B) \leqslant C_{F(G)}(O_2(B)) = Z(G) \simeq C_p$ в силу того, что инволюция из $O_2(B)$ инвертирует $F(G_2) \simeq E_{p^2}$. Если B — 2-группа, то выбор числа $|A||B|$ влечет, что и A — 2-группа. В этом случае A и B — 2-группы ранга 1, и $A \cap B^g = 1$ для некоторого g из G. Противоречие с (1). Если $B = O_2(B)Z(G)$, то A — $\{2,p\}$-группа. Так как инволюция из A инвертирует $F(G_2) \simeq E_{p^2}$, то $A > Z(G)$. Значит, $A \cap B \geqslant Z(G)\Omega_1(O_2(B))$, а $A \cap B^g = Z(G)$ для $g \in F(G_2)$. Поэтому $|A \cap B| > |A \cap B^g|$ для $g \in F(G_2)^\sharp$ и $\mathrm{min}_G(A,B) \leqslant F(G)$. Противоречие с (1).

Если силовская p-подгруппа в B неабелева, то в силу леммы 1 имеем $|B| > p^2$, а по лемме 2 имеем $|B| < p^4$. Поэтому B — неабелева подгруппа порядка p^3 в некоторой силовской p-подгруппе S группы G. В частности, подгруппа $B_0 = B \cap G_2$ имеет порядок $\geqslant p^2$ и в содержащей ее силовской p-подгруппе S_2 из G_2 имеет индекс $\leqslant p$. Поэтому $B_0 \lhd S_2$. В частности, $B_0 \cap Z(S_2) = Z(S_2) \simeq C_p$. Подгруппа $\overline{B}$ в факторгруппе $\overline{G}$ в силу неабелевости $O_p(B)$ содержит силовскую p-подгруппу из $\overline{G} \simeq SL_2(p)$. Поэтому $\overline{B}$ — подгруппа порядка p или $2p$. Но если порядок подгруппы B четен, то инволюция i из B инвертирует $F(G_2)$. В частности, i инвертирует подгрупппу $Z(S_2)$ из B_0, где $B_0 < B$. Противоречие с нильпотентностью подгруппы B. Если же $|\overline{B}| = p$, то B — подгруппа порядка p^3 из подгруппы S. Выбор числа $|A||B|$ влечет, что и A — p-группа. Если $B \leqslant G_2$, то и $A \leqslant G_2$ в силу выбора числа $|A||B|$. В этом случае $B \in \mathrm{Syl}_p(G_2)$, поэтому можно считать, что $A \leqslant B$ и $A \cap B = A$. Но $A \cap B^g \leqslant B \cap B^g \leqslant F(G_2) \leqslant F(G)$

для $B^g \neq B$ и, таким образом, $|A \cap B^g| < |A \cap B|$ для $B^g \neq B$. Так как $A \nleqslant F(G)$, то $\min_G(A, B) \leqslant A \cap F(G) \neq A$. Противоречие с (1). Покажем, что B имеет экспоненту p. Для этого достаточно показать, что подгруппа S_2 имеет экспоненту p. Так как S_2 класса 2 и $p \geqslant 3$, то $(xy)^p = x^p y^p [x, y]^{p(p-1)/2}$, где x — элемент порядка p из $F(G_2)$, а y — элемент порядка p из $S_2 \backslash F(G_2)$. Поскольку $[x, y] \in Z(S_2)$, имеем $[x, y]^p = 1$ и $(xy)^p = 1$. $\rhd$

Лемма 4. *$A \simeq E_{p^2}$ и $A \nleqslant G_2$.*

$\lhd$ Допустим, что $A \not\simeq E_{p^2}$. Так как $G = G_1 \times G_2$ и по лемме 3 подгруппа B — p-группа, выбор числа $|A||B|$ влечет, что и A — p-группа. Так как $A \nleqslant F(G)$ и A абелева, то $A \leqslant C_G(a)$ для $a \in A \backslash F(G)$. Поэтому действие a на подгруппе $F(G)$ влечет, что $|A| \leqslant p^3$, и если $|A| = p^3$, то $|A \cap F(G)| = p^2$, $A \cap F(G) = Z(S)$, где $S \in Syl_p(G)$, и, без ограничения общности, подгруппы A и B лежат в S. Поскольку $|S| = p^4$, то $|A \cap B| \geqslant p^2$. Но $B \cap Z(S) = B \cap Z(S_2) \simeq C_p$, поэтому $|A \cap B^g| = p^2$ для любой подгруппы B^g из S и $A \cap B^g \leqslant S \cap S^g \leqslant F(G)$ для тех g, для которых $S \neq S^g$. Так как $B^g \cap F(G) = Z(S_2^g)$, то $Z(B^g) = Z(S_2)$ для $B^g \leqslant S_2$ и $Z(B^g) \neq Z(S_2)$ для $B^g \leqslant S_2^g \neq S_2$. Следовательно, $p^2 = |A \cap B| > |A \cap B^g| = p$ для $S_2^g \neq S_2$ и $\min_G(A, B) \leqslant F(G)$. Противоречие с (1). Таким образом, $|A| = p^2$. Ввиду минимальности числа $|A||B|$ подгруппа A нециклическая. Следовательно, $A \simeq E_{p^2}$.

Если $A \leqslant G_2$, то по леммам 3 и 4, без ограничения общности, A и B лежат в подгруппе $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Пусть $S_2 = S \cap G_2$.Так как $A \leqslant S_2$, то $|S_2 : A| = p$ и $A \cap Z(S_2) = Z(S_2)$. Но $|B^g \cap S_2| = p^2$ для $B^g \leqslant S$, поэтому $B^g \cap Z(S_2) = Z(S_2)$. Если же $B^g \nleqslant S$, то $S \cap S^g \leqslant F(G)$, поэтому $A \cap B^g \leqslant S \cap S^g \leqslant F(G)$. Значит, условие (1) влечет, что $B^g \cap A \nleqslant F(G)$ для некоторой подгруппы $B^g \leqslant S$. Так как в этом случае $B^g \cap Z(S_2) = Z(S_2) \leqslant Z(S) \leqslant F(G)$, имеем $B^g \cap A = A$. Значит, $A \cap B^g \notin m_G(A, B)$ для $B^g \leqslant S$ и $\min_G(A, B) \leqslant F(G)$. Противоречие с (1). $\rhd$

Лемма 5. *Из* (1) *следует* (2).

$\lhd$ Для $p = 2$ утверждение леммы следует из лемм 3 и 4. Допустим, что $p > 2$, $S_2 \in Syl_p(G_2)$ и $S_2 < S \in Syl_p(G)$. В этом случае силовская p-подгруппа S_4 из G_4 централизует $Z(G_4) \simeq C_2$ и подгруппа $Z(G_4)S_4$ действует на $C_{G_3}(S_4) = Z(S_2) \simeq C_p$. Так как инволюция из $Z(G_4)$ инвертирует G_3, то она инвертирует $Z(S_2)$ и централизует $Z(G)$. Следовательно, $Z(G_4)$ действует без неподвижных точек на оставшихся $p-1$ подгрупп из $Z(S) = Z(G) \times Z(S_2)$. Заметим, что для $B^g \leqslant S$ имеем $B^g \cap Z(S) = Z(S_2)$, а для $B^g \nleqslant S$ подгруппа $B^g \cap F(G) \simeq E_{p^2}$ и $B^g \cap Z(S) \neq 1$. Но $B^g \cap Z(G) = 1$ и $B^g \cap Z(S_2) = 1$. Поэтому для $B^g \nleqslant S$ подгруппа $B^g \cap Z(S)$ совпадает с одной из $p - 1$ подгрупп, на которых без неподвижных точек действует $Z(G_4)$. Также $A \cap Z(G) = 1$ и $A \cap Z(S_2) = 1$ по лемме 4. Но $A \cap F(G) \neq 1$. Поэтому A также содержит одну из тех же $p-1$ подгрупп, на которых $Z(G_4)$ действует без неподвижных точек. Так как $p > 2$, то $p - 1 \geqslant 2$. Следовательно, для подгруппы $B^g \nleqslant S$ имеем $A \cap B^g \leqslant S \cap S^g \leqslant F(G)$. Поэтому $A \cap B^g \leqslant A \cap F(G) \simeq C_p$ и $A \cap B^g = B^g \cap Z(S)$. Но для инволюции i из $Z(G_4)$ имеем $B^g \neq B^{gi} \leqslant Z(S)$. Поэтому $A \cap B^{g_i} = 1$. Противоречие. $\rhd$

Теорема 2 доказана. $\rhd$

Литература

1. *Зенков В. И.* Пересечения абелевых подгрупп в конечных группах // Матем. заметки.—1994.—Т. 56, № 2.—С. 150–152.
2. *Isaacs I. M.* Finite Group Theory.—Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2008.—350 p.—(Graduate Studies in Mathematics; Vol. 92).
3. *Зенков В. И.* О пересечениях абелевых и нильпотентных подгрупп в конечных группах. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—2015.—Т. 21, № 3.—С. 128–131.

4. *Maslova N. V.* 2020 Ural workshop on group theory and combinatorics // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—2021.—Т. 27, № 1.—P. 273–282. DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-273-282.
5. *Зенков В. И.* О пересечениях абелевых и нильпотентных подгрупп в конечных группах. II // Матем. заметки.—2019.—Т. 105, № 3.—С. 383–394. DOI: 10.4213/mzm11742.
6. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of Finite Groups.—Oxford: Clarendon Press, 1985.—252 p.

Статья поступила 19 мая 2025 г.

Зенков Виктор Иванович
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
ведущий научный сотрудник отдела алгебры и топологии
РОССИЯ, 620108, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;

Уральский федеральный университет,
профессор департамента информационных технологий и автоматики
РОССИЯ, 620062, Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: V1I9Z52@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-5940-294X

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 3, P. 75–81

ON INTERSECTION OF ABELIAN AND MINIMAL NONABELIAN SUBGROUPS IN FINITE GROUPS

Zenkov, V. I.[1,2]

[1] N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russia;
[2] Ural Federal University,
19 Mira St., Ekaterinburg 620062, Russia

E-mail: V1I9Z52@mail.ru

Abstract. Let G be a finite group with subgroups A and B. Denote by $M = M_G(A,B)$ (respectively, $m = m_G(A,B)$) the set of all minimal by inclusion (respectively, by order) intersections of the form $A \cap B^g$, where $g \in G$. Put $\min_G(A,B) = \langle m \rangle$ and $\mathrm{Min}_G(A,B) = \langle M \rangle$. In 1994 we proved that if A and B are abelian subgroups, then $\mathrm{Min}_G(A,B) \leqslant F(G)$. In the present paper, we give other proof of this result. Futhermore, we construct a finite group G such that it contan an abelian subgroup A, a minimal non-abelian subgroup B and elements g_1 and g_2 with $A \cap B^{g_1} \leqslant F(G)$, $A \cap B^{g_2} \nleqslant F(G)$, $|A \cap B^{g_1}| = |A \cap B^{g_2}|$ and $A \cap B^{g_1}$, $A \cap B^{g_2} \in \min_G(A,B)$. We provide an example of a group G such that $g_1, g_2 \in G$ $A \cap B^{g_1}$, $A \cap B^{g_2} \in \mathrm{Min}_G(A,B)$, $A \cap B^{g_1} \leqslant F(G)$, and $A \cap B^{g_2} \nleqslant F(G)$. Moreover, we show that there exists a group G with nilpotent subgroups A and B such that $m \subset M$ and $\min_G(A,B) < \mathrm{Min}_G(A,B)$.

Keywords: finite group, abelian subgroup, intersection of subgroups.

AMS Subject Classification: 20D10, 20D60, 05C25.

For citation: *Zenkov, V. I.* On Intersection of Abelian and Minimal Nonabelian Subgroups in Finite Groups, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 3, pp. 75–81 (in Russian). DOI: 10.46698/h4871-7742-3837-a.

References

1. *Zenkov, V. I.* Intersections of Abelian Subgroups in Finite Groups, *Mathematical Notes*, 1994, vol. 56, no. 2, pp. 869–871. DOI: 10.1007/BF02110750.
2. *Isaacs, I. M. Finite Group Theory, Graduate Studies in Mathematics; vol.* 92, Providence, R. I., American Mathematical Society, 2008, 350 p.

3. *Zenkov, V. I.* On Intersections of Abelian and Nilpotent Subgroups in Finite Groups. I, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* (*Supplement Issues*), 2016, vol. 295, no. 1, pp. S174–S177. DOI: 10.1134/S0081543816090182.
4. *Maslova, N. V.* 2020 Ural Workshop on Group Theory and Combinatorics, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 273–282. DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-273-282.
5. *Zenkov, V. I.* On Intersections of Abelian and Nilpotent Subgroups in Finite Groups. II, *Mathematical Notes*, 2019, vol. 105, no. 3, pp. 366–375. DOI: 10.1134/S0001434619030076.
6. *Conway, J. H., Curtis, R. T., Norton, S. P., Parker, R. A. and Wilson, R. A. Atlas of Finite Groups*, Oxford, Clarendon Press, 1985, 252 p.

Received May 19, 2025

Viktor I. Zenkov
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russia,
Leading Researcher Algebra and Topology Department
Ural Federal University,
19 Mira St., Ekaterinburg 620062, Russia
Professor Department of Information Technology
and Automation Engineering School
E-mail: `V1I9Z52@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-5940-294X