Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 3, С. 82–89

УДК 512.54, 512.55
DOI 10.46698/d7840-8893-1360-c

ПОРОЖДЕНИЕ ГРУППЫ $G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ ТРЕМЯ ИНВОЛЮЦИЯМИ, ДВЕ ИЗ КОТОРЫХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫ#

А. В. Казакова[1], **Я. Н. Нужин**[1]

[1] Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирского федерального университета,
Россия, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79

E-mail: `alvkazakova@gmail.com`, `nuzhin2008@rambler.ru`

70-летию В. А. Койбаева посвящается

Аннотация. В 2002 г. второй автор данной статьи записал в Коуровской тетради следующую задачу (вопрос 15.67). A) Какие присоединенные группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны? К настоящему времени эта задача решена только для групп Шевалле типа A_n (случай PSL_{n+1}), E_n и G_2. Конечно, задачу A) можно рассматривать и для других однопорожденных колец, и не только для присоединенных групп Шевалле. Так, аналог задачи A) решен для групп $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, причем для некоторых малых размерностей $n \leqslant 6$ ответ оказался отрицательный. В данной статье доказывается, что группа Шевалле $G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ над кольцом целых гауссовых чисел порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. В качестве следствия получается, что для нее минимальное число порождающих инволюций, произведение которых равно 1, совпадает с 5.

Ключевые слова: группа Шевалле, кольцо целых гауссовых чисел, порождающие тройки инволюций.

AMS Subject Classification: 20G15.

Образец цитирования: *Казакова А. В., Нужин Я. Н.* Порождение группы $G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 3.—С. 82–89. DOI: 10.46698/d7840-8893-1360-c.

1. Введение

Коммутативное кольцо K с единицей будем называть *d-порожденным*, если для некоторых его элементов $k_1, \ldots, k_d$ кольцо целочисленных полиномов $\mathbb{Z}[k_1, \ldots, k_d]$ совпадает с K. Ясно, что число порождающих элементов с определенными свойствами какой-либо матричной группы над d-порожденным кольцом должно зависеть от d. Так, например, в [1] доказана порождаемость тремя инволюциями, две из которых перестановочны, некоторых матричных групп над d-порожденной коммутативной областью целостности, при условии, что их размерность больше некоторой константы, зависящей от d. Конечно,

#Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ, соглашение № 075-02-2025-1790.

наиболее простой и важный случай $d = 1$. Для таких колец зависимость становится минимальной. К ним относятся конечные поля, кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ и кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, где $i^2 = -1$. Конечное поле порождается своим примитивным элементом, кольцо $\mathbb{Z}$ порождается единицей 1, а кольцо $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ — элементом i.

В 2002 г. второй автор данной статьи записал в Коуровской тетради [2] следующую задачу.

А) *Какие присоединенные группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?* (См. [2, вопрос 15.67].)

К настоящему времени эта задача решена только для групп Шевалле типа A_n (случай PSL_{n+1}) [3], E_n [4] и G_2 [5]. Конечно, задачу А) можно рассматривать и для других однопорожденных колец, и не только для присоединенных групп Шевалле. Так, в работах [6–9] аналог задачи А) решен для групп $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.

Основным результатом данной статьи является

Теорема. *Группа $G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

Пусть $n(G)$ — минимальное число порождающих инволюций группы G, произведение которых равно 1.

Следствие. $n(G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})) = 5$.

2. Обозначения и предварительные результаты

Далее всюду Φ — система корней типа G_2. Пусть $\{a,b\}$ — ее фундаментальные корни, причем a — короткий корень. Тогда

$$\Phi = \big\{ \pm a,\ \pm b,\ \pm(a+b),\ \pm(2a+b),\ \pm(3a+b),\ \pm(3a+2b)\big\}.$$

Кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ является евклидовым (см., например, [10, с. 439]). Универсальная и присоединенная группы Шевалле типа G_2 над евклидовым кольцом K совпадают и согласно [11, с. 107] порождаются корневыми подгруппами

$$X_r = \big\{x_r(k) :\ k \in K\big\}, \quad r \in \Phi.$$

Для обратимых элементов t кольца K определены мономиальные

$$n_r(t) = x_r(t)\, x_{-r}\big(-t^{-1}\big)\, x_r(t)$$

и диагональные

$$h_r(t) = n_r(t)\, n_r(-1)$$

элементы группы $G_2(K)$. Для краткости положим

$$n_r = n_r(1).$$

Пусть (r,s) — скалярное произведение векторов, w_r — отражение относительно гиперплоскости, ортогональной корню r. Между корневыми, мономиальными и диагональными элементами выполняются хорошо известные соотношения:

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u),$$

$$h_r(t)\, h_r(u) = h_r(tu),$$

$$n_r\, x_s(t)\, n_r^{-1} = x_{w_r(s)}(\pm t), \quad r, s \in \Phi,$$

$$n_r\, h_s(t)\, n_r^{-1} = h_{w_r(s)}(t), \quad r, s \in \Phi,$$

$$h_r(t)\, x_s(u)\, h_r^{-1}(t) = x_s\Big(ut^{\frac{2(r,s)}{(r,r)}}\Big), \quad r, s \in \Phi.$$

Далее будем использовать эти соотношения без упоминания. Отметим, также существенный в дальнейших вычислениях факт. Для любых двух неортогональных и неколинеарных корней $r, s \in \Phi$ число $\frac{2(r,s)}{(r,r)}$ равно ± 1 или ± 3.

В статье приняты такие сокращения: $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная подмножеством M из некоторой группы G,

$$x^y = yxy^{-1},$$

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Лемма 1. *Для любого $r \in \Phi$ группа, порожденная двумя противоположными корневыми подгруппами X_r и X_{-r} группы $G_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$, изоморфна $SL_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$.*

$\lhd$ В силу [11, с. 45] для любого $r \in \Phi$ группа, порожденная двумя противоположными корневыми подгруппами X_r и X_{-r}, изоморфна $SL_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ или $PSL_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$, а поскольку ее центр нетривиален и порождается инволюцией $h_r(-1)$, то она изоморфна $SL_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. $\rhd$

Лемма 2. *Группа $G_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ порождается двумя любыми корневыми подгруппами X_r, X_s, индексированными корнями r и s разной длины, и мономиальными элементами n_a, n_b.*

$\lhd$ Группа, порожденная мономиальными элементами n_a, n_b, действует сопряжениями транзитивно на корневых подгруппах, индексированных корнями одной длины. Поэтому вместе с любой парой корневых подгрупп X_r, X_s, индексированными корнями r и s разной длины, они порождают группу $G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, поскольку любая группа Шевалле над евклидовым кольцом порождается корневыми подгруппами [11, с. 107]. $\rhd$

Лемма 3. (а) *Группа, порожденная корневыми подгруппами X_a, X_{-a}, X_{3a+2b} и X_{-3a-2b} группы $G_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$, совпадает с центральным произведением групп $\langle X_a,\ X_{-a} \rangle$ и $\langle X_{3a+2b},\ X_{-3a-2b} \rangle$ с объединенной подгруппой, порожденной диагональным элементом $h_a(-1)$, причем*

$$h_a(-1) = h_{3a+2b}(-1). \tag{1}$$

(б) *Все диагональные инволюции $h_r(-1)$, $r \in \Phi$, сопряжены, и, если корни r и s ортогональны, то*

$$h_r(-1) = h_s(-1). \tag{2}$$

(в) *Справедливы равенства*

$$h_a(i)\, h_{3a+2b}(i) = h_{a+b}(-1) = h_a(-1)\, h_b(-1). \tag{3}$$

$\lhd$ (а) Подгруппы $\langle X_a, X_{-a} \rangle$ и $\langle X_{3a+2b}, X_{-3a-2b} \rangle$ перестановочны и их центры порождаются инволюциями $h_a(-1)$ и соответственно $h_{3a+2b}(-1)$. Так как центр группы $G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тривиален, а инволюции $h_a(-1)$ и $h_{3a+2b}(-1)$ действуют сопряжениями одинаково на обеих подгруппах $\langle X_a, X_{-a} \rangle$ и $\langle X_b, X_{-b} \rangle$, которые в силу леммы 2 порождают $G_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$, то $h_a(-1) = h_{3a+2b}(-1)$. Таким образом, утверждение (а) справедливо.

(б) Равенство (2) и сопряженность диагональных инволюций $h_r(-1)$, $r\in\Phi$, следует из (1) равенства

$$n_w\,h_r(t)\,n_w^{-1}=h_{w(r)}(t),\quad r\in\Phi,\ w\in W,$$

и транзитивного действия группы Вейля W на множествах корней одной длины.

(в) Доказательство первого равенства из (3) распишем подробно. Имеем

$$h_{a+b}(-1)\,x_{\pm a}(t)\,h_{a+b}(-1)^{-1}=x_{\pm a}\Big((-1)^{\frac{2(a+b,\pm a)}{(a+b,a+b)}}\,t\Big)$$
$$=x_{\pm a}\Big((-1)^{\frac{\pm 2(a+b,a)}{(a+b,a+b)}}\,t\Big)=x_{\pm a}\big((-1)^{-\pm 1}\,t\big)=x_{\pm a}(-t),$$

$$h_{a+b}(-1)\,x_{\pm b}(t)\,h_{a+b}(-1)^{-1}=x_{\pm b}\Big((-1)^{\frac{2(a+b,\pm b)}{(a+b,a+b)}}\,t\Big)$$
$$=x_{\pm b}\Big((-1)^{\frac{\pm 2(a+b,b)}{(a+b,a+b)}}\,t\Big)=x_{\pm b}\big((-1)^{\pm 1}\,t\big)=x_{\pm b}(-t),$$

$$\big(h_a(i)\,h_{3a+2b}(i)\big)\,x_{\pm a}(t)\,\big(h_a(i)\,h_{3a+2b}(i)\big)^{-1}=(h_a(i))x_{\pm a}(t)(h_a(i))^{-1}$$
$$=x_{\pm a}\Big(i^{\frac{2(a,\pm a)}{(a,a)}}\,t\Big)=x_{\pm a}\big(i^{\pm 2}\,t\big)=x_{\pm a}(-t),$$

$$\big(h_a(i)\,h_{3a+2b}(i)\big)\,x_{\pm b}(t)\,\big(h_a(i)\,h_{3a+2b}(i)\big)^{-1}=x_{\pm b}\Big(i^{\left(\frac{2(a,\pm b)}{(a,a)}+\frac{2(3a+2b,\pm b)}{(3a+2b,3a+2b)}\right)}\,t\Big)$$
$$=x_{\pm b}\Big(i^{\pm\left(\frac{2(a,b)}{(a,a)}+\frac{2(3a+2b,b)}{(3a+2b,3a+2b)}\right)}\,t\Big)=x_{\pm b}\big(i^{\pm(-3+1)}\,t\big)=x_{\pm b}(-t).$$

Таким образом, равенство $h_a(i)h_{3a+2b}(i)=h_{a+b}(-1)$ установлено. Аналогично проверяется равенство $h_{a+b}(-1)=h_a(-1)h_b(-1)$. $\rhd$

Доказательство следующей леммы можно найти, например, в монографиях [12, п. 5.2] или [13, п. 33.3].

Лемма 4. *Если сумма двух корней r и s не является корнем и $r\neq\pm s$, то $[x_s(u),x_r(t)]=1$. Если $r,s,r+s\in\Phi$, то возможны пять следующих случаев для коммутаторной формулы:*

1) $[x_s(u),x_r(t)]=x_{r+s}(\pm tu)$, *если r, s — длинные корни.*
2) $[x_s(u),x_r(t)]=x_{r+s}(\pm tu)\,x_{2r+s}(\pm t^2u)\,x_{3r+s}(\pm t^3u)\,x_{3r+2s}(\pm t^3u^2)$, *если $|r|<|s|$.*
3) $[x_s(u),x_r(t)]=x_{r+s}(\pm tu)\,x_{r+2s}(\pm tu^2)\,x_{r+3s}(\pm tu^3)\,x_{2r+3s}(\pm 2t^2u^3)$, *если $|s|<|r|$.*
4) $[x_s(u),x_r(t)]=x_{r+s}(\pm 2tu)\,x_{r+2s}(\pm 3tu^2)\,x_{2r+s}(\pm 3t^2u)$, *если $|s|=|r|=|r+s|$.*
5) $[x_s(u),x_r(t)]=x_{r+s}(\pm 3tu)$, *если $|s|=|r|<|r+s|$.*

3. Доказательство теоремы

$\lhd$ Покажем, что группа $G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается следующими тремя инволюциями, первые две из которых перестановочны:

$$\alpha=h_a(-1)\,x_{-b}(1),$$
$$\beta=h_b(-1)\,x_a(1),$$
$$\gamma=n_a(-1)\,n_{3a+2b}\,h_a(i).$$

Очевидно, α и β — перестановочные инволюции. Элемент γ также является инволюцией, поскольку

$$\gamma^2 = h_a(-i)\,h_a(-1)\,h_{3a+2b}(-1)\,h_a(i) = 1$$

в силу равенства (1) из леммы 3.

Положим

$$M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle.$$

Далее знак $\pm$ при коэффициентах у корневых элементов означает, что этот корневой элемент входит в произведение либо с положительным, либо с отрицательным коэффициентом. Вычисления показывают, что

$$\alpha^\gamma = h_a(-1)\,x_b(\pm i), \quad \beta^\gamma = h_b(-1)\,x_{-a}(1), \quad [\gamma, \beta] = x_{-a}(-1)\,x_a(1),$$

$$\begin{aligned}
[[\gamma,\beta],\alpha] &= x_{-a}(-1)\,x_a(1)\,h_a(-1)\,x_{-b}(1)\,x_a(-1)\,x_{-a}(1)\,h_a(-1)\,x_{-b}(1) \\
&= x_{-a}(-1)\,x_{-b}(-1)\,x_{-a}(1)\,x_{-b}(1) = [x_{-a}(-1),\, x_{-b}(-1)] \\
&= x_{-a-b}(\pm1)\,x_{-2a-b}(\pm1)\,x_{-3a-b}(\pm1)\,x_{-3a-2b}(\pm2).
\end{aligned}$$

Последнее равенство получается в силу коммутаторной формулы 3) из леммы 4. Далее,

$$[\gamma,\beta]\,\gamma = x_a(-1)\,n_{3a+2b}h_a(i), \quad \alpha^{[\gamma,\beta]\gamma} = h_a(-1)\,x_{3a+b}(\pm i),$$

$$[\alpha,\, [\gamma,\beta]\,\gamma] = x_{-b}(-1)\,x_{3a+b}(\pm i), \quad \delta := [\gamma,\beta]^2\,\gamma = x_{-a}(-1)\,n_{3a+2b}\,h_a(i),$$

$$(\alpha^\gamma)^\delta = h_a(-1)\,x_{-3a-b}(\pm1), \quad \alpha(\alpha^\gamma)^\delta = x_{-b}(-1)\,x_{-3a-b}(\pm1).$$

Поскольку сомножитель $x_{-3a-b}(\pm1)$ элемента $\alpha(\alpha^\gamma)^\delta$ перестановочен с каждым сомножителем элемента $[[\gamma,\beta],\alpha]$, а другой его сомножитель $x_{-b}(-1)$ не является перестановочным только с сомножителем $x_{-3a-b}(\pm1)$ элемента $[[\gamma,\beta],\alpha]$, то в силу коммутаторной формулы 1) из леммы 4 получаем включение

$$\big[\alpha(\alpha^\gamma)^\delta, [[\gamma,\beta],\alpha]\big] = x_{-3a-2b}(\pm1) \in M.$$

Следовательно,

$$\big[\alpha(\alpha^\gamma)^\delta, [[\gamma,\beta],\alpha]\big]^\gamma = x_{3a+2b}(\pm1) \in M.$$

Таким образом, в M лежат элементы n_{3a+2b} и $(n_{3a+2b})^2 = h_{3a+2b}(-1) = h_a(-1)$. Так как уже известны включения $h_a(-1)x_{-b}(1), h_a(-1)x_b(i) \in M$, то $x_{-b}(1), x_b(i) \in M$. Далее,

$$\delta n_{3a+2b}^{-1} = x_{-a}(-1)\,h_a(i),$$

$$(x_b(i))^{x_{-a}(-1)h_a(i)} = x_b(\pm1).$$

Отсюда $n_b \in M$ и, следовательно, $X_b, X_{-b} < M$, в частности, $h_b(-1), h_b(i) \in M$. Учитывая ранее полученные включения элементов $h_b(-1)x_a(1)$ и $x_{-a}(-1)x_a(1)$ в подгруппу M, получаем $x_a(1), x_{-a}(1) \in M$, поэтому $n_a \in M$. Наконец,

$$h_b(i)\,x_a(1)\,h_b^{-1}(i) = x_a(\pm i).$$

Следовательно, $X_a < M$. Итак, в M лежат мономиальные элементы n_a, n_b и корневые подгруппы X_a и X_b. По лемме 2 получаем равенство $M = G_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$.

Теорема доказана. $\triangleright$

Замечание. Если в приведенной выше тройке инволюций заменить у инволюции γ коэффициент i на 1, то получим порождающую тройку инволюций, две из которых перестановочны, для группы $G_2(\mathbb{Z})$. Причем приведенное выше доказательство проходит и в этом случае с очевидными упрощениями. Ранее аналогичный результат был получен в [5] с использованием семимерного матричного представления группы $G_2(\mathbb{Z})$.

4. Доказательство следствия

Для доказательства следствия потребуется

Лемма 5 [14, лемма 4]**.** *Пусть $n(G)$ — минимальное число порождающих инволюций группы G, произведение которых равно 1. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *$n(G)=2$ тогда и только тогда, когда $|G|=2$;*

2) *$n(G)=3$ тогда и только тогда, когда G — четверная группа Клейна;*

3) *если $n(G)=4$, то в G найдется неединичная циклическая нормальная подгруппа. В частности, если группа G простая, то $n(G)\geqslant 5$;*

4) *если $\overline{G}$ — гомоморфный образ группы G, то $n(\overline{G})\leqslant n(G)$.*

$\lhd$ Пусть I — идеал кольца $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, порожденный элементом 3, тогда фактор-кольцо $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})/I$ изоморфно полю $\mathbb{F}_9$. Каждый кольцевой гомоморфизм, переводящий единицу в единицу, индуцирует гомоморфизм матричных групп, и при таком гомоморфизме корневые элементы групп Шевалле переходят в корневые. Так как группы $G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $G_2(9)$ порождаются своими корневыми элементами, то группы $\varphi_I(G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}))$ и $G_2(9)$ изоморфны, где φ_I — гомоморфизм матричных групп, индуцированный кольцевым гомоморфизмом $\rho_I:\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}\to\mathbb{F}_9$. Сейчас по лемме 5, применяя ее пп. 3) и 4), и пользуясь простотой группы $G_2(9)$, получаем неравенство $n(G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}))\geqslant 5$.

С другой стороны, по основной теореме данной статьи группа $G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями α, β, γ, первые две из которых перестановочны. Так как $\alpha\cdot\beta\cdot(\beta\alpha)\cdot\gamma\cdot\gamma=1$, то $G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается пятеркой инволюций, произведение которых равно 1 и, следовательно, $n(G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}))\leqslant 5$.

Объединяя установленные выше два неравенства, получаем искомое равенство $n(G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}))=5$.

Следствие доказано. $\rhd$

Литература

1. *Tamburini M. C., Zucca P.* Generation of certain matrix groups by three involutions, two of which commute // J. Algebra.—1997.—Vol. 195, № 2.—P. 650–661. DOI: 10.1006/jabr.1997.7055.
2. The Kourovka Notebook. No. 20. Unsolved Problems in Group Theory / Eds. V. D. Mazurov, E. I. Khukhro.— Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2022.
3. *Нужин Я. Н.* О порождаемости группы $PSL_n(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, № 1.—С. 68–74.
4. *Тимофеенко И. А.* Порождаемость групп Шевалле типа E_l над кольцом целых чисел тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Сиб. электрон. мат. изв.— 2017.—Т. 14.—С. 807–820. DOI: 10.17377/semi.2017.14.068.
5. *Timofeenko I. A.* Generation of the Chevalley group of type G_2 over the ring of integers by three involutions two of which commute // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.—2015.—Vol. 8, № 1.—P. 104–108.
6. *Levchuk D. V., Nuzhin Ya. N.* On Generation of the group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.—2008.—Vol. 1, № 2.—P. 133–139.
7. *Левчук Д. В.* Порождаемость группы $PSL_7(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Вестн. НГУ. Сер. мат., мех., информ.—2009.—Т. 9, № 1.—С. 35–38.
8. *Гвоздев Р. И., Нужин Я. Н., Шаипова Т. Б.* О порождении групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две их которых перестановочны // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика.— 2022.—Т. 40.—С. 49–62. DOI: 10.26516/1997-7670.2022.40.49.

9. *Всемирнов М. А., Гвоздев Р. И., Нужин Я. Н., Шаипова Т. Б.* О порождении групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две их которых перестановочны. II // Мат. заметки.—2024.—Т. 115, № 3.—С. 317–329. DOI: 10.4213/mzm14048.
10. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.—М.: Наука, 1977.—496 с.
11. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле—М.: Мир, 1975.—263 с.
12. *Carter R. W.* Simple Groups of Lie Type.—London–New York–Sydney–Toronto: John Wiley and Sons, 1972.—335 p.
13. *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы.—М.: Наука, 1980.—400 с.
14. *Нужин Я. Н.* О порождающих множествах инволюций простых конечных групп // Алгебра и логика.—2019.—Т. 58, № 3.—С. 426–434. DOI: 10.33048/alglog.2019.58.310.

Статья поступила 15 апреля 2025 г.

Казакова Алёна Викторовна
Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирского федерального университета,
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79,
ассистент кафедры высшей математики-2
E-mail: alvkazakova@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6667-441X

Нужин Яков Нифантьевич
Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирского федерального университета,
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79,
профессор кафедры алгебры и математической логики
E-mail: nuzhin2008@rambler.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 3, P. 82–89

GENERATION OF THE GROUP $G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ BY THREE INVOLUTIONS, TWO OF WHICH COMMUTE

Kazakova, A. V.[1] and Nuzhin, Ya. N.[1]

[1] Institute of Mathematics and Computer Science
of Siberian Federal University
79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia

E-mail: alvkazakova@gmail.com, nuzhin2008@rambler.ru

Abstract. In 2002, the second author of this paper wrote down the following problem in the Kourovka notebook (question 15.67). A) What adjoint Chevalley groups (of normal type) over the ring of integers are generated by three involutions, two of which commute? This problem solved only for the Chevalley groups of type A_n (the case PSL_{n+1}), E_n, and G_2. Of course, problem A) can be consider for other one-generated rings, and not only for the adjoint Chevalley groups. The analogue of problem A) is solved for the groups $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ and $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ over the ring of the Gaussian integers $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, and for some small dimensions $n \leqslant 6$ the answer is negative. In this article we prove that the Chevalley group $G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ over the ring of the Gaussian integers is generated by three involutions, two of which commute. As a consequence, the minimal number of generating involutions, whose product is equal to 1, coincides with 5.

Keywords: Chevalley group, the ring of Gaussian integers, generating triples of involutions.

AMS Subject Classification: 20G15.

For citation: *Kazakova, A. V. and Nuzhin, Ya. N.* Generation of the Group $G_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by Three Involutions, Two of Which Commute, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 3, pp. 82–89 (in Russian). DOI: 10.46698/d7840-8893-1360-c.

References

1. *Tamburini, M. C. and Zucca, P.* Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute, *Journal of Algebra*, 1997, vol. 195, no. 2, pp. 650–661. DOI: 10.1006/jabr.1997.7055.
2. *The Kourovka Notebook. No. 20. Unsolved Problems in Group Theory*, Eds. V. D. Mazurov, E. I. Khukhro, Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics, 2022.
3. *Nuzhin, Ya. N.* On the Generation of the Group $PSL_n(\mathbb{Z})$ by Three Involutions, Two of Which Commute, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2008, vol. 10, no. 1, pp. 68–74 (in Russian).
4. *Timofeenko, I. A.* Generation of the Chevalley Groups of Type E_l over the Ring of Integers by Three Involutions, Two of Which Commute, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2017, vol. 14, pp. 807–820 (in Russian). DOI: 10.17377/semi.2017.14.068.
5. *Timofeenko, I. A.* Generation of the Chevalley Group of Type G_2 over the Ring of Integers by Three Involutions Two of Which Commute, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2015, vol. 8, no. 1, pp. 104–108.
6. *Levchuk, D. V. and Nuzhin, Ya. N.* On Generation of the Group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by Three Involutions, Two of Which Commute, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2008, vol. 1, no. 2, pp. 133–139.
7. *Levchuk, D. V.* On the Generation of the Group $PSL_7(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by Three Involutions, Two of Which Commute, *Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2009, vol. 9, no. 1, pp. 35–38 (in Russian).
8. *Gvozdev, R. I., Nuzhin, Ya. N. and Shaipova, T. B.* On Generation of the Groups $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ and $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by Three Involutions, Two of Which Commute, *Izvestija Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Serija Matematika* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics], 2022, vol. 40, pp. 49–62 (in Russian). DOI: 10.26516/1997-7670.2022.40.49.
9. *Vsemirnov, M. A., Gvozdev, R. I., Nuzhin, Ya. N. and Shaipova, T. B.* On the Generation of the Groups $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ and $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by Three Involutions Two of Which Commute. II, *Mathematical Notes*, 2024, vol. 115, no. 3, pp. 289–300. DOI: 10.1134/S0001434624030015.
10. *Kostrikin, A. I. Introduction to Algebra*, New York, Springer-Verlag, 1982, 575 p.
11. *Steinberg, R. Lectures on Chevalley Groups*, Providence, R. I., American Mathematical Society, 2016, 161 p. DOI: 10.1090/ulect/066.
12. *Carter, R. W. Simple Groups of Lie Type*, London–New York–Sydney–Toronto, John Wiley and Sons, 1972, 335 p.
13. *Humphreys, J. Linear Algebraic Groups*, New York, Springer-Verlag, 1994, 255 p.
14. *Nuzhin, Ya. N.* Generating Sets of Involutions of Finite Simple Groups, *Algebra and Logic*, 2019, vol. 58, no. 3, pp. 288–293. DOI: 10.1007/s10469-019-09547-x.

Received April 15, 2025

Alyona V. Kazakova
Institute of Mathematics and Computer Science
of Siberian Federal University,
79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia,
Assistant of the Department of Higher Mathematics-2
E-mail: alvkazakova@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6667-441X

Yakov N. Nuzhin
Institute of Mathematics and Computer Science
of Siberian Federal University,
79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia,
Professor of the Department of Algebra and Mathematical Logic
E-mail: nuzhin2008@rambler.ru