Владикавказский математический журнал
2026, Том 28, Выпуск 1, С. 134–144

УДК 517.982
DOI 10.46698/s3306-7592-2603-k

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ[#]

В. А. Тамаева[1,2], Б. Б. Тасоев[1]

[1] Южный математический институт ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;
[2] Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН,
Россия, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1

E-mail: `tasoevbatradz@yandex.ru`, `tamaeva.va@yandex.ru`

Посвящается памяти профессора С. С. Кутателадзе

Аннотация. Целью настоящей работы является описание крайних точек выпуклого множества линейных положительных операторов, действующих из пространства непрерывных вещественных функций на компакте в порядково полную векторную решетку и отображающих тождественную единицу в некоторый фиксированный ненулевой элемент. Основным инструментом нашего исследования является метод канонического сублинейного оператора, предложенный С. С. Кутателадзе. Идея этого метода заключается в том, что произвольный сублинейный оператор представляется в виде композиции некоторого линейного оператора и конкретного сублинейного оператора, называемого каноническим сублинейным оператором Кутателадзе. Крайние точки произвольного сублинейного оператора представляют собой композицию линейного оператора и крайних точек канонического сублинейного оператора Кутателадзе. Используя этот факт, мы получили описание крайних точек исследуемого нами выпуклого множества линейных положительных операторов посредством решеточных гомоморфизмов, в частности, чистых состояний, представляющих собой особый вид крайних точек канонического сублинейного оператора Кутателадзе.

Ключевые слова: векторная решетка, экстремальная точка, решеточный гомоморфизм, квазирегулярная мера, сублинейный оператор.

AMS Subject Classification: 46B42, 46B04.

Образец цитирования: *Тамаева В. А., Тасоев Б. Б.* Экстремальное строение выпуклых множеств линейных операторов на пространстве непрерывных функций // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 1.—С. 134–144. DOI: 10.46698/s3306-7592-2603-k.

1. Введение

Пусть Q — компакт, $C(Q)$ — пространство непрерывных действительных функций на Q, E — порядково полная векторная решетка, и $0 < e \in E$. Обозначим через S_e множество всех линейных положительных операторов $T : C(Q) \to E$ таких, что $T(\mathbf{1}_Q) = e$. Ясно, что S_e — выпуклое множество. Цель настоящей работы — описать крайние точки множества S_e.

[#] Работа выполнена в Северо-Кавказском центре математических исследований ВНЦ РАН при поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2026-738.

В цикле работ [1–5] С. С. Кутателадзе предложил геометрическое изучение выпуклых множеств линейных операторов, в частности опорных множеств сублинейных операторов, на основе пространств Канторовича, именуемых также порядково полными векторными решетками. В работе [5] была изложена принципиально новая идея о представлении произвольного сублинейного оператора в виде композиции линейного оператора и конкретного сублинейного оператора $\varepsilon_{\mathscr{U}}$, именуемого в литературе каноническим сублинейным оператором Кутателадзе. При этом все остальные сублинейные операторы со значениями в E получаются из оператора $\varepsilon_{\mathscr{U}}$ с помощью линейной замены переменной, а крайние точки произвольного сублинейного оператора представляют собой композицию некоторого линейного оператора и крайних точек канонического сублинейного оператора Кутателадзе. В свою очередь, крайние точки канонического сублинейного оператора Кутателадзе представляют собой поточечный равномерный предел чистых состояний, являющихся решеточными гомоморфизмами. Эти результаты позволяют описать крайние точки множества S_e при соответствующем выборе сублинейного оператора.

В разделе 2 кратко изложена конструкция порядкового интегрирования по мере со значениями в порядково σ-полной векторной решетке. Данный тип порядкового интегрирования также называется интегралом Канторовича — Райта. Раздел 3 посвящен описанию канонического сублинейного оператора Кутателадзе. Там же приводятся необходимые вспомогательные утверждения. В разделе 4 приводятся основные результаты. В теореме 4.1 дается описание крайних точек множества S_e через решеточные гомоморфизмы, используя понятие чистых состояний. В теореме 4.2 приводится наиболее полное описание крайних точек, привлекая теорему 4.1, а также установленные в статье [6] результаты. В настоящей статье используются стандартные обозначения и терминология теории векторных решеток и положительных операторов из [7, 8].

2. Порядковое интегрирование

В этом параграфе приводится набросок конструкции порядкового интеграла по мере на произвольной σ-алгебре со значениями в порядково σ-полной векторной решетке. Данная конструкция была предложена в работе [9]. Порядковое интегрирование по мере на произвольном δ-кольце предложено в работе [10].

Пусть Ω — некоторое непустое множество, Σ — σ-алгебра подмножеств множества Ω, E — порядково σ-полная векторная решетка. Введем в E символ ∞ и будем полагать, что $x < \infty$ для всех $x \in E$.

Определение 2.1. Функция $\mu : \Sigma \to E \cup \{\infty\}$ называется *мерой*, если выполняются следующие условия:

(1) $\mu(\varnothing) = 0$;

(2) $\mu(A) \geqslant 0$ для всех $A \in \Sigma$;

(3) для любой последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$, удовлетворяющей условию $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$, справедливо равенство

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{r=1}^{n} \mu(A_r).$$

Как обычно, пару (Ω, Σ), где Σ — σ-алгебра подмножеств Ω, называют *измеримым пространством*, а множества из Σ — *измеримыми*.

Символом $\mathscr{L}^0(\mu) := \mathscr{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ будем обозначать множество всех Σ-измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Определение 2.2. Функция $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется Σ-*ступенчатой*, если она представима в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ попарно не пересекаются и $\mu(A_i) < \infty$ для всех $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим символом $\mathrm{St}(\Sigma)$ множество всех Σ-ступенчатых функций. Положим по определению

$$I_\mu(\varphi) := \int \varphi \; d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

для всех $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \in \mathrm{St}(\Sigma)$.

Можно показать, что множество $\mathrm{St}(\Sigma)$ является векторной подрешеткой $\mathscr{L}^0(\mu)$, а отображение $I_\mu : \mathrm{St}(\Sigma) \to E$ корректно определено, т. е. $I_\mu(\varphi)$ не зависит от представления $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \in \mathrm{St}(\Sigma)$, и является линейным оператором.

Определение 2.3. Говорят, что некоторое свойство P выполняется μ-*почти всюду* (μ-п.в.), если мера множества, на котором свойство P не выполняется, равна нулю.

Определение 2.4. Функция $0 \leqslant f \in \mathscr{L}^0(\mu)$ μ-п.в. называется *интегрируемой*, если существует последовательность Σ-ступенчатых функций $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что $0 \leqslant \varphi_n \uparrow_n f$ μ-п.в. и $\sup_n \int \varphi_n \; d\mu < \infty$. При этом будем полагать $I_\mu(f) := \int f \; d\mu := \sup_n \int \varphi_n \; d\mu$. Таким образом,

$$\int f \; d\mu := \sup_n \int \varphi_n \; d\mu \geqslant 0.$$

Можно показать, что $I_\mu(f)$ не зависит от выбора $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{St}(\Sigma)$.

Определение 2.5. Произвольная функция $f \in \mathscr{L}^0(\mu)$ называется *интегрируемой*, если интегрируемы функции $f^+ := f \vee 0$ и $f^- := f \wedge 0$. При этом будем полагать

$$I_\mu(f) := \int f \; d\mu := \int f^+ \; d\mu - \int f^- \; d\mu.$$

Символом $\mathscr{L}^1(\mu)$ будем обозначать множество всех интегрируемых функций. Доказательства следующих двух теорем приведены в работе [10].

Теорема 2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Множество $\mathscr{L}^1(\mu)$ является порядковым идеалом в $\mathscr{L}^0(\mu)$;*

(2) *Отображение $I_\mu : f \mapsto \int f \; d\mu$ из $\mathscr{L}^1(\mu)$ в E является линейным положительным оператором;*

(3) *Если $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ и $g \in \mathscr{L}^0(\mu)$ такие, что $f = g$ μ-п.в., то $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ и $I_\mu(f) = I_\mu(g)$;*

(4) *Если $f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ и $f \geqslant g$ μ-п.в., то $I_\mu(f) \geqslant I_\mu(g)$;*

(5) *Для функции $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ выполняется $I_\mu(|g|) = 0$ тогда и только тогда, когда $g = 0$ μ-п.в.*

Теорема 2.2 (О мажорированной сходимости)**.** *Пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}^1(\mu)$ удовлетворяет условиям $|f_n| \leqslant g$ μ-п.в. и $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $f_n \to f$ μ-п.в., то $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ и выполняются равенства* $\lim_n \int f_n \; d\mu = \int \lim_n f_n \; d\mu = \int f \; d\mu$.

3. Канонический сублинейный оператор Кутателадзе

В данном параграфе приводятся вспомогательные леммы, а также описание крайних точек сублинейного оператора посредством канонического сублинейного оператора Кутателадзе. Подробности можно найти в монографии [11, гл. 2].

Всюду далее X, E — векторные решетки, E порядково полна. Символом $L(X,E)$ будем обозначать множество всех линейных операторов из X в E. Линейный оператор $T \in L(X,E)$ называется *положительным*, если $Tx \geqslant 0$ для всех $0 \leqslant x \in X$. Символом $L(X,E)_+$ будем обозначать множество всех линейных положительных операторов из X в E. Оператор $p : X \to E$ называется *сублинейным*, если $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ и $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для всех $x, y \in X$ и $\lambda \geqslant 0$.

Определение 3.1. Сублинейный оператор $p : X \to E$ называется
(1) *возрастающим*, если $p(x_2) \geqslant p(x_1)$ для всех $x_1, x_2 \in X$, $x_2 \geqslant x_1$;
(2) *субморфизмом*, если $p(x \vee y) = p(x) \vee p(y)$ для всех $x, y \in X$.

Ясно, что всякий субморфизм является возрастающим.

Определение 3.2. *Опорным множеством* сублинейного оператора $p : X \to E$ называется множество всех линейных операторов $T \in L(X,E)$, для которых выполняется $Tx \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$. Символически,

$$\partial p := \{T \in L(X,E) : Tx \leqslant p(x) \text{ для всех } x \in X\}.$$

Определение 3.3. Пусть C — выпуклое множество некоторого векторного пространства. Элемент $z \in C$ называют *крайним* или *экстремальным*, если из условий $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, $0 < \lambda < 1$ и $x, y \in C$ следует, что $z = x = y$. Символом $\mathrm{Ch}(p)$ будем обозначать множество всех крайних точек опорного множества ∂p сублинейного оператора p. Символически,

$$\mathrm{Ch}(p) := \{T \in L(X,E) : \ T \text{ — крайняя точка } \partial p\}.$$

Лемма 3.1. *Пусть X, E — векторные решетки, E — порядково полна, $p : X \to E$ — субморфизм. Тогда справедливы следующие утверждения:*
(1) *Каждый оператор $T \in \partial p$ положителен, т. е. $\partial p \subset L(X,E)_+$;*
(2) *Каждый оператор $T \in \mathrm{Ch}(p)$ является решеточным гомоморфизмом.*

$\lhd$ Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_2 \geqslant x_1$. Так как p субморфизм, то выполняются соотношения $p(x_2) = p(x_1 \vee x_2) = p(x_1) \vee p(x_2) \geqslant p(x_1)$. Следовательно, p возрастает, и справедливость утверждения (1) следует из [11, § 2.1.1(2)]. Доказательство утверждения (2) можно найти в [7, § 3.3.9(1)]. $\rhd$

Пусть $\mathscr{U}$ — произвольное непустое множество. Обозначим символом $l_\infty(\mathscr{U}, E)$ совокупность всех отображений $f : \mathscr{U} \to E$ таких, что множество значений $\{f(\alpha) : \alpha \in \mathscr{U}\}$ порядково ограничено в E. Множество $l_\infty(\mathscr{U}, E)$ является порядково полной векторной решеткой относительно поточечных операций сложения, умножения на скаляры и отношения порядка:

$$(f+g)(\alpha) := f(\alpha) + g(\alpha), \quad (\lambda)f(\alpha) := \lambda f(\alpha)$$
$$f \leqslant g \Leftrightarrow f(\alpha) \leqslant g(\alpha)$$

для всех $f, g \in l_\infty(\mathscr{U}, E)$, $\alpha \in \mathscr{U}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Определение 3.4. Оператор $\varepsilon_{\mathscr{U}} : l_\infty(\mathscr{U}, E) \to E$, действующий по правилу

$$\varepsilon_{\mathscr{U}}(f) := \sup\{f(\alpha) : \ \alpha \in \mathscr{U}\}$$

для всех $f \in l_\infty(\mathscr{U}, E)$, называется *каноническим сублинейным оператором Кутателадзе.*

Из определения 3.4 непосредственно следует, что $\varepsilon_{\mathscr{U}}$ сублинеен и возрастает. Рассмотрим теперь некоторое множество $\mathscr{U} \subset L(X,E)$ слабо порядково ограниченных линейных операторов. Напомним, что $\mathscr{U}$ называется *слабо порядково ограниченным*, если для всякого $x \in X$ множество $\{Tx : \ T \in \mathscr{U}\}$ порядково ограничено в E. Для каждого фиксированного $x \in X$ обозначим символом $\langle \mathscr{U} \rangle x$ отображение, сопоставляющее каждому $T \in \mathscr{U}$ элемент $Tx \in E$, т. е.

$$\langle \mathscr{U} \rangle x(T) := Tx \tag{1}$$

для всех $T \in \mathscr{U}$. Так как $\mathscr{U}$ слабо порядково ограничено, то $\langle \mathscr{U} \rangle x \in l_\infty(\mathscr{U}, E)$ для каждого $x \in X$. Таким образом, возникает линейный оператор $\langle \mathscr{U} \rangle : X \to l_\infty(\mathscr{U}, E)$, действующий по правилу

$$\langle \mathscr{U} \rangle : x \mapsto \langle \mathscr{U} \rangle x$$

для всех $x \in X$. С множеством $\mathscr{U}$ можно связать еще один оператор $P_{\mathscr{U}} : X \to E$, действующий по правилу

$$P_{\mathscr{U}} x := \sup\{Tx : \ T \in \mathscr{U}\} \tag{2}$$

для всех $x \in X$. Оператор $P_{\mathscr{U}}$ сублинеен.

Лемма 3.2. *Пусть X, E — векторные решетки, E порядково полна и $\mathscr{U} \subset L(X,E)$ — множество слабо порядково ограниченных линейных операторов. Справедливы следующие утверждения:*

(1) $P_{\mathscr{U}} = \varepsilon_{\mathscr{U}} \circ \langle \mathscr{U} \rangle$;

(2) $\mathrm{Ch}(P_{\mathscr{U}}) \subset \{S \circ \langle \mathscr{U} \rangle : S \in \mathrm{Ch}(\varepsilon_{\mathscr{U}})\}$.

$\lhd$ Справедливость (1) непосредственно следует из определений $P_{\mathscr{U}}$, $\varepsilon_{\mathscr{U}}$ и $\langle \mathscr{U} \rangle$. Доказательство (2) следует из (1) и [11, теорема 2.2.10]. $\rhd$

Пусть $\mathfrak{P}(E)$ — полная булева алгебра порядковых проекторов в E. Напомним, что семейство $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathfrak{P}(E)$ называется *разбиением единицы в* $\mathfrak{P}(E)$, если $\bigvee_{\xi\in\Xi} \pi_\xi = I_E$ и $\pi_\xi \wedge \pi_\eta = 0$ для всех $\xi \neq \eta$, где I_E — тождественный оператор на E.

Определение 3.5. Пусть $(T_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset L(X,E)$. Оператор $T \in L(X,E)$ называется *перемешиванием семейства* $(T_\xi)_{\xi\in\Xi}$, если найдется разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ такое, что $Tx = \sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi T_\xi x$ для всех $x \in X$.

Зафиксируем произвольный элемент $A \in \mathscr{U}$. Положим по определению

$$\varepsilon_A(f) := f(A)$$

для всех $f \in l_\infty(\mathscr{U}, E)$. Тогда $\varepsilon_A : l_\infty(\mathscr{U}, E) \to E$ называется *δ-функцией.*

Определение 3.6. Пусть $(A_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathscr{U}$. Перемешивание семейства δ-функций $(\varepsilon_{A_\xi})_{\xi\in\Xi}$ называется *чистым состоянием*, т. е. чистые состояния представляют собой операторы вида $f \mapsto \sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi f(A_\xi)$ для всех $f \in l_\infty(\mathscr{U}, E)$, где $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(E)$, $(A_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathscr{U}$.

Лемма 3.3. *Пусть S — крайняя точка опорного множества канонического сублинейного оператора Кутателадзе $\varepsilon_{\mathscr{U}} : l_\infty(\mathscr{U}, E) \to E$. Тогда существует сеть из чистых состояний $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset L(l_\infty(\mathscr{U}, E), E)_+$ такая, что для любых $g \in l_\infty(\mathscr{U}, E)$ и $\varepsilon > 0$ найдутся $e_g \in E_+$ и $\lambda(g,\varepsilon) \in \Lambda$ такие, что $\bigl|Sg - S_\lambda g\bigr| \leqslant \varepsilon e_g$ для всех $\lambda \geqslant \lambda(g,\varepsilon)$.*

$\lhd$ Доказательство следует из [11, утверждение 2.4.8]. $\rhd$

4. Основной результат

Всюду далее Q — компакт, $C(Q)$ — пространство всех непрерывных функций из Q в $\mathbb{R}$, E — порядково полная векторная решетка, $\mathfrak{P}(E)$ — полная булева алгебра порядковых проекторов в E и $0 < e \in E$. Обозначим символом S_e множество всех положительных операторов из $C(Q)$ в E, отображающих тождественную единицу $\mathbf{1}_Q$ в e. Символически,

$$S_e := \big\{T \in L(C(Q), E)_+ : T(\mathbf{1}_Q) = e\big\}.$$

Далее опишем крайние точки S_e, что составляет цель настоящей статьи.

Лемма 4.1. *Отображение $p : C(Q) \to E$, осуществляемое по правилу*

$$p(f) := \sup\big\{f(q) : q \in Q\big\}e$$

для всех $f \in C(Q)$, является субморфизмом и имеют место равенства $\partial p = S_e$, $p(\mathbf{1}_Q) = e$.

$\lhd$ Ясно, что p — сублинейный оператор и $p(\mathbf{1}_Q) = e$. Для произвольных $f, g \in C(Q)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} p(f \vee g) &= \sup\big\{(f \vee g)(q) : q \in Q\big\}e = \sup\big\{f(q) \vee g(q) : q \in Q\big\}e \\ &= \big(\sup\big\{f(q) : q \in Q\big\}e\big) \vee \big(\sup\big\{g(q) : q \in Q\big\}e\big) = p(f) \vee p(g). \end{aligned}$$

Таким образом, p — субфорфизм. Покажем, что $\partial p = S_e$. Пусть $T \in \partial p$. Так как p возрастает, то $T \geqslant 0$ в силу [11, Утверждение 2.1.1(2)]. Из соотношений $T(\mathbf{1}_Q) \leqslant p(\mathbf{1}_Q) = e$ и $-T(\mathbf{1}_Q) = T(-\mathbf{1}_Q) \leqslant p(-\mathbf{1}_Q) = -e$ следует, что $T(\mathbf{1}_Q) = e$. Следовательно, $\partial p \subset S_e$.

Обратно, пусть $T \in S_e$. Тогда $T(f) \leqslant T(\sup\{f(q) : q \in Q\}\mathbf{1}_Q) = \sup\{f(q) : q \in Q\}e = p(f)$ для всех $f \in C(Q)$. Следовательно, $S_e \subset \partial p$. Таким образом, $\partial p = S_e$. $\rhd$

Теорема 4.1. *Пусть Q — компакт, E — порядково полная векторная решетка, $0 < e \in E$ и $S_e := \{T \in L(C(Q), E)_+ : T(\mathbf{1}_Q) = e\}$. Для произвольного оператора $T \in S_e$ равносильны утверждения:*

(1) *T является крайней точкой множества S_e;*

(2) *Существует сеть $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ операторов из $C(Q)$ в E_+ вида $f \mapsto \sum_{\xi \in \Xi} f(q_\xi)\pi_\xi e$, где $(q_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — подмножество в Q, $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(E)$ такая, что для любых $f \in C(Q)$ и $\varepsilon > 0$ найдется элемент $\lambda(f, \varepsilon) \in \Lambda$ такой, что справедливо неравенство $\big|Tf - T_\lambda f\big| \leqslant \varepsilon e$ для всех $\lambda \geqslant \lambda(f, \varepsilon)$;*

(3) *T является решеточным гомоморфизмом.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $p : C(Q) \to E$ из леммы 4.1 и T — крайняя точка S_e, т. е. $T \in \mathrm{Ch}(p)$ (см. определение 3.3). Покажем, что существует семейство $\mathscr{U} \subset L(C(Q), E)$ такое, что справедливо равенство $p = P_{\mathscr{U}}$, где $P_{\mathscr{U}} : C(Q) \to E$ — сублинейный оператор, определяемый по формуле (2). Для произвольного $q \in Q$ положим по определению

$$\hat{q}(f) := f(q)e$$

для всех $f \in C(Q)$ и обозначим символом $\mathscr{U} := \{\hat{q} : q \in Q\}$. Тогда $\mathscr{U} \subset L(C(Q), E)_+$ и $\mathscr{U}$ — слабо порядково ограничено. В силу леммы 4.1 и формулы (2) выполняются равенства

$$p(f) = \sup\big\{f(q) : q \in Q\big\}e = \sup\big\{f(q)e : q \in Q\big\} = \sup\big\{\hat{q}(f) : \hat{q} \in \mathscr{U}\big\} = P_{\mathscr{U}}(f)$$

для всех $f \in C(Q)$. Таким образом, $p = P_{\mathscr{U}}$ и по лемме 3.2 справедливо соотношение

$$\mathrm{Ch}(P_{\mathscr{U}}) \subset \big\{S \circ \langle \mathscr{U} \rangle : S \in \mathrm{Ch}(\varepsilon_{\mathscr{U}})\big\},$$

где $\varepsilon_{\mathscr{U}} : l_\infty(\mathscr{U}, E) \to E$ — канонический сублинейный оператор Кутателадзе (см. определение 3.4), $\langle \mathscr{U} \rangle : C(Q) \to l_\infty(\mathscr{U}, E)$ — линейный оператор, определяемый по формуле (1)

$$\langle \mathscr{U} \rangle f(\hat{q}) = \hat{q}(f) = f(q)e \tag{3}$$

для всех $f \in C(Q)$ и $\hat{q} \in \mathscr{U}$. Следовательно, существует оператор $S \in \mathrm{Ch}(\varepsilon_{\mathscr{U}})$ такой, что справедливо представление

$$T = S \circ \langle \mathscr{U} \rangle. \tag{4}$$

В силу леммы 3.3 существует сеть из чистых состояний $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset L(l_\infty(\mathscr{U}, E), E)_+$ такая, что для любых $g \in l_\infty(\mathscr{U}, E)$ и $\varepsilon > 0$ найдутся $e_g \in E_+$ и $\lambda(g, \varepsilon) \in \Lambda$ такие, что выполняется неравенство

$$\big|Sg - S_\lambda g\big| \leqslant \varepsilon e_g$$

для всех $\lambda \geqslant \lambda(g, \varepsilon)$. Так как образ каждого оператора из S_e содержится в главном идеале I_e в E, порожденном элементом e, то, полагая $E := I_e$, можно ограничится одним регулятором сходимости e для всех $g \in l_\infty(\mathscr{U}, E)$. Таким образом, для любых $g \in l_\infty(\mathscr{U}, E)$ и $\varepsilon > 0$ существует элемент $\lambda(g, \varepsilon) \in \Lambda$ такой, что выполняется неравенство

$$\big|Sg - S_\lambda g\big| \leqslant \varepsilon e$$

для всех $\lambda \geqslant \lambda(g, \varepsilon)$. Полагая в последнем неравенстве $g := \langle \mathscr{U} \rangle f$ для произвольного $f \in C(Q)$ и $T_\lambda := S_\lambda \circ \langle \mathscr{U} \rangle$ для всех $\lambda \in \Lambda$, с учетом формулы (4) получим

$$\big|Tf - T_\lambda f\big| \leqslant \varepsilon e$$

для всех $\lambda \geqslant \lambda(f, \varepsilon)$. Осталось показать, что каждый оператор $T_\lambda : C(Q) \to E$ $(\lambda \in \Lambda)$ имеет вид $f \mapsto \sum_{\xi \in \Xi} f(q_\xi)\pi_\xi e$, где $(q_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — подмножество в Q, $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(E)$.

Возьмем произвольный $\lambda \in \Lambda$. По определению чистого состояния оператор $S_\lambda : l_\infty(\mathscr{U}, E) \to E$ имеет вид $g \mapsto \sum_{\xi \Xi} \pi_\xi g(\hat{q}_\xi)$, где $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(E)$, $(\hat{q}_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — подмножество в $\mathscr{U}$. Полагая $g := \langle \mathscr{U} \rangle f$, с учетом формулы (3) справедливы равенства

$$T_\lambda f = S_\lambda \langle \mathscr{U} \rangle f = \sum_{\xi \in \Xi} \pi_\xi \langle \mathscr{U} \rangle f(\hat{q}_\xi) = \sum_{\xi \in \Xi} \pi_\xi f(q_\xi) e$$

для всех $f \in C(Q)$. Таким образом, каждый оператор $T_\lambda : C(Q) \to E$ $(\lambda \in \Lambda)$ имеет вид $f \mapsto \sum_{\xi \in \Xi} f(q_\xi)\pi_\xi e$, где $(q_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — подмножество в Q, $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(E)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть верно утверждение (2). Всякий оператор из $C(Q)$ в E вида $f \mapsto \sum_{\xi \in \Xi} f(q_\xi)\pi_\xi e$, где $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(E)$, $(q_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset Q$, является решеточным гомоморфизмом. Следовательно, T является решеточным гомоморфизмом как поточечный равномерный предел сети решеточных гомоморфизмов.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть T — решеточный гомоморфизм и верно равенство $T = \alpha T_1 + (1-\alpha) T_2$ для некоторых $T_1, T_2 \in S_e$ и $0 < \alpha < 1$. Тогда $T \geqslant \alpha T_1$ и по теореме Кутателадзе [7, теорема 3.3.3] существует ортоморфизм $0 \leqslant \rho \leqslant I_E$ такой, что $\alpha T_1 = \rho T$ или $T_1 = \rho/\alpha T$. Следовательно, $e = T_1(\mathbf{1}_Q) = \rho/\alpha(e)$. Обозначим через π порядковый проектор на полосу $\{e\}^{\perp\perp}$ в E, порожденную элементом e. Тогда в виду равенств $\pi(e) = e = \rho/\alpha(e)$ получим $\pi = \pi\rho/\alpha$. Следовательно, так как образ каждого оператора из S_e содержится в $\{e\}^{\perp\perp}$, то справедливы равенства $T_1 = \pi T_1 = \pi\rho/\alpha T = \pi T = T$. Таким образом, $T = T_1$. Тогда $T_2 = (T - \alpha T)/(1 - \alpha) = T$, т. е. $T = T_1 = T_2$. $\rhd$

Пусть $Bor(Q)$ — σ-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами в Q. Напомним, что всякая мера $\mu : Bor(Q) \to E$ называется *борелевской*. Борелевская мера $\mu : Bor(Q) \to E$ называется *квазирегулярной*, если выполняется равенство

$$\mu(G) = \sup\big\{\mu(K) : \ K \in Bor(Q), \ K \text{ замкнуто в } Q, \ K \subset G\big\}$$

для всех открытых множеств $G \in Bor(Q)$.

Теорема 4.2. *Пусть Q — компакт, E — порядково полная векторная решетка, $0 < e \in E$ и $S_e := \big\{T \in L(C(Q), E)_+ : T(\mathbf{1}_Q) = e\big\}$. Для произвольного оператора $T \in S_e$ равносильны утверждения:*

(1) T является крайней точкой множества S_e;

(2) Существует сеть $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ операторов из $C(Q)$ в E_+ вида $f \mapsto \sum_{\xi\in\Xi} f(q_\xi)\pi_\xi e$, где $(q_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — подмножество в Q, $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(E)$ такая, что для любых $f \in C(Q)$ и $\varepsilon > 0$ найдется элемент $\lambda(f, \varepsilon) \in \Lambda$ такой, что справедливо неравенство $\big|Tf - T_\lambda f\big| \leqslant \varepsilon e$ для всех $\lambda \geqslant \lambda(f, \varepsilon)$;

(3) T является решеточным гомоморфизмом;

(4) Ядро $\ker(\pi T)$ оператора T является порядковым идеалом в $C(Q)$ для любого порядкового проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$;

(5) Существуют экстремальный компакт Y, непрерывное отображение $\xi : Y \to Q$ и решеточный изоморфизм $h : I_e \to C(Y)$ из главного идеала $I_e \subset E$, порожденного элементом e, на $C(Y)$ такие, что справедливо представление

$$((h \circ T)f)(y) = f(\xi(y))$$

для всех $f \in C(Q)$ и $y \in Y$;

(6) Существует единственная квазирегулярная борелевская мера $\mu : Bor(Q) \to \mathfrak{C}(e)$ со значениями в полной булевой алгебре $\mathfrak{C}(e)$ осколков элемента e такая, что справедливо представление

$$Tf = \int_Q f \, d\mu$$

для всех $f \in C(Q)$. При этом мера μ является σ-непрерывным булевым гомоморфизмом;

(7) Существует единственная квазирегулярная борелевская мера $\varphi : Bor(Q) \to \mathfrak{P}(E)$ такая, что справедливо представление

$$Tf = \Bigg(\int_Q f \, d\varphi\Bigg) e$$

для всех $f \in C(Q)$. При этом мера φ является σ-непрерывным булевым гомоморфизмом из $Bor(Q)$ в главный идеал $\{\pi \in \mathfrak{P}(E) : \ \pi \leqslant \varphi(Q)\}$ в булевой алгебре $\mathfrak{P}(E)$.

$\lhd$ Равносильность утверждений (1), (2) и (3) показана в теореме 4.1, а равносильность (3) и (4) следует из [12, теорема 3.4.2]. Равносильность утверждений (3), (5) и (6) установлена в [6, теорема 3.4]. Осталось показать, что (6) и (7) равносильны.

(6) $\Rightarrow$ (7). Пусть верно утверждение (6), т. е. имеем представление

$$Tf = \int_Q f \, d\mu$$

для всех $f \in C(Q)$, где $\mu : Bor(Q) \to \mathfrak{C}(e)$ — единственная квазирегулярная борелевская мера со значениями в полной булевой алгебре $\mathfrak{C}(e)$ осколков элемента e, и мера μ является σ-непрерывным булевым гомоморфизмом. Очевидно, что все операторы из S_e действуют в полосу B_e в E, порожденную элементом e. Как известно (см. [7, теорема 1.3.7(1)]), отображение $\iota : \mathfrak{C}(e) \to \mathfrak{P}(B_e)$, которое каждому осколку $z \in \mathfrak{C}(e)$ ставит в соответствие порядковый проектор $\pi_z \in \mathfrak{P}(B_e)$ на полосу в B_e, порожденную элементом z, является булевым изоморфизмом полных булевых алгебр $\mathfrak{C}(e)$ и $\mathfrak{P}(B_e)$. При этом обратный оператор $\iota^{-1} : \mathfrak{P}(B_E) \to \mathfrak{C}(e)$ действует по правилу $\iota^{-1}(\pi) = \pi e$ для всех $\pi \in \mathfrak{P}(B_e)$. Положим по определению

$$\varphi(A) := \iota(\mu(A))$$

для всех $A \in Bor(Q)$. Тогда $\varphi : Bor(Q) \to \mathfrak{P}(B_e)$ — квазирегулярная борелевская мера. Из равенств $\mathfrak{P}(B_e) = \{\pi \in \mathfrak{P}(E) : \pi \leqslant \pi_e\}$ и $\pi_e = \varphi(Q)$ следует, что $\mathfrak{P}(B_e) = \{\pi \in \mathfrak{P}(E) : \pi \leqslant \varphi(Q)\}$. Возьмем произвольную ступенчатую функцию $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, где $A_i \in Bor(Q)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда справедливы равенства

$$\left(\int\limits_Q g\ d\varphi\right) e = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(A_i)\right) e = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(A_i) e$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \iota(\mu(A)) e = \sum_{i=1}^n \alpha_i \iota^{-1} \iota(\mu(A)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A) = \int\limits_Q g\, d\mu.$$

Следовательно, по теореме 2.2 о мажорированной сходимости выполняется равенство

$$\left(\int\limits_Q f\ d\varphi\right) e = \int\limits_Q f\, d\mu$$

для любой измеримой ограниченной функции $f : Q \to \mathbb{R}$, в частности для всех $f \in C(Q)$. Таким образом, $Tf = \int_Q f\, d\mu = \left(\int_Q f\, d\varphi\right) e$ для всех $f \in C(Q)$.

Пользуясь равенством $\mu = \iota^{-1}\varphi$, можно показать, что (7) $\Rightarrow$ (6). $\triangleright$

Литература

1. *Кутателадзе С. С.* Крайние точки субдифференциалов // Докл. АН СССР.—1978.—Т. 242, № 5.—С. 1001–1003.
2. *Кутателадзе С. С.* Теорема Крейна — Мильмана и ее обращения // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 1.—С. 130–138.
3. *Кутателадзе С. С.* Шапки и грани множеств операторов // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 280, № 2.—С. 285–288.
4. *Кутателадзе С. С.* Признаки субдифференциалов, изображающих шапки и грани // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 3.—С. 134–141.
5. *Кутателадзе С. С.* Опорные множества сублинейных операторов // Докл. АН СССР.—1976.—Т. 230, № 5.—С. 1029–1032.
6. *Tamaeva V. A., Tasoev B. B.* A note on the representation of lattice homomorphisms // Positivity.—2024.—Vol. 28, article no. 76. DOI: 10.1007/s11117-024-01095-8.
7. *Kusraev A. G.* Dominated Operators.—Springer, 2000.
8. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—London: Acad. Press Inc., 1985.
9. *Wright M.* Stone-Algebra-Valued Measures and Integrals // Proc. London Math. Soc.—1969.—Vol. 19, № 3.—P. 107–122. DOI: 10.1112/plms/s3-19.1.107.
10. *Kusraev A. G., Tasoev B. B.* Kantorovich–Wright integration and representation of vector lattices // J. Math. Anal. Appl.—2017.—Vol. 455, № 1.—P. 554–568. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.05.059.

11. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения.—М.: Наука, 2007.—559 с.
12. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: Southern Mathematical Institute VSC RAS and RNO-A, 2014.—iv+400 p. DOI: 10.13140/RG.2.1.2164.6486.

Статья поступила 4 декабря 2025 г.

Тамаева Виктория Амурхановна
Южный математический институт ВНЦ РАН,
младший научный сотрудник отдела функцион. анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН,
младший научный сотрудник отдела матем. исследований
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1
E-mail: tamaeva.va@yandex.ru
https://orcid.org/0009-0005-2558-6815;

Тасоев Батрадз Ботазович
Южный математический институт ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела функцион. анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0001-8573-4721

Vladikavkaz Mathematical Journal
2026, Volume 28, Issue 1, P. 134–144

EXTREMAL STRUCTURE OF CONVEX SETS OF LINEAR OPERATORS ON THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS

Tamaeva, V. A.[1,2] and Tasoev, B. B.[1]

[1] Southern Mathematical Institute of VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia;
[2] North-Caucasus Center for Mathematical Research of VSC RAS,
1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia

E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru, tamaeva.va@yandex.ru

Abstract. The goal of this paper is to describe the extreme points of a convex set of linear positive operators acting from the space of continuous real-valued functions on a compact set to an order-complete vector lattice and mapping the identity unit to some fixed nonzero element. The main tool of our study is the canonical sublinear operator method proposed by S. S. Kutateladze. The idea of this method is that an arbitrary sublinear operator can be represented as the composition of a linear operator and a specific sublinear operator, called the canonical Kutateladze sublinear operator. The extreme points of an arbitrary sublinear operator are the composition of the linear operator and the extreme points of the canonical Kutateladze sublinear operator. Using this fact, we obtained a description of the extreme points of the convex set of positive linear operators under study using lattice homomorphisms, in particular, pure states, which represent a special type of extreme points of the canonical Kutateladze sublinear operator.

Keywords: vector lattice, extreme point, lattice homomorphism, quasi-regular measure, sublinear operator.

AMS Subject Classification: 46B42, 46B04.

For citation: *Tamaeva, V. A. and Tasoev, B. B.* Extremal Structure of Convex Sets of Linear Operators on the Space of Continuous Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 134–144 (in Russian). DOI: 10.46698/s3306-7592-2603-k.

References

1. *Kutateladze, S. S.* Extreme Points of Subdifferentials, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1978, vol. 242, no. 5, pp. 1001–1003 (in Russian).
2. *Kutateladze, S. S.* The Krein–Mil'man Theorem and Its Inverse, *Siberian Mathematical Journal*, 1980, vol. 21, no. 1, pp. 97–103. DOI: 10.1007/BF00970127.
3. *Kutateladze, S. S.* Caps and Faces of Sets of Operators, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1985, vol. 280, no. 2, pp. 285–283 (in Russian).
4. *Kutateladze, S. S. Criteria for Subdifferentials that Represent Caps and Faces*, Siberian Mathematical Journal, 1986, vol.27, pp. 417–423. DOI: 10.1007/BF00969278.
5. *Kutateladze, S. S.* Support Sets for Sublinear Operators, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1977, vol. 17, no. 5, pp. 1428–1431 (in Russian).
6. *Tamaeva, V. A. and Tasoev, B. B.* A Note on the Representation of Lattice Homomorphisms, *Positivity*, 2024, vol. 28, no. 5. DOI: 10.1007/s11117-024-01095-8.
7. *Kusraev, A. G. Dominated Operators*, Kluwer, Springer, 2000.
8. *Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. Positive Operators*, London, Acad. Press Inc., 1985, xx+376 p.
9. *Wright, M.* Stone-Algebra-Valued Measures and Integrals, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1969, vol. 19, no. 3, pp. 107–122.
10. *Kusraev, A. G. and Tasoev, B. B.* Kantorovich–Wright Integration and Representation of Vector Lattices, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2017, vol. 455, no. 1, pp. 554–568. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.05.059.
11. *Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S. Subdifferentials: Theory and Applications*, Springer Dordrecht, 2012, ix+405 p. DOI: 10.1007/978-94-011-0265-0.
12. *Kusraev, A. G. and Tasoev, B. B. Boolean Valued Analysis: Selected Topics*, Vladikavkaz, Southern Mathematical Institute VSC RAS and RNO-A, 2014, iv+400 p. DOI: 10.13140/RG.2.1.2164.6486.

Received December 4, 2025

Victoria A. Tamaeva
Southern Mathematical Institute of VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Junior Researcher;

North-Caucasus Center for Mathematical Research of VSC RAS,
1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia,
Junior Researcher
E-mail: tamaeva.va@yandex
https://orcid.org/0009-0005-2558-6815

Batradz B. Tasoev
Southern Mathematical Institute of VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Senior Researcher
E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0001-8573-4721