Владикавказский математический журнал
2026, Том 28, Выпуск 1, С. 37–61

УДК 519.63
DOI 10.46698/f6557-1323-1446-g

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

З. В. Бештокова[1], М. Х. Бештоков[1], М. Х. Шхануков-Лафишев[1]

[1]Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
Россия, 360004, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

E-mail: zarabaeva@yandex.ru, beshtokov-murat@yandex.ru, lafishev@yandex.ru

Аннотация. Исследуется многомерное уравнение теплопроводности дробного порядка с граничными условиями третьего рода в области сложной формы. Вместо исходного дифференциального уравнения рассматривается модифицированное уравнение теплопроводности дробного порядка с параметром регуляризации $\varepsilon > 0$. Для приближенного решения модифицированной задачи используется метод конечных разностей. Построена локально-одномерная разностная схема А. А. Самарского с порядком аппроксимации $O(|h|^2 + \tau)$, суть которой состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. С помощью принципа максимума получена априорная оценка в равномерной метрике в норме C. Доказаны устойчивость локально-одномерной разностной схемы и равномерная сходимость решения предложенной разностной схемы к решению исходной задачи при любых значениях $0 < \alpha < 1$. Выбор параметра регуляризации ε может существенно повлиять на скорость сходимости локально-равномерной разностной схемы и качество ее решения. В данной работе представлен подробный анализ выбора оптимальных значений ε, позволяющих наилучшим образом определить скорость равномерной сходимости решения предлагаемой разностной схемы к решению исходной задачи.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, уравнение дробного порядка, дробная производная Герасимова — Капуто, краевые задачи, локально-одномерная схема, принцип максимума, априорная оценка, устойчивость и сходимость.

AMS Subject Classification: 65N06, 65N12.

Образец цитирования: *Бештокова З. В., Бештоков М. Х., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная схема для многомерного уравнения теплопроводности дробного порядка с условиями третьего рода в произвольной области // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 1.—С. 37–61. DOI: 10.46698/f6557-1323-1446-g.

Введение

Работа посвящена исследованию многомерного уравнения теплопроводности дробного порядка с условиями третьего рода в области сложной формы, например, когда замкнутая область имеет криволинейную границу. Построена локально-одномерная разностная схема А. А. Самарского. С помощью принципа максимума для решения разностной задачи получена априорная оценка в сеточной норме C, выражающая устойчивость локально-одномерной разностной схемы. Кроме того, доказывается ее равномерная сходимость.

Локально-одномерные схемы для дифференциальных уравнений диффузии дробного порядка с самосопряженным оператором и краевыми условиями I рода рассмотрены в [1], в области произвольной формы — в [2], а с краевыми условиями III рода — в [3, 4]. В [1–4] априорные оценки были получены лишь при условии, когда $1/2 < \alpha < 1$. В настоящей работе предлагается приближенный метод решения многомерного уравнения теплопроводности дробного порядка с условиями третьего рода в области сложной формы, основным результатом которой является доказательство устойчивости и равномерной сходимости локально-одномерной схемы при любых $\alpha \in (0, 1)$ с помощью введения параметра регуляризации $\varepsilon > 0$.

В последнее время наблюдается интенсивное развитие дробного анализа и его приложений в различных областях знаний, многие явления в механике жидкости, вязкоупругости, химии, физике, процессы тепло-массопереноса в средах с фрактальной структурой и памятью приводят к необходимости изучения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка. Они являются обобщением уравнений с частными производными целочисленного порядка и вызывают большой теоретический и практический интерес. Существует большое количество книг, посвященных математическому анализу, дробным дифференциальным уравнениям и их применениям, например, [5–11], в которых дан достаточно полный обзор работ, посвященных дифференциальным уравнениям дробного порядка. Монография [7] посвящена основополагающим элементам дробного исчисления, качественно новым свойствам операторов дробного интегрирования и дифференцирования и их применению к решению проблем математического моделирования различных процессов и явлений в живых и неживых системах с фрактальной структурой и памятью. В [11] исследованы математические модели различных процессов переноса субстанций в пористых средах, обладающих фрактальной структурой. Изучены основные нелокальные дифференциальные уравнения математических моделей: движение грунтовых вод, почвенной влаги и соли; эволюции малых возмущений в каналах с фрактальными стенками; динамики микрометеорологического режима при орошении больших территорий.

Разностным методам решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка посвящены многие работы. В статье [12] предложены неравенства, позволяющие применять метод энергетических неравенств для нахождения априорных оценок решений дифференциальных уравнений дробного порядка. В [13, 14] исследуются локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения влагопереноса с дробной производной в смысле Герасимова — Капуто и Римана — Лиувилля. В [15] представлен алгоритм экстраполяционного типа для численного решения дифференциальных уравнений дробного порядка. В [16] исследуется конечно-разностная аппроксимация производной Герасимова — Капуто на неоднородных сетках для решения уравнения дробной диффузии. Доказана безусловная устойчивость и сходимость. В работе [17] рассматриваются дифференциальные уравнения дробного порядка 1/2. Конечно-разностным методом получены условия устойчивости и сходимости рассматриваемых задач.

Настоящая работа является продолжением серии работ авторов в этом направлении [18, 19].

1. Постановка задачи

В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0, T]$ рассмотрим третью краевую задачу для уравнения теплопроводности дробного порядка:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\Theta_k(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}=\beta_{-k}(x,t)u-\mu_{-k}(x,t),\quad x_k=x_k^-,\quad t\geqslant 0, \tag{2}$$

$$-\Theta_k(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}=\beta_{+k}(x,t)u-\mu_{+k}(x,t),\quad x_k=x_k^+,\quad t\geqslant 0, \tag{3}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{G}, \tag{4}$$

где $\partial_{0t}^\alpha u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial\eta}\frac{d\eta}{(t-\eta)^\alpha}$, $0<\alpha<1$, — дробная производная Герасимова — Капуто порядка α,

$$L=\sum_{k=1}^{p}L_k,\quad L_ku=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)-q_k(x,t)u,\quad k=1,2,\ldots,p,$$

$$0<c_0\leqslant\Theta_k(x,t),\quad q_k(x,t)\leqslant c_1,\quad \beta_{\pm k}\geqslant c_0>0,\quad c_0,c_1=\mathrm{const}>0,$$

$$\mu_{+k}=\mu(x_k^+,x',t),\quad \mu_{-k}=\mu(x_k^-,x',t),\quad Q_T=G\times(0,T),\quad k=1,\ldots,p,$$

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_p),\quad x'=(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_p),$$

x_k^-, x_k^+ — левая и правая граничные значения x_k соответственно, $\Gamma_k=\{x_k^-,x_k^+\}\in\Gamma$, Γ — граница области G, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ — точка p-мерного евклидового пространства R^p.

В дальнейшем будем предполагать, что решение $u(x,t)$ задачи (1)–(4) существует и единственно, коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют условиям гладкости, необходимым для построения локально-одномерной разностной схемы:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial t^2},\ \frac{\partial^4u}{\partial x_k^2\partial x_\nu^2},\ \frac{\partial^4u^\varepsilon}{\partial x_k^2\partial x_\nu^2},\ \frac{\partial^3u^\varepsilon}{\partial x_k^2\partial t},\ \frac{\partial^{2+\alpha}u}{\partial x_k^2\partial t^\alpha},\ \frac{\partial^{2+\alpha}u^\varepsilon}{\partial x_k^2\partial t^\alpha},\ \frac{\partial^2f}{\partial x_k^2},$$

$$\Theta_k(x,t)\in C^{3,1}\big(\overline{Q}_T\big),\quad q_k(x,t)\in C^{2,1}\big(\overline{Q}_T\big),\quad 1\leqslant k,\ \nu\leqslant p,\ k\neq\nu,\ 0<\alpha<1.$$

В той же области $\overline{Q}_T$ вместо задачи (1)–(4) рассмотрим следующую задачу с малым параметром ε:

$$\varepsilon u_t^\varepsilon+\partial_{0t}^\alpha u^\varepsilon=Lu^\varepsilon+f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{5}$$

$$\Theta_k(x,t)\,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}=\beta_{-k}(x,t)u^\varepsilon-\mu_{-k}(x,t),\quad x_k=x_k^-,\quad t\geqslant 0, \tag{6}$$

$$-\Theta_k(x,t)\,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}=\beta_{+k}(x,t)u^\varepsilon-\mu_{+k}(x,t),\quad x_k=x_k^+,\quad t\geqslant 0, \tag{7}$$

$$u^\varepsilon(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{G}, \tag{8}$$

где $\varepsilon=\mathrm{const}>0$.

Так как при $t=0$ начальные условия для уравнений (1) и (5) совпадают, то в окрестности $t=0$ производная u_t^ε не обладает особенностью типа пограничного слоя [20] (см. также [21, с. 10]).

В дальнейшем покажем, что регуляризация исходной задачи введением члена с первой производной по времени с малым параметром в качестве коэффициента позволяет получить для данной задачи устойчивость и равномерную сходимость локально-одномерной схемы при любых $\alpha\in(0,1)$. В работах [1–4] получены оценки только при $\alpha\in(1/2,1)$.

Покажем, что $u^\varepsilon\to u$ в некоторой норме при $\varepsilon\to 0$. Обозначим через $\tilde z=u^\varepsilon-u$ и подставим $u^\varepsilon=\tilde z+u$ в задачу (5)–(8). Тогда

$$\varepsilon\tilde z_t+\partial_{0t}^\alpha\tilde z=L\tilde z+\tilde f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{9}$$

$$\Theta_k(x,t)\,\frac{\partial \tilde z}{\partial x_k} = \beta_{-k}(x,t)\tilde z, \quad x_k = x_k^-, \quad t \geqslant 0, \tag{10}$$

$$-\Theta_k(x,t)\,\frac{\partial \tilde z}{\partial x_k} = \beta_{+k}(x,t)\tilde z, \quad x_k = x_k^+, \quad t \geqslant 0, \tag{11}$$

$$\tilde z(x,0) = 0, \quad x \in \overline{G}, \quad \overline{G} = G + \Gamma, \tag{12}$$

где $\tilde f(x,t) = -\varepsilon\,\frac{\partial u}{\partial t}$.

Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (9) скалярно на $\tilde{\mathbf{z}}$ и получим энергетическое тождество:

$$\left(\varepsilon \frac{\partial \tilde z}{\partial t}, \tilde z\right) + \left(\partial_{0t}^{\alpha}\tilde z, \tilde z\right) = \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t)\frac{\partial \tilde z}{\partial x_k}\right), \tilde z\right) - \left(\sum_{k=1}^{p} q_k(x,t)\tilde z, \tilde z\right) + \left(\tilde f(x,t), \tilde z\right). \tag{13}$$

Будем пользоваться скалярным произведением и нормой

$$(u,v) = \int_G uv\,dx, \quad (u,u) = \|u\|_0^2, \quad u_x^2 = \sum_{k=1}^{p} u_{x_k}^2, \quad \|u\|^2_{L_2(x_k^-,x_k^+)} = \int_{x_k^-}^{x_k^+} u^2(x,t)\,dx_k.$$

Далее через M_i, $i = 1, 2, \ldots$, обозначаются положительные постоянные, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

Используя лемму 1 из [12] и применяя ε-неравенство Коши, из (13) получаем

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\|\tilde z\|_0^2 + \frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\|\tilde z\|_0^2 + c_0\|\tilde z\|_0^2 + c_0\|\tilde z_x\|_0^2 \\ \leqslant \sum_{k=1}^{p}\int_{G'} \Theta_k(x,t)\tilde z\,\frac{\partial \tilde z}{\partial x_k}\Bigg|_{x_k^-}^{x_k^+} dx' + \varepsilon_1\|\tilde z\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}\,\|\tilde f\|_0^2,\end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered}G' = \left\{x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p) : \, x_k^- \leqslant x_k \leqslant x_k^+\right\}, \\ dx' = dx_1 dx_2 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_p.\end{gathered}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (14) следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{p}\int_{G'} \Theta_k(x,t)\tilde z\,\frac{\partial \tilde z}{\partial x_k}\Bigg|_{x_k^-}^{x_k^+} dx' = \sum_{k=1}^{p}\int_{G'} \left(-\beta_{-k}\tilde z^2(x_k^-, x', t) - \beta_{+k}\tilde z^2(x_k^+, x', t)\right) dx'. \tag{15}$$

Выбирая $\varepsilon_1 = c_0/2$, из неравенства (14) с учетом (15) находим

$$\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial t}\,\|\tilde z\|_0^2 + \partial_{0t}^{\alpha}\|\tilde z\|_0^2 + \|\tilde z\|_0^2 + \|\tilde z_x\|_0^2 + \sum_{k=1}^{p}\int_{G'} \left(\tilde z^2(x_k^-, x', t) + \tilde z^2(x_k^+, x', t)\right) dx' \leqslant M_2\|\tilde f\|_0^2. \tag{16}$$

Проинтегрируем (16) по τ от 0 до t. Тогда

$$\varepsilon\|\tilde z\|_0^2 + D_{0t}^{\alpha-1}\|\tilde z\|_0^2 + \|\tilde z\|^2_{2,Q_t} + \|\tilde z_x\|^2_{2,Q_t} \leqslant M\int_0^t \|\tilde f\|_0^2\,d\tau = \varepsilon^2 M\int_0^t \|u_\tau\|_0^2\,d\tau = O\left(\varepsilon^2\right), \tag{17}$$

где $\tilde z = u^\varepsilon - u$, M зависит только от входных данных задач (9)–(12), $\|\tilde z\|^2_{2,Q_t} = \int_0^t \|\tilde z\|_0^2\,d\tau$, $D_{0t}^{\alpha-1}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$ — дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $1-\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Из априорной оценки (17) следует сходимость u^ε к u при $\varepsilon \to 0$ в норме $\|\tilde{z}\|_1^2 = \varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2 + D_{0t}^{\delta-1}\|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_{2,Q_t}^2 + \|\tilde{z}_x\|_{2,Q_t}^2$. Поэтому при малом ε решение задачи (5)–(8) будем принимать за приближенное решение краевой задачи (1)–(4).

2. Построение локально-одномерной схемы (ЛОС)

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_k с шагом $h_k = \frac{x_k^+ - x_k^-}{N_k}, k = 1, 2, \ldots, p$:

$$\bar{\omega}_{h_k} = \left\{ x_k^{(i_k)} = i_k h_k : \, i_k = 0, 1, \ldots, N_k, \, h_k = \frac{x_k^+ - x_k^-}{N_k}, \, k = 1, 2, \ldots, p \right\}, \quad \bar{\omega} = \prod_{k=1}^{p} \bar{\omega}_{h_k}.$$

На отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}'_\tau = \left\{ 0, \, t_{j+\frac{k}{p}} = \left(j + \frac{k}{p} \right) \tau, \, j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1; \, \tau = \frac{T}{j_0}, \, k = 1, 2, \ldots, p \right\},$$

содержащую наряду с узлами $t_j = j\tau$ фиктивные узлы $t_{j+k/p}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$. Будем обозначать через ω'_τ множество узлов сетки $\bar{\omega}'_\tau$, для которых $t > 0$.

Относительно области $\overline{G}$ используются два предположения (см. [22, с. 486]):

а) пересечение области G с прямой C_k, параллельной оси координат O_{x_k}, состоит из одного интервала Δ_k;

б) возможно построение в замкнутой области $\overline{G} = G \cup \Gamma$ связной сетки $\bar{\omega}_h$ с шагами h_k, $k = 1, 2, \ldots, p$. Множество ω_h внутренних узлов сетки состоит из точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in G$ пересечения гиперплоскостей $x_k = i_k h_k$, $i_k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, p$, а множество γ_h граничных узлов — из точек пересечения прямых C_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, проходящих через внутренние узлы $x \in \omega_h$, с границей Γ.

Обозначим через $\gamma_{h,k}$ множество граничных по направлению x_k узлов, γ_h — множество всех граничных узлов $x \in \Gamma$, $\omega_{h,k}^*$ — множество приграничных по направлению x_k узлов, ω_h^* — множество всех приграничных узлов, $\omega_{h,k}^{**}$ — множество нерегулярных по направлению x_k узлов, ω_h^{**} — множество всех нерегулярных узлов, $\omega_{h,k}$ — множество регулярных по направлению x_k узлов, ω_h — множество всех регулярных узлов.

Для разностной аппроксимации оператора L_k в узле x выбираем трехточечный шаблон, состоящий из точек $x^{(-1_k)}$, x, $x^{(+1_k)}$. Разностный оператор $\Lambda_k \sim L_k$ имеет следующий вид:

1) В регулярных узлах:

$$\Lambda_k y^{j+\frac{k}{p}} = \left(a_k y_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}} \right)_{x_k} - d_k y^{j+\frac{k}{p}}, \quad a^{(+1)} = a_{i+1}, \quad a_i = \Theta_{i-\frac{1}{2}}(\bar{t}\,),$$

2) В нерегулярных узлах:

$$\Lambda_k y_{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{h_k} \left(a_{k,i_k+1} \frac{y^{(+1_k)} - y}{h_k} - a_{k,i_k} \frac{y - y^{(-1_k)}}{h_k^*} \right) - d_k y_{(k)}, & x^{(-1_k)} \in \gamma_{h,k}, \\ \frac{1}{h_k} \left(a_{k,i_k+1} \frac{y^{(+1_k)} - y}{h_k^*} - a_{k,i_k} \frac{y - y^{(-1_k)}}{h_k} \right) - d_k y_{(k)}, & x^{(+1_k)} \in \gamma_{h,k}, \end{cases}$$

где h_k^* — расстояние от нерегулярного узла x до граничного узла $x^{(+1_k)}$ или $x^{(-1_k)}$. Если оба соседних с $x \in \omega_{h,k}^*$ узла $x^{(+1_k)}$ и $x^{(-1_k)}$ являются граничными, т. е. $x^{(\pm 1_k)} \in \gamma_{h,k}$, то

$$\Lambda_k y^{j+\frac{k}{p}} = \frac{1}{h_k} \left(a_{k,i_k+1} \frac{y^{(+1_k)} - y}{h_k^*} - a_{k,i_k} \frac{y - y^{(-1_k)}}{h_k^*} \right) - d_k y^{j+\frac{k}{p}}$$

— общий вид оператора, где $h^*_{k\pm}$ — расстояние между x и $x^{(+1_k)}$, $h^*_{k\pm} \leqslant h_k$.

В регулярных узлах Λ_k имеет второй порядок аппроксимации, $\Lambda_k u^\varepsilon - L_k u^\varepsilon = O(h_k^2)$, а в нерегулярных узлах $\Lambda_k u^\varepsilon - L_k u^\varepsilon = O(1)$ (см. [22, с. 232]).

На равномерной сетке $\bar\omega_{h\tau}$ по аналогии с [22] уравнению (5) поставим в соответствие цепочку «одномерных» уравнений, для этого перепишем (5) в виде

$$\pounds u^\varepsilon = \varepsilon u^\varepsilon_t + \partial^\alpha_{0t} u^\varepsilon - L u^\varepsilon - f = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^{p} \pounds_k u^\varepsilon = 0, \quad \pounds_k u^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{p}\, u^\varepsilon_t + \frac{1}{p}\, \partial^\alpha_{0t} u^\varepsilon - L_k u^\varepsilon - f_k,$$

где $f_k(x,t)$, $k = 1,2,\ldots,p$, — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x,t)$, и удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{p} f_k = f$.

На каждом полуинтервале $\Delta_k = (t_{j+(k-1)/p}, t_{j+k/p}]$, $k = 1,2,\ldots,p$, будем последовательно решать задачи

$$\pounds_k \vartheta_{(k)} = \frac{\varepsilon}{p}\, \vartheta_t + \frac{1}{p}\, \partial^\alpha_{0t} \vartheta_{(k)} - L_k \vartheta_{(k)} - f_k = 0, \quad x \in G,\ t \in \Delta_k,\ k = 1,2,\ldots,p, \tag{18}$$

$$\begin{cases} \Theta_k(x,t)\, \dfrac{\partial \vartheta_{(k)}}{\partial x_k} = \beta_{-k}(x,t)\vartheta_{(k)} - \mu_{-k}(x,t), & x_k = x_k^-, \\ -\Theta_k(x,t)\, \dfrac{\partial \vartheta_{(k)}}{\partial x_k} = \beta_{+k}(x,t)\vartheta_{(k)} - \mu_{+k}(x,t), & x_k = x_k^+, \end{cases} \tag{19}$$

полагая при этом

$$\vartheta_{(1)}(x,0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}(x,t_j) = \vartheta_{(p)}(x,t_j), \quad j = 0,1,\ldots,j_0-1, \tag{20}$$

$$\vartheta_{(k)}\left(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\right) = \vartheta_{(k-1)}\left(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\right), \quad k = 2,3,\ldots,p,$$

где Γ_k — множество граничных точек по направлению x_k.

Каждое из уравнений (18) заменим разностной схемой на Δ_k:

$$\begin{gathered} \frac{\varepsilon}{p}\, y_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\, \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) y_{\bar t}^{\frac{s}{p}} \\ = \Lambda_k \left(\sigma_k y^{j+\frac{k}{p}} + (1-\sigma_k) y^{j+\frac{k-1}{p}}\right) + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad x \in \omega_h,\ k = 1,2,\ldots,p, \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{cases} a_k^{(1_k)} y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} = \beta_{-k} y_0^{j+\frac{k}{p}} - \mu_{-k}, & x_k = x_k^-, \\ -a_k^{(N_k)} y_{\bar x_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} = \beta_{+k} y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} - \mu_{+k}, & x_k = x_k^+, \end{cases} \tag{22}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{23}$$

где

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{t_{j+\frac{k}{p}}} \frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{(t_{j+\frac{k}{p}} - \eta)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) u_{\bar t}^{\frac{s}{p}} + O\left(\frac{\tau}{p}\right)$$

— дискретный аналог дробной производной порядка α [1],

$$y_{\bar t}^{\frac{s}{p}} = \frac{y^{\frac{s}{p}} - y^{\frac{s-1}{p}}}{\frac{\tau}{p}}, \quad \mu_{\pm k}^{j+\frac{k}{p}} = \mu_{\pm k}\left(x, t_{j+\frac{k}{p}}\right), \quad \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} = f_k\left(x, t_{j+\frac{k}{p}}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

σ_k — произвольные параметры, $\gamma_{h,k}$ — множество граничных по направлению x_k узлов,

$$x \in \overline{\omega}_h = \left\{x_i = (i_1 h_1, \ldots, i_p h_p) \in \overline{G},\, i_k = 0, 1, \ldots, N_k,\, h_k = \frac{x_k^+ - x_k^-}{N_k}\right\},$$

$$d_k^{j+\frac{k}{p}} = q\left(x_i, t^{j+\frac{k}{p}}\right), \quad a^{(+1)} = a_{i+1}, \quad a_i = \Theta_{i-\frac{1}{2}}(\bar t\,), \quad \bar t = t_{j+\frac{1}{2}}.$$

Разностное уравнение (21) пишется вдоль отрезка Δ_k, лежащего на прямой C_k, концы этого отрезка удовлетворяют граничным условиям (22) и принадлежат границе $\gamma_{h,k} = \{x_k^-, x_k^+\}$. Узлы $x \in \gamma_{h,k}$ лежат на Γ_k, если, например, $\overline{G} = \{0 \leqslant x_k \leqslant l_k\}$ — параллелепипед, то Γ_k состоит из граней $x_k = x_k^- = 0$ и $x_k = x_k^+ = l_k$.

Условия (22) имеют порядок аппроксимации $O(h_k)$. Повысим порядок аппроксимации до $O(h_k^2)$ на решениях уравнения (18) при каком-либо k.

Так как

$$\Theta_k \frac{\partial \vartheta_{(k)}}{\partial x_k} = a_k^{(1_k)} \vartheta_{(k) x_k, 0} - 0,5\, h_k \left(\frac{\varepsilon}{p}\vartheta_t + \frac{1}{p}\,\partial_{0t}^\alpha \vartheta_{(k)} + q_k(x,t)\vartheta_{(k)} - f_k\right)_0 + O\big(h_k^2\big),$$

то

$$a_k^{(1_k)} \vartheta_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - 0,5\, h_k \left(\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha}\right) \vartheta_{\bar t}^{\frac{s}{p}} + q_k(x,t)\vartheta^{j+\frac{k}{p}} - f_k\right)_0$$
$$- 0,5\, h_k \frac{\varepsilon}{p} \vartheta_{t,0} = \beta_{-k}\vartheta_0^{j+\frac{k}{p}} - \mu_{-k} + O(h_k^2) + O\big(h_k \tau\big). \tag{24}$$

В (24) отбросим величины порядка малости $O(h_k^2)$, $O(h_k\tau)$. Тогда после замены $\vartheta_{(k)}$ на y получим

$$a_k^{(1_k)} y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - 0,5\, h_k \frac{\varepsilon}{p}\, y_{t,0} - \frac{0,5\, h_k}{p}\, \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha y_0 = \bar\beta_{-k} y_0^{j+\frac{k}{p}} - \mu_{-k} - 0,5\, h_k f_{k,0},$$

или

$$\frac{\varepsilon}{p}\, y_{t,0} + \frac{1}{p}\, \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha y_0 = \frac{a_k^{(1_k)} y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar\beta_{-k} y_0^{j+\frac{k}{p}}}{0,5\, h_k} + \frac{\bar\mu_{-k}}{0,5\, h_k}\,. \tag{25}$$

Аналогично при $x_k = x_k^+$ получаем:

$$\frac{\varepsilon}{p}\, y_{t_N} + \frac{1}{p}\, \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha y_{N_k} = -\frac{a_k^{(N_k)} y_{\bar x_k, N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \bar\beta_{+k} y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5\, h_k} + \frac{\bar\mu_{+k}}{0,5\, h_k}\,, \tag{26}$$

где

$$\bar\beta_{-k} = \beta_{-k} + 0,5\, h_k d_k^{(0)}, \quad \bar\beta_{+k} = \beta_{+k} + 0,5\, h_k d_k^{(N_k)},$$
$$\bar\mu_{-k} = \mu_{-k} + 0,5\, h_k f_{k,0}, \quad \bar\mu_{+k} = \mu_{+k} + 0,5\, h_k f_{k,N_k}.$$

Итак, разностный аналог задачи (5)–(8) имеет вид:

$$\frac{\varepsilon}{p}\, y_t + \frac{1}{p}\, \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha y = \bar\Lambda_k y^{j+\frac{k}{p}} + \Phi_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{27}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{28}$$

где

$$\bar{\Lambda}_k y = \begin{cases} \Lambda_k y = (a_k y_{\bar{x}_k})_{x_k} - d_k y, & x_k \in \omega_{h_k}, \\ \Lambda_k^- y = \frac{a_k^{(1_k)} y_{x_k,0} - \bar{\beta}_{-k} y_0}{0{,}5\, h_k}, & x_k = x_k^-, \\ \Lambda_k^+ y = -\frac{a_k^{(N_k)} y_{\bar{x}_k,N_k} + \bar{\beta}_{+k} y_{N_k}}{0{,}5\, h_k}, & x_k = x_k^+, \end{cases} \qquad \Phi_{(k)} = \begin{cases} \varphi_k, & x_k \in \omega_{h_k}, \\ \frac{\bar{\mu}_{-k}}{0{,}5\, h_k}, & x_k = x_k^-, \\ \frac{\bar{\mu}_{+k}}{0{,}5\, h_k}, & x_k = x_k^+. \end{cases}$$

Заметим, что при повышении порядка аппроксимации краевых условий третьего рода (22) на решениях уравнения (18) до $O(h_k^2 + \tau)$, естественным образом возникает разностная задача (27), (28) с нелокальным по каждому направлению x_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ граничным условием.

3. Погрешность аппроксимации ЛОС

Перейдем к изучению погрешности аппроксимации (невязки) локально-одномерной схемы и убедимся в том, что каждое уравнение (21) для номера k в отдельности не аппроксимирует уравнение (5), но сумма погрешностей аппроксимации

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_p$$

стремится к нулю при τ и $|h|$ стремящихся к нулю.

Будем считать $\sigma_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Пусть $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t)$ — решение задачи (5)–(8), а $y^{j+k/p}$ — решение разностной задачи (21). Характеристикой точности локально-одномерной схемы является разность $y^{j+1} - (u^\varepsilon)^{j+1} = (z^\varepsilon)^{j+1}$. Промежуточные значения $y^{j+k/p}$ будем сравнивать с $(u^\varepsilon)^{j+k/p} = u^\varepsilon(x, t_{j+k/p})$, полагая $(z^\varepsilon)^{j+k/p} = y^{j+k/p} - (u^\varepsilon)^{j+k/p}$. Подставляя $y^{j+k/p} = (z^\varepsilon)^{j+k/p} + (u^\varepsilon)^{j+k/p}$ в разностное уравнение (21), получим

$$\frac{\varepsilon}{p}\,(z^\varepsilon)_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)(z^\varepsilon)_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \Lambda_k\,(z^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}} + \psi_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{29}$$

где

$$\psi_k^{j+\frac{k}{p}} = \Lambda_k\,(u^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}} + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)(u^\varepsilon)_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} - \frac{\varepsilon}{p}\,(u^\varepsilon)_t^{j+\frac{k}{p}}.$$

Обозначив через

$$\overset{\circ}{\psi}_k = \left(L_k u^\varepsilon + f_k - \frac{\varepsilon}{p}\, u^\varepsilon_t - \frac{1}{p}\,\partial^\alpha_{0t} u^\varepsilon\right)^{j+\frac{1}{2}} \tag{30}$$

и замечая, что $\sum_{k=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_k = 0$, если $\sum_{k=1}^{p} f_k = f$, представим $\psi_k = \psi_k^{j+k/p}$ в виде $\psi_k = \psi_k{}^\circ + \psi^*{}_k$, где

$$\psi_k^{j+\frac{k}{p}} = \left(\Lambda_k\,(u^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}} - L_k\,(u^\varepsilon)^{j+\frac{1}{2}}\right) + \left(\varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - f_k^{j+\frac{1}{2}}\right)$$
$$- \left(\frac{1}{p}\,\Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{k}{p}}}\,(u^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\,(\partial^\alpha_{0t} u^\varepsilon)^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{p}\,(u^\varepsilon)_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{\varepsilon}{p}\,(u^\varepsilon)_t^{j+\frac{1}{2}}\right) + \overset{\circ}{\psi}_k = \overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k,$$

$$\overset{*}{\psi}_k = \left(\Lambda_k \left(u^\varepsilon\right)^{j+\frac{k}{p}} - L_k \left(u^\varepsilon\right)^{j+\frac{1}{2}}\right) + \left(\varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - f_k^{j+\frac{1}{2}}\right)$$
$$- \left(\frac{1}{p}\, \Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{k}{p}}} \left(u^\varepsilon\right)^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\left(\partial^\alpha_{0t} u^\varepsilon\right)^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{p}\left(u^\varepsilon\right)_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{\varepsilon}{p}\left(u^\varepsilon\right)_t^{j+\frac{1}{2}}\right).$$

Ясно, что

$$\overset{*}{\psi}_k = \begin{cases} O\big(h_k^2 + \tau\big) \text{ в регулярных узлах,} \\ O(1) \text{ в нерегулярных узлах,} \end{cases}$$

так как каждая из схем (21) номера $\varkappa$ аппроксимирует в обычном смысле соответствующее уравнение (5). Таким образом,

$$\overset{*}{\psi}_k = O(h_k^2 + \tau), \quad \overset{\circ}{\psi}_k = O(1), \quad \sum_{k=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_k = 0,$$

$$\psi = \sum_{k=1}^{p} \psi_k = \sum_{k=1}^{p} \left(\overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \overset{*}{\psi}_k = O\big(|h|^2 + \tau\big),$$

в регулярных узлах сетки ω_h.

Рассмотрим погрешность краевых условий разностной схемы (25), (26), где $(z^\varepsilon)^{j+k/p} = y^{j+k/p} - (u^\varepsilon)^{j+k/p}$. Запишем граничное условие при $x_k = x_k^-$ следующим образом:

$$0,5\, h_k\, \frac{\varepsilon}{p}\, y_{t,0} + \frac{0,5\, h_k}{p}\, \Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{k}{p}}} y_0 = a_k^{(1_k)} y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} y_0^{j+\frac{k}{p}} + 0,5\, h_k f_{k,0} + \mu_{-k}. \tag{31}$$

Тогда, подставляя $y^{j+k/p} = (z^\varepsilon)^{j+k/p} + (u^\varepsilon)^{j+k/p}$ в (31), получим

$$0,5\, h_k \frac{\varepsilon}{p}\left(z^\varepsilon\right)_{t,0} + \frac{0,5\, h_k}{p}\, \Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{k}{p}}} z_0^\varepsilon = a_k^{(1_k)} \left(z^\varepsilon\right)_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} \left(z^\varepsilon\right)_0^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} \left(u^\varepsilon\right)_0^{j+\frac{k}{p}}$$
$$-\, 0,5 h_k\, \frac{\varepsilon}{p}\, u^\varepsilon_{t,0} - \frac{0,5 h_k}{p}\, \Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{k}{p}}} u_0^\varepsilon + a_k^{(1_k)} \left(u^\varepsilon\right)_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} + 0,5\, h_k f_{k,0} + \mu_{-k}.$$

К правой части последнего выражения добавим и вычтем

$$0,5\, h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} = 0,5\, h_k \left(L_k u^\varepsilon + f_k - \frac{\varepsilon}{p}\, u_t^\varepsilon - \frac{1}{p}\, \partial^\alpha_{0t} u^\varepsilon\right)_0^{j+\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\psi_{-k} = 0,5\, h_k \left(f_{k,0} - \frac{\varepsilon}{p}\left(u^\varepsilon\right)_{t,0}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\, \Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{k}{p}}} \left(u^\varepsilon\right)_0^{j+\frac{k}{p}}\right) + a_k^{(1_k)} \left(u^\varepsilon\right)_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}$$
$$- \bar{\beta}_{-k} \left(u^\varepsilon\right)_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k} - 0,5\, h_k \left(L_k u^\varepsilon + f_k - \frac{\varepsilon}{p}\, u_t^\varepsilon - \frac{1}{p}\, \partial^\alpha_{0t} u^\varepsilon\right)_0^{j+\frac{1}{2}} + 0,5\, h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k}$$
$$= 0,5\, h_k \left(f_{k,0} - \frac{\varepsilon}{p}\left(u^\varepsilon\right)_{t,0}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{k}{p}}} \left(u^\varepsilon\right)_0^{j+\frac{k}{p}}\right) + a_k^{(1_k)} \left(u^\varepsilon\right)_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} \left(u^\varepsilon\right)_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k}$$
$$- 0,5\, h_k \left(L_k u^\varepsilon\right)_0^{j+\frac{1}{2}} - 0,5\, h_k \left(f_k - \frac{\varepsilon}{p}\, u_t^\varepsilon - \frac{1}{p}\, \partial^\alpha_{0t} u^\varepsilon\right)_0^{j+\frac{k}{p}} + 0,5\, h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} + O(h_k \tau)$$
$$= a_k^{(1_k)} \left(u^\varepsilon\right)_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} \left(u^\varepsilon\right)_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k} - 0,5\, h_k \left(L_k u^\varepsilon\right)_0^{j+\frac{1}{2}} + 0,5\, h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} + O(h_k \tau)$$
$$= \Theta_k\, \frac{\partial \left(u^\varepsilon\right)^{j+\frac{k}{p}}}{\partial x_k} + 0,5\, h_k\, \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Theta_k\, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\right)^{j+\frac{k}{p}} - \beta_{-k} \left(u^\varepsilon\right)_0^{j+\frac{k}{p}} - 0,5\, h_k d_{k,0} \left(u^\varepsilon\right)_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k}$$

$$-0,5\,h_k\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k\,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\right)-q_k u^\varepsilon\right)_0^{j+\frac{k}{p}}+0,5\,h_k\overset{\circ}{\psi}_{-k}+O\big(h_k^2\big)+O(h_k\tau)$$

$$=\left[\Theta_k\,\frac{\partial\,(u^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}}}{\partial x_k}-\beta_{-k}\,(u^\varepsilon)_0^{j+\frac{k}{p}}+\mu_{-k}\right]\Bigg|_{x_k=0}+0,5\,h_k\overset{\circ}{\psi}_{-k}+O\big(h_k^2\big)+O(h_k\tau).$$

В силу граничных условий (2) выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю. Поэтому

$$\psi_{-k}=0,5\,h_k\overset{\circ}{\psi}_{-k}+\overset{*}{\psi}_{-k}.$$

Итак,

$$0,5\,h_k\frac{\varepsilon}{p}\,z^\varepsilon_{t,0}+\frac{0,5\,h_k}{p}\,\Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{k}{p}}}\,z^\varepsilon_0=a_k^{(1_k)}\,(z^\varepsilon)_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}-\bar\beta_{-k}\,(z^\varepsilon)_0^{j+\frac{k}{p}}+0,5\,h_k\overset{\circ}{\psi}_{-k}+\overset{*}{\psi}_{-k}$$

или

$$\frac{\varepsilon}{p}\,z^\varepsilon_{t,0}+\frac{1}{p}\,\Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{k}{p}}}\,z^\varepsilon_0=\Lambda_k^-\,(z^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}}+\psi_{-k},\quad \psi_{-k}=\overset{\circ}{\psi}_{-k}+\frac{\overset{*}{\psi}_{-k}}{0,5\,h_k}.$$

Аналогично при $x_k=x_k^+$ имеем

$$\frac{\varepsilon}{p}\,z^\varepsilon_{t,N_k}+\frac{1}{p}\,\Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{k}{p}}}\,z^\varepsilon_{N_k}=\Lambda_k^+\,(z^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}}+\psi_{+k},\quad \psi_{+k}=\overset{\circ}{\psi}_{+k}+\frac{\overset{*}{\psi}_{+k}}{0,5h_k},$$

$$\overset{\circ}{\psi}_{\pm k}=O(1),\quad \sum_{k=1}^p\overset{\circ}{\psi}_{\pm k}=0.$$

Очевидно, что

$$\overset{*}{\psi}_{\pm k}=\begin{cases}O\big(h_k^2+\tau\big)+O(h_k\tau)\ \text{в регулярных узлах},\\ O(1)\ \text{в нерегулярных узлах}.\end{cases}$$

Таким образом, для погрешности $z^{j+k/p}$ получаем задачу:

$$\frac{\varepsilon}{p}\,(z^\varepsilon)_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\,\Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{k}{p}}}\,z^\varepsilon=\bar\Lambda_k\,(z^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}}+\Psi_k^{j+\frac{k}{p}},\tag{32}$$

$$z^\varepsilon(x,0)=0,\tag{33}$$

где

$$\bar\Lambda_k=\begin{cases}\Lambda_k, & x_k\in\omega_{h_k},\\ \Lambda_k^-, & x_k=x_k^-,\\ \Lambda_k^+, & x_k=x_k^+,\end{cases}\qquad \Psi_k=\begin{cases}\psi_k, & x_k\in\omega_{h_k},\\ \psi_{-k}, & x_k=x_k^-,\\ \psi_{+k}, & x_k=x_k^+,\end{cases}\qquad \psi_k=\overset{\circ}{\psi}_k+\overset{*}{\psi}_k,\quad \overset{\circ}{\psi}_k=O(1),$$

$$\overset{*}{\psi}_k=O\left(h_k^2+\tau\right),\quad \sum_{k=1}^p\overset{\circ}{\psi}_k=0,\quad \psi=\sum_{k=1}^p\psi_k=\sum_{k=1}^p\left(\overset{\circ}{\psi}_k+\overset{*}{\psi}_k\right)=\sum_{k=1}^p\overset{*}{\psi}_k=O\big(|h|^2+\tau\big),$$

$$\psi_{-k}=\overset{\circ}{\psi}_{-k}+\frac{\overset{*}{\psi}_{-k}}{0,5\,h_k},\quad \psi_{+k}=\overset{\circ}{\psi}_{+k}+\frac{\overset{*}{\psi}_{+k}}{0,5\,h_k},$$

$$\psi_{\pm k}=O\big(h_k^2+\tau\big),\quad \overset{*}{\psi}_{\pm k}=O\big(h_k^2\big)+O\big(h_k\tau\big),\quad \overset{\circ}{\psi}_{\pm k}=O(1),\quad \sum_{k=1}^p\overset{\circ}{\psi}_{\pm k}=0.$$

Таким образом, ЛОС (27)–(28) обладает суммарной аппроксимацией $O(|h|^2+\tau)$ в регулярных узлах сетки $\bar\omega_h$. В нерегулярных узлах $\psi=O(1)$.

4. Устойчивость ЛОС

Получим априорную оценку в сеточной норме C для решения разностной задачи (27)–(28), выражающую устойчивость локально-одномерной схемы по начальным данным и правой части. Разностную задачу (27), (28) перепишем в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{\varepsilon}{p}\, y_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) y_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} \\
= \left(a_k y_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k} - d_k y^{j+\frac{k}{p}} + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad x_k \in \omega_{h_k},
\end{gathered} \tag{34}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\varepsilon}{p}\, y_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) y_{\bar{t},0}^{\frac{s}{p}} \\
= \frac{a_k^{(1_k)} y_{x_k,0}^{j+\frac{s}{p}} - \bar{\beta}_{-k} y_0^{j+\frac{k}{p}}}{0,5\,h_k} + \frac{\bar{\mu}_{-k}}{0,5\,h_k}, \quad x_k = x_k^-,
\end{gathered} \tag{35}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\varepsilon}{p}\, y_{\bar{t},N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) y_{\bar{t},N_k}^{\frac{s}{p}} \\
= -\frac{a_k^{(N_k)} y_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{s}{p}} + \bar{\beta}_{+k} y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5\,h_k} + \frac{\bar{\mu}_{+k}}{0,5\,h_k}, \quad x_k = x_k^+,
\end{gathered} \tag{36}
$$

$$
y(x,0) = u_0(x). \tag{37}
$$

Исследование устойчивости разностной схемы (34)–(37) будем проводить с помощью принципа максимума [22, с. 226]. Получим априорную оценку для (34)–(37), для этого ее решение представим в виде суммы $y = \overline{y} + v + w$, где $\overline{y}$ — решение однородных уравнений (34) с неоднородными краевыми условиями (35)–(36) и однородными начальными условиями (37):

$$
\begin{gathered}
\frac{\varepsilon}{p}\, \bar{y}_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) \bar{y}_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} \\
= \left(a_k \bar{y}_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k} - d_k \bar{y}^{j+\frac{k}{p}}, \quad k = 1, 2, \ldots, p,
\end{gathered} \tag{38}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\varepsilon}{p}\, \bar{y}_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) \bar{y}_{\bar{t},0}^{\frac{s}{p}} \\
= \frac{a_k^{(1_k)} \bar{y}_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} \bar{y}_0^{j+\frac{k}{p}}}{0,5\,h_k} + \frac{\bar{\mu}_{-k}}{0,5\,h_k}, \quad x_k = x_k^-,
\end{gathered} \tag{39}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\varepsilon}{p}\, \bar{y}_{\bar{t},N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) \bar{y}_{\bar{t},N_k}^{\frac{s}{p}} \\
= -\frac{a_k^{(N_k)} \bar{y}_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \bar{\beta}_{+k} \bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5\,h_k} + \frac{\bar{\mu}_{+k}}{0,5\,h_k}, \quad x_k = x_k^+,
\end{gathered} \tag{40}
$$

$$
\bar{y}(x,0) = 0, \tag{41}
$$

а v — решение неоднородного уравнения (34) с однородными краевыми (35)–(36) и неоднородными начальными условиями (37):

$$\frac{\varepsilon}{p}\,v_t^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)v_t^{\frac{s}{p}}=\left(a_kv_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k}-d_kv^{j+\frac{k}{p}}+\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}},\quad(42)$$

$$\frac{\varepsilon}{p}\,v_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)v_{\bar{t},0}^{\frac{s}{p}}=\frac{a_k^{(1_k)}v_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}-\bar{\beta}_{-k}v_0^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k},\ x_k=x_k^-,\quad(43)$$

$$\frac{\varepsilon}{p}\,v_{\bar{t},N_k}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)v_{\bar{t},N_k}^{\frac{s}{p}}=-\frac{a_k^{(N_k)}v_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}+\bar{\beta}_{+k}v_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k},\ x_k=x_k^+,\quad(44)$$

$$v(x,0)=u_0(x),\quad(45)$$

и w — решение неоднородного уравнения (34) с однородными краевыми и начальными условиями (35)–(37):

$$\frac{\varepsilon}{p}\,w_t^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)w_t^{\frac{s}{p}}=\left(a_kw_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k}-d_kw^{j+\frac{k}{p}}+\overset{*}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}},\quad(46)$$

$$\frac{\varepsilon}{p}\,w_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)w_{\bar{t},0}^{\frac{s}{p}}=\frac{a_k^{(1_k)}w_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}-\bar{\beta}_{-k}w_0^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k},\ x_k=x_k^-,\quad(47)$$

$$\frac{\varepsilon}{p}w_{\bar{t},N_k}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)w_{\bar{t},N_k}^{\frac{s}{p}}=-\frac{a_k^{(N_k)}w_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}+\bar{\beta}_{+k}w_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k},\ x_k=x_k^+,\quad(48)$$

$$w(x,0)=0,\quad(49)$$

где $\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+k/p}$, $\overset{*}{\varphi}{}_k^{j+k/p}$ определяются условиями

$$\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}=\begin{cases}\varphi_k, & x\in\overset{\circ}{\omega}_h,\\ 0, & x\in\overset{*}{\omega}_h,\end{cases}\qquad \overset{*}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}=\begin{cases}\varphi_k, & x\in\overset{*}{\omega}_h,\\ 0, & x\in\overset{\circ}{\omega}_h\end{cases}$$

так, что $\overset{\circ}{\varphi}_k+\overset{*}{\varphi}_k=\varphi_k$ при $x\in\omega_h$, т. е. $\overset{*}{\varphi}_k$ отлична от нуля только в приграничных узлах.

Получим оценку для $\bar{y}$. Для этого уравнение (38) приведем к каноническому виду. В точке $P=P(x_{i_k},t_{j+k/p})$ имеем:

$$\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+\frac{a_{k,i_k+1}}{h_kh^*_{k_+}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_kh^*_{k_-}}+d_k\right]\bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k}{p}}=\frac{a_{k,i_k+1}}{h_kh^*_{k_+}}\,\bar{y}_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_kh^*_{k_-}}\,\bar{y}_{i_{k-1}}^{j+\frac{k}{p}}$$
$$+\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\right]\bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}}+\frac{1}{\tau}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right)\bar{y}_{i_k}^0\right.$$
$$\left.+\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right)\bar{y}_{i_k}^{\frac{1}{p}}+\ldots+\left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\right],$$

где $\gamma=\frac{1}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)}$. К каноническому виду следует привести и граничные условия. В точке $P=P(x_0,t_{j+k/p})$ имеем:

$$\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+\frac{a_k^{(1_k)}}{0,5\,h_kh_{k_+}^*}+\frac{\overline{\beta}_{-k}}{0,5\,h_k}\right]\bar{y}_0^{j+\frac{k}{p}}=\frac{a_k^{(1_k)}}{0,5\,h_kh_{k_+}^*}\bar{y}_1^{j+\frac{k}{p}}+\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\right]\bar{y}_0^{j+\frac{k-1}{p}}$$
$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}\right)\bar{y}_0^0+\left(-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}+2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha}\right)\bar{y}_0^{\frac{1}{p}}\right.$$
$$\left.+\ldots+\left(-t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha}+2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha}-t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)\bar{y}_0^{j+\frac{k-2}{p}}\right].$$

В точке $P=P(x_{N_k},t_{j+k/p})$ получим

$$\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+\frac{a_k^{(N_k)}}{0,5\,h_kh_{k_-}^*}+\frac{\overline{\beta}_{+k}}{0,5\,h_k}\right]\bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}=\frac{a_k^{(N_k)}}{0,5\,h_kh_{k_-}^*}\bar{y}_{N_k-1}^{j+\frac{k}{p}}$$
$$+\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\right]\bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k-1}{p}}+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}\right)\bar{y}_{N_k}^0\right.$$
$$\left.+\left(-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}+2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha}\right)\bar{y}_{N_k}^{\frac{1}{p}}+\ldots+\left(-t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha}+2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha}-t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)\bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\right].$$

Справедлива следующая лемма [1].

Лемма 1. *Пусть $l=pj+k-1\geqslant 1$, тогда имеет место неравенство*

$$-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}+2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha}>0,\quad j=0,1,\ldots,j_0-1,\ k=2,3,\ldots,p. \tag{50}$$

В [22] доказан принцип максимума и получены априорные оценки для решения сеточного уравнения общего вида

$$A(P)y(P)=\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)y(Q)+F(P),\quad P\in\Omega,$$

где P, Q — узлы сетки Ω+S, $Ш'(P)$ — окрестность узла P, не содержащая самого узла P. Коэффициенты $A(P)$, $B(P,Q)$ удовлетворяют условиям

$$A(P)>0,\quad B(P,Q)>0,\quad D(P)=A(P)-\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)\geqslant 0. \tag{51}$$

Обозначим через $P(x,t')$, где $x\in\omega_h$, $t'\in\omega'_\tau$, узел $(p+1)$-мерной сетки $\Omega=\omega_h\times\omega'_\tau$, через S — границу Ω, состоящую из узлов P(x,0) при $x\in\overline{\omega}_h$ и узлов $P(x,t_{j+k/p})$ при $t_{j+k/p}\in\omega'_\tau$ и $x\in\gamma_{h,k}$ для всех $k=1,2,\ldots,p$; $j=0,1,\ldots,j_0$, $\overset{*}{\Omega}_k$ — множество узлов $P(x,t_{j+k/p})$, где $x\in\overset{*}{\omega}_{h,k}$ — приграничный по направлению x_k узел сетки $\bar{\omega}_h$.

Справедливы следующие теоремы [23].

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения*

$$A(P)y(P)=\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)y(Q)+F(P),\quad P\in\Omega, \tag{$*$}$$

удовлетворяют условиям

$$A(P) > 0, \quad B(P,Q) \geqslant 0, \quad D(P) > 0, \quad P \in \overset{*}{\omega},$$

$$A(P) > 0, \quad B(P,Q) > 0, \quad D(P) = F(P) = 0, \quad P \in \overset{o}{\omega},$$

где $\overset{o}{\omega}$ *— некоторое связное подмножество множества* ω, *а* $\overset{*}{\omega}$ *— дополнение* $\overset{o}{\omega}$ *до* ω.

Тогда для решения задачи $(*)$ *справедлива оценка*

$$\|y\|_C \leqslant \left\| \frac{F(P)}{D(P)} \right\|_{C^*},$$

где

$$\|f\|_C = \max_{P \in \omega} |f(P)|, \quad \|f\|_{C^*} = \max_{P \in \omega^*} |f(P)|.$$

Теорема 2. *Если выполнены условия*

$$D'\big(P_{(n+1)}\big) > 0 \ \text{ для всех } \ P_{(n+1)} \in \omega, \ A\big(P_{(n+1)}\big) > 0, \ B\big(P_{(n+1)}, Q\big) \geqslant 0,$$

для всех $Q \in Ш''_n$, $Q \in Ш'_{n+1}$

$$\sum_{Q \in Ш''_n} B\big(P_{(n+1)}, Q\big) > 0, \quad \frac{1}{D'(P_{(n+1)})} \sum_{Q \in Ш''_n} B\big(P_{(n+1)}, Q\big) \leqslant 1 + c_1\tau,$$

где $c_1 = \mathrm{const} > 0$ *не зависит от* τ, h, $Ш'(P_{n+1}) = Ш'_{n+1} + Ш''_n$, $Ш'_{n+1}$ *— множество узлов* $Q(\xi, t_{n+1}) \in Ш'(P_{n+1})$, $Ш''_n$ *— множество узлов* $Q(\xi, t_n) \in Ш'(P_{n+1})$.

Тогда для решения задачи

$$A\big(P_{(n+1)}\big) y\big(P_{(n+1)}\big) = \sum_{Q \in Ш'_{n+1}} B\big(P_{(n+1)}, Q\big) y(Q) + \Phi\big(P_{(n+1)}\big),$$

где $P_{(n+1)} = P(x, t_{n+1})$

$$\Phi\big(P_{(n+1)}\big) = \sum_{Q \in Ш''_n} B\big(P_{(n+1)}, Q\big) y(Q) + F\big(P_{(n+1)}\big),$$

$$D'\big(P_{(n+1)}\big) = A\big(P_{(n+1)}\big) - \sum_{Q \in Ш''_n} B\big(P_{(n+1)}, Q\big).$$

Справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_{C_h} \leqslant e^{c_1 t_n} \left(\|y_0\|_{C_h} + \sum_{k=1}^{n+1} \tau \big\|\widetilde{F}_k\big\|_{C_h} \right),$$

где $\|\widetilde{F}_k\|_{C_h} = \max\limits_{x \in \omega_h} |\widetilde{F}_k|$.

Проверим, учитывая положительность выражений, стоящих в круглых скобках (согласно лемме 1), выполнимость условий теоремы 1. В точке $P = P(x_{i_k}, t_{j+k/p})$ имеем

$$A(P) = \left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}} + d_k \right] > 0,$$

$$B(P,Q)=\left\{\frac{a_{k,i_k+1}}{h_kh^*_{k_+}};\ \frac{a_{k,i_k}}{h_kh^*_{k_-}};\ \frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right);\frac{1}{\tau}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right);\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right);\ \ldots;\ \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\right]\right\}>0,$$

$$D(P)=d_k\geqslant c_0>0;$$

а в точке $P=P(x_0,t_{j+k/p})$ получим

$$A(P)=\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+\frac{a_k^{(1_k)}}{0,5\,h_kh^*_{k_+}}+\frac{\bar\beta_{-k}}{0,5\,h_k}\right]>0,$$

$$B(P,Q)=\left\{\frac{a_k^{(1_k)}}{0,5\,h_kh^*_{k_+}};\ \frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right);\ \frac{1}{\tau}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right);\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right);\ \ldots;\ \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\right]\right\}>0,$$

$$D(P)=\frac{\bar\beta_{-k}}{0,5\,h_k}>\frac{\beta_{-k}}{0,5\,h_k}\geqslant\frac{c_0}{0,5\,h_k}>0;$$

в точке $P=P(x_{N_k},t_{j+k/p})$ имеем

$$A(P)=\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+\frac{a_k^{(N_k)}}{0,5\,h_kh^*_{k_-}}+\frac{\bar\beta_{+k}}{0,5\,h_k}\right]>0,$$

$$B(P,Q)=\left\{\frac{a_k^{(N_k)}}{0,5\,h_kh^*_{k_-}};\ \frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right);\ \frac{1}{\tau}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right);\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right);\ \ldots;\ \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\right]\right\}>0,$$

$$D(P)=\frac{\bar\beta_{+k}}{0,5\,h_k}>\frac{\beta_{+k}}{0,5\,h_k}\geqslant\frac{c_0}{0,5\,h_k}>0.$$

Таким образом, на основании теоремы 1 для $\bar y$ получаем оценку

$$\left\|\bar y^{j+1}\right\|_C\leqslant\frac{1}{c_0}\max_{0<t'\leqslant t_j}\left(\|\bar\mu_{-k}(x,t')\|_{C_\gamma}+\|\bar\mu_{+k}(x,t')\|_{C_\gamma}\right),\quad \beta_{\pm k}\geqslant c_0>0, \tag{52}$$

где $\|y\|_C=\max\limits_{x\in\bar\omega_h}|y|$, $\|y\|_{C_\gamma}=\max\limits_{x\in\gamma_h}|y|$.

Переходим к оценке функции v. Уравнение (42)–(45) перепишем в виде:

$$\left(\frac{\varepsilon}{p}+\frac{1}{p}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{\tau}{p}\right)^{1-\alpha}\right)v_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}}=\Lambda_kv^{j+\frac{k}{p}}+\widetilde\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{53}$$

где

$$\widetilde\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}=\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}-\frac{1}{p}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k-1}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)v_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}}.$$

Уравнение (53) приведем к каноническому виду:

$$\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^{\alpha}}+\frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}}+d_k\right]v_{i_k}^{j+\frac{k}{p}}=\frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}}\,v_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}}\,v_{i_{k-1}}^{j+\frac{k}{p}}+\Phi\left(P_{j+\frac{k}{p}}\right),$$

где

$$\Phi(P_{j+\frac{k}{p}})=\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^{\alpha}}(2-2^{1-\alpha})\right]v_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}}+\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}},$$

$$\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}=\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha}-t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}$$

$$-\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k-2}\left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha}\right)\left(v_{i_k}^{\frac{s}{p}}-v_{i_k}^{\frac{s-1}{p}}\right).$$

Проверим выполнимость условий теоремы 2. Тогда в точке $P_{(k)}=P(x,t_{j+k/p})$ имеем

$$A(P_{(k)})=\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^{\alpha}}+\frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}}+d_k\right]>0,$$

$$B(P_{(k)},Q)=\left\{\frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}};\,\frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}};\,\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^{\alpha}}\left(2-2^{1-\alpha}\right);\,\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}\right);\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}+2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha}\right);\ldots;\left(-t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha}+2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha}-t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)\right]\right\}>0,$$

$$D'\big(P_{(k)}\big)=A\big(P_{(k)}\big)-\sum_{Q\in Ш'_k(P)}B\big(P_{(k)},Q\big)=\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^{\alpha}}+d_k\geqslant\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^{\alpha}}>0,$$

для всех $Q\in Ш''_{k-1}$, $Q\in Ш'_k$,

$$\sum_{Q\in Ш''_{k-1}}B\big(P_{(k)},Q\big)=\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^{\alpha}}\left(2-2^{1-\alpha}\right)>0, \tag{54}$$

$$\frac{1}{D'(P_{(k)})}\sum_{Q\in Ш''_{k-1}}B(P_{(k)},Q)=\frac{\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma(2-2^{1-\alpha})}{\tau^{\alpha}}}{\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^{\alpha}}}\leqslant 1,$$

где $Ш'_{(P(k))}=Ш_k+Ш''_{k-1}$, $Ш'_k$ — множество узлов $Q=Q(\xi,t_k)\in Ш'_{(P(x,t_k))}$, $Ш''_{k-1}$ — множество узлов $Q=Q(\xi,t_{k-1})\in Ш'_{(P(x,t_{k-1}))}$.

На основании теоремы 2 и в силу (54) для v получаем оценку

$$\left\|v^{j+\frac{k}{p}}\right\|_C\leqslant\frac{1}{\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^{\alpha}}}\left\|\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\right\|_C+\frac{\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma(2-2^{1-\alpha})}{\tau^{\alpha}}}{\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^{\alpha}}}\left\|v^{j+\frac{k}{p}}\right\|_C. \tag{55}$$

Оценим $\|\bar{\varphi}^{j+k/p}\|_C$:

$$\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}=\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha}-t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}-\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}$$

$$\times\sum_{s=1}^{pj+k-2}\left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}}=\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left[\left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{i_k}^{0}\right. \tag{56}$$

$$\left.+\left(-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}+2\,t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{i_k}^{\frac{1}{p}}+\ldots+\left(-t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha}+2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha}-t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\right].$$

Так как выражения, стоящие в круглых скобках, положительны, то из (56) получаем оценку

$$\left\|\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\right\|_C \leqslant \left\|\overset{\circ}{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\right\|_C + \frac{\gamma(2^{1-\alpha}-1)}{\tau^\alpha} \max_{0\leqslant s\leqslant k-2}\left\|v^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C. \tag{57}$$

С помощью (57) из (55) находим

$$\begin{aligned}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\left\|v^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C &\leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant k-1}\left\|v^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C + \left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}+\tau d_k}\right)\max_{0\leqslant s\leqslant k}\left\|\overset{\circ}{\varphi}_k^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C \\ &\leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant k-2}\left\|v^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C + \left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\right)\max_{0\leqslant s\leqslant k}\left\|\overset{\circ}{\varphi}_k^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C.\end{aligned} \tag{58}$$

Суммируем (58) сначала по $k=1,2,\ldots,p$, затем по $j'=0,1,2,\ldots,j$. Тогда получим

$$\left\|v^{j+\frac{k}{p}}\right\|_C \leqslant \left\|v^0\right\|_C + \sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\left\|\overset{\circ}{\varphi}_k^{j'+\frac{s}{p}}\right\|_C. \tag{59}$$

Рассмотрим теперь задачу (46)–(49) для w. Перепишем уравнение (46) в каноническом виде

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+\frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}}+d_k\right]w_{i_k}^{j+\frac{k}{p}} = \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}}\,w_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}}\,w_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}} \\ &+\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\right]w_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}} + \frac{1}{\tau}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right)w^0_{i_k}\right. \\ &\left.+\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right)w_{i_k}^{\frac{1}{p}}+\ldots+\left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)w_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\right] + \overset{*}{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}},\end{aligned} \tag{60}$$

и присоединим граничные и начальные условия (47)–(49):

$$\frac{\varepsilon}{p}\,w_{\bar t,0}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)w_{\bar t,0}^{\frac{s}{p}} = \frac{a_k^{(1_k)}w_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}-\bar\beta_{-k}w_0^{j+\frac{k}{p}}}{0{,}5h_k},\quad x_k=x_k^-, \tag{61}$$

$$\frac{\varepsilon}{p}w_{\bar t,N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)w_{\bar t,N_k}^{\frac{s}{p}} = -\frac{a_k^{(N_k)}w_{\bar x_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}+\bar\beta_{+k}w_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0{,}5h_k},\quad x_k=x_k^+, \tag{62}$$

$$w(x,0)=0, \tag{63}$$

т. е. $w=0$ на границе S сетки Ω, т. е. $w(P)=0$ при $P\in S$.

Правая часть $\overset{*}{\varphi}$ отлична от нуля лишь в узлах (x,t'), где $x\in\overset{*}{\omega}_h$. Видно, что

$$A(P)=\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+\frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}}+d_k\right]>0,$$

$$\begin{aligned}B(P,Q)=\Bigg\{&\frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}};\ \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}};\ \frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right);\ \frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Bigg[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right); \\ &\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right);\ \ldots;\ \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\Bigg]\Bigg\}>0,\end{aligned}$$

$$D(P)=\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+d_k>0.$$

Тогда в силу однородных краевых условий (61)–(62) имеем

$$D(P)=\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^{\alpha}}+d_k.$$

На основании теоремы 1 получаем

$$\max_{\Omega+S}|w(P)|\leqslant\max_{t'\in w_\tau}\left\|\frac{\overset{*}{\varphi}(x,t')}{D}\right\|_{\overset{*}{C}}\leqslant\max_{0<t'\leqslant t_j}\frac{\tau\|\varphi^*\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}+\tau d_k}\leqslant\max_{0<t'\leqslant t_j}\frac{\tau\|\varphi^*\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}. \tag{64}$$

Из оценок (52), (59) и (64) следует окончательная оценка

$$\begin{gathered}\left\|y^{j+1}\right\|_C\leqslant\|u_0\|_C+\frac{1}{c_0}\max_{0<t'\leqslant j\tau}\left(\|\bar\mu_{-k}(x,t')\|_{C_\gamma}+\|\bar\mu_{+k}(x,t')\|_{C_\gamma}\right)\\+\max_{0<t'\leqslant t_j}\frac{\tau\|\varphi^*\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}+\sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\left\|\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j'+\frac{s}{p}}\right\|_{\overset{\circ}{C}},\end{gathered} \tag{65}$$

где

$$h=\max_{1\leqslant k\leqslant p}h_k,\quad \|y\|_C=\max_{x\in\omega_h}|y|,\quad \|y\|_{C_\gamma}=\max_{x\in\gamma_h}|y|,\quad \|\varphi\|_{\overset{*}{C}}=\max_{x\in\overset{*}{\omega}_h}|\varphi|,\quad \|\varphi\|_{\overset{\circ}{C}}=\max_{x\in\overset{\circ}{\omega}_h}|\varphi|.$$

Таким образом справедлива

Теорема 3. *Локально-одномерная схема* (27), (28) *устойчива по начальным данным и правой части так, что для решения задачи* (27), (28) *справедлива оценка* (65).

5. Равномерная сходимость ЛОС

Чтобы использовать свойство $\sum_{k=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_k=0$, $\overset{\circ}{\psi}_k=O(1)$, представим по аналогии с [22], решение задачи для погрешности в виде суммы

$$z^{\varepsilon}_{(k)}=v^{\varepsilon}_{(k)}+\eta^{\varepsilon}_{(k)},\quad z^{\varepsilon}_{(k)}=(z^{\varepsilon})^{j+\frac{k}{p}}, \tag{66}$$

где $\eta^{\varepsilon}_{(k)}$ определяется условиями

$$\frac{\varepsilon}{p}\left(\eta^{\varepsilon}\right)^{j+\frac{k}{p}}_{\bar t}+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\left(\eta^{\varepsilon}\right)^{\frac{s}{p}}_{\bar t}=\overset{\circ}{\Psi}_k,\quad x\in\omega_h+\gamma_{h,k}, \tag{67}$$

$$\eta^{\varepsilon}(x,0)=0,\quad \overset{\circ}{\Psi}_k=\begin{cases}\overset{\circ}{\psi}_k, & x_k\in\omega_{h_k},\\ \overset{\circ}{\psi}_0{-}k, & x_k=x_k^-,\\ \overset{\circ}{\psi}_{+k}, & x_k=x_k^+.\end{cases}$$

Функция $v^{\varepsilon}_{(k)}$ задается соотношениями

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}v^{\varepsilon}_{(k)}=\Lambda_k v^{\varepsilon}_{(k)}+\widetilde\Psi_k,\quad \widetilde\Psi_k=\Lambda_k\eta^{\varepsilon}_{(k)}+\overset{*}{\Psi},\quad x_k\in\omega_{h_k}, \tag{68}$$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}v^{\varepsilon}_{(k)}=\Lambda^-_k v^{\varepsilon}_{(k)}+\widetilde\Psi_{-k},\quad \widetilde\Psi_{-k}=\Lambda^-_k\eta^{\varepsilon}_{(k)}+\frac{\overset{*}{\Psi}_{-k}}{0,5\,h_k},\quad x_k=x_k^-, \tag{69}$$

$$\Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^{\alpha} v_{(k)}^{\varepsilon} = \Lambda_k^{+} v_{(k)}^{\varepsilon} + \widetilde{\Psi}_{+k}, \quad \widetilde{\Psi}_{+k} = \Lambda_k^{+} \eta_{(k)}^{\varepsilon} + \frac{\overset{*}{\Psi}_{+k}}{0,5\, h_k}, \quad x_k = x_k^{+}, \tag{70}$$

$$v^{\varepsilon}(x,0) = 0, \tag{71}$$

где $\widetilde{\Psi}_k = \overset{*}{\Psi} + \Lambda_k \eta_{(k)}^{\varepsilon}$, $\overset{*}{\Psi} = O(h_k^2 + \tau)$, $\overset{*}{\Psi}_{\pm k} = O(h_k^2 + \tau)$.

Покажем, что

$$(\eta^{\varepsilon})^{j+\frac{k}{p}} = O\Big(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\Big), \quad k = 1, 2, \ldots, p, \ j = 0, 1, 2, \ldots, j_0 - 1.$$

Ради простоты рассмотрим двумерный случай ($p = 2$). Сначала положим $j = 0$, т. е. рассмотрим первый слой $(0, t_1]$. Тогда задача (67) примет вид

$$\frac{\varepsilon}{2}\, (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{k}{2}} + \frac{1}{2}\, \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{k} \left(t_{\frac{k-s+1}{2}}^{1-\alpha} - t_{\frac{k-s}{2}}^{1-\alpha} \right) (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{s}{2}} = \overset{\circ}{\Psi}_k, \quad k = 1, 2.$$

Пусть $k = 1$. Тогда

$$\frac{\varepsilon}{2}\, (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\, \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\, t_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha}\, (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} = \overset{\circ}{\Psi}_1. \tag{72}$$

При $k = 2$ получаем

$$\frac{\varepsilon}{2}\, (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{1} + \frac{1}{2}\, \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\left(t_1^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha} \right) (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} + t_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha}\, (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{1} \right] = \overset{\circ}{\Psi}_2. \tag{73}$$

Складывая выражения (72) и (73), имеем

$$\frac{\varepsilon}{2}\, (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}\, (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{1} + \frac{1}{2}\, \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\, \frac{1}{\tau^{\alpha}} \left[\left(1 - \frac{1}{2^{1-\alpha}} \right) (\eta^{\varepsilon})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{1-\alpha}}\, (\eta^{\varepsilon})^{1} \right] = 0. \tag{74}$$

Из (72) находим

$$(\eta^{\varepsilon})^{\frac{1}{2}} = \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\, \overset{\circ}{\Psi}_1 = -\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\, \overset{\circ}{\Psi}_2, \tag{75}$$

где $\gamma = \frac{1}{2^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)}$.

Выражая $(\eta^{\varepsilon})^1$ из (74) и учитывая (75), получаем

$$(\eta^{\varepsilon})^{\frac{1}{2}}, (\eta^{\varepsilon})^{1} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \right). \tag{76}$$

Допустим, что при $j = n$ выполнено условие

$$(\eta^{\varepsilon})^{\frac{1}{2}}, (\eta^{\varepsilon})^{1}, (\eta^{\varepsilon})^{1+\frac{1}{2}}, \ldots, (\eta^{\varepsilon})^{n+1} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \right). \tag{77}$$

Опираясь на допущение (77), покажем, что аналогичное условие справедливо и при $j = n + 1$. Для чего запишем уравнение (67) при $j = n + 1$, $p = 2$:

$$\frac{\varepsilon}{2}\, (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{n+1+\frac{k}{2}} + \frac{1}{2}\, \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{2(n+1)+k} \left(t_{n+1+\frac{k-s+1}{2}}^{1-\alpha} - t_{n+1+\frac{k-s}{2}}^{1-\alpha} \right) (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{s}{2}} = \overset{\circ}{\Psi}_k, \quad k = 1, 2. \tag{78}$$

Полагая в (78) $k=1$, получим

$$\tau^{1-\alpha}\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)^{1-\alpha}-2\,(n+1)^{1-\alpha}+\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\right](\eta^{\varepsilon})^{\frac{1}{2}}+\tau^{1-\alpha}\Big[(n+1)^{1-\alpha}$$
$$-2\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}+n^{1-\alpha}\Big](\eta^{\varepsilon})^{1}+\ldots-\Gamma(2-\alpha)\left(\varepsilon-\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\,(1-2^{\alpha})\right)(\eta^{\varepsilon})^{n+1} \tag{79}$$
$$+\Gamma(2-\alpha)\left(\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}\right)(\eta^{\varepsilon})^{n+\frac{3}{2}}=2\Gamma(2-\alpha)\tau\,\overset{\circ}{\Psi}_1\,.$$

Откуда, с учетом (77) и достаточной ограниченности коэффициентов при $(\eta^{\varepsilon})^{1/2},(\eta^{\varepsilon})^{1},\ldots,(\eta^{\varepsilon})^{n+3/2}$, находим $(\eta^{\varepsilon})^{n+3/2}=O\big(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\big)$.

Положим теперь в (78) $k=2$, затем сложим полученное таким образом выражение с (79) с учетом равенства $\overset{\circ}{\Psi}_1+\overset{\circ}{\Psi}_2=0$. Тогда получим

$$(\eta^{\varepsilon})^{\frac{1}{2}},(\eta^{\varepsilon})^{1},\ldots,(\eta^{\varepsilon})^{n+1},(\eta^{\varepsilon})^{n+\frac{3}{2}},(\eta^{\varepsilon})^{n+2}=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\right). \tag{80}$$

Итак, равенство (80) выполнено при любом значении j. Нетрудно заметить, что аналогично можно показать, что

$$(\eta^{\varepsilon})^{j+\frac{k}{p}}=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\right),\quad k=1,2,\ldots,p,\ j=0,1,\ldots,j_0-1.$$

Для оценки решения задачи (68)–(71) воспользуемся теоремой 3:

$$\left\|(v^{\varepsilon})^{j+1}\right\|_C\leqslant\max_{0<j'+\frac{k}{p}\leqslant j+1}\left(\frac{\tau\big\|\widetilde{\Psi}\big\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}+\left\|(\eta^{\varepsilon})^{j'+\frac{k}{p}}\right\|_{C_\gamma}\right)$$
$$+\sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\left\|\widetilde{\psi}_k^{j'+\frac{s}{p}}\right\|_C, \tag{81}$$

где $\widetilde{\Psi}_k=\overset{*}{\Psi}_k+\Lambda_k\eta^{\varepsilon}_{(k)}$.

Если существуют непрерывные в замкнутой области $\overline{Q}_T$ производные $\frac{\partial^4u^{\varepsilon}}{\partial x_k^2\partial x_\nu^2}$, $1\leqslant k$, $\nu\leqslant p$, $k\neq\nu$, то

$$\bar{\Lambda}_k\eta^{\varepsilon}_{(k)}=-\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\right)a_k\bar{\Lambda}_k\left(\overset{\circ}{\Psi}_{k+1}+\ldots+\overset{\circ}{\Psi}_p\right)=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\right),$$

во всех узлах $x\in\omega_h$, так как $\eta^{\varepsilon}_{(k)}$ определяется из уравнения (67) всюду в $\omega_h+\gamma_h$, где a_k — известные постоянные. С другой стороны, имеем $\overset{*}{\Psi}_k=O\big(h^2+\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\big)$ в регулярных узлах ω_h и $\overset{*}{\Psi}_k=O(1)$ в нерегулярных узлах сетки. Поэтому

$$\frac{\tau\big\|\widetilde{\Psi}\big\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\right),\quad\left\|\widetilde{\Psi}_k^{j'+\frac{s}{p}}\right\|_C=O\left(h^2+\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\right).$$

Тогда из оценки (81) находим

$$\left\|(v^{\varepsilon})^{j+1}\right\|_C\leqslant M\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}+p\,\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\sum_{j'=0}^{j}\left(h^2+\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\right)\right)$$
$$\leqslant M\left(\frac{h^2}{\varepsilon+\tau^{1-\alpha}}+\frac{\tau}{(\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2}\right),\quad h=\max_{1\leqslant k\leqslant p}h_k.$$

Следовательно,

$$\left\|(z^{\varepsilon})^{j+1}\right\|_C \leqslant \left\|(\eta^{\varepsilon})^{j+1}\right\|_C + \left\|(v^{\varepsilon})^{j+1}\right\|_C \leqslant O\left(\frac{h^2}{\varepsilon+\tau^{1-\alpha}} + \frac{\tau}{(\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2}\right).$$

Итак, справедлива

Теорема 4. *Пусть задача* (5)–(8) *имеет единственное непрерывное решение* $u(x,t)$ *в* $\overline{Q}_T$ *при всех значениях* ε *и существуют непрерывные в* $\overline{Q}_T$ *производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2},\ \frac{\partial^4 u^{\varepsilon}}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2},\ \frac{\partial^3 u^{\varepsilon}}{\partial x_k^2 \partial t},\ \frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_k^2 \partial t^{\alpha}},\ \frac{\partial^{2+\alpha} u^{\varepsilon}}{\partial x_k^2 \partial t^{\alpha}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2},$$

$$\Theta_k(x,t) \in C^{3,1}(\overline{Q}_T),\ q_k(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_T), \quad 1 \leqslant k,\ \nu \leqslant p,\ k \neq \nu,\ 0<\alpha<1,$$

тогда с учетом оценки (17) *решение разностной задачи* (27), (28) *равномерно сходится к решению задачи* (1)–(4) *со скоростью*

$$O\left(\frac{h^2}{\varepsilon+\tau^{1-\alpha}} + \frac{\tau}{(\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2} + \varepsilon\right),$$

$h^2 = o(\varepsilon+\tau^{1-\alpha})$, $\tau = o((\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2)$, *где* ε *— малый параметр,* $C^{m,n}$ *— класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка* m *по* x *и* n *по* t.

Очевидно, что скорость сходимости будет определяться наилучшим образом, если

$$\frac{h^2}{\varepsilon+\tau^{1-\alpha}} + \frac{\tau}{(\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2} = \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = \tau^{\gamma}$, тогда из последнего получаем

$$h^2\left(\tau^{\gamma}+\tau^{1-\alpha}\right) + \tau = \tau^{\gamma}\left(\tau^{\gamma}+\tau^{1-\alpha}\right)^2$$

или

$$\tau \leqslant \tau^{\gamma}\left(\tau^{\gamma}+\tau^{1-\alpha}\right)^2.$$

Следовательно, $\min\{\gamma, 1-\alpha\} = \frac{1-\gamma}{2}$, откуда имеем

$$\varepsilon = \begin{cases} \tau^{\frac{1}{3}}, & 0<\alpha\leqslant\frac{2}{3}, \\ \tau^{2\alpha-1}, & \frac{2}{3}<\alpha<1. \end{cases} \tag{82}$$

Тогда справедливо следующее

Следствие. *Если* ε *определяется из условия* (82), *тогда решение разностной задачи* (21)–(23) *равномерно сходится к решению дифференциальной задачи* (1)–(4) *со скоростью*

$$O\left(\frac{h^2}{\tau^{\frac{1}{3}}} + \tau^{\frac{1}{3}}\right),\ \text{если } 0<\alpha\leqslant\frac{2}{3}, \quad \text{и} \quad O\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right),\ \text{если } \frac{2}{3}<\alpha<1.$$

Литература

1. *Лафишева М. М., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2008.—Т. 48, № 10.—С. 1878–1887.
2. *Баззаев А. К., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерные схемы для уравнения диффузии с дробной производной по времени в области произвольной формы // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2016.—Т. 56, № 1.—С. 113–123. DOI: 10.7868/S0044466916010063.
3. *Баззаев А. К., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями III рода // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2010.—Т. 50, № 7.—С. 1200–1208.
4. *Ашабоков Б. А., Бештокова З. В., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная разностная схема для уравнения переноса примесей дробного порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2017.—Т. 57, № 9.—С. 1517–1529. DOI: 10.7868/S0044466917090046.
5. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
6. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations.—San-Diego: Academic Press, 1999.—368 p.
7. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
8. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка.—М.: Наука, 2005.—199 с.
9. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных.—Ульяновск: Артишок, 2008.—512 с.
10. *Shishkina E. L., Sitnik S. M.* Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics.—Elsevier Science, 2020.—592 p.
11. *Сербина Л. И.* Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. —М.: Наука, 2007.—167 с.
12. *Алиханов А. А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения.—2010.—Т. 46, № 5.—С. 658–664.
13. *Бештоков М. Х.* Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана — Лиувилля // Дифференц. уравнения.—2018. —Т. 54, № 6.—С. 763–778. DOI: 10.1134/S0374064118060055.
14. *Бештоков М. Х.* К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто // Изв. вузов. Математика.—2018.—№ 10.—С. 3–16.
15. *Diethelm K., Walz G.* Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation // Numer. Algorithms.—1997.—Vol. 16.—P. 231–253. DOI: 10.1023/A:1019147432240.
16. *Zhang Y. N., Sun Z. Z., Liao H. L.* Finite difference methods for the time fractional diffusion equation on non-uniform meshs // J. Comput. Phys.—2014. —Vol. 265.—P. 195–210. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.02.008.
17. *Кокурин М. Ю., Пискарев С. И., Спреафико М.* Конечно-разностные методы для дробных дифференциальных уравнений порядка 1/2 // Функциональный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 133.—М.: ВИНИТИ РАН, 2017.—С. 120–129.
18. *Алиханов А. А., Бештоков М. Х., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная схема для первой начально-краевой задачи для многомерного уравнения конвекции–диффузии дробного порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2021.—Т. 61, № 7.—С. 1082–1100. DOI: 10.31857/S0044466921070024.
19. *Бештокова З. В., Бештоков М. Х., Шхануков-Лафишев М. Х.* Об одной разностной схеме решения задачи Дирихле для многомерного уравнения диффузии с дробной производной Капуто в области с произвольной границей // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, № 3.—С. 37–54. DOI: 10.46698/v2914-8977-8335-s.
20. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук.—1957.—Т. 12, № 5.—С. 3–122.
21. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы.—М.: Наука, 1977.—439 с.
22. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—617 с.
23. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—415 с.

Статья поступила 24 декабря 2024 г.

Бештокова Зарьяна Владимировна
Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
младший научный сотрудник отдела вычислительных методов
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: zarabaeva@yandex.ru

Бештоков Мурат Хамидбиевич
Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211

Шхануков-Лафишев Мухамед Хабалович
Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
главный научный сотрудник отдела
математического моделирования геофизических процессов
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: lafishev@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2026, Volume 28, Issue 1, P. 37–61

LOCALLY ONE-DIMENSIONAL SCHEME FOR A MULTIDIMENSIONAL FRACTIONAL-ORDER HEAT EQUATION WITH CONDITIONS OF THE THIRD KIND IN AN ARBITRARY DOMAIN

Beshtokova, Z. V.[1], Beshtokov, M. Kh.[1] and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.[1]
[1] Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanov St., Nalchik 360004, Russia
E-mail: zarabaeva@yandex.ru, beshtokov-murat@yandex.ru, lafishev@yandex.ru

Abstract. The multidimensional fractional-order heat equation with boundary conditions of the third kind in a domain with a complex shape is studied. Instead of the original differential equation we consider a modified fractional order heat equation with regularization parameter $\varepsilon > 0$. The finite difference method is used for approximate solution of the modified problem. A local one-dimensional difference scheme of A. A. Samarsky with approximation order $O(|h|^2 + \tau)$ is constructed. The essence of this scheme is as follows. We reduce the transition from layer to layer to the sequential solution of one-dimensional problems in each of the coordinate directions. Using the maximum principle, we obtain an a priori estimate in the uniform metric in the norm C. Moreover, we prove the stability of the locally uniform difference scheme and the uniform convergence of the solution of the proposed difference scheme to the solution of the original problem for any values $0 < \alpha < 1$. A particular choice of the regularization parameter ε can significantly affect the convergence rate of the local-uniform difference scheme and the quality of its solution. In this manuscript we give detailed analysis of the choice of optimal values of ε such that the rate of uniform convergence of the solution of the proposed difference scheme to the solution of the original problem will be determined in the best possible way.

Keywords: heat equation, fractional order equation, the Gerasimov–Caputo fractional derivative, boundary value problems, locally one-dimensional scheme, maximum principle, a priori estimate, stability and convergence.

AMS Subject Classification: 65N06, 65N12.

For citation: *Beshtokova, Z. V., Beshtokov, M. Kh. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.* Locally One-Dimensional Scheme for a Multidimensional Fractional-Order Heat Equation with Conditions of the Third Kind in an Arbitrary Domain, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 37–61 (in Russian). DOI: 10.46698/f6557-1323-1446-g.

References

1. *Lafisheva, M. M. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.* Locally One-Dimensional Difference Schemes for the Fractional Order Diffusion Equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 10, pp. 1875–1884. DOI: 10.1134/S0965542508100102.
2. *Bazzaev, A. K. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.* Locally One-Dimensional Schemes for the Diffusion Equation with a Fractional Time Derivative in an Arbitrary Domain, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 1, pp. 106–115. DOI: 10.1134/S0965542516010061.

3. *Bazzaev, A. K. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.* Locally One Dimensional Scheme for Fractional Diffusion Equations with Robin Boundary Conditions, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, no. 7, pp. 1141–1149. DOI: 10.1134/S0965542510070031.
4. *Ashabokov, B. A., Beshtokova, Z. V. and Shkhanukov-Lafyshev, M. Kh.* Locally One-Dimensional Difference Scheme for a Fractional Tracer Transport Equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 9, pp. 1498–1510. DOI: 10.1134/S0965542517090044.
5. *Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications], Minsk, Nauka i Tekhnika, 1987, 688 p. (in Russian).
6. *Podlubny, I. Fractional Differential Equations*, San-Diego, Academic Press, 1999, 368 p.
7. *Nakhushev, A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and Its Application], Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 p. (in Russian).
8. *Pskhu, A. V. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial differential equations of fractional order], Moscow, Nauka, 2005, 199 p. (in Russian).
9. *Uchaykin, V. V. Metod drobnykh proizvodnykh* [Fractional Derivatives Method], Ul'yanovsk, Artishok, 2008, 512 p. (in Russian).
10. *Shishkina, E. L. and Sitnik, S. M. Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics*, Elsevier Science, 2020, 592 p.
11. *Serbina L. I. Nelokal'nye matematicheskiye modeli perenosa v vodonosnykh sistemakh* [Nonlocal Mathematical Models of Transport in Aquifer System], Moscow, Nauka, 2007, 167 p. (in Russian).
12. *Alikhanov, A. A.* A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 660–666. DOI: 10.1134/S0012266110050058.
13. *Beshtokov, M. Kh.* Local and Nonlocal Boundary Value Problems for Degenerating and Nondegenerating Pseudoparabolic Equations with a Riemann–Liouville Fractional Derivative, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no 6, pp. 763–778. DOI: 10.1134/S0012266118060058.
14. *Beshtokov, M. Kh.* To Boundary-Value Problems for Degenerating Pseudoparabolic Equations with Gerasimov–Caputo Fractional Derivative, *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, no. 10, pp. 1–14. DOI: 10.3103/S1066369X18100018.
15. *Diethelm, K. and Walz, G.* Numerical Solution of Fractional Order Differential Equations by Extrapolation, *Numerical Algorithms*, 1997, vol. 16, pp. 231–253. DOI: 10.1023/A:1019147432240.
16. *Zhang, Y. N., Sun, Z. Z. and Liao, H. L.* Finite Difference Methods for the Time Fractional Diffusion Equation on Non-Uniform Meshs, *Journal of Computational Physics*, 2014, vol. 265, pp. 195–210. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.02.008.
17. *Kokurin, M. Yu., Piskarev, S. I. and Spreafico, M.* Finite-Difference Methods for Fractional Differential Equations of Order 1/2, *Functional Analysis. Results of Science and Technology. Series. Modern Mathematics and Its applications. Topical Review* 133. *VINITI RAS*, Moscow, 2017, pp. 120–129 (in Russian).
18. *Alikhanov, A. A., Beshtokov, M. Kh. and Shhanukov-Lafishev, M. Kh.* Local One-Dimensional Scheme for the First Initial-Boundary Value Problem for the Multidimensional Fractional-Order Convection-Diffusion Equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2021, vol. 61, no. 7, pp. 1075–1093. DOI: 10.1134/S0965542521070022.
19. *Beshtokova, Z. V., Beshtokov, M. Kh. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.* On a Difference Scheme for Solution of the Dirichlet Problem for Diffusion Equation with a Fractional Caputo Derivative in the Multidimensional Case in a Domain with an Arbitrary Boundary, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2022, vol. 24. no 3. pp. 37–54 (in Russian). DOI: 10.46698/v2914-8977-8335-s.
20. *Vishik, M. I. and Lyusternik, L. A.* Regular Degeneration and Boundary Layer for Linear Differential Equations with a Small Parameter, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1957, vol. 12, no. 5, pp. 3–122 (in Russian).
21. *Godunov, S. K. and Ryaben'kiy, V. S. Raznostnyye skhemy* [Difference schemes], Moscow, Nauka, 1977, 439 p. (in Russian).
22. *Samarskii, A. A. Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1983, 616 p. (in Russian).
23. *Samarskii, A. A. and Gulin, A. B. Ustoychivost' raznostnykh skhem* [Stability of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1973, 415 p. (in Russian).

Received December 24, 2024

Zaryana V. Beshtokova
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanov St., Nalchik 360000, Russia,
Junior Researcher Computational Methods Department
E-mail: `zarabaeva@yandex.ru`

Murat Kh. Beshtokov
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanov St., Nalchik 360000, Russia,
Leading Researcher Computational Methods Department
E-mail: `beshtokov-murat@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211

Mukhamed Kh. Shkhanukov-Lafishev
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanov St., Nalchik 360000, Russia,
Chief Researcher of the Department of Mathematical
Modeling of Geophysical Processes
E-mail: `lafishev@yandex.ru`