Владикавказский математический журнал
2026, Том 28, Выпуск 1, С. 68–72

УДК 517.982.22
DOI 10.46698/z6430-9873-2568-v

БАНАХОВЫ ПРЕДЕЛЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАТОРОВ РАСТЯЖЕНИЯ#

Р. Е. Зволинский [1], **Е. М. Семенов**[1]
[1] Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: `roman.zvolinskiy@gmail.com`, `nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru`

Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

Аннотация. В работе рассматриваются множества банаховых пределов, инвариантных относительно операторов растяжения. Известно, что множество таких пределов является непустым и выпуклым подмножеством множества банаховых пределов. Однако объединение всех таких подмножеств невыпукло. В данной работе приводится необходимое и достаточное условие выпуклости конечных объединений таких подмножеств. Полученный критерий дает полный ответ на вопрос о выпуклости конечных объединений множеств банаховых пределов, инвариантных относительно операторов растяжения. В то же время вопрос об аналогичном критерии для бесконечных объединений остается открытым: авторами найдены лишь необходимые и, отдельно, достаточные условия выпуклости.

Ключевые слова: банаховы пределы, операторы растяжения, выпуклые подмножества.

AMS Subject Classification: 46B45, 47B37.

Образец цитирования: *Зволинский Р. Е., Семенов Е. М.* Банаховы пределы, инвариантные относительно операторов растяжения // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 1.—С. 68–72. DOI: 10.46698/z6430-9873-2568-v.

1. Введение

Через ℓ_∞ обозначается пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой

$$\|x\|_{\ell_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

и стандартной полуупорядоченностью, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Линейный функционал $B \in \ell_\infty^*$ называется *банаховым пределом*, если

1. $B \geqslant 0$, т. е. $Bx \geqslant 0$ для всех $x \geqslant 0$;
2. $Bx = BTx$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T — оператор сдвига в ℓ_∞;
3. $B\mathbb{1} = 1$, где $\mathbb{1} = (1, 1, \dots)$.

Существование банаховых пределов было анонсировано С. Мазуром [1], а доказательство приведено в книге С. Банаха [2]. Банахов предел B называется *инвариантным*

[#] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00220.

относительно действующего в ℓ_∞ оператора H, если $Bx = BHx$ для всех $x \in \ell_\infty$. Существование инвариантных банаховых пределов было доказано У. Эберлейном [3]. Подход У. Эберлейна был развит в [4]. Там было доказано, что множество инвариантных относительно оператора H банаховых пределов $\mathfrak{B}(H)$ непусто, если

1. $H \geqslant 0$ и $H\mathbb{1} = \mathbb{1}$;

2. $Hc_0 \subset c_0$;

3. $\limsup_{j\to\infty} (A(I-T)x)_j \geqslant 0$ для всех $x \in \ell_\infty$, $A \in R(H)$, где $R(H) = \operatorname{conv}\{H^k, k \in \mathbb{N}\}$.

Условиям 1–3 удовлетворяет оператор Чезаро

$$(Cx)_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

и операторы растяжения

$$\sigma_n x = \big(\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{n}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{n}, \ldots\big), \quad n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots)$. Поэтому множества $\mathfrak{B}(\sigma_n)$ непусты и выпуклы для всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, и, более того, диаметр и радиус каждого множества $\mathfrak{B}(\sigma_n)$ совпадают с диаметром и радиусом множества $\mathfrak{B}$ в ℓ_∞^* и равны 2. Если банахов предел B инвариантен относительно оператора σ_n, то B инвариантен относительно $(\sigma_n)^2 = \sigma_{n^2}$. Это означает, что

$$\mathfrak{B}(\sigma_n) \subset \mathfrak{B}(\sigma_{n^k}) \tag{1}$$

для любых $k, n \in \mathbb{N}$, $k, n \geqslant 2$. Более подробно о банаховых пределах см. обзор [5]. Настоящая работа посвящена изучению множеств $\mathfrak{B}(\sigma_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Банаховы пределы, инвариантные относительно операторов σ_n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, рассматривались в работах [6, 7] и других.

2. Основные результаты

Всякая строго возрастающая последовательность натуральных чисел $M = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$, $m_1 \geqslant 2$, определяет множество

$$\mathfrak{B}(M) = \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{B}(\sigma_{m_i}),$$

которое является подмножеством $\mathfrak{B}$. Отметим, что в силу (1) мы можем полагать $m_s^k \neq m_t$ для всех $s, t \in (1, 2, \ldots, r-1)$, $s < t$, и всех $k \in \mathbb{N}$. Дальнейшие рассуждения мы будем проводить исходя из этого предположения.

Теорема 1. *Для того чтобы множество $\mathfrak{B}(M)$ было выпукло необходимо и достаточно, чтобы $m_i^{k_i} = m_r$ для всех $i \in (1, 2, \ldots, r-1)$ и для некоторых $k_i \in \mathbb{N}$, $k_i > 1$.*

$\lhd$ Необходимость докажем от противного примерно по той же схеме, что и [6, теорема 13]. Предположим, что $m_j^k \neq m_r$ для некоторого $j \in (1, 2, \ldots, r-1)$ и всех $k \in \mathbb{N}$. Так как $m_r > m_j$, то $m_r^k \neq m_j$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В силу [6, теорема 14] существуют такие $B_2 \in \mathfrak{B}(\sigma_{m_j})$ и $B_3 \in \mathfrak{B}(\sigma_{m_r})$, что

$$\|B_2 - B\|_{\ell_\infty^*} = 2 \tag{2}$$

для любого $B \in \mathfrak{B}(\sigma_\alpha)$ и

$$\|B_3 - B\|_{\ell_\infty^*} = 2 \tag{3}$$

для любого $B \in \mathfrak{B}(\sigma_\beta)$, где

$$\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{1, m_j, m_j^2, m_j^3, \ldots\},$$
$$\beta \in \mathbb{N} \setminus \{1, m_r, m_r^2, m_r^3, \ldots\}.$$

В частности,

$$B_2 \notin \mathfrak{B}(\sigma_{m_r}), \quad B_3 \notin \mathfrak{B}(\sigma_{m_j}). \tag{4}$$

Рассмотрим банахов предел

$$B_1 = \frac{1}{2}(B_2 + B_3)$$

и докажем, что $B_1 \notin \mathfrak{B}(\sigma_n)$ для любого $n \in (m_1, m_2, \ldots, m_r)$. Доказательство проведем отдельно для 3 различных подмножеств $\mathbb{N}$.

1. Пусть $n = m_j$ и предположим, что $B_1 \in \mathfrak{B}(\sigma_{m_j})$. Так как $B_3 = 2B_1 - B_2$, то инвариантность B_1 и B_2 относительно σ_{m_j} влечет инвариантность B_3 относительно σ_{m_j}. Отсюда и из $B_3 \in \mathfrak{B}$ следует $B_3 \in \mathfrak{B}(\sigma_{m_j})$, что противоречит (4).

2. Если $n = m_r$ и $B_1 \in \mathfrak{B}(\sigma_{m_r})$, то те же самые аргументы приводят к противоречию с (4).

3. Пусть $n \neq m_j$, $n \neq m_r$. В силу (2), (3) имеем

$$\|B_2 - B_1\|_{\ell_\infty^*} = \|B_3 - B_1\|_{\ell_\infty^*} = 2.$$

Так как $B_1 - B_2 = B_3 - B_1$, то

$$\|B_3 - B_2\|_{\ell_\infty^*} = \|B_3 - B_1 + B_1 - B_2\|_{\ell_\infty^*} = 2\|B_3 - B_1\|_{\ell_\infty^*} = 4.$$

Доказанное равенство противоречит отмеченному в § 1 факту, что диаметр $\mathfrak{B}$ равен 2. Полученное во всех трех случаях противоречие доказывает необходимость — первую часть теоремы.

Если $m_r = m_i^{k_i}$, то в силу (1) получаем

$$\mathfrak{B}(\sigma_{m_i}) \subset \mathfrak{B}(\sigma_{m_r}).$$

Отсюда $\mathfrak{B}(M) = \mathfrak{B}(\sigma_{m_r})$ и выпуклость $\mathfrak{B}(\sigma_{m_r})$ влечет выпуклость $\mathfrak{B}(M)$. $\triangleright$

Теорема 1 была анонсирована в [8, теорема 2]. Возникает естественный вопрос: выполняется ли теорема 1, если M — бесконечное объединение множеств $\mathfrak{B}(\sigma_{m_i})$? Этот вопрос остается открытым.

Благодарности. Авторы благодарят рецензента за ценные замечания, которые были учтены про подготовке финального варианта статьи.

Литература

1. *Mazur S.* O metodach sumowalnosci // Ann. Soc. Polon. Math. (Suppl.).—1929.—P. 102–107.
2. *Банах С.* Теория линейных операций.—М.–Ижевск: РХД, 2001.—272 с.
3. *Eberlein W. F.* Banach–Hausdorff limits // Proc. Amer. Math. Soc.—1950.—Vol. 1, № 5.—P. 662–665. DOI: 10.1090/S0002-9939-1950-0038009-0.
4. *Semenov E. M., Sukochev F. A.* Invariant Banach limits and applications // J. Funct. Anal.—2010.—Vol. 259, № 6.—P. 1517–1541. DOI: 10.1016/j.jfa.2010.05.011.

5. *Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С.* Геометрия банаховых пределов и их приложения // Успехи мат. наук.—2020.—Т. 75, № 4.—С. 153–194.
6. *Авдеев Н. Н., Семенов Е. М., Усачев А. С.* Банаховы пределы: экстремальные свойства, инвариантность и теорема Фубини // Алгебра и анализ.—2021.—Т. 33, № 4.—С. 32–48.
7. *Алехно Е. А., Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С.* Порядковые и геометрические свойства множества банаховых пределов // Алгебра и анализ.—2016.—Т. 28, № 3.—С. 3–35.
8. *Зволинский Р. Е., Семенов Е. М.* Инвариантные банаховы пределы и их выпуклые подмножества // Мат. заметки.—2022.—Т. 112, № 6.—С. 820–824. DOI: 10.4213/mzm13643.

Статья поступила 11 ноября 2025 г.

Зволинский Роман Евгеньевич
Воронежский государственный университет,
аспирант кафедры теории функций и геометрии
РОССИЯ, 394018, Воронеж, Университетская пл. 1
E-mail: `roman.zvolinskiy@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0002-0240-8697

Семенов Евгений Михайлович
Воронежский государственный университет,
профессор, заведующий кафедрой теории функций и геометрии
РОССИЯ, 394018, Воронеж, Университетская пл. 1,
E-mail: `nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2026, Volume 28, Issue 1, P. 68–72

BANACH LIMITS INVARIANT UNDER DILATION OPERATORS

Zvolinskii, R. E.[1] and Semenov, E. M.[1]

[1] Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia
E-mail: `roman.zvolinskiy@gmail.com`, `nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru`

Abstract. This paper considers sets of Banach limits invariant under dilation operators. It is known that the set of these limits is a non-empty and convex subset of the set of Banach limits. However, the union of all such subsets is non-convex. This paper provides a necessary and sufficient condition for the convexity of finite unions of such subsets. The obtained criterion provides a complete answer to the question regarding the convexity of finite unions of sets of Banach limits invariant under dilation operators. At the same time, the question of a similar criterion for infinite unions remains open: the authors have found only necessary and, separately, sufficient conditions for convexity.

Keywords: Banach limits, dilation operators, convex subsets.

AMS Subject Classification: 46B45, 47B37.

For citation: *Zvolinskii, R. E. and Semenov, E. M.* Banach Limits Invariant Under Dilation Operators, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 68–72 (in Russian). DOI: 10.46698/z6430-9873-2568-v.

References

1. *Mazur, S.* O Metodach Sumowalnosci, *Ann. Soc. Polon. Math.* (*Supplement*), 1929, pp. 102–107.
2. *Banach, S. Theory of Linear Operations*, Dover Publications, 2009, 254 p.
3. *Eberlein, W. F.* Banach–Hausdorff Limits, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1950, vol. 1, no. 5, pp. 662–665. DOI: 10.1090/S0002-9939-1950-0038009-0.

4. *Semenov, E. M. and Sukochev, F. A.* Invariant Banach Limits and Applications, *Journal of Functional Analysis*, 2010, vol. 259, no. 6, pp. 1517–1541. DOI: 10.1016/j.jfa.2010.05.011.
5. *Semenov, E. M., Sukochev, F. A. and Usachev, A. S.* Geometry of Banach Limits and Their Applications, *Russian Mathematical Surveys*, 2020, vol. 75, no. 4, pp. 725–763. DOI: 10.1070/RM9901.
6. *Avdeev, N. N., Semenov, E. M. and Usachev, A. S.* Banach Limits: Extreme Properties, Invariance and the Fubini Theorem, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2022, vol. 33, no. 4, pp. 607–618. DOI: 10.1090/spmj/1717.
7. *Alekhno, E. A., Semenov, E. M., Sukochev, F. A. and Usachev, A. S.* Order and Geometric Properties of the Set of Banach Limits, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2017, vol. 28, no. 3, pp. 299–321. DOI: doi.org/10.1090/spmj/1452.
8. *Zvolinskii, R. E. and Semenov, E. M.* Invariant Banach Limits and Their Convex Subsets, *Mathematical Notes*, 2022, vol. 112, no. 6, pp. 881–884. DOI: 10.1134/S0001434622110220.

Received November 11, 2025

ROMAN E. ZVOLINSKII
Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia,
PhD Student
E-mail: `roman.zvolinskiy@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0002-0240-8697

EVGENII M. SEMENOV
Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia,
Professor
E-mail: `nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru`