

УДК 517.98
DOI 10.46698/o9578-0948-6676-e

ЛЕММА ФАРКАША ДЛЯ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ[#]

А. Г. Кусраев^{1,2}

¹ Северо-Кавказский центр математических исследований ВЦ РАН,
Россия, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1;

² Южный математический институт ВЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: kusraev@smath.ru

Светлой памяти профессора Семёна Самсоновича Кутателадзе

Аннотация. Лемма Фаркаша является классическим результатом, лежащим в основе двойственности линейного программирования и теории оптимизации. Известны многочисленные ее обобщения, в том числе и различные линейные и нелинейные операторные версии. Однако, лемма Фаркаша неверна для полилинейных операторов и даже для билинейных функционалов на конечномерном пространстве, если число фигурирующих в ее формулировке операторов больше двух. В настоящей заметке выделен класс орторегулярных полилинейных операторов из декартовой степени равномерно полной векторной решетки в пространство Канторовича, для которых лемма Фаркаша имеет место в полном объеме. Для этой цели используется линеаризация с помощью степени векторной решетки, которая позволяет заменить орторегулярный полилинейный оператор регулярным линейным оператором. Показано также, что аналогичная конструкция работает и в том случае, когда область определения операторов — векторное пространство с отношением дизъюнктивности, согласованным с линейной структурой.

Ключевые слова: системы линейных неравенств, лемма Фаркаша, векторная решетка, принцип стратификации Кутателадзе, орторегулярный полилинейный оператор, отношение дизъюнктивности.

AMS Subject Classification: 46A16, 46B42, 46G25.

Образец цитирования: Кусраев А. Г. Лемма Фаркаша для полилинейных операторов // Владикавказ. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 1.—С. 82–97. DOI: 10.46698/o9578-0948-6676-e.

1. Введение

Лемма Фаркаша¹ — фундаментальный результат линейного программирования и выпуклого анализа — впервые опубликованный в 1898 г. на венгерском языке [1] и в 1902 г. на немецком языке [2], формулируется следующим образом.

Лемма Фаркаша. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$ и $\langle a, x \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов a и x . Для любых $m + 1$ вектора $a_1, \dots, a_m, c \in \mathbb{R}^n$, равносильны утверждения:

[#] Работа выполнена в Северо-Кавказском центре математических исследований ВЦ РАН при поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2026-738.

© 2026 Кусраев А. Г.

¹ Дьюла (Юлиус) Фаркаш (1847–1930) — венгерский математик и физик-теоретик, дал математическую формулировку механическому принципу Фурье и разработал теорию линейных неравенств, чтобы вывести необходимое условие равновесия механической системы.

(1) неравенство $\langle c, x \rangle \leq 0$ является следствием системы линейных однородных неравенств $\langle a_i, x \rangle$ ($i = 1, \dots, m$), т. е.

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n) \langle a_1, x \rangle \leq 0 \wedge \dots \wedge \langle a_m, x \rangle \leq 0 \implies \langle c, x \rangle \leq 0.$$

(2) существуют $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}_+$ такие, что $c = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k$.

Здесь \mathbb{R} — поле вещественных чисел и $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел. Лемма Фаркаша остается в силе, если функции $\langle c, \cdot \rangle$, $\langle a_i, \cdot \rangle$ заменить любыми линейными функционалами $g, f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ на произвольном векторном пространстве.

Теорема 1.1. Для произвольных линейных функционалов $g, f_1, \dots, f_m \in X^*$ неравенство $g(x) \leq 0$ является следствием системы неравенств $f_i(x) \leq 0$ ($i = 1, \dots, m$) в том и только в том случае, когда $g = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i$ для некоторых $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Хорошо известно, какую важную роль сыграл этот классический результат в развитии теории нелинейной оптимизации. В конце 1930-х гг. Л. В. Канторович открыл новую область применения линейных неравенств — экономическое планирование. Исторический комментарий о развитии теории линейных неравенств имеется в [3, 4]. Множество различных доказательств, обобщений и приложений этой леммы можно найти в литературе (см. [5–10], а также ссылки в них).

Если в теореме 1.1 функции f_1, \dots, f_m, g не линейны, но выпуклы и выполняется какое-нибудь условие регулярности (например, условие Слейтера), то соответствующая лемма Фаркаша с точностью до элементарных оговорок есть не что иное, как *теорема Каруша — Куна — Таккера*, см. [5]. Бесконечномерной геометрической формой леммы Фаркаша можно считать известную *теорему Дубовицкого — Миллота*, см. [11].

Вопрос о справедливости невыпуклых вариантов леммы Фаркаша восходит к монографии М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [12], в которой введена *S-процедура*² — аналог леммы Фаркаша для квадратичных функций. Исторические корни, обзор приложений и взаимосвязей этого направления с разными разделами математики см. в В. Полик и Т. Терлаки [14]. В последнее время группа китайских математиков развивает подход, который объединяет и обобщает классическую лемму Фаркаша для линейных систем и *S-лемму* для квадратичных систем, см. [15]. Отметим также свежую работу [16], в которой *S-лемма* обобщается на минимаксные квадратичные функции.

Лемма Фаркаша в том виде, каком она представлена в теореме 1.1, неверна для полилинейных форм и однородных полиномов. Следующий пример, найденный Дауни в [17], показывает, что эта лемма не выполняется даже для билинейных форм, определенных на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим три билинейные формы $A, B, C : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$A(x, y) = (2x_1 + 3x_2)y_1 + (x_1 + 2x_2)y_2,$$

$$B(x, y) = (3x_1 + x_2)y_1 + (2x_1 + x_2)y_2,$$

$$C(x, y) = (2x_1 + x_2)y_1 + (x_1 + x_2)y_2,$$

где $x := (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$. Как показано в [17, пример 1], неравенство $C(x, y) \leq 0$ является следствием системы двух неравенств $A(x, y) \leq 0$ и $B(x, y) \leq 0$, однако C линейно независима от A и B , т. е. $C \neq \lambda A + \mu B$.

ПРИМЕР 1.2. Лемма Фаркаша также не выполняется для однородных многочленов. Рассмотрим $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ и $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, заданные формулами $P(x_1, x_2) = x_1^2$ и

²Название — от английского Stability; означает метод анализа устойчивости нелинейных систем, опирающийся на ключевую *S-лемму* В. А. Якубовича, см. [13].

$Q(x_1, x_2) = x_2^2$. Тогда $P(x_1, x_2) \geq 0$ влечет $Q(x_1, x_2) \geq 0$, поскольку оба многочлена всегда неотрицательны, но P и Q линейно независимы, см. [18].

Следующий результат, утверждающий, что лемма Фаркаша имеет место для двух полилинейных форм, определенных на декартовом произведении любых (не обязательно конечномерных) векторных пространств, приводится в упомянутой выше работе Дауни [17, теорема 2] как простое следствие основного результата из [19].

Теорема 1.2. Пусть A и B — n -линейные формы, определенные на декартовом произведении $X_1 \times \cdots \times X_n$ векторных пространств X_1, \dots, X_n . Тогда $\{A \leq 0\} \subset \{B \leq 0\}$ в том и только в том случае, когда $B = \alpha A$ для некоторого $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$.

Здесь возникает естественный вопрос: существует ли нетривиальный класс n -линейных форм такой, что для любого конечного набора форм из этого класса имеет место лемма Фаркаша? Такой класс указан в работе Арона, Гарсия, Пинаско и Зальдуэндо [18, теорема 1], в которой показано, что лемма Фаркаша справедлива для одновременно диагоналируемых билинейных форм на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Приведем точную формулировку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Говорят, что $n \times n$ матрицы A_1, \dots, A_m одновременно диагоналируемы, если существует обратимая $n \times n$ матрица C такая, что $C^{-1}A_1C, \dots, C^{-1}A_mC$ — диагональные матрицы. Билинейные формы B_1, \dots, B_m , определенные на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, одновременно диагоналируемы, если таковы представляющие их матрицы $\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_m$ в стандартном базисе e_1, \dots, e_n в \mathbb{R}^n , т. е. $\bar{B}_k = (B_k(e_i, e_j))_{i,j=1}^n$.

Теорема 1.3. Для любого конечного набора одновременно диагоналируемых билинейных форм $A_j, B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, m$) следующие утверждения равносильны:

- (1) $A_1(x, y) \leq 0, \dots, A_m(x, y) \leq 0 \implies B(x, y) \leq 0$;
- (2) $B = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_m A_m$ для некоторых $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

В [18, замечание 1] отмечено также, что теорема 1.3 остается в силе, если $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — гильбертово пространство и A_1, \dots, A_m — симметричные билинейные формы на $H \times H$, определяемые формулой $A_i(x, y) = \langle y, T_i x \rangle$ ($i = 1, \dots, m$), где T_1, \dots, T_m — некоторые компактные самосопряженные коммутирующие операторы в H . Близкие вопросы ставятся и в задачах абсолютной устойчивости систем регулирования с аналогичными ответами, см. [20, теоремы 8 и 9].

Цель настоящей заметки — показать, что лемму Фаркаша типа 1.6 можно распространить на обширный класс полилинейных операторов, действующих в пространстве Канторовича. В § 2 кратко изложен принцип стратификации, предложенный С. С. Кутателадзе для исследования операторов со значениями в пространстве Канторовича, а также некоторые приложения к операторным формам леммы Фаркаша. В § 3 рассмотрен класс орторегулярных полилинейных операторов между векторными решетками и для этого класса установлена лемма Фаркаша. Для определения орторегулярных полилинейных операторов в области определения нужно лишь отношение дизъюнктивности, а не структура векторной решетки целиком. В § 4 устанавливается вариант леммы Фаркаша для орторегулярных полилинейных операторов, определенных на векторном пространстве, с аксиоматически заданным отношением дизъюнктивности.

2. Вклад С. С. Кутателадзе

Линейный функционал определяется с точностью до скалярного множителя по своей нулевой гиперплоскости, т. е. по своему ядру. В то же время, линейный оператор лишь в редких случаях восстанавливается по своему ядру с точностью до простого множителя. В работе [21] С. С. Кутателадзе предложил новый метод исследования операторов

со значениями в пространстве Канторовича, основанный на следующем эвристическом положении (см. также [22, теорема 4.3 и замечание 4.6]).

Принцип стратификации Кутателадзе. *Линейный оператор T со значениями в пространстве Канторовича Y определяется с точностью до ортоморфизма (оператора, сохраняющего полосы) по семейству нулевых подпространств ядер его слоев, т. е. по семейству ядер $\ker(\pi \circ T)$, где π пробегает множество $\mathbb{P}(Y)$ порядковых проекторов в Y .*

Этот принцип эффективен в различных задачах теории операторов. В частности, работы С. С. Кутателадзе [23, 24, 25, 26] демонстрируют как принцип стратификации в сочетании с булевозначным анализом применяется к изучению систем линейных неравенств с операторами. В настоящем параграфе рассмотрим коротко операторные варианты леммы Фаркаша.

Используются стандартные обозначения и термины из книги Алипрантиса и Бёркиншо [27]. Все рассматриваемые векторные пространства предполагаются вещественными. Для векторной решетки G символами $\mathbb{B}(G)$ и $\mathbb{P}(G)$ обозначаем полные булевы алгебры соответственно *полос* и *порядковых проекторов* в G . Разбиением элемента $b \in \mathbb{B}$ называют семейство (конечное или бесконечное) (b_ξ) в \mathbb{B} такое, что $b_\xi \wedge b_\eta = 0$ для всех $\xi \neq \eta$ и $b = \sup_\xi b_\xi$; если b — единица булевой алгебры \mathbb{B} , то (b_ξ) именуют *разбиением единицы*. Напомним также, что $x, y \in G$ *дизъюнкты* (символически, $x \perp y$), если $|x| \wedge |y| = 0$; дизъюнктное дополнение множества $M \subset \mathbb{B}$ определяется формулой $M^\perp := \{x \in F : (\forall y \in M) x \perp y\}$.

Векторную решетку называют *пространством Канторовича*³, если она *порядково полна*, т. е. в ней каждое порядково ограниченное множество имеет точную верхнюю границу. *Универсально полной* принято называть векторную решетку, которая одновременно порядково полна и *латерально полна* (т. е. каждое множество положительных попарно дизъюнктивных элементов имеет точную верхнюю границу).

Для архимедовой векторной решетки Y существует единственная (с точностью до решеточного гомоморфизма) универсально полная векторная решетка Y^u (называемая *порядковым пополнением Y*) такая, что Y решеточно изоморфна порядково плотной векторной подрешетке Y^u , см. [27, с. 126]. Универсальное пополнение Y^u является f -алгеброй с единицей умножения $\mathbb{1}$, см. [27, гл. 2, упр. 13]. *Ортоморфизмом* в Y называют оператор $\pi \in L(Y)$, служащий ограничением на Y оператора умножения в f -алгебре Y^u , т. е. $\pi(x) = ay$ ($y \in Y$) для некоторого $a \in Y^u$, см. [27, определение 2.41 и замечания на с. 127].

Пусть X — вещественное векторное пространство, Y — некоторое пространство Канторовича, $Y_+ := \{y \in Y : y \geq 0\}$ — конус положительных элементов Y . Символом $L(X, Y)$ обозначим пространство линейных операторов из X в Y . Обозначим $\ker(T) := \{T = 0\} := T^{-1}(0)$ и $\{T \leq 0\} := \{x \in X : Tx \leq 0\} := T^{-1}(-Y_+)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Предположим, что на X задана Y -значная полунорма $p : X \rightarrow Y_+$, т. е. p обладает свойствами нормы: $p(x) = 0 \iff x = 0$, $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ для всех $x, y \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. В этом случае выделяют класс *мажорируемых операторов*, т. е. таких операторов $T \in L(X, Y)$, что существует положительный ортоморфизм $\alpha \in \text{Orth}(Y)$, обеспечивающий оценку $|Tx| \leq \alpha p(x)$ для всех $x \in X$. Множество мажорируемых линейных операторов из X в Y обозначим символом $L^{(m)}(X, Y)$.

Теперь можем уточнить формулировку принципа стратификации Кутателадзе.

³ Пространство Канторовича называют также *дедекндово полным пространством Рисса* [27, с. 14] или *порядково полной векторной решеткой* [28, с. 137].

Теорема 2.1. *Линейный оператор T из векторного пространства X в пространство Канторовича Y восстанавливается в классе мажорируемых операторов $L^{(m)}(X, Y)$ с точностью до ортоморфизма по семейству ядер $\ker(\pi \circ T)$ слоев $\pi \circ T$ оператора T :*

$$(\forall S, T \in L^{(m)}(X, Y)) (\forall \pi \in \mathbb{P}(Y)) \\ \ker(\pi \circ S) \subset \ker(\pi \circ T) \iff (\exists \lambda \in \text{Orth}(Y)) T = \lambda S.$$

◁ О доказательстве см. в [21, теорема 1] и [22, замечание 4.6]. ▷

Операторная версия леммы Фаркаша формулируется следующим образом.

Теорема 2.2. *Пусть $T, S_1, \dots, S_N \in L^{(m)}(X, Y)$ — линейные мажорированные операторы из векторного пространства X в пространство в Канторовича Y . Тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) *для любого $\pi \in \mathbb{P}(Y)$ операторное неравенство $\pi T \leq 0$ является следствием системы операторных неравенств $\pi S_1 x \leq 0, \dots, \pi S_N x \leq 0$, т. е.*

$$\{\pi T \leq 0\} \supset \{\pi S_1 \leq 0\} \cap \dots \cap \{\pi S_N \leq 0\} \quad (\pi \in \mathbb{P}(Y));$$

(2) *существуют положительные ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(Y^u)$ такие, что*

$$T = \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_N S_N,$$

т. е. T содержится в операторно выпуклой оболочке операторов S_1, \dots, S_N .

◁ Этот факт установил С. С. Кутателадзе в [24, теорема 1.1], используя булевозначный анализ [29] и субдифференциальное исчисление [30]. Доказательство, использующее лишь стандартные средства, содержится [22, теорема 5.5.] ▷

Как уже отмечалось выше, лемма Фаркаша не имеет места для полилинейных операторов. Однако, справедлив следующий операторный вариант теоремы 1.2.

Теорема 2.3. *Для любой пары мажорируемых n -линейных операторов S и T из декартова произведения векторных пространств $X_1 \times \dots \times X_n$ в пространство Канторовича Y существует положительный ортоморфизм $\alpha \in \text{Orth}(G)$, для которого $S = \alpha T$, в том и только в том случае, когда $\{\pi S \leq 0\} \subset \{\pi T \leq 0\}$ для всех $\pi \in \mathbb{P}(Y)$.*

◁ Доказательство, приведенное в [24, теорема 1.3] представляет собой интерпретацию теоремы 1.2 в подходящей булевозначной модели. ▷

Лемма Фаркаша не выполняется также в классе сублинейных функций и операторов (т. е. положительно однородных и субаддитивных операторов, см. [6, определение 1.3.4(2)]); соответствующий пример приводится в работе [31], где лемма Фаркаша доказана для сублинейных функций с разделяющимися переменными, определенных на конечномерном пространстве. Как показал С. С. Кутателадзе [24, 26], операторный вариант леммы Фаркаша имеет место для полиэдральных сублинейных операторов. Обозначим символом $\text{Sub}(X, Y)$ множество всех сублинейных операторов из X в Y .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Оператор $P \in \text{Sub}(X, Y)$ называют *полиэдральным* и пишут $P \in \text{PSub}(X, Y)$, если P представляет собою верхнюю огибающую конечного набора линейных операторов, т. е. если найдутся $A_1, \dots, A_k \in L(X, Y)$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что

$$P(x) = \bigvee_{i=1}^k A_i(x) := A_1 x \vee \dots \vee A_k x \quad (x \in X).$$

Если X снабжено какой-нибудь Y -полунормой, то считаем сублинейный оператор P мажорированным, т. е. что $A_1, \dots, A_k \in L^{(m)}(X, Y)$.

Теорема 2.4. Пусть X — вещественное Y -полунормированное пространство, где Y — некоторое пространство Канторовича. Допустим также, что заданы мажорированные полиэдральные сублинейные операторы $P_1, \dots, P_N \in \text{PSub}^{(m)}(X, Y)$ и мажорированный сублинейный оператор $P \in \text{Sub}^{(m)}(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) для всех $\pi \in \mathbb{P}(Y)$ сублинейное операторное неравенство $\pi P(x) \geq 0$ является следствием системы полиэдральных сублинейных операторных неравенств $\pi P_1(x) \leq 0, \dots, \pi P_N x \leq 0$, т. е. $\{\pi P \geq 0\} \supset \{\pi P_1 \leq 0\} \cap \dots \cap \{\pi P_N \leq 0\}$;

(2) найдутся положительные ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(Y^u)$ такие, что

$$P(x) + \sum_{k=1}^N \alpha_k P_k(x) \geq 0 \text{ для всех } x \in X.$$

◁ Доказательство см. в [24, теорема 2.2]. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Случай неоднородных полиэдральных сублинейных неравенств рассмотрен в другой работе С. С. Кутателадзе [26], в которой приводится также вариант принципа Лагранжа для полиэдральных мажорированных сублинейных операторов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Некоторые иные возможности, открывающиеся в рамках представленного выше подхода, представлены в обзорной статье [22] и в монографии [29].

3. Ортрегулярные полилинейные операторы

В этом параграфе рассмотрим класс *регулярных ортосимметричных* полилинейных операторов между векторными решетками, для которого линейаризация посредством *степени векторной решетки* позволяет получить полноценную лемму Фаркаша. Начнем с необходимых определений. Всюду в этом параграфе E и F — архимедовы векторные решетки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. n -Линейный оператор $S : E^n \rightarrow F$ называют *положительным* (и пишут $S \geq 0$), если $S(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ для всех $0 \leq x_1, \dots, x_n \in E$; *регулярным*, если он представим в виде разности двух положительных n -линейных операторов; *решеточным мультиморфизмом* или *решеточным n -морфизмом*, если $|T(x_1, \dots, x_n)| = T(|x_1|, \dots, |x_n|)$ для всех $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. n -Линейный оператор $S : E^n \rightarrow F$ называют *симметричным*, если $S(x_1, \dots, x_n) = S(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ для любой перестановки σ множества $\{1, \dots, n\}$. Скажем, что S *ортосимметричен*, если $S(x_1, \dots, x_n) = 0$ для всех $x_1, \dots, x_n \in E$ таких, что $|x_k| \wedge |x_l| = 0$ для некоторой пары $1 \leq k, l \leq n$; S называют *ортрегулярным*, если S можно представить в виде разности двух положительных ортосимметричных n -линейных операторов.

Отметим следующие важные свойства ортосимметричных операторов между векторными решетками: 1) положительный ортосимметричный оператор является симметричным, однако обратное не всегда верно [32, теорема 2]; 2) мультиморфизм ортосимметричен в том и только в том случае, когда он симметричен [33, лемма 2.1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Пару $(E^{n\odot}, \odot_n)$ называют *n -й степенью* векторной решетки E , если выполнены следующие условия:

(1) $E^{n\odot}$ — векторная решетка;

(2) $\odot_n : E^n \rightarrow E^{n\odot}$ — симметричный решеточный n -морфизм (называемый *каноническим*);

(3) для любой векторной решетки F и любого симметричного решеточного n -морфизма $S : E^n \rightarrow F$ существует единственный решеточный гомоморфизм $S^\odot : E^{n\odot} \rightarrow F$ такой, что $S = S^\odot \circ \odot_n$.

В следующем результате собраны основные свойства степени векторной решетки: существование, универсальность по отношению к классу орторегулярных операторов, сюръективность канонического n -морфизма.

Теорема 3.1. Для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и (архимедовой) векторной решетки E справедливы следующие утверждения:

(1) существует единственный (с точностью до решеточного изоморфизма) n -я степень $(E^{n\odot}, \odot_n)$ векторной решетки E ;

(2) для любой равномерно полной векторной решетки F и любого орторегулярного n -линейного оператора $S : E^n \rightarrow F$ существует единственный линейный регулярный оператор $S^\odot : E^{n\odot} \rightarrow F$ такой, что $S = S^\odot \circ \odot_n$;

(3) если E равномерно полна, то ортосимметричный n -линейный оператор \odot_n сюръективен, т. е. любой элемент $x \in E^\odot$ допускает представление $x = x_1 \odot_n \cdots \odot_n x_n$ для некоторых $x_1, \dots, x_n \in E$.

◁ См. Булабиар и Бускес [33, теоремы 3.2, 3.3(2) и 5.1(1)]. ▷

Теперь все готово, чтобы представить основной результат данного параграфа.

Теорема 3.2. Предположим, что E — равномерно полная векторная решетка, G — пространство Канторовича и $1 \leq n, N \in \mathbb{N}$. Для любого конечного набора орторегулярных n -линейных операторов S_1, \dots, S_N, S из E^n в G равносильны утверждения:

(1) для любых $\pi \in \mathbb{P}(G)$ и $x_1, \dots, x_n \in E$ верна импликация⁴

$$\pi S_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \wedge \dots \wedge \pi S_N(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \implies \pi S(x_1, \dots, x_n) \leq 0.$$

(2) существуют положительные ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(G^u)$ такие, что

$$S = \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_N S_N.$$

◁ Нужно лишь убедиться, что из (1) следует (2), так как обратное утверждение очевидно. По теореме 3.1(2) существуют регулярные линейные операторы $S^\odot, S_1^\odot, \dots, S_N^\odot$ из $E^{n\odot}$ в F такие, что $S = S^\odot \circ \odot_n, S_1 = S_1^\odot \circ \odot_n, \dots, S_N = S_N^\odot \circ \odot_n$. Ввиду 3.1(3) для произвольного $u \in E^{n\odot}$ можно подобрать такие $x_1, \dots, x_n \in E$, что $u = x_1 \odot \cdots \odot x_n := \odot_n(x_1, \dots, x_n)$. Предположим, что $S_k^\odot(u) \leq 0$ для всех $k = 1, \dots, N$. Тогда $S_k(x_1, \dots, x_n) = S_k^\odot(u) \leq 0$ для всех $k = 1, \dots, N$ и по условию $S(x_1, \dots, x_n) \leq 0$. Отсюда следует, что $S^\odot(u) = S(x_1, \dots, x_n) \leq 0$. Применив теорему 2.2 к линейным операторам $S^\odot, S_1^\odot, \dots, S_N^\odot$, найдем положительные ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(G)$ такие, что

$$S = S^\odot \circ \odot_n = \alpha_1 S_1^\odot \circ \odot_n + \dots + \alpha_N S_N^\odot \circ \odot_n = \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_N S_N.$$

Остается заметить, что операторы $S^\odot, S_1^\odot, \dots, S_N^\odot$ мажорируются G -значной полунормой $p : E^{n\odot} \rightarrow G$, определяемой формулой $p(u) = |S^\odot|(|u|) + |S_1^\odot|(|u|) + \dots + |S_N^\odot|(|u|)$. ▷

⁴ Символ \wedge используется двояко: как знак логической конъюнкции и как знак инфимума в булевой алгебре или векторной решетке; точный смысл всегда ясен из контекста.

Напомним, что n -однородный полином — отображение $P : E \rightarrow F$, определяемое формулой $P(x) = \check{P}(x, \dots, x)$, где \check{P} — единственным образом определенный симметрический полилинейный оператор из E^n в F . Положительность и регулярность P означают, что таковым является полилинейный оператор \check{P} [34].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Однородный полином P из E в F называют *ортогонально аддитивным*, если $|x| \wedge |y| = 0$ влечет $P(x + y) = P(x) + P(y)$ для всех $x, y \in E$ и *ортотрегулярным*, если P можно представить как разность двух положительных ортогонально аддитивных однородных полиномов.

Следствие 3.1. Пусть E, G, n и N — такие же, как и в теореме 3.2. Для оротрегулярных n -однородных полиномов $P_1, \dots, P_N, P : E \rightarrow G$ равносильны утверждения:

(1) для любых $\pi \in \mathbb{P}(G)$ и $x_1, \dots, x_n \in E$ имеет место импликация

$$\pi \check{P}_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \wedge \dots \wedge \pi \check{P}_N(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \implies \pi P(x_1, \dots, x_n) \leq 0;$$

(2) существуют положительные ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(G^u)$ такие, что

$$P = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_N P_N.$$

◁ Нужно применить теорему 3.2 к полилинейным операторам $\check{P}_1, \dots, \check{P}_N, \check{P}$, принимая во внимание тот хорошо известный факт, что порядковог ограниченный n -однородный полином P ортогонально аддитивен в том и только в том случае, когда ассоциированный n -линейный оператор \check{P} ортосимметричен, см., например, [34]. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Определение 3.3 предложено в работе Булабиар и Бускеса [33, определение 3.1]. Обычно для удобства полагают $E^{1\circ} = E$ и $\odot_1 = I_E$. Полином $j_n : E \rightarrow E^{n\circ}$, порожденный n -линейным оператором \odot_n , положителен и ортогонально аддитивен. Более того, всякий регулярный ортогонально аддитивный n -однородный полином $P : E \rightarrow F$ допускает представление вида $P = T \circ j_n$, где T — линейный регулярный оператор из $E^{n\circ}$ в F , см. [34].

4. Векторные пространства с дизъюнктивностью

В этом параграфе покажем, что результаты об оротрегулярных полилинейных операторах можно распространить на тот случай, когда область определения представляет собой декартову степень векторного пространства с аксиоматически заданной дизъюнктивностью. Начнем с необходимых сведений об отношении дизъюнктивности.

На непустом множестве X рассмотрим двухместное отношение $\perp \subset X \times X$, а также тождественное отношение $\Delta(X^2) := \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ — *диагональ* $X \times X$. Будем писать $x \perp y$ вместо $(x, y) \in \perp$. Для $x \in X$ и $A \subset X$ обозначим $\{x\}^\perp := \{y \in X : x \perp y\}$, $A^\perp := \bigcap \{\{x\}^\perp : x \in A\}$, $[A] := A^{\perp\perp} := (A^\perp)^\perp$ и $[x] := [\{x\}]$. Следующее определение см. в [28, 0.1.9]. Пусть 0 обозначает выделенный элемент множества X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Отношение \perp называют *отношением дизъюнктивности* или *дизъюнктивностью* (в множестве X), если выполнены условия:

- (i) $\perp = \perp^{-1}$;
- (ii) $\perp \cap \Delta(X^2) = \{0, 0\}$;
- (iii) $X^\perp := \bigcap_{x \in X} \{x\}^\perp = \{0\}$;
- (iv) $[x] \cap [y] = \{0\} \implies x \perp y$.

Если $x \perp y$, то говорят, что элементы $x, y \in X$ *дизъюнкты*. Подмножество вида A^\perp , где $A \subset X$, называют *полосой* относительно \perp или \perp -*полосой*; наряду с полосой используется также термин *компонента*. Символом $\mathbb{B}_\perp(X)$ (или $\mathbb{B}(X)$, если \perp подразумевается) будем обозначать множество всех \perp -полос, упорядоченное по включению.

Очевидно, что $A \subset [A]$ и из $A \subset B$ следует $B^\perp \subset A^\perp$, поэтому $[X]$ — наименьшая (по включению) полоса, содержащая множество A , а $\{0\}^\perp$ и $[X]^\perp$ — наибольшая и наименьшая полосы соответственно. Таким образом, дизъюнктность в X можно определить свойствами (ср. [35–37]):

- (1) $x \perp y \iff y \perp x$ для всех $x, y \in X$ (симметричность);
- (2) $x \perp x \iff x = 0$ для всех $x \in X$ (невырожденность);
- (3) $X^\perp = \{0\}$ (наименьшая \perp -полоса совпадает с одноточечным множеством $\{0\}$);
- (4) если $x, y \in X$ не дизъюнкты, то существует $z \in X$ такой, что $[z] \leq [x]$ и $[z] \leq [y]$.

Лемма 4.1. *Упорядоченное по включению множество $\mathbb{B}_\perp(X)$ является полной булевой алгеброй. Булевы операции $\wedge, \vee, (\cdot)^*$ в $\mathbb{B}_\perp(X)$ имеют вид:*

$$K \wedge L = K \cap L; \quad K \vee L = [K \cup L]; \quad K^* = K^\perp.$$

◁ Доказательство получено в статье А. И. Векслера [37, теорема 2]; см. также А. С. Бондарев [35, теоремы 3.2 и 3.3] и Г. П. Акилова и С. С. Кутателадзе [28, определение 0.1.9 и предложение 1 в п. 0.2.8]. ▷

Как легко видеть, дизъюнктность в векторной решетке ($x \perp y \iff |x| \wedge |y| = 0$) является дизъюнктностью в смысле определения 4.1. В 1950–60-х годах в рамках ленинградской школы Л. В. Канторовича обсуждалась задача, восходящая к одной проблеме Биркгофа [38, проблема 81]: можно ли восстановить векторную решетку, если стерта часть информации (например, отношение порядка или алгебраические операции), см. [35–40]. Абстрактное отношение дизъюнктности в векторные пространства начала изучать В. И. Сорокина [39]. Нас интересует следующая задача: *при каких условиях в векторном пространстве можно восстановить структуру векторной решетки по заданному отношению дизъюнктности?* Она была решена А. И. Векслером в [36, 37]. Рассмотрим соответствующие свойства отношения дизъюнктности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть теперь X — вещественное векторное пространство и \perp — дизъюнктность в множестве X (в смысле определения 4.1). Пару (X, \perp) назовем *векторным пространством с дизъюнктностью*, если для любых $x, y, z \in X$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ дополнительно выполняются следующие условия согласования:

- (5) $x \perp z \wedge y \perp z \implies (\alpha x + \beta y) \perp z$ (*линейность*);
- (6) $x \perp y \wedge (x + y) \perp z \implies x \perp z$.

Из условия (5) вытекает, что в векторном пространстве с дизъюнктностью любая полоса является подпространством. Напомним, что *проектор* в X — это линейный идемпотентный оператор, т. е. $\pi \in \mathcal{L}(X)$ и $\pi \circ \pi = \pi$. Будем использовать общепринятые обозначения для *ядра* $\ker(\pi) := \{x \in X : \pi x = 0\}$ и *образа* $\operatorname{im}(\pi) := \pi(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Говорят что \perp -полоса $K \in \mathbb{B}(X)$ является (или выделяется) *прямым слагаемым*, если $X = K \oplus K^\perp$, т. е. X служит прямой суммой полос K и K^\perp . В этом случае существует единственный проектор π_K в X — *проектор на полосу K* — такой, что $\operatorname{im}(\pi_K) = K$ и $\ker(\pi_K) = K^\perp$. Векторное пространство с дизъюнктностью (X, \perp) , в котором каждая \perp -полоса выделяется прямым слагаемым, называют *векторным пространством с проекциями*, а \perp — *проекционной дизъюнктностью*. Множество всех проекторов на всевозможные полосы в X обозначим через $\mathbb{P}_\perp(X)$. Отношение порядка в $\mathbb{P}_\perp(X)$ вводится так: $\pi_K \leq \pi_L$ в том и только в том случае, когда $K \subset L$.

Лемма 4.2. Если \perp — проекционная дизъюнктивность в векторном пространстве X , то упорядоченное множество $\mathbb{P}_\perp(X)$ является полной булевой алгеброй, с нулевым оператором в качестве нуля, тождественным оператором I_X в качестве единицы и следующими булевыми операциями:

$$\begin{aligned}\pi_1 \wedge \pi_2 &= \pi_1 \circ \pi_2, & \pi_1 \vee \pi_2 &= \pi_1 + \pi_2 - \pi_1 \circ \pi_2, \\ \pi^* &= I_X - \pi \quad (\pi_1, \pi_2, \pi \in \mathbb{P}_\perp(X)).\end{aligned}$$

Отображения $\pi \mapsto \pi(X)$ и $K \mapsto \pi_K$ взаимно обратны и осуществляют булев изоморфизм между $\mathbb{P}_\perp(X)$ и $\mathbb{B}_\perp(X)$.

◁ По лемме 4.1 $\mathbb{B}_\perp(X)$ — полная булева алгебра. Отображение $h : K \mapsto \pi_K$ действует из $\mathbb{B}_\perp(X)$ на $\mathbb{P}_\perp(X)$ ввиду определения 4.3 и нашего предположения о дизъюнктивности. Как видно, $\pi \mapsto \pi(X)$ — обратное отображению h^{-1} , следовательно, h осуществляет биекцию между булевыми алгебрами $\mathbb{B}_\perp(X)$ и $\mathbb{P}_\perp(X)$. Тот факт, что h сохраняет булевы операции из лемм 4.1 и 4.2, без труда выводится непосредственно из определений. ▷

Теорема 4.1. Векторное пространство X с проекционным отношением дизъюнктивности \perp можно снабдить отношением порядка \leq так, что (X, \leq) — векторная решетка и дизъюнктивность \perp в ней (определяемая порядком) совпадает с первоначально заданной дизъюнктивностью \perp , т. е. для любых $x, y \in X$ равносильны соотношения $x \perp y$ и $x \leq y$.

◁ См. Векслер А. И. [36, теорема 5] и [37, теорема 4 и 5]. ▷

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Скажем, что векторное пространство с дизъюнктивностью (X, \perp) равномерно полно, если равномерно полной является соответствующая векторная решетка (X, \leq) . Подмножество пространства (X, \perp) назовем ограниченным, если оно порядково ограничено в векторной решетке (X, \leq) . Полилинейный оператор $T : X^n \rightarrow Y$ называют *ограниченным*, если множество $T(A^n)$ порядково ограничено в Y для любого ограниченного множества $A \subset X$ и *ортосимметричным*, если $T(x_1, \dots, x_n) = 0$ при условии, что $x_j \perp x_k$ для некоторых $1 \leq j, k \leq n$.

Соединив теорему 4.1 с материалом параграфа 3, можно переносить на пространство с дизъюнктивностью различные результаты о строении векторных решеток и операторов в них. Не углубляясь в детали, ограничимся тем утверждением, что перенос теоремы 3.2 приводит к следующему результату.

Теорема 4.2. Предположим, что X — равномерно полное векторное пространство с проекционной дизъюнктивностью, Y — пространство Канторовича и $1 \leq n, N \in \mathbb{N}$. Для любого конечного набора ограниченных ортосимметричных n -линейных операторов S_1, \dots, S_N, S из X^n в Y равносильны утверждения:

(1) для любых $\pi \in \mathbb{P}(Y)$ и $x_1, \dots, x_n \in X$, верна импликация

$$\pi S_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \wedge \dots \wedge \pi S_N(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \implies \pi S(x_1, \dots, x_n) \leq 0;$$

(2) существуют положительные ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(Y^u)$ такие, что

$$S = \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_N S_N.$$

◁ В силу теоремы 4.1 можем считать, что X является векторной решеткой с проекциями. Пусть \bar{I} — наименьший равномерно замкнутый идеал в X , а ϕ — канонический фактор-гомоморфизм из X на фактор-решетку $\bar{X} =: X/\bar{I}$. Тогда \bar{X} — равномерно полная архимедова векторная решетка (см. [41, следствие 59.4 и упражнение 59.5]), а ϕ — решеточный гомоморфизм. Легко видеть, что любой линейный порядково ограниченный

оператор $T : X \rightarrow Y$ обращается в ноль на идеале \bar{I} . Отсюда следует, что для каждого из операторов $S_0 := S$ и S_i , $i = 1, \dots, N$, существует n -линейный порядково ограниченный оператор $\bar{S}_i : \bar{X}^n \rightarrow Y$ такой, что $\bar{S}_i(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)) = S_i(x_1, \dots, x_n)$ для всех $i = 0, 1, \dots, N$ и $x_1, \dots, x_n \in X$. Заметим также, что операторы $\bar{S}_0, \bar{S}_1, \dots, \bar{S}_N$ орторегулярны, так как ϕ — решеточный гомоморфизм. Остается применить теорему 3.2 к операторам $\bar{S}_0, \dots, \bar{S}_N$ и использовать равносильность соотношений $\pi \bar{S}_i(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)) \leq 0$ и $\pi S_i(x_1, \dots, x_n) \leq 0$. \triangleright

5. Заключительные замечания

5.1. *Векторным пространством с булевой алгеброй проекций* называют пару (X, \mathbb{B}) , где X — векторное пространство, а \mathbb{B} — коммутующее множество линейных проекторов в X , образующее полную булеву алгебру в смысле леммы 4.2 (см. [42, определение 2.1.3]). Как видно, это понятие равносильно понятию векторного пространства с проекционной дизъюнктивностью (определение 4.3): с учетом леммы 4.2 нужно лишь заметить, что в векторном пространстве с булевой алгеброй проекций (X, \mathbb{B}) дизъюнктивность \perp вводится правилом: $x \perp y$ в том и только в том случае, когда $\pi_{[x]} \wedge \pi_{[y]} = 0$. Если при этом X — векторная решетка, то \mathbb{B} — полная булева алгебра порядковых проекторов и мы приходим к понятию *векторной решетки с проекциями*. Таким образом, теорема 4.2 не покрывает теорему 3.2 ввиду предположения о том, что дизъюнктивность X является проекционной; в связи с этим возникает

Открытый вопрос 1. *Можно ли в теореме 4.2 ослабить условие проекционности так, чтобы ее частным случаем стала теорема 3.2?*

5.2. Для векторного пространства с дизъюнктивностью (X, \perp) существует (единственное с точностью до изоморфизма) *проекционное пополнение*, т. е. векторное пространство с проекционной дизъюнктивностью (\tilde{X}, \perp) такое, что выполнены условия: (а) X — подпространство \tilde{X} и $\perp = \perp \cap (X \times X)$; (б) X *псевдоплотно* в \tilde{X} , т. е. для любого $0 \neq \tilde{x} \in \tilde{X}$ существует $0 \neq x \in X$ такой, что $x \in \{\tilde{x}\}^{\perp\perp}$; (в) если подпространство $Y \subset \tilde{X}$ удовлетворяет условиям (а) и (б), то $Y = X$, см. [37, теорема 4]. По теореме 4.1 \tilde{X} можно превратить в векторную решетку с проекциями, в которой отношение дизъюнктивности совпадает с \perp . Однако может случиться так, что X нельзя превратить в векторную решетку так, чтобы дизъюнктивность в ней совпадала с \perp и, следовательно, не является подрешеткой \tilde{X} , см. [37, пример 2].

Открытый вопрос 2. *Каковы необходимые и достаточные условия, при которых векторное пространство с дизъюнктивностью можно превратить в (равномерно полную) векторную решетку с сохранением дизъюнктивности?*

5.3. В основе § 4 лежит следующая идея *переноса*. Если векторное пространство X линейно изоморфно равномерно полной архимедовой векторной решетке E , то в X возникает порядок, перенесенный из E а, следовательно, и индуцированная из E структура равномерно полной векторной решетки. Тем самым, в X возможны построения, характерные для равномерно полных векторных решеток, как, например, конструкция степени архимедовой векторной решетки (см. определение 3.3 и теорему 3.4), а также классы операторов, выделяемые какими-нибудь порядковыми свойствами (см. определение 3.2). При этом новый результат желательно формулировать в исходных терминах, т. е. на языке пространства с дизъюнктивностью, а не соответствующей векторной решетки.

Открытый вопрос 3. *Как определить равномерную полноту X , ограниченность множества в X , ограниченность оператора из X в Y (см. определение 4.4), не прибегая к структуре векторной решетки в X ?*

5.4. Указанная выше идея была высказана Г. Я. Лозановским в 1972 г. (см. [43, с. 8]) и реализована А. И. Векслером в [44] как *принцип переноса из банаховых решеток с порядково непрерывной нормой на банаховы циклические пространства*. Та же идея воплощена в работе [45] как *принцип переноса из банаховых решеток на банаховы пространства*, который позволил авторам получить некоторые новые результаты о факторизации операторов, действующих между банаховыми пространствами. Однако в [45] не затрагивается вопрос описания класса банаховых пространств, изоморфных (изометричных) банаховым решеткам.

Открытый вопрос 4. *Какова внутренняя характеристика банаховых пространств, изоморфных (функциональным) банаховым решеткам? Какие классы операторов между банаховыми пространствами соответствуют классам операторов, описываемым в порядково-метрических терминах?*

В общей постановке такая задача представляется трудно обозримой. Возможно, интересное описание можно получить в классе банаховых пространств, оснащенных отношением дизъюнктивности или булевой алгеброй проекторов, ср. [42, § 7.3] и [44].

Литература

1. Farkas Gy. A Fourier féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapja // *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*.—1898.—Vol. 16.—P. 361–364.
2. Farkas J. Theorie der einfachen Ungleichungen // *J. Reine Angew. Math.*—1902.—Vol. 124.—P. 1–2.
3. Kjeldsen T. H. Different motivations and goals in the historical development of the theory of systems of linear inequalities // *Arch. Hist. Exact Sci.*—2002.—Vol. 56, № 6.—P. 459–538. DOI: 10.1007/s004070200057.
4. Kjeldsen T. H. From Measuring tool to geometrical object: Minkowski’s development of the concept of convex bodies // *Arch. Hist. Exact Sci.*—2008.—Vol. 62, № 1.—P. 59–89. DOI: 10.1007/s00407-007-0014-6.
5. Dinh N., Jeyakumar V. Farkas’ lemma: three decades of generalizations for mathematical optimization // *Transactions in Operations Research*.—2014.—Vol. 22.—P. 1–22. DOI: 10.1007/s11750-014-0319-y.
6. Dinh N., Jeyakumar V. Rejoinder on: Farkas’ lemma: three decades of generalizations for mathematical optimization // *Transactions in Operations Research*.—2014.—Vol. 22.—P. 41–44.
7. Bartle D. A short algebraic proof of the Farkas lemma // *SIAM J. Optim.*—2008.—Vol. 19, № 1.—P. 234–239. DOI: 10.1137/06067438.
8. Bartle D. Separation theorems for convex polytopes and finitely-generated cones derived from theorems of the alternative // *Linear Algebra Appl.*—2012.—Vol. 436.—P. 3784–3789. DOI: 10.1016/j.laa.2011.12.009.
9. Черников С. Н. *Линейные неравенства*.—М.: Наука, 1968.—488 с.
10. Floudas C. A., Pardalos P. M. *Pardalos encyclopedia of Optimization* / Floudas C. A., and Pardalos P. M. (eds.).—Berlin–N. Y.: Springer, 2009.
11. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // *Докл. АН СССР*.—1963.—Т. 149, № 4.—С. 759–762.
12. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. *Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем*.—М.: Изд-во АН СССР, 1963.
13. Якубович В. А. *S-процедура в нелинейной теории регулирования* // *Вестн. Ленинградского гос. ун-та. Сер. 1.*—1971.—С. 62–77.
14. Pólik I., Terlaky T. A survey of the *S*-lemma // *SIAM Review*.—2007.—Vol. 49, № 3.—P. 371–418. DOI: 10.1137/S003614450444614X.
15. Yang M., Xia Y., Wang Sh. Unifying Farkas lemma and *S*-lemma: new theory and applications in nonquadratic nonconvex optimization // *J. Optim. Theory and Appl.*—2022.—Vol. 194, № 1.—P. 353–363. DOI: 10.48550/arXiv.2109.03001.
16. Huang Q. Y., Jeyakumar V., Li G., Huyen D. T. K. Convexifiable quadratic inequality systems: new minimax *S*-lemma and exact SOCPs for classes of distributionally robust optimization problems // *J. Glob. Optim.*—2025.—Vol. 92, № 3.—P. 535–568. DOI: 10.1007/s10898-025-01499-0.
17. Downey L. Farkas’ lemma and multilinear forms // *Missouri J. Math. Sci.*—2009.—Vol. 21, № 1.—P. 65–67. DOI: 10.35834/mjms/1316032682.

18. Aron R., García D., Pinasco D., Zalduendo I. Farkas's lemma in the bilinear setting and evaluation functionals // *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat.*—2023.—Vol. 117, article no. 6. DOI: 10.1007/s13398-022-01337-y.
19. Aron R., Downey L., Maestre M. Zero sets and linear dependence of multilinear forms // *Note Mat.*—2005.—Vol. 25, № 1.—P. 49–54. DOI: 10.1285/i15900932v25n1p49.
20. Фрадков А. Л. Теоремы двойственности в некоторых невыпуклых экстремальных задачах // *Сиб. мат. журн.*—1973.—Т. 14, № 2.—С. 357–383.
21. Kutateladze S. S. One general method in operator theory // *Владикавк. мат. журн.*—2005.—Т. 7, вып. 4.—С. 35–37.
22. Kusraev A. G. Around Kutateladze's stratification principle // *Siberian Math. J.*—2025.—Vol. 66, № 5.—P. 1285–1305. DOI: 10.1134/S0037446625050180.
23. Kutateladze S. S. Boolean models and simultaneous inequalities // *Владикавк. мат. журн.*—2009.—Т. 11, вып. 3.—С. 44–50.
24. Кутателадзе С. С. Новые подходы к лемме Фаркаша // *Сиб. мат. журн.*—2010.—Т. 51, № 1.—С. 98–109.
25. Kutateladze S. S. Boolean trends in linear inequalities // *J. Appl. Industrial Math.*—2010.—Vol. 4, № 3.—P. 340–348. DOI: 10.1134/S1990478910030051.
26. Кутателадзе С. С. Полиэдральный принцип Лагранжа // *Сиб. мат. журн.*—2011.—Т. 52, № 3.—С. 606–609.
27. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. *Positive Operators.*—Orlando: Academic Press, 2006.
28. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. *Упорядоченные векторные пространства.*—Новосибирск: Наука, 1978.
29. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. *Boolean Valued Analysis: Selected Topics.*—Vladikavkaz: Vladikavkaz Scientific Center Press, 2014.—400 с.—(Trends in Science: South of Russia. A Mathematical Monograph. Vol. 6.).
30. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. *Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения.*—М.: Наука, 2007.
31. Jeyakumar V., Li G. I. Farkas' lemma for separable sublinear inequalities without qualifications // *Optim. Letters.*—2009.—Vol. 3.—P. 537–545. DOI: 10.1007/s11590-009-0133-x.
32. Boulabiar K. Products in almost f -algebras // *Comment. Math. Univ. Carolinae.*—2000.—Vol. 41, № 4.—P. 747–759.
33. Boulabiar K., Buskes G. Vector lattice powers: f -algebras and functional calculus // *Comm. Algebra.*—2006.—Vol. 34, № 4.—P. 1435–1442. DOI: 10.1080/00927870500454885.
34. Bu Q., Buskes G. Polynomials on Banach lattices and positive tensor products // *J. Math. Anal. Appl.*—2012.—Vol. 388, № 2.—P. 845–862. DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.10.001.
35. Бондарев А. С. О множествах с дизъюнктивными элементами // *Изв. вузов. Матем.*—1972.—№ 9.—С. 10–16.
36. Векслер А. И. О структурной упорядочиваемости алгебр и колец // *Докл. АН СССР.*—1965.—Т. 164, № 2.—С. 259–262.
37. Векслер А. И. Линейные пространства с дизъюнктивными элементами и превращение их в векторные структуры // *Учен. зап. Ленинградск. пед. ин-та им. А. И. Герцена.*—1967.—Т. 328.—С. 19–43.—(Сер. «Вопросы современной математики»).
38. Биркгоф Г. *Теория решеток.*—М.: Наука, 1984.
39. Сорокина В. И. Понятие группы и линейного множества с дизъюнктивными элементами // *Уч. зап. Ленинградск. пед. инст. им. А. И. Герцена.*—1955.—Т. 103.—С. 179–208.
40. Пинскер А. Г. Структурная характеристика функциональных пространств // *Успехи мат. наук.*—1957.—Т. 12, № 1.—С. 226–229.
41. Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C. *Riesz Spaces I.*—Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1971.
42. Kusraev A. G. *Dominated Operators.*—Dordrecht: Kluwer, 2000.
43. Векслер А. И. Григорий Яковлевич Лозановский (к 70-летию со дня рождения) // *Владикавк. мат. журн.*—2007.—Т. 9, № 3.—С. 3–10.
44. Векслер А. И. Банаховы циклические пространства и банаховы структуры // *Докл. АН СССР.*—1973.—Т. 213, № 4.—С. 770–773.
45. Agud L., Calabuig J. M., Juan M. A., Sánchez-Pérez E. A. Banach lattice structures and concavifications in Banach spaces // *Mathematics.*—2020.—Vol. 8, № 1.—P. 127. DOI: 10.3390/math8010127.

Статья поступила 24 декабря 2025 г.

КУСРАЕВ АНАТОЛИЙ ГЕОРГИЕВИЧ

Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН,
руководитель организации

РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1;

Южный математический институт ВНЦ РАН,

руководитель организации, главный научный сотрудник отдела функций. анализа

РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: kusraev@smath.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1318-9602>

Vladikavkaz Mathematical Journal
2026, Volume 28, Issue 1, P. 82–97

FARKAS LEMMA FOR MULTILINEAR OPERATORS

Kusraev, A. G.^{1,2}

¹ North-Caucasus Center for Mathematical Research VSC RAS,

1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia;

² Southern Mathematical Institute of VSC RAS,

53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: kusraev@smath.ru

Abstract. Farkas's lemma is a classic result underlying the duality of linear programming, and it played a central role in the development of mathematical optimization. Numerous generalizations of this lemma are known, including various linear and nonlinear operator versions. However, Farkas's lemma is generally false for multilinear operators and even for bilinear forms in a finite-dimensional space. In this paper, we identify a class of orthoregular multilinear operators for which Farkas's lemma holds true. Consider vector lattices E and G with E uniformly complete and G universally complete. The main result is worded as follows.

Theorem 3.2. For n -linear orthoregular operators $S_1, \dots, S_N, S : E^n \rightarrow G$ the following are equivalent:

(1) The inequalities $\pi S_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \dots, \pi S_N(x_1, \dots, x_n) \leq 0$ imply $\pi S(x_1, \dots, x_n) \leq 0$ for all members $x_1, \dots, x_n \in E$ and for every band projection π in G .

(2) There exists positive orthomorphisms $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(G^u)$ such that $S = \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_N S_N$.

The proof relies on Kutateladze's stratification principle. A similar result is established when the domain of the operators under considerations is a vector space equipped with a disjointness relation satisfying certain additional conditions. Some open questions are also formulated.

Keywords: simultaneous linear inequalities, Farkas Lemma, vector lattice, Kutateladze's stratification principle, orthoregular multilinear operator, disjointness relation.

AMS Subject Classification: 46A16, 46B42, 46G25.

For citation: Kusraev, A. G. Farkas Lemma for Multilinear Operators, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 82–97 (in Russian). DOI: 10.46698/o9578-0948-6676-e.

References

1. Farkas, Gy. A Fourier féle Mechanikai Elv Alkalmazásának Algebrai Alapja, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 1898, vol. 16, pp. 361–364.
2. Farkas, J. Theorie der Einfachen Ungleichungen, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1902, vol. 124, pp. 1–2.
3. Kjeldsen, T. H. Different Motivations and Goals in the Historical Development of the Theory of Systems of Linear Inequalities, *Archive for History of Exact Sciences*, 2002, vol. 56, no. 6, pp. 459–538. DOI: 10.1007/s004070200057.
4. Kjeldsen, T. H. From Measuring Tool to Geometrical Object: Minkowski's Development of the Concept of Convex Bodies, *Archive for History of Exact Sciences*, 2008, vol. 62, no. 1, pp. 59–89. DOI: 10.1007/s00407-007-0014-6.

5. Dinh, N. and Jeyakumar, V. Farkas' Lemma: Three Decades of Generalizations for Mathematical Optimization, *Transactions in Operations Research*, 2014, vol. 22, pp. 1–22. DOI: 10.1007/s11750-014-0319-y.
6. Dinh, N. and Jeyakumar, V. Rejoinder on: Farkas' Lemma: Three Decades of Generalizations for Mathematical Optimization, *Transactions in Operations Research*, 2014, vol. 22, pp. 41–44.
7. Bartle, D. A Short Algebraic Proof of the Farkas Lemma, *SIAM Journal on Optimization*, 2008, vol. 19, no. 1, pp. 234–239. DOI: 10.1137/06067438.
8. Bartle, D. Separation Theorems for Convex Polytopes and Finitely-Generated Cones Derived from Theorems of the Alternative, *Linear Algebra and its Applications*, 2012, vol. 436, pp. 3784–3789. DOI: 10.1016/j.laa.2011.12.009.
9. Chernikov, S. N. *Linear Inequalities*, Moscow, Nauka, 1968, 488 p.
10. Floudas, C. A. and Pardalos, P. M. *Pardalosncyclopedia of Optimization* / Floudas C. A., and Pardalos P. M. (eds.), Berlin–New York, Springer, 2009.
11. Dubovitskii, A. Ya. and Milyutin, A. A. Extremum Problems with Certain Constraints, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1963, vol. 149, no. 4, pp. 759–762.
12. Aizerman, M. A. and Gantmacher, F. R. *Absolute Stability of Regulator Systems*, San Francisco, Holden-Day, 1964.
13. Yakubovich, V. A. The S -Procedure in Non-Linear Control Theory, *Vestnik Leningradskogo Universiteta, Seriya Matematika, Mekhanika, Astronomiya*, 1971, vol. 1 pp. 62–77.
14. Pólik, I. and Terlaky, T. A Survey of the S -Lemma, *SIAM Review*, 2007, vol. 49, no. 3, pp. 371–418. DOI: 10.1137/S003614450444614X.
15. Yang, M., Xia, Y. and Wang, Sh. Unifying Farkas Lemma and S -Lemma: New Theory and Applications in Nonquadratic Nonconvex Optimization, *J. Optim. Theory and Appl.*, 2022, vol. 194, no. 1, pp. 353–363. DOI: 10.48550/arXiv.2109.03001.
16. Huang, Q. Y., Jeyakumar, V., Li, G. and Huyen, D. T. K. Convexifiable Quadratic Inequality Systems: New Minimax S -Lemma and Exact SOCPs for Classes of Distributionally Robust Optimization Problems, *Journal of Global Optimization*, 2025, vol. 92, no. 3, pp. 535–568. DOI: 10.1007/s10898-025-01499-0.
17. Downey, L. Farkas' Lemma and Multilinear Forms, *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 2009, vol. 21, no. 1, pp. 65–67. DOI: 10.35834/mjms/1316032682.
18. Aron, R., García, D., Pinasco, D. and Zalduendo, I. Farkas's Lemma in the Bilinear Setting and Evaluation Functionals, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A, Matemáticas*, 2023, vol. 117, article no. 6. DOI: 10.1007/s13398-022-01337-y.
19. Aron, R., Downey, L. and Maestre, M. Zero Sets and Linear Dependence of Multilinear Forms, *Note di Matematica*, 2005, vol. 25, no. 1, pp. 49–54. DOI: 10.1285/i15900932v25n1p49.
20. Fradkov, A. L. Duality Theorems in Certain Nonconvex Extremal Problems, *Siberian Mathematical Journal*, 1973, vol. 14, no. 2, pp. 247–264. DOI: 10.1007/BF00967951.
21. Kutateladze, S. S. One General Method in Operator Theory, *Vladikavkaz Math. J.*, 2005, vol. 7, no. 4, pp. 35–37.
22. Kusraev A. G. Around Kutateladze's Stratification Principle, *Siberian Mathematical Journal*, 2025, vol. 66, no. 5, pp. 1285–1305. DOI: 10.1134/S0037446625050180.
23. Kutateladze, S. S. Boolean Models and Simultaneous Inequalities, *Vladikavkaz Math. J.*, 2009, vol. 11, no. 3, pp. 44–50.
24. Kutateladze, S. S. The Farkas Lemma Revisited, *Siberian Mathematical Journal*, 2010, vol. 51, no. 1, pp. 78–87. DOI: 10.1007/s11202-010-0010-y.
25. Kutateladze, S. S. Boolean Trends in Linear Inequalities, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2010, vol. 4, no. 3.—pp. 340–348. DOI: 10.1134/S1990478910030051.
26. Kutateladze, S. S. The Polyhedral Lagrange Principle, *Siberian Mathematical Journal*, 2011, vol. 52, no. 3, pp. 484–486.
27. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. *Positive Operators*, Orlando, Academic Press, 2006.
28. Akilov, G. P. and Kutateladze, S. S. *Uporyadochennye vektornyye prostranstva* [Ordered Vector Spaces], Novosibirsk, Nauka, 1978 (in Russian).
29. Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S. *Boolean Valued Analysis: Selected Topics, Trends in Science: South of Russia. A Mathematical Monograph*, vol. 6, Vladikavkaz, Vladikavkaz Scientific Center Press, 2014.
30. Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S. *Subdifferentials: Theory and Applications*, Dordrecht, Springer, 1995.
31. Jeyakumar, V. and Li, G. I. Farkas' Lemma for Separable Sublinear Inequalities Without Qualifications, *Optimization Letters*, 2009, vol. 3, pp. 537–545. DOI: 10.1007/s11590-009-0133-x.

32. Boulabiar, K. Products in Almost f -Algebras, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 2000, vol. 41, no. 4, pp. 747–759.
33. Boulabiar, K. and Buskes, G. Vector lattice Powers: f -Algebras and Functional Calculus, *Communications in Algebra*, 2006, vol. 34, no. 4, pp. 1435–1442. DOI: 10.1080/00927870500454885.
34. Bu, Q. and Buskes, G. Polynomials on Banach Lattices and Positive Tensor Products, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, vol. 388, no. 2, pp. 845–862. DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.10.001.
35. Bondarev, A. S. Sets with Disjoint Elements, *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1972, vol. 16, no. 9, pp. 8–14.
36. Veksler, A. I. On the Lattice Orderability of Algebras and Rings, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1965, vol. 164, no. 2, pp. 259–262 (in Russian).
37. Veksler, A. I. Linear Spaces with Disjoint Elements and their Conversion into Vector Structures, *Uchenye Zapiski Leningradskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Instituta imeni A. I. Gertsena*, 1967, vol. 328, pp. 19–43 (in Russian).
38. Birkhoff, G. *Lattice Theory*, 3rd ed., Providence, American Mathematical Society, Col Pub., 1967.
39. Sorokina, V. I. The Concept of a Group and a Linear Set with Disjoint Elements, *Uchenye Zapiski Leningradskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Instituta imeni A. I. Gertsena* [Scientific Notes of the Herzen Leningrad State Pedagogical Institute], 1955, vol. 103, pp. 179–208 (in Russian).
40. Pinsker, A. G. Structural Characterization of Functional Spaces, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1957, vol. 12, no. 1, pp. 226–229 (in Russian).
41. Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C. Riesz Spaces I, Amsterdam, North-Holland Publ. Comp., 1971.
42. Kusraev, A. G. Dominated Operators, Dordrecht, Kluwer, 2000.
43. Veksler, A. I. Banach Cyclic Spaces and Banach Structures, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1973, vol. 213, no. 4, pp. 770–773 (in Russian).
44. Veksler, A. I. Grigory Yakovlevich Lozanovsky (on the 70th anniversary of his birth), *Vladikavkaz Math. J.*, 2007, vol. 9, no. 3, pp. 3–10 (in Russian).
45. Agud, L., Calabuig, J. M., Juan, M. A. and Sánchez-Pérez, E. A. Banach Lattice Structures and Concavifications in Banach Spaces, *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 1, pp. 127. DOI: 10.3390/math8010127.

Received December 24, 2025

ANATOLY G. KUSRAEV

North-Caucasus Center for Mathematical Research of the VSC RAS,
1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia,
Head of Organization;

Southern Mathematical Institute of the VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Head of Organization; Chief Researcher
of the Department of Functional Analysis

E-mail: kusraev@smath.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1318-9602>