



ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

<http://www.vlmj.ru>

Том 27, выпуск 4

2025



VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

<http://www.vlmj.ru>

Volume 27, Issue 4

2025

Главный редактор

А. Г. КУСПАЕВ

Владикавказский научный центр РАН,
Владикавказ, Россия

Зам. главного редактора

Д. М. ПОЛЯКОВ

Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,
Владикавказ, Россия

Редакционная коллегия

А. В. АБАНИН

Южный федеральный университет,
Ростов-на-Дону, Россия

ДАНИЭЛЬ АНДРЕУЧЧИ

Римский университет Ла Сапиенца,
Рим, Италия

ХОСЕ БОНЕТ

Политехнический университет,
Валенсия, Испания

А. О. ВАТУЛЬЯН

Южный федеральный университет,
Ростов-на-Дону, Россия

С. К. ВОДОПЬЯНОВ

Институт математики Сибирского
отделения РАН, Новосибирск, Россия

Е. И. ГОРДОН

Университет Восточного Иллинойса,
Чарльстон, США

А. И. КОЖАНОВ

Институт математики Сибирского
отделения РАН, Новосибирск, Россия

В. А. КОЙБАЕВ

Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова,
Владикавказ, Россия

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В. Д. МАЗУРОВ

Институт математики Сибирского
отделения РАН, Новосибирск, Россия

В. Е. НАЗАЙКИНСКИЙ

Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Ю. Г. НИКОНОРОВ

Южный математический институт —
филиал ВЦ РАН, Владикавказ, Россия

О. В. ПОЧИНКА

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Н. Новгород, Россия

А. В. ПСХУ

Институт прикладной математики
и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия

В. Ж. САКБАЕВ

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

С. Г. САМКО

Университет Алгарве, Фаро, Португалия

В. А. СТУКОПИН

Московский физико-технический
институт, Москва, Россия

ФАМ ЧОНГ ТИЕН

Вьетнамский национальный
университет, Ханой, Вьетнам

В. Г. ТРОИЦКИЙ

Альбертский университет, Эдмонтон, Канада

С. М. УМАРХАДЖИЕВ

Комплексный научно-исследовательский институт
им. Х. И. Ибрагимова РАН, Грозный, Россия

ЛЕ ХАЙ ХОЙ

Ханойский университет науки и технологий,
Ханой, Вьетнам

Адрес редакции: 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1

Телефон: (8672) 23-00-54; E-mail: rio@smath.ru

Зав. редакцией: В. В. КИБИЗОВА

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год

Электронная версия: www.vlmj.ru

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций:

свид. ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.;

свид. ЭЛ № ФС77-70171 от 21 июня 2017 г.

© Владикавказский научный центр РАН, 2025

Editor-in-Chief

ANATOLY G. KUSRAEV
Vladikavkaz Scientific Centre
of the Russian Academy of Sciences,
Vladikavkaz, Russia

Associate Editor

DMITRY M. POLYAKOV
Southern Mathematical Institute of VSC RAS, Vladikavkaz, Russia

Editorial Board

ALEXANDER V. ABANIN
Southern Federal University,
Rostov-on-Don, Russia

DANIELE ANDREUCCI
Sapienza University of Rome, Rome, Italy

JOSÉ BONET
Universitat Politècnica de València, Valencia, Spain

EVGENY I. GORDON
Eastern Illinois University, Charleston, USA

LE HAI KHOI
University of Science and Technology, Hanoi, Vietnam

VLADIMIR A. KOĬBAEV
North Ossetian State University,
Vladikavkaz, Russia

ALEXANDER I. KOZHANOV
Sobolev Institute of Mathematics
of Siberian Branch of the RAS,
Novosibirsk, Russia

GEORGIĬ G. MAGARIL-IL'YAEV
Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia

VICTOR D. MAZUROV
Sobolev Institute of Mathematics
of Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

VLADIMIR E. NAZAIĬKINSKIĬ
Ishlinsky Institute for Problems
in Mechanics RAS, Moscow, Russia

YURIĬ NIKONOROV
Southern Mathematical Institute —
the Affiliate of VSC RAS, Vladikavkaz, Russia

OLGA V. POCHINKA
National Research University Higher School
of Economics, Nizhny Novgorod, Russia

ARSEN V. PSKHU
Institute of Applied Mathematics
and Automation KBSC RAS, Nalchik, Russia

VSEVOLOD ZH. SAKBAEV
Keldysh Institute of Applied Mathematics,
Moscow, Russia

STEFAN G. SAMKO
Universidade do Algarve, Faro, Portugal

VLADIMIR A. STUKOPIN,
Moscow Institute of Physics,
and Technology, Moscow, Russia

PHAM TRONG TIEN
Vietnam National University,
Hanoi, Vietnam

VLADIMIR G. TROITSKY
University of Alberta,
Edmonton, Canada

SALAUDIN M. UMARKHADZHIEV
Ibragimov Complex Institute of the RAS,
Grozny, Russia

ALEXANDER O. VATULYAN
Southern Federal University,
Rostov-on-Don, Russia

SERGEI K. VODOPYANOV
Sobolev Institute of Mathematics
of Siberian Branch of the RAS,
Novosibirsk, Russia

Editorial Office: 1 Williams St., Mikhailovskoe 363110,
the Republic of North Ossetia-Alania, Russia
Phone: (8672) 23-00-54; E-mail: rio@smath.ru

Managing Editor: VICTORIA V. KIBIZOVA

The journal was founded in 1999. It is published four times a year.
ELECTRONIC VERSION: www.vlmj.ru

Registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom,
Information Technologies and Mass Communications:
ПН № ФС77-70008 dated May 31, 2017; ЭЛ № ФС77-70171 dated June 21, 2017.

© Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, 2025

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 27, выпуск 4

октябрь–декабрь, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Гетман В. А., Долгих Т. Ф., Жуков М. Ю. Асимптотика решения краевой задачи о поперечной нелинейной электромагнитной волне	5
Dahmane A. and Toufik T. Lattice Sequence Spaces and Summing Mappings	21
Исаев К. П., Фазуллин З. Ю., Юлмухаметов Р. С. Оценка верхней плотности показателей системы Габо́ра	38
Karaca B. Boundary Value Problems for Inhomogeneous Polyanalytic Equations in a Triangle	46
Коровина М. В., Смирнов В. Ю. Применение метода повторного квантования к одному классу нефуксовых уравнений	61
Костин А. В. Теоремы типа Кейси и преобразования Лагерра	72
Kurakin L. G. and Kurdoglyan A. V. Classification of Dynamical Systems Near a Cosymmetric Equilibrium	86
Nikonorov Yu. G. and Oskorbin D. N. One Application of Ptolemy's Theorem	103
Раджабова Л. Н., Раджабов Н. К теории переопределенных систем интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями	109
Remizov I. D. Chernoff Approximations of the Solution of Linear ODE with Variable Coefficients	124
Smirnov M. A. The Effect of Processes Leading to Cell Death on the Dynamic Regimes of the Tissue Formation Model	136
Uyar A. What Remains the Same in Order Convergence Types	148

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

CONTENT

Getman, V. A., Dolgikh, T. F. and Zhukov, M. Yu. Asymptotics of the Solution of a Boundary Value Problem for Transverse Nonlinear Electromagnetic Wave	5
Dahmane, A. and Toufik, T. Lattice Sequence Spaces and Summing Mappings	21
Isaev, K. P., Fazullin, Z. Yu. and Yulmukhametov, R. S. Estimate of the Upper Density of the Gabor System	38
Karaca, B. Boundary Value Problems for Inhomogeneous Polyanalytic Equations in a Triangle	46
Korovina, M. V. and Smirnov, V. Yu. Application of the Repeated Quantization Method to a Class of Non-Fuchsian Equations	61
Kostin, A. V. Casey Type Theorem and Laguerre Transformations	72
Kurakin, L. G. and Kurdoglyan, A. V. Classification of Dynamical Systems Near a Cosymmetric Equilibrium	86
Nikonorov, Yu. G. and Oskorbin, D. N. One Application of Ptolemy's Theorem	103
Rajabova, L. N. and Radjabov, N. On the Theory of Overdetermined Systems of Volterra-Type Integral Equations with Special Lines	109
Remizov, I. D. Chernoff Approximations of the Solution of Linear ODE with Variable Coefficients	124
Smirnov, M. A. The Effect of Processes Leading to Cell Death on the Dynamic Regimes of the Tissue Formation Model	136
Uyar, A. What Remains the Same in Order Convergence Types	148

УДК 514.743.48, 517.956.35, 517.955.8
DOI 10.46698/e7486-7095-0322-1

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ПОПЕРЕЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЕ

В. А. Гетман¹, Т. Ф. Долгих¹, М. Ю. Жуков^{1,2}

¹ Южный федеральный университет,

Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

² Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,

Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: vagetman@sfedu.ru, dolgikh@sfedu.ru, myuzhukov@mail.ru

Аннотация. Построено асимптотическое решение краевой задачи для двух квазилинейных уравнений гиперболического типа, описывающих поведение поперечной электромагнитной волны (ТЕМ-волны) в нелинейной сплошной среде, когда зависимость поляризации P от напряженности электрического поля E (физическая нелинейность) имеет вид $P = \varepsilon_0(\chi_1 E + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3)$, где χ_1 , χ_2 , χ_3 — диэлектрические восприимчивости, ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума. Главный член асимптотики построен в двух случаях: (i) $\chi_1 = O(1)$, $\chi_2 \rightarrow 0$, $\chi_3 = 0$ (анизотропная сплошная среда), (ii) $\chi_1 = O(1)$, $\chi_2 = 0$, $\chi_3 \rightarrow 0$ (изотропная сплошная среда), хотя один из использованных методов построения асимптотики без труда переносится и на случай (iii) $\chi_1 = O(1)$, $\chi_2 \rightarrow 0$, $\chi_3 \rightarrow 0$. В случае (i) асимптотика при $\chi_2 \rightarrow 0$ строится двумя способами. В первом варианте используется непосредственное разложение в ряд по малому параметру точного неявного решения краевой задачи с последующим численным построением явного решения на линиях уровня неявного решения (главного члена асимптотики неявного решения). Во втором варианте разложения в ряды по параметру проводятся на всех этапах, предшествующих построению точного неявного решения, что приводит к неявному решению, отличному от точного, но главный член асимптотики нового и прежнего решения совпадают. Эквивалентность двух указанных вариантов далеко неочевидна, в частности, точное неявное решение содержит гипергеометрическую функцию Гаусса, а асимптотическое неявное решение — функцию Бесселя. В случае (ii) асимптотику при $\chi_3 \rightarrow 0$ возможно построить лишь вторым способом, проводя разложение по параметру на всех этапах построения неявного решения. Первый вариант конструирования асимптотики неприменим, ввиду того, что точное неявное решение не удастся построить. Для построения решения краевой задачи о поведении ТЕМ-волн, как точного, так и асимптотического, использован метод годографа на основе закона сохранения для системы двух квазилинейных гиперболических уравнений типа $1 + 1$ в частных производных первого порядка. Метод позволяет преобразовать систему квазилинейных уравнений в одно линейное уравнение в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. Эффективность метода зависит от наличия явных соотношений, связывающих исходные переменные с инвариантами Римана, а также от наличия явного выражения для функции Римана — Грина линейного дифференциального уравнения. В случаях (i), (ii) указанные условия выполняются. Представленные результаты позволяют детально проследить эволюцию ТЕМ-волн в нелинейных средах, например, коаксиальных волноводах или в распределенных идеальных линиях передач, в частности, определить момент времени (и пространственную координату) при котором возможно возникновение ударных электромагнитных волн.

Ключевые слова: системы квазилинейных гиперболических уравнений, инварианты Римана, функция Римана — Грина, метод годографа, асимптотические разложения.

AMS Subject Classification: 35F15, 35L40, 41A58.

Образец цитирования: Гетман В. А., Долгих Т. Ф., Жуков М. Ю. Асимптотика решения краевой задачи о поперечной нелинейной электромагнитной волне // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 4.—С. 5–20. DOI: 10.46698/e7486-7095-0322-1.

1. Введение

Построен главный член асимптотики решения краевой задачи об эволюции нелинейной поперечной электромагнитной волны (ТЕМ-волны). В представленной работе рассмотрены два случая: (i) $P = \varepsilon_0(\chi_1 E + \chi_2 E^2)$ (анизотропная среда) и (ii) $P = \varepsilon_0(\chi_1 E + \chi_3 E^3)$ (изотропная среда). Выбор указанных определяющих соотношений не является случайным. Напомним, что отклик любого диэлектрика (в волоконном световоде) на световое воздействие становится нелинейным в сильном электромагнитном поле. Для centrosимметричных оптических кристаллов (кристаллов, обладающих центром симметрии — инверсией относительно центра симметрии) вытекает, что при изменении направления электрического поля $E \rightarrow -E$ поляризация также изменяет знак $P \rightarrow -P$ (случай (ii)). Однако при больших напряженностях электрического поля оптический материал теряет centrosимметричность ввиду волновых нелинейных (трехфотонных) взаимодействий, и основной вклад в его нелинейную поляризованность вносят квадратичные члены (случай (i)). Укажем также, что при рассмотрении задач нелинейной оптики исторически принято оперировать с поляризацией среды P , а не с электрической индукцией D , которая связана с P соотношением $D = \varepsilon_0 E + P$. Более естественно, при использовании уравнений Максвелла использовать именно электрическую индукцию D взамен поляризации P . Подробнее о связи между P и D , с оценкой величин параметров χ_1 , χ_2 , χ_3 и других, см. текст после формулы (40).

Необходимость в построении асимптотики (соответственно при $\chi_1 = O(1)$, $\chi_2 \rightarrow 0$ и/или $\chi_1 = O(1)$, $\chi_3 \rightarrow 0$), помимо чисто математического интереса, возникает, по крайней мере, по двум причинам. Во-первых, асимптотическое решение (главные члены) более «обозримо», чем точное решение, и позволяет легко проводить анализ решения и его свойств. При этом, как показали результаты сравнения, в некоторой области параметров асимптотическое решение мало отличается от точного. Во-вторых, и это более важно, если в случае (i) можно построить точное неявное решение, то в случае (ii) точное решение отсутствует (по крайней мере, его не удастся построить) и можно указать лишь главные члены асимптотики.

Для конструирования решения, как точного, так и асимптотического, используется метод годографа на основе закона сохранения (см., например, [1, 2]). Это позволяет систему двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, записанных в инвариантах Римана, трансформировать к одному линейному уравнению в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. Именно такое линейное уравнение играет ключевую роль в эффективности применяемого метода. Если удастся указать явную форму решения линейного уравнения, например, построив функцию Римана — Грина, то неявное решение исходной задачи также представимо в виде явного соотношения. Немаловажную роль играет и наличие явных соотношений, взаимосвязывающих исходные переменные и инварианты Римана. Несмотря на то что для двух квазилинейных уравнений инварианты Римана всегда существуют, далеко не всегда удается построить явные формулы. Это связано как с построением явных решений обыкновенных дифференциальных уравнений, так и с построением обратных функций. В случае (i), когда указанный способ построения решения осуществим, имеется точное неявное решение, и процедура построения главных членов асимптотики сводится к простому разложению в ряд по малому параметру. Напротив, в случае (ii) не удастся указать явные соотношения между исходными переменными и инвариантами Римана и, в связи с этим, не удастся даже построить в явном виде соответствующее линейное уравнение метода годографа. Для построения главного члена асимптотического решения в слу-

чае (ii) разложение в ряды по малому параметру проводится на всех этапах метода — при построении взаимосвязи между исходными переменными и инвариантами Римана, при построении зависимости характеристических направлений от инвариантов Римана, при вычислении коэффициентов линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. В конечном итоге, это позволяет указать явное решение соответствующего линейного уравнения (функцию Римана — Грина) и окончательно получить главный член асимптотического разложения решения. Аналогичная процедура проведена и в случае (i), что, как показала проверка, приводит к совпадению с результатами, полученными непосредственным разложением в ряд по параметру, имеющегося в случае (i), точного решения. Отметим, что это далеко нетривиальный результат. В частности, в случае (i) соотношение для функции Римана — Грина в точном решении содержит гипергеометрическую функцию Гаусса, тогда как для асимптотического варианта соответствующая функции Римана — Грина выражается через функцию Бесселя.

Представленные результаты позволяют детально проследить, разумеется при малых значениях параметров, эволюцию нелинейных поперечных электромагнитных волн в зависимости от краевых или начальных данных (принципиальное различие между краевой и начальной задачей для квазилинейных уравнений в частных производных отсутствует [3, § 6, с. 43–47]). Несмотря на то, что параметр (диэлектрическая восприимчивость χ_2 или χ_3) считается малым (в пределе параметр равен нулю, что соответствует обычной линейной волне), все типичные для нелинейных волн эффекты — искажение профиля напряженностей электрического и магнитного полей, возможность возникновения ударных электромагнитных волн (см., например, [4–8]) и т. п., сохраняются. Кроме этого, возможно вычисление момента времени опрокидывания решения (возникновение ударной волны), что и продемонстрировано примером для некоторого начального распределения.

Следует также сказать, что для построения линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, которое, в конечном итоге, определяет характер поведения решения, вовсе не обязательно использовать метод годографа на основе закона сохранения [1, 2]. Можно применять и другие методы годографа, например, классический вариант (см., например, [3, с. 33, 34]) или обобщенный метод годографа (см., например, [9]), эквивалентность которых показана в [10].

2. Основные уравнения и инварианты Римана

Для описания поведения поперечной электромагнитной волны (ТЕМ-волны) используем уравнения Максвелла в среде при отсутствии электрических токов и свободных зарядов (см., например, [11, гл. IX])

$$\mathbf{D}_t - \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B}_t + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

с определяющими соотношениями

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}). \quad (2)$$

Здесь \mathbf{E} , \mathbf{H} — напряженности электрического и магнитного полей, \mathbf{D} , \mathbf{B} — электрическая и магнитная индукции.

Для поперечной электромагнитной волны решение (1), (2) ищем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= (D(z, t), 0, 0), & \mathbf{B} &= (0, B(z, t), 0), \\ \mathbf{E} &= (E(z, t), 0, 0), & \mathbf{H} &= (0, H(z, t), 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь z — направление распространения плоской волны, E, D, H, B — соответствующие компоненты векторных полей $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$.

В случае (3) уравнения (1) с определяющими соотношениями (2) представляют собой систему двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка

$$D_t(E) + H_z = 0, \quad B_t(H) + E_z = 0, \quad (4)$$

которые дополняем краевыми условиями

$$E|_{z=0} = E_0(t), \quad H|_{z=0} = H_0(t), \quad (5)$$

где $E_0(t), H_0(t)$ — известные функции.

Ввиду того, что различие между начальной и краевой задачами для квазилинейных гиперболических уравнений отсутствует (обе задачи принято называть задачей Коши, см., например, [3, § 6, с. 43–47]), произведем замены

$$t = X, \quad z = T, \quad (6)$$

приводя (4), (5) к «привычному» виду

$$H_T + D_E(E)E_X = 0, \quad E_T + B_H(H)H_X = 0, \quad (7)$$

$$E|_{T=0} = E_0(X), \quad H|_{T=0} = H_0(X). \quad (8)$$

Здесь T — «время», X — «координата», D_E, B_H — производные функций D, B .

Задача (7), (8) записывается в инвариантах Римана (см. [12], а также [3, § 3, с. 27–31])

$$R_T^1 + \lambda^1 R_X^1 = 0, \quad R_T^2 + \lambda^2 R_X^2 = 0, \quad (9)$$

$$R^1|_{T=0} = R_0^1(X), \quad R^2|_{T=0} = R_0^2(X). \quad (10)$$

Здесь $R^1(X, T), R^2(X, T), R_0^1(X), R_0^2(X)$ — инварианты Римана и их начальные значения при $T = 0$, $\lambda^1(R^1, R^2), \lambda^2(R^1, R^2)$ — характеристические направления.

Функции λ^1, λ^2 и связь исходных переменных E, H с инвариантами Римана R^1, R^2 определяются соотношениями

$$\lambda^1 = -\sqrt{D_E(E)B_H(H)}, \quad \lambda^2 = \sqrt{D_E(E)B_H(H)}, \quad (11)$$

$$R^1 = F(H) - G(E), \quad R^2 = F(H) + G(E), \quad (12)$$

$$F(H) = \int \sqrt{B_H(H)} dH, \quad G(E) = \int \sqrt{D_E(E)} dE, \quad (13)$$

где F, G — вспомогательные функции.

Далее рассматриваем два вида определяющих соотношений.

(i) Анизотропная сплошная среда

$$D(E) = E + \frac{1}{2}\eta E^2, \quad B(H) = H. \quad (14)$$

(ii) Изотропная сплошная среда

$$D(E) = E + \frac{1}{3}\eta E^3, \quad B(H) = H. \quad (15)$$

Обратим внимание на то, что соотношения (1)–(3) справедливы как для размерных, так и безразмерных величин, в то время как (14), (15) записаны для безразмерных величин. Связь между размерными и безразмерными величинами, позволяющая сохранять в задаче лишь один параметр η , указана далее в разделе с демонстрацией результатов для конкретного примера (см. соотношения (40)).

3. Точное решение в случае соотношений (14)

Детально способ построения решения задачи (9)–(14) описан в [1, 2, 10, 13–20]. Здесь ограничимся лишь изложением основных результатов и соотношений.

Решение задачи (9)–(14) на линии уровня $T_* = T(a, b)$ точного неявного решения $T(a, b)$ имеет вид

$$\begin{aligned} R^1(X, T_*) &= R_0^1(b(\tau)), & R^2(X, T_*) &= R_0^2(a(\tau)), \\ T_* &= T(a_*, b_*), & X &= Y(\tau). \end{aligned} \quad (16)$$

Считается, что линия уровня параметризована при помощи параметра τ , т. е. $T_* = T(a(\tau), b(\tau))$, и функции $a(\tau)$, $b(\tau)$, $Y(\tau)$ определяются путем интегрирования (численного) задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} a_\tau(\tau) &= -T_b(a(\tau), b(\tau)), \\ b_\tau(\tau) &= T_a(a(\tau), b(\tau)), \\ Y_\tau(\tau) &= J(a(\tau), b(\tau)), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} a|_{\tau=0} &= a_*, & b|_{\tau=0} &= b_*, & Y|_{\tau=0} &= Y_*, \\ J(a, b) &= (\lambda^2(r^1, r^2) - \lambda^1(r^1, r^2)) \Big|_{\substack{r^1=r^1(b) \\ r^2=r^2(a)}} T_a T_b, \\ r^1(b) &= R_0^1(b), & r^2(a) &= R_0^2(a). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь a_* , b_* — некоторая точка на линии уровня $T_* = T(a_*, b_*)$, Y_* — координата X , соответствующая параметру $\tau = 0$, $J(a, b)$ — якобиан преобразования $(a, b) \rightleftharpoons (X, T)$. Подробно способ конструирования задачи (17), (18) и определения начальных значений a_* , b_* , Y_* описан в [1, с. 48–51].

Функция $T(a, b)$ — это неявное двухпараметрическое решение задачи (9)–(13), которое имеет вид

$$T(a, b) = \frac{1}{2} \int_a^b \varphi(R_0^1(\tau), R_0^2(\tau) | r^1(b), r^2(a)) d\tau, \quad (19)$$

$$\varphi(R^1, R^2 | r^1, r^2) = \frac{2\Phi(R^1, R^2 | r^1, r^2)}{\lambda^2(r^1, r^2) - \lambda^1(r^1, r^2)}. \quad (20)$$

Здесь функция $\Phi(R^1, R^2 | r^1, r^2)$ — функция Римана — Грина уравнения

$$\varphi_{R^1 R^2} + A(R^1, R^2) \varphi_{R^1} + B(R^1, R^2) \varphi_{R^2} = 0, \quad (21)$$

$$A = \frac{\lambda_{R^2}^1}{\lambda^1 - \lambda^2}, \quad B = -\frac{\lambda_{R^1}^2}{\lambda^1 - \lambda^2}. \quad (22)$$

По переменным r^1, r^2 функция $\Phi(R^1, R^2 | r^1, r^2)$ удовлетворяет уравнению, сопряженному к (21), а по переменным R^1, R^2 — уравнению (21) и дополнительным условиям

$$(\psi - \lambda^1 \varphi) \Big|_{R^1=r^1} = 1, \quad (\psi - \lambda^2 \varphi) \Big|_{R^2=r^2} = -1, \quad (23)$$

где ψ удовлетворяет уравнениям

$$\psi_{R^1} = \lambda^1 \varphi_{R^1}, \quad \psi_{R^2} = \lambda^2 \varphi_{R^2}. \quad (24)$$

Собственно говоря, уравнение (21) является условием совместности (разрешимости) уравнений (24).

Анализ приведенных соотношений (16)–(24) показывает, что ключевую роль играют формулы (19), (20) для функции $T(a, b)$, которая определяется решением задачи (21)–(24) или построением функции Римана — Грина уравнения (21). Требуется конкретизировать уравнение (21), вычислив коэффициенты (22). В свою очередь, при помощи (11)–(13) следует определить зависимость характеристических направлений λ^1, λ^2 от инвариантов Римана R^1, R^2 . Заметим, что формулы (11), (12) задают зависимости λ^1, λ^2 от E и H , но не инвариантов Римана. Для вывода зависимостей $\lambda^1(R^1, R^2), \lambda^2(R^1, R^2)$ необходимо построение явных функций, обратных к $F(H), G(E)$, т. е. $H = H(R^1, R^2), E = E(R^1, R^2)$, что не всегда возможно. В частности, в случае определяющих соотношений (14) это удастся сделать, но для (15) явных формул вида $H = H(R^1, R^2), E = E(R^1, R^2)$ не существует.

Задачу (21)–(24) можно заменить задачей для определения функций Римана — Грина $\Phi(R^1, R^2 | r^1, r^2)$ уравнения (21) или ввиду симметрии относительно замен $(R^1, R^2) \Leftrightarrow (r^1, r^2)$ (см., например, [21, гл. V, § 5, с. 451, 452]) задачей

$$\begin{aligned} \Phi_{R^1 R^2} + A(R^1, R^2)\Phi_{R^1} + B(R^1, R^2)\Phi_{R^2} &= 0, \\ (\Phi_{R^2} + A\Phi)|_{R^1=r^1} &= 0, \quad (\Phi_{R^1} + B\Phi)|_{R^2=r^2} = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\Phi(r^1, r^2 | r^1, r^2) = 1. \quad (26)$$

которая, как правило, легче решается, чем (21)–(24).

Соотношения (11)–(13), (22) в случае (14) принимают вид

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= -(1 + \eta E)^{1/2}, \quad \lambda^2 = (1 + \eta E)^{1/2}, \\ \lambda^2 &= -\lambda^1 = \left(1 + \frac{3}{4}(R^2 - R^1)\eta\right)^{1/3}, \\ R^1 &= H - G, \quad R^2 = H + G, \\ G &= \frac{2}{3\eta}((1 + \eta E)^{3/2} - 1), \quad H = \frac{1}{2}(R^1 + R^2), \\ E &= \frac{1}{\eta} \left(1 + \frac{3\eta(R^2 - R^1)}{4}\right)^{2/3} - \frac{1}{\eta}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\lambda_{R^2}^1}{\lambda^1 - \lambda^2} = \frac{\eta}{8 + 6(R^2 - R^1)\eta}, \\ B &= -\frac{\lambda_{R^1}^2}{\lambda^1 - \lambda^2} = -\frac{\eta}{8 + 6(R^2 - R^1)\eta}. \end{aligned} \quad (28)$$

Функция Римана — Грина $\Phi(R^1, R^2 | r^1, r^2)$ уравнения (21) (или по переменным R^1, R^2 решение задачи (21)–(23)) в случае коэффициентов, определяемых (28), имеет вид

$$\Phi(R^1, R^2 | r^1, r^2) = \frac{(r+s)^\gamma}{(R+S)^\gamma} {}_2F_1(1-\gamma, \gamma; 1, -z_0), \quad (29)$$

$$z_0 = \frac{(R-r)(S-s)}{(R+S)(r+s)}, \quad \gamma = \frac{1}{6},$$

$$R = 2 - 3\eta R^1, \quad S = 2 + 3\eta R^2, \quad r = 2 - 3\eta r^1, \quad s = 2 + 3\eta r^2.$$

Кажущаяся громоздкость соотношений (16)–(29) компенсируется тем, что, в некотором смысле, построенное решение является точным. Погрешность возникает лишь на этапе численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (17), (18) и вычисления интегралов (19). При этом никакие аппроксимации исходной задачи (7), (8) или (9), (10), типичные для метода конечных разностей, методов конечных элементов и конечных объемов не используются.

4. Главный член асимптотики в случае (14)

При наличии точного решения построение асимптотики (не только главного члена) не представляет трудностей — следует использовать разложение в ряд по параметру $\eta \rightarrow 0$, считая, что $E = O(1)$, $H = O(1)$. Такое разложение достаточно указать лишь для функции (20), которая требуется для вычисления $T(a, b)$ по формуле (19). Заметим, что если имеется точное решение, то построение асимптотики может потребоваться по двум причинам. Во-первых, это приводит к упрощению вычислений и анализа результатов. Во-вторых, появляется возможность сравнения различных методов построения асимптотического решения.

Приведем лишь окончательный результат, опуская громоздкие выкладки:

$$\begin{aligned} \varphi(R^1, R^2 | r^1, r^2) &= 1 - \frac{\eta(r^2 - r^1)}{8} - \frac{\eta(R^2 - R^1)}{8} + O(\eta^2), \\ T(a, b) &= (b - a) \left(\frac{1}{2} - \frac{\eta(r^2(a) - r^1(b))}{16} \right) - \frac{\eta}{16} \int_a^b (R_0^2(\tau) - R_0^1(\tau)) d\tau + O(\eta^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Функцию $T(a, b)$, используя (27), можно записать и в терминах E_0 , H_0 (см. (5) или (8)). В частности,

$$\begin{aligned} R_0^2(\tau) - R_0^1(\tau) &= 2E_0(\tau) + O(\eta), \\ r^2(a) - r^1(b) &= H_0(a) - H_0(b) + E_0(a) + E_0(b) + O(\eta). \end{aligned}$$

5. Построение асимптотики в общем случае

В случае определяющих соотношений (15), как и во многих других, точного решения задачи (9), (10) построить не удастся. Однако главный член асимптотики решения можно построить, проводя процедуру разложения в ряды по малому параметру на всех этапах метода годографа при получении соотношений (11)–(13), (19)–(26).

Как уже говорилось, основную роль в построении решения в форме (16)–(20) играет функция $\Phi(R^1, R^2 | r^1, r^2)$, т. е. решение задачи (25)–(26) с конкретными коэффициентами $A(R^1, R^2)$, $B(R^1, R^2)$.

Предположим, что

$$\begin{aligned} A(R^1, R^2) &= \eta A^1(R^1, R^2) + \eta^2 A^2(R^1, R^2) + \dots, \quad \eta \rightarrow 0, \\ B(R^1, R^2) &= \eta B^1(R^1, R^2) + \eta^2 B^2(R^1, R^2) + \dots, \quad \eta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Далее показано, что это справедливо, по крайней мере, в случае определяющих соотношений (14), (15).

Решение задачи (25)–(26) ищем в виде

$$\Phi(R^1, R^2 | r^1, r^2) = \Phi^0(R^1, R^2 | r^1, r^2) + \eta\Phi^1(R^1, R^2 | r^1, r^2) + \dots \quad (32)$$

Подставляя (32) в задачу (25)–(26), приравнивая члены при одинаковых степенях η , с учетом (31) получим серию задач для определения Φ^0 , Φ^1 и т. д.

Для $\Phi^0(R^1, R^2 | r^1, r^2)$ имеем

$$\Phi_{R^1 R^2}^0 = 0, \quad \Phi_{R^2}^0 |_{R^1=r^1} = 0, \quad \Phi_{R^1}^0 |_{R^2=r^2} = 0.$$

Очевидно, что

$$\Phi^0(r^1, r^2 | r^1, r^2) = 1. \quad (33)$$

Для $\Phi^1(R^1, R^2 | r^1, r^2)$ с учетом (33) получим

$$\begin{aligned} \Phi_{R^1 R^2}^1(R^1, R^2 | r^1, r^2) &= 0, \\ \Phi_{R^2}^1(r^1, R^2 | r^1, r^2) + A^1(r^1, R^2) &= 0, \\ \Phi_{R^1}^1(R^1, r^2 | r^1, r^2) + B^1(R^1, r^2) &= 0, \\ \Phi^1(r^1, r^2 | r^1, r^2) &= 0. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что

$$\Phi^1(R^1, R^2 | r^1, r^2) = - \int_{r^2}^{R^2} A^1(r^1, \tau) d\tau - \int_{r^1}^{R^1} B^1(\tau, r^2) d\tau. \quad (34)$$

Таким образом, если ограничиваться главными членами асимптотики, то достаточно указать $A^1(R^1, R^2)$, $B^1(R^1, R^2)$, используя (11)–(13), (22).

Например, в случае определяющих соотношений (14) с учетом (27), (28) имеем

$$\lambda^2 = -\lambda^1 = 1 + \frac{\eta(R^2 - R^1)\eta}{4} + O(\eta^2), \quad (35)$$

$$A = \frac{\eta}{8} + O(\eta^2), \quad A^1 = \frac{1}{8}, \quad B = -\frac{\eta}{8} + O(\eta^2), \quad B^1 = -\frac{1}{8}. \quad (36)$$

Осуществляя подстановку (36) в (34), а затем используя (35), (20), имеем для $\varphi^1(r^1, r^2 | r^1, r^2)$ ранее полученную при помощи точного решения формулу (30), что косвенно указывает на корректность подхода к построению асимптотики.

В случае определяющих соотношений (14) возможен некоторый «промежуточный» вариант. Дело в том, что если пренебречь членами порядка $O(\eta^2)$ в коэффициентах, то уравнение (21) (или (25)) принимает вид

$$\varphi_{R^1 R^2} + \frac{\eta}{8} \varphi_{R^1} - \frac{\eta}{8} \varphi_{R^2} = 0,$$

для которого функция Римана — Грина хорошо известна (см., например, [22–26], [27, с. 116–124]). Это позволяет не проводить дальнейшие разложения в ряд по параметру η , ограничившись таким разложением лишь для коэффициентов A , B . Этот прием, в частности, был успешно использован в [28] для построения задачи о течении идеальной жидкости по внешней поверхности цилиндра.

Вид «промежуточного» варианта асимптотики решения

$$\varphi(R^1, R^2 | r^1, r^2) = \frac{4 \exp\left(\frac{\eta(r^2 - r^1) - \eta(R^2 - R^1)}{8}\right)}{4 + \eta(r^2 - r^1)} J_0(z_5),$$

$$z_5 = \frac{\eta}{4} ((R^1 - r^1)(R^2 - r^2))^{1/2},$$

где J_0 — функция Бесселя.

6. Главный член асимптотики в случае (15)

В случае определяющих соотношений (15) точное решение построить не удастся. Разыскивая главный член асимптотического решения, удобнее рассматривать более общий вариант определяющих соотношений

$$D(E) = \left(E + \frac{1}{m} \eta E^m\right), \quad B(H) = H, \quad (37)$$

который, в частности, объединяет (14), (15).

Нетрудно показать, что в случае (37) из (11)–(13), (22) следует (сравни с (27), (28) и при $m = 2$ с (35), (36))

$$\lambda^2 = -\lambda^1 = 1 + 2^{-m} \eta (R^2 - R^1)^{m-1} + O(\eta^2),$$

$$R^1 = H - E + O(\eta), \quad R^2 = H + G + O(\eta),$$

$$E = \frac{1}{2} (R^2 - R^1) + O(\eta), \quad H = \frac{1}{2} (R^2 + R^1) + O(\eta),$$

$$A(R^1, R^2) = 2^{-m-1} \eta (m-1) (R^2 - R^1)^{m-2} + O(\eta^2),$$

$$B(R^1, R^2) = -2^{-m-1} \eta (m-1) (R^2 - R^1)^{m-2} + O(\eta^2).$$

Окончательно (сравни при $m = 2$ с (30))

$$\varphi(R^1, R^2 | r^1, r^2) = 1 - \eta \theta_m(R^1, R^2 | r^1, r^2).$$

$$\theta_m(R^1, R^2 | r^1, r^2) = 2^{-m-1} ((R^2 - r^1)^{m-1} + (r^2 - R^1)^{m-1}) + O(\eta^2).$$

Здесь $\theta_m(R^1, R^2 | r^1, r^2)$ — вспомогательное обозначение.

Отметим, что вместо (37), очевидно, можно рассматривать определяющие соотношения, содержащие два параметра

$$D(E) = \left(E + \frac{1}{2} \eta_2 E^2 + \frac{1}{3} \eta_3 E^3\right), \quad B(H) = H.$$

В этом случае главный член асимптотики имеет вид

$$\varphi(R^1, R^2 | r^1, r^2) = 1 - \eta_2 \theta_2(R^1, R^2 | r^1, r^2) - \eta_3 \theta_3(R^1, R^2 | r^1, r^2).$$

7. Пример решения в случае (14)

В случае определяющих соотношений (14) приведем результаты сравнения одной из важных характеристик — момента опрокидывания T_0 решения (образования ударной волны), вычисленного при помощи точного и асимптотического решений. Момент T_0 определяется как (подробнее см. [19, формулы (5.8), (5.9)])

$$T_0 = T(a_0, b_0).$$

Здесь (a_0, b_0) — точка на линии уровня T_0 , в которой возникает ударная волна, определяемая решением системы уравнений

$$J(a_0, b_0) = 0, \quad T_{aa}(a_0, b_0)T_{bb}(a_0, b_0) = 0. \quad (38)$$

Для «начальных» данных

$$E_0(X) = \frac{h(X)}{1+X^4} = \frac{h(t)}{1+t^4}, \quad H_0(X) = 0, \quad \eta = 0, 2, \quad (39)$$

где $h(X)$ — функция Хевисайда, точное значение $T_0 \approx 19,022$, а вычисленное при помощи асимптотических формул $T_0 \approx 17,597$.

Таким образом, даже для сравнительно большого значения параметра η разница точного и асимптотического значений не превышает 8,1%. Вычислительный эксперимент показал, что и для других начальных данных различие между точным и асимптотическим значениями достаточно мало и, естественно, уменьшается с уменьшением параметра η . Заметим, что одним из вариантов использования асимптотических формул является нахождение начальных приближений для решения системы нелинейных уравнений (38), позволяющих вычислять такой важный параметр, как момент возникновения ударной электромагнитной волны.

Напомним, что решается краевая задача (4), (5) и $X = t$ (см. (6)). Иными словами, (39) — это краевое условие при $z = 0$ (например, на торце оптического волновода), представляющее временной затухающий сглаженный импульс, а T_0 является координатой z , в которой возникает ударная волна.

Связь размерных (отмечены «шапкой» и звездочками) и безразмерных величин задается соотношениями

$$\hat{E} = E_* E, \quad \hat{H} = E_* \sqrt{\frac{\varepsilon_*}{\mu_*}} H, \quad \hat{z} = L_* z, \quad \hat{t} = T_* t, \quad \frac{L_*}{T_*} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_* \mu_*}} \text{ м/с},$$

$$\hat{\varepsilon}_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/В/м}, \quad \hat{\mu}_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ В с/А/м}, \quad \varepsilon_* = \varepsilon \hat{\varepsilon}_0, \quad \mu_* = \mu \hat{\mu}_0.$$

Здесь E_* , L_* , T_* — характерные значения напряженности электрического поля, длины и времени, ε , μ — относительные диэлектрические и магнитные проницаемости.

В нелинейной оптике, как правило, взамен электрической индукции D принято использовать поляризацию среды P , которая задается соотношением

$$\hat{D} = \hat{\varepsilon}_0 \hat{E} + \hat{P}, \quad \hat{P} = \hat{\varepsilon}_0 (\hat{\chi}_1 \hat{E} + \hat{\chi}_2 \hat{E}^2 + \hat{\chi}_3 \hat{E}^3 + \dots), \quad (40)$$

$$\varepsilon = 1 + \hat{\chi}_1, \quad \eta = \frac{2\hat{\chi}_2 E_*}{(1 + \hat{\chi}_1)},$$

где $\hat{\chi}_k$ — диэлектрические восприимчивости, имеющие, например, значения [29, с. 18]

$$\hat{\chi}_1 \approx 1 - 10, \quad \hat{\chi}_2 \approx (10^{-13} - 10^{-11}) \text{ м/В}, \quad \hat{\chi}_3 \approx (10^{-23} - 10^{-21}) \text{ м}^2/\text{В}^2.$$

Выбирая $E_* = 2 \cdot 10^{10}$ В/м (импульсный лазер [29, с. 34]) для параметров $\hat{\chi}_1 = 1$, $\hat{\chi}_2 = 10^{-11}$ м/В, $\hat{\chi}_3 = 10^{-23}$ м²/В², получим

$$\frac{\hat{\chi}_3 E_*^3}{\hat{\chi}_2 E_*^2} = 0,02, \quad \eta = \frac{2\hat{\chi}_2 E_*}{1 + \hat{\chi}_1} = 0,2.$$

Это, в частности, означает, что кубическими нелинейностями можно пренебрегать по сравнению с квадратичными, и выбор определяющего соотношения в виде (14) при некоторых значениях величины напряженности электрического поля и восприимчивостей достаточно оправдан.

Заметим, что главные успехи прикладной нелинейной оптики связаны с использованием нелинейных эффектов, описываемых квадратичной нелинейной восприимчивостью. Соответствующие волновые нелинейные взаимодействия принято называть трехфотонными. Как уже говорилось во введении, для centrosymmetric оптических кристаллов при инверсии относительно центра симметрии следует, что замена $E \rightarrow -E$ влечет замену $P \rightarrow -P$. Если оптический материал не является centrosymmetric, то он обладает ненулевой квадратичной восприимчивостью, в частности, к таким средам относятся пьезоэлектрики. Более подробно о изотропных и анизотропных оптических средах, см. в [30, с. 17–20], [31, с. 7, 23].

8. Заключение

С точки зрения авторов, наиболее важным результатом работы является подтверждение возможности построения асимптотического решения путем замены асимптотическими соотношениями переменных коэффициентов линейного уравнения в частных производных второго порядка, возникающих при использовании метода годографа. Конечно, это не единственная возможность. В частности, в серии статей [32] для построения асимптотических решений задач об бозе-эйнштейновском конденсате применялись идеи работы [33] (об уравнениях газовой динамики) — анализ поведения функции Римана–Грина и замена ее асимптотическим приближением.

Наконец, укажем, что ТЕМ-волна (поперечная электромагнитная волна) на практике реализуется либо между двумя плоскими поверхностями (имеющими бесконечную проводимость), либо в коаксиальных линиях передач (волноводах). Возможно также рассматривать, так называемые, эквивалентные распределенные линии передач, составленные из емкостей и индуктивностей (см., например, [34]). Наличие асимптотических (и точных) решений позволит детально анализировать прохождение сигналов по линиям передач.

Литература

1. Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Долгих Т. Ф. Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2015.—126 с.
2. Senashov S. I., Yakhno A. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // SIGMA.—2012.—Vol. 8, 071.—16 p. DOI: 10.3842/SIGMA.2012.071.
3. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений.—М.: Наука, 1978.—668 с.
4. Катаев И. Г. Ударные электромагнитные волны.—М: Советское радио, 1963.—152 с.
5. Гапонов А. В., Островский Л. А., Фрейдман Г. И. Ударные электромагнитные волны // Изв. вузов. Радиофизика.—1967.— Т. 10, № 9.—С. 1376–1413.
6. Журавлев В. М. Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями // Теорет. и мат. физ.—2013.—Т. 174, № 2.— С. 272–284. DOI: 10.4213/tmf8391.

7. Журавлев В. М. Опрокидывающиеся электромагнитные волны в средах с сильной нелинейностью // Изв. вузов. Приволж. регион. Физ.-мат. науки.—2013.—№ 3 (27).—С. 117–135.
8. Журавлев В. М. Многомерные квазилинейные уравнения первого порядка и многозначные решения уравнений гиперболического и эллиптического типов // Теорет. и мат. физ.—2016.—Т. 186, № 3.—С. 371–385. DOI: 10.4213/tmf8889.
9. Царев С. П. Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1990.—Т. 54, № 5.—С. 1048–1068.
10. Долгих Т. Ф., Жуков М. Ю. Варианты метода годографа для решения системы двух квазилинейных уравнений // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, № 2.—С. 34–50. DOI: 10.46698/x8869-5899-2064-1.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учеб. пособ. для вузов в 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред, 4-е изд.—М.: Физматлит, 2005.—656 с.
12. Donato A., Fusco O. D. Some Applications of the Riemann method to electromagnetic wave propagation in nonlinear media // ZAMM 60.—1980.—P. 539–542.
13. Shiryayeva E. V., Zhukov M. Yu. Hodograph Method and Numerical Integration of Two Hyperbolic Quasilinear Equations. Part I. The Shallow Water Equations.—2014.—arXiv: 1410.2832.
14. Shiryayeva E. V., Zhukov M. Yu. Hodograph Method and Numerical Solution of the Two Hyperbolic Quasilinear Equations System. Part II. Zonal Electrophoresis Equations.—2014.—arXiv: 1503.01762.
15. Shiryayeva E. V., Zhukov M. Yu. Hodograph Method and Numerical Integration of Two Quasilinear Hyperbolic Equations. Part III. Two-Beam Reduction of the Dense Soliton Gas Equations.—2014.—arXiv: 1512.06710.
16. Долгих Т. Ф. Решение задачи о переносе массы под действием электрического поля в двухкомпонентной смеси // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2017.—№ 3-1 (195-1).—С. 28–35. DOI: 10.23683/0321-3005-2017-3-1-28-35.
17. Долгих Т. Ф. Метод годографа для решения задачи о мелкой воде под твердой крышкой // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2021.—№ 1.—С. 15–24. DOI: 10.18522/1026-2237-2021-1-15-24.
18. Жуков М. Ю., Долгих Т. Ф. Математические модели жидкости, газа и переноса электрическим полем в многокомпонентных химически активных средах // Математический форум. Т. 13. Современные проблемы математики и математического образования.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2020.—С. 87–104.—(Итоги науки. Юг России).
19. Долгих Т. Ф., Жуков М. Ю. Метод годографа для решения задачи о мелкой воде под твердой крышкой в случае гиперболических уравнений // Прикл. матем. и мех.—2022.—Т. 86, № 1.—С. 18–34. DOI: 10.31857/S0032823522010039.
20. Долгих Т. Ф., Жуков М. Ю. Метод годографа для решения задачи об опрокинутой мелкой воде // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2022.—Т. 62, № 1.—С. 113–123. DOI: 10.31857/S0044466922010069.
21. Курант Р. Уравнения с частными производными.—М.: Мир, 1964.—830 с.
22. Copson E. T. On the Riemann–Green function // Arch. Ration. Mech. Anal.—1958.—Vol. 1.—P. 324–348. DOI: 10.1007/BF00298013.
23. Ибрагимов Н. Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи мат. наук.—1992.—Т. 47, № 4 (286).—С. 83–144.
24. Zeitsch P. J. On the Riemann function // Mathematics.—2018.—Vol. 6(12), № 316. DOI: 10.3390/math6120316.
25. Daggit E. A. The use of infinitesimal transformations in predicting the form of the Riemann (-Green) function // J. Math. Anal. Appl.—1970.—№ 29.—P. 91–108.
26. Капцов О. В. Методы интегрирования уравнений с частными производными.—М.: Физматлит, 2009.—184 с.
27. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978.—339 с.
28. Morad A. M., Zhukov M. Yu. The motion of a thin liquid layer on the outer surface of a rotating cylinder // Eur. Phys. J. Plus.—2015.—Vol. 130.—Art. 8.
29. Беспрозванных В. Г., Первадчук В. П. Нелинейная оптика: учеб. пособие.—Пермь: Изд-во Перм. гос. тех. ун-та, 2011.—200 с.
30. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика.—М.: Мир.—1996.—323 с.
31. Чернике Ф., Мидвинтер Дж. Прикладная нелинейная оптика.—М.: Мир.—1976.—261 с.
32. Isoard M., Kamchatnov A. M. Pavloff N. Dispersionless Evolution of Inviscid Nonlinear Pulses.—2019.—arXiv: 1912.04559v1 [nlin.PS].—7 p.

33. Ludford G. S. S. On an extension of Riemann's method of integration with applications to one-dimensional gas dynamics // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1952.—Vol. 48, № 3—P. 499–510. DOI: 10.1017/S0305004100027900.
34. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике.—М.: Советское радио.—1977.—368 с.

Статья поступила 14 декабря 2024 г.

ГЕТМАН ВЕРОНИКА АНДРЕЕВНА
Южный федеральный университет,
старший преподаватель кафедры вычислительной математики и математической физики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: vagetman@sfedu.ru
<https://orcid.org/0009-0009-3523-5428>

ДОЛГИХ ТАТЬЯНА ФЕДОРОВНА
Южный федеральный университет,
доцент кафедры вычислительной математики и математической физики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: dolgikh@sfedu.ru
<https://orcid.org/0009-0005-8102-1181>

ЖУКОВ МИХАИЛ ЮРЬЕВИЧ
Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой вычислительной
математики и математической физики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела дифференц. уравнений
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: myzhukov@sfedu.ru
<https://orcid.org/0000-0002-2870-0397>

*Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 4, P. 5–20*

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR TRANSVERSE NONLINEAR ELECTROMAGNETIC WAVE

Getman, V. A.¹, Dolgikh, T. F.¹ and Zhukov, M. Yu.^{1,2}

¹ Southern Federal University,
8 a Milchakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia;

² Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: vagetman@sfedu.ru, dolgikh@sfedu.ru, myzhukov@mail.ru

Abstract. An asymptotic solution of the boundary value problem for two quasi-linear hyperbolic equations describing the behavior of a transverse electromagnetic wave (TEM wave) in a nonlinear continuous medium is constructed when the dependence of polarization P on the electric field strength E (physical nonlinearity) has the form $P = \varepsilon_0(\chi_1 E + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3)$, where χ_1, χ_2, χ_3 are dielectric susceptibility and ε_0 is the dielectric constant of vacuum. The main term of the asymptotics is constructed in two cases: (i) $\chi_1 = O(1)$, $\chi_2 \rightarrow 0$, $\chi_3 = 0$ (anisotropic continuous medium), (ii) $\chi_1 = O(1)$, $\chi_2 = 0$, $\chi_3 \rightarrow 0$ (isotropic continuous medium), although one of the methods used to construct the asymptotics is easily transferred to the case (iii) $\chi_1 = O(1)$, $\chi_2 \rightarrow 0$, $\chi_3 \rightarrow 0$. In the case of (i), the asymptotics for $\chi_2 \rightarrow 0$ is constructed in two ways.

In the first variant, the direct expansion in a series by a small parameter of the exact implicit solution of the boundary value problem is used with the subsequent numerical construction of the explicit solution on the lines of the level of the implicit solution (the main term of the asymptotics of the implicit solution). In the second variant, the expansion into series by parameter is carried out at all stages preceding the construction of an exact implicit solution, which leads to an implicit solution different from the exact one, but the main term of the asymptotics of the new and previous solutions coincide. The equivalence of these two options is far from obvious, in particular, the exact implicit solution contains the hypergeometric Gauss function, and the asymptotic implicit solution contains the Bessel function. In the case of (ii), the asymptotics at $\chi_3 \rightarrow 0$ can be constructed only in the second way, by performing parameter decomposition at all stages of constructing an implicit solution. The first variant of constructing the asymptotics is indispensable to them, due to the fact that an exact implicit solution cannot be constructed. The hodograph method, based on the conservation law for a system of two quasi-linear hyperbolic equations of type $1 + 1$ in partial derivatives of the first order, was used to construct a solution to the problem of the behavior of TEM waves, both exact and asymptotic. The method allows to transform a system of quasi-linear equations into one linear partial differential equation of the second order with variable coefficients. The effectiveness of the method depends on the presence of explicit relations connecting the initial variables with the Riemann invariants, as well as on the presence of an explicit expression for the Riemann–Green function of a linear differential equation. In cases (i), (ii) the specified conditions are valid. The presented results allow us to trace in detail the evolution of TEM waves in nonlinear media, for example, in coaxial waveguides or distributed ideal transmission lines, in particular, to determine the time (and spatial coordinate) at which the occurrence of shock electromagnetic waves is possible.

Keywords: systems of quasi-linear hyperbolic equations, Riemann invariants, Riemann–Green function, hodograph method, asymptotic expansions.

AMS Subject Classification: 35F15, 35L40, 41A58.

For citation: Getman, V. A., Dolgikh, T. F. and Zhukov, M. Yu. Asymptotics of the Solution of a Boundary Value Problem for Transverse Nonlinear Electromagnetic Wave, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 5–20 (in Russian). DOI: 10.46698/e7486-7095-0322-1.

References

1. Zhukov, M. Yu., Shiryaeva, E. V. and Dolgikh, T. F. *Metod godografa dlya resheniya giperbolicheskikh i ellipticheskikh kvazilineynykh uravneniy* [The Hodograph Method for Solving Hyperbolic and Elliptic Quasi-Linear Equations], Rostov-on-Don, Publishing House of the Southern Federal University, 2015, 126 p. (in Russian).
2. Senashov, S. I. and Yakhno, A. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity, *SIGMA*, 2012, vol. 8, 071, 16 p.
3. Rozhdestvensky, B. L. and Yanenko, N. N. *Sistemy kvazilineynykh uravneniy* [Systems of Quasi-Linear Equations], Moscow, Nauka, 1978, 668 p. (in Russian).
4. Kataev, I. G. *Udarnye elektromagnitnye volny* [Shock Electromagnetic Waves], Moscow, Soviet Radio Publishing House, 1963, 152 p. (in Russian).
5. Gaponov, A. V., Ostrovsky, L. A. and Freidman, G. I. Shock Electromagnetic Waves, *News of Universities. Radiophysics*, 1967, vol. 10, no. 9, pp. 1376–1413 (in Russian).
6. Zhuravlev, V. M. Multidimensional Nonlinear Wave Equations with Multivalued Solutions, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2013, vol. 174, no. 2, pp. 236–246. DOI: 10.1007/s11232-013-0020-6.
7. Zhuravlev, V. M. Breaking Electromagnetic waves in a Strongly Nonlinear Medium, *University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences*, 2013, no. 3 (27), pp. 117–135 (in Russian).
8. Zhuravlev, V. M. Multidimensional Quasilinear First-Order Equations and Multivalued Solutions of the Elliptic and Hyperbolic Equations, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2016, vol. 186, no. 3, pp. 320–332. DOI: 10.1134/S0040577916030028.
9. Tsarev, S. P. The Geometry of Hamiltonian Systems of Hydrodynamic Type. The Generalized Hodograph Method, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1991, vol. 37, no. 2, pp. 397–419. DOI: 10.1070/IM1991v037n02ABEH002069.
10. Dolgikh, T. F. and Zhukov, M. Yu. Variants of the Hodograph Method for Solving a System of Two Quasilinear Equations, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2021, vol. 23, no. 2, pp. 34–50. (in Russian). DOI: 10.46698/x8869-5899-2064-1.

11. Landau, L. D. and Lifshits, E. M. *Teoreticheskaya fizika: uchebnoe posobie dlya vuzov v 10 tomakh. Tom VIII. Elektrodinamika sploshnykh sred* [Theoretical Physics: a Textbook for Universities in 10 Volumes. Vol. VIII. Electrodynamics of Continuous Media], 4-e izdanie, Moscow, Fizmatlit, 2005, 656 p. (in Russian).
12. Donato, A. and Fusco, O. D. Some Applications of the Riemann Method to Electromagnetic Wave Propagation in Nonlinear Media, *ZAMM* 60, 1980, pp. 539–542.
13. Shiryayeva, E. V. and Zhukov, M. Yu. *Hodograph Method and Numerical Integration of Two Hyperbolic Quasilinear Equations. Part I. The Shallow Water Equations*, 2014, arXiv: 1410.2832.
14. Shiryayeva, E. V. and Zhukov, M. Yu. *Hodograph Method and Numerical Solution of the Two Hyperbolic Quasilinear Equations System. Part II. Zonal Electrophoresis Equations*, 2014, arXiv: 1503.01762.
15. Shiryayeva, E. V. and Zhukov, M. Yu. *Hodograph Method and Numerical Integration of Two Quasilinear Hyperbolic Equations. Part III. Two-Beam Reduction of the Dense Soliton Gas Equations*, 2014, arXiv: 1512.06710.
16. Dolgikh, T. F. THE Solution of the Mass Transfer Problem for The Two-Component Mixture Under the Action of an Electric Field, *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*, 2017, no. 3-1 (195-1), pp. 28–35 (in Russian). DOI: 10.23683/0321-3005-2017-3-1-28-35.
17. Dolgikh, T. F. The Hodograph Method for Solving the Problem of Shallow Water Under a Solid Lid, *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*, 2021, no. 1, pp. 15–24 (in Russian). DOI: 10.18522/1026-2237-2021-1-15-24
18. Dolgikh, T. F. and Zhukov, M. Yu. Mathematical Models of Liquid, Gas and Electric Field Transport in Multicomponent Chemically Active Media, *Mathematical Forum. Vol. 13. Contemporary Problems of Mathematics and Mathematical Education*, Trends in Science, The South of Russia, 2020, pp. 87–104 (in Russian).
19. Dolgikh, T. F. and Zhukov, M. Yu. Hodograph Method for Solving the Problem on Shallow Water under a Solid Cover in the Case of Hyperbolic Equations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, vol. 86, no. 1, pp. 18–34 (in Russian). DOI: 10.31857/S0032823522010039.
20. Dolgikh, T. F. and Zhukov, M. Yu. The Hodograph Method for Solving the Overturned Shallow Water Problem, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2022, vol. 62, no. 1, pp. 106–116. DOI: 10.1134/S0965542522010067.
21. Courant, R. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Moscow, Mir, 1964, 830 p. (in Russian).
22. Copson, E. T. On the Riemann–Green Function, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1958, vol. 1, pp. 324–348. DOI: 10.1007/BF00298013.
23. Ibragimov, N. H. Group Analysis of Ordinary Differential Equations and the Invariance Principle in Mathematical Physics, *Russian Mathematical Surveys*, 1992, vol. 47, no. 4. pp. 89–156. DOI: 0.1070/RM1992v047n04ABEH000916.
24. Zeitsch, P. J. On the Riemann Function, *Mathematics*, 2018, vol. 6, no. 316, DOI: 10.3390/math6120316.
25. Daggit, E. A. The Use of Infinitesimal Transformations in Predicting the Form of the Riemann (-Green) Function, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1970, no. 29. pp. 91–108.
26. Kaptsov, O. V. *Metody integrirvaniya uravneniy s chastnymi proizvodnymi* [Methods of Integration of Partial Differential Equations], Moscow, Fizmatlit, 2009, 184 p. (in Russian).
27. Ovsyannikov, L. V. *Grupповый анализ дифференциальных уравнений* [Group Analysis of Differential Equations], Moscow, Nauka, 1978, 339 p. (in Russian).
28. Morad, A. M. and Zhukov, M. Yu. The Motion of a Thin Liquid Layer on the Outer Surface of a Rotating Cylinder, *European Physical Journal Plus*, 2015, vol. 130, art. 8.
29. Besprozvannykh, V. G. and Pervadchuk, V. P. *Nelineynaya optika* [Nonlinear Optics], Perm, Publishing House of Perm State Technical University, 2011, 200 p. (in Russian).
30. Agrawal, G. *Nelineynaya volokonnaya optika* [Nonlinear Fiber Optics], Moscow, Mir, 1996, 323 p. (in Russian).
31. Zernike, F. and Midwinter, J. *Prikladnaya nelineynaya optika* [Applied Nonlinear Optics], Moscow, Mir, 1976, 261 p. (in Russian).
32. Isoard, M., Kamchatnov, A. M. and Pavloff, N. Dispersionless Evolution of Inviscid Nonlinear Pulses, 2019, arXiv: 1912.04559v1 [nlin.PS], 7 p.
33. Ludford, G. S. S. On an Extension of Riemann’s Method of Integration with Applications to One-Dimensional Gas Dynamics, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1952, vol. 48, no. 3, pp. 499–510. DOI: 10.1017/S03050004100027900.
34. Scott, E. *Volny v aktivnykh i nelineynykh sredakh v prilozhenii k elektronike* [Waves in Active and Nonlinear Media in Application to Electronics], Moscow, Soviet radio. 1977. 368 p. (in Russian).

Received December 14, 2024

VERONIKA A. GETMAN

Southern Federal University,
8 a Milchakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Senior Lecturer

E-mail: vagetman@sfedu.ru

<https://orcid.org/0009-0009-3523-5428>

TATIANA F. DOLGIKH

Southern Federal University,
8 a Milchakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Assistant Professor

E-mail: dolgikh@sfedu.ru

<https://orcid.org/0009-0005-8102-1181>

MIKHAIL YU. ZHUKOV

Southern Federal University,
8 a Milchakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia
*Head of the Department of Computational
Mathematics and Mathematical Physics;*

Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Leading Researcher

E-mail: myuzhukov@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-2870-0397>

УДК 517.98

DOI 10.46698/r7902-6696-2150-a

LATTICE SEQUENCE SPACES AND SUMMING MAPPINGS

A. Dahmane¹ and T. Toufik²

¹Laboratory of Functional Analysis and Geometry of Spaces,
Faculty of Mathematics and Computer Science, University of M'Sila,
M'Sila 28000, Algeria;

²Laboratory of Functional Analysis and Geometry of Spaces,
University of M'Sila, High College of Food Sciences and Food Industries,
Algiers 16200, Algeria

E-mail: dahmane.achour@univ-msila.dz, t.tiaiba@essaia.dz

Abstract. This paper contributes to the theory of positive summing operators between Banach lattices by exploring the interplay between specialized sequence spaces, operator ideals, and tensor product techniques. We focus on the spaces of positive strongly p -sumnable sequences $\ell_p^\pi(X)$ and positive unconditionally p -sumnable sequences $\ell_{p,|\omega|}^u(X)$, utilizing them alongside the Banach lattice of positive weakly p -sumnable sequences $\ell_{p,|\omega|}(X)$. These tools are employed to present and characterize three central classes: positive strongly (p, q) -summing operators, positive (p, q) -summing operators, and positive Cohen (p, q) -nuclear operators. Our investigation yields new properties, including the characterization of positive (p, q) -summing operators as those which map positive unconditionally p -sumnable sequences into q -sumnable sequences, and the identification of the positive strongly (p, q) -summing class with the class of (p, q) -majorizing operators. A central achievement of this work is the unified characterization of these operator classes via tensor product continuity, a method well-established for linear operator ideals that we now extend to the context of Banach lattices. We characterize each class by the continuity of an associated tensor operator $I \otimes T : \ell_p \otimes_\alpha X \rightarrow \ell_q \otimes_\beta Y$ for appropriate tensor norms α and β . This approach provides a powerful and cohesive framework that deepens the connections between summability, the order structure of Banach lattices, and tensor norms.

Keywords: lattice sequence spaces, positive (p, q) -summing operators, positive strongly (p, q) -summing operators.

AMS Subject Classification: 46B28, 46T99, 47H99, 47L20.

For citation: Dahmane, A. and Toufik, T. Lattice Sequence Spaces and Summing Mappings, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 21–37. DOI: 10.46698/r7902-6696-2150-a.

1. Introduction and Background

The spaces of sequences with values in the Banach lattice are intimately related to the summability of operators between Banach lattices. For example, the positive (p, q) -summing operators, introduced by Blasco [1], are the continuous operators which take positive weakly p -sumnable sequences $\ell_{p,|\omega|}(X)$ into q -sumnable sequences $\ell_q(E)$ (see also [2]). In [3], Achour-Belacel introduced the notion of positive strongly (p, q) -summing operators to characterize those operators whose adjoints are positive (q^*, p^*) -summing operators.

In [4] and [5] the authors defined the space of positive strongly p -sumnable sequences $\ell_p^\pi(X)$ (initially introduced by Cohen for the Banach spaces [6]), as well as the space of positive unconditionally p -sumnable sequences $\ell_{p,|\omega|}^u(X)$.

Tensor products have proved to be a useful tool for the theory of operator ideals. Indeed, the excellent monograph [7] deals with the theory of the tensor product point of view and provides many applications to the study of the structure of several spaces of summing linear operators.

The following characterizations provide nice examples of how tensor products come into the theory of summing operators:

- An operator $T : X \rightarrow Y$ is absolutely p -summing (see [8]) if and only if $I \otimes T : \ell_p \otimes_\varepsilon X \rightarrow \ell_p \otimes_{\Delta_p} Y$ is continuous, where Δ_p satisfies $\Delta_p(\sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i) = (\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p)^{1/p}$ and ε is the injective tensor norm (see [7]).

- Let $1 < p < \infty$. An operator $T : X \rightarrow Y$ is the Cohen p -nuclear (p -dominated) if and only if $I \otimes T : \ell_p \otimes_\varepsilon X \rightarrow \ell_p \otimes_\pi Y$ is continuous and π is the projective norm (see [6] and [7]).

- An operator $T : X \rightarrow Y$ is strongly p -summing if and only if $I \otimes T : \ell_p \otimes_{\Delta_p} X \rightarrow \ell_p \otimes_\pi Y$ is continuous (see [9]).

The interplay between tensor products and positive summing operators have not been explored yet. In this paper, first we utilize sequences in Banach lattice spaces to define and characterize certain classes of positive summing operators. Then we describe these classes in terms of the continuity of the canonically defined tensor product operator $I \otimes T : \ell_p \otimes_\alpha X \rightarrow \ell_p \otimes_\beta Y$ for adequate p and tensor norms α and β .

Our results are presented as follows. After this introductory section, Section 2 is devoted to providing new properties of the positive (p, q) -summing operators. Particularly, we prove that these operators are continuous operators transforming positive lattice unconditionally p -summable sequences $\ell_{p,|\omega|}^u(X)$ into q -summable sequences $\ell_q(E)$. In Section 3, utilizing the Banach lattice of positive strongly p -summable sequences, we present a novel characterization of positive strongly (p, q) -summing operators. Furthermore, we demonstrate that this class is equivalent to the class of (p, q) -majorizing operators introduced in [10]. In Section 4, we study the notion of the positive Cohen (p, q) -nuclear operators. We explore the summability properties of these operators by defining their corresponding operators between spaces of positive weakly p -summable sequences $\ell_{p,|\omega|}(X)$ and strongly positive strongly p -summable sequences $\ell_p^\pi(Y)$. In the final section, we describe these classes in terms of the continuity of an associated tensor operator that is defined between tensor products of sequences spaces.

We use standard notation for the Banach lattices (see [11, 12]). If X is an ordered set, the usual order on $X^{\mathbb{N}^*}$ is defined by $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \geq 0 \Leftrightarrow x_n \geq 0$ for each $n \in \mathbb{N}^*$. Recall that the Banach lattice X is an ordered vector space equipped with a lattice structure and the Banach space norm satisfying the following conditions: $\|x\| \leq \|y\|$ whenever $|x| \leq |y|$ for all $x, y \in X$, where $|x| = x \vee (-x)$. Note that this implies obviously that for any $x \in X$ the elements x and $|x|$ have the same norm. We denote by $X_+ = \{x \in X, x \geq 0\}$. An element x of X is positive if $x \in X_+$. For $x \in X$ let $x^+ := x \vee 0$, $x^- := (-x) \vee 0$ be the positive part and the negative part of x , respectively. For any $x \in X$, we have the following properties $x = x^+ - x^-$ and $|x| = x^+ + x^-$.

The dual X^* of a Banach lattice X is a complete Banach lattice endowed with the natural order

$$x_1^* \leq x_2^* \iff \langle x_1^*, x \rangle \leq \langle x_2^*, x \rangle \text{ for all } x \in X_+,$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the bracket of duality.

By a sublattice of a Banach lattice X we mean a linear subspace A of X so that $\sup\{x, y\} = x \vee y$ belongs to A whenever $x, y \in A$. The canonical embedding $i_E : X \rightarrow X^{**}$ such that $\langle i_E(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle$ of X into its second dual X^{**} is an order isometry from X into a sublattice of X^{**} , see [11, Proposition 1.a.2]. If we consider X as a sublattice of X^{**}

we have for $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \leq x_2 \iff \langle x_1, x^* \rangle \leq \langle x_2, x^* \rangle \text{ for all } x^* \in X_+^*.$$

Throughout this paper X and Y are Banach lattices, E and F are Banach spaces. We say $h : X \rightarrow Y$ is a vector lattice homomorphism if it is a linear operator such that $h(x_1 \vee x_2) = h(x_1) \vee h(x_2)$ for all $x_1, x_2 \in X$. An one-to-one, surjective vector lattice homomorphism is called vector lattice isomorphism. A linear operator $S : X \rightarrow Y$ is called positive, if $S(x) \geq 0$ for any $x \geq 0$. A map $T : X_+ \rightarrow Y_+$ is called additive if for every $x, y \in X_+$ we have $T(x + y) = T(x) + T(y)$. We call T positively homogeneous if for each $\lambda \in \mathbb{R}_+$ and every $x \in X_+$, we have $T(\lambda x) = \lambda T(x)$. The space of all bounded linear operators from E to F is denoted by $\mathcal{L}(E, F)$ and it is the Banach space with the usual supremum norm. The continuous dual space $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ of E is denoted by E^* , whereas B_E denotes the closed unit ball of E . The symbol $E \equiv F$ means that E and F are isometrically isomorphic.

Let $1 \leq p \leq \infty$, we write p^* the conjugate index of p , that is $1/p + 1/p^* = 1$. As usual $\ell_p(E)$ denotes the vector space of all absolutely p -summable sequences, with the usual norm $\|\cdot\|_p$ and $\ell_{p,\omega}(E)$ the space of all weakly p -summable sequences with the norm $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{p,\omega} = \sup_{x^* \in B_{E^*}} \|(\langle x_n, x^* \rangle)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_p$. The closure in $\ell_{p,\omega}(E)$ of the set of all sequences in E which have only a finite number of non-zero terms, is a Banach space with respect to the norm $\|\cdot\|_{p,\omega}$. We denote this space by $\ell_p^u(E)$. Let c_0 be the space of scalar sequences $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, such that $\lambda_n \rightarrow 0$. The space

$$(c_0)_\omega(E) := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset E : (\langle x_n, \xi \rangle)_{n \in \mathbb{N}^*} \in c_0 \forall \xi \in E^* \right\}$$

is a closed subspace of $\ell_{\infty,\omega}(E) = \ell_\infty(E)$ (see [13, §19.4]). It is well known that $\ell_{p,\omega}(E)$ is an isometrically isomorphic to $\mathcal{L}(\ell_{p^*}, E)$ for $1 < p \leq \infty$ and $\ell_{1,\omega}(E)$ is an isometrically isomorphic to $\mathcal{L}(c_0, E)$. We denote by $\ell_p \langle E \rangle$ the space of all strongly p -summable sequences (Cohen strongly p -summable sequences, see [6]), that is the space of all sequences $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ in E , such that $(x_n^*(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_1$, for any $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_{p^*,\omega}(E^*)$, which is a Banach space with the norm

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{\ell_p \langle E \rangle} := \sup_{\|(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{p^*,\omega} \leq 1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \right| = \sup_{\|(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{p^*,\omega} \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x_n)|.$$

The following fact, discussed in [14], is well-known

$$\ell_{p^*,\omega}(E^*) \equiv [\ell_p \langle E \rangle]^* \quad \text{and} \quad [\ell_{p^*} \langle E^* \rangle] \equiv [\ell_{p,\omega}(E)]^*. \quad (1.1)$$

Moreover, it is well-known that

$$[\ell_p(E)]^* \equiv \ell_{p^*}(E^*) \text{ for } 1 \leq p < \infty \text{ and } [c_0(E)]^* \equiv \ell_1(E^*). \quad (1.2)$$

Sequences in Banach lattice spaces. Consider the case where E is replaced by a Banach lattice X . The space of positive weakly p -summable sequences was introduced in [4] by

$$\ell_{p,|\omega|}(X) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in X^{\mathbb{N}^*} : \sum_{n=1}^{\infty} \langle x^*, |x_n| \rangle^p < \infty \forall x^* \in X_+^* \right\},$$

endowed with the norm

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{p,|\omega|} = \sup_{x^* \in B_{X_+^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x^*, |x_n| \rangle^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Also, $(c_0)_{|\omega|}(X)$ is a closed vector lattice subspace of $\ell_{\infty,|\omega|}(X)$. Then $(\ell_{p,|\omega|}(X), \|\cdot\|_{p,|\omega|})$ is a Banach lattice (see [4, 5]). Moreover, we have $(I_0) \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{p,\omega} \leq \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{p,|\omega|}$ for all $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_{p,|\omega|}(X)$.

(I_1) If $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \geq 0$, we have

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{p,|\omega|} = \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{p,\omega}. \quad (1.3)$$

We define

$$\ell_{p,|\omega|}(X^*) = \left\{ (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (X^*)^{\mathbb{N}^*} : \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, |x_n^*| \rangle^p < \infty \forall x \in X_+ \right\}$$

and

$$\|(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{p,|\omega|} = \sup_{x \in B_{X_+}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle |x_n^*|, x \rangle^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.4)$$

Then $\ell_{p,|\omega|}(X^*)$ with this norm is a Banach lattice (see [4, 5]).

Let $\ell_{p,|\omega|}^u(X)$ denote the closed sublattice of $\ell_{p,|\omega|}(X)$ defined by

$$\ell_{p,|\omega|}^u(X) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in X^{\mathbb{N}^*} : \lim_n \|(x_k)_{k=n+1}^{\infty}\|_{p,|\omega|} = 0 \right\}.$$

In this case we say that $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ is positive unconditionally p -summable sequences.

Let

$$\ell_p^{\pi}(X) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in X^{\mathbb{N}^*} : \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n^*, |x_n| \rangle| < \infty \forall (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\ell_{p^*,|\omega|}(X^*))^+ \right\}$$

and

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{\ell_p^{\pi}(X)} = \sup_{(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \in B_{[\ell_{p^*,|\omega|}(X^*)]^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n^*, |x_n| \rangle. \quad (1.5)$$

In this case we say that $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ is positive strongly p -summable sequences. Then $\ell_p^{\pi}(X)$ with this norm is a Banach lattice [5]. For convenience let us denote $\ell_1 \langle X \rangle = \ell_1^{\pi}(X) = \ell_1(X)$.

By (I_0) and (I_1) , we have $(I'_0) \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{\ell_p^{\pi}(X)} \leq \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{\ell_p \langle X \rangle}$ for all $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_p \langle X \rangle$.

(I'_1) If $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \geq 0$, then $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_p^{\pi}(X)$ if and only if $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_p \langle X \rangle$, and

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{\ell_p^{\pi}(X)} = \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{\ell_p \langle X \rangle}. \quad (1.6)$$

Moreover, we have the following results due to [4, 15].

Proposition 1.1 [15, Proposition 3.1 and Proposition 3.2]. *Let X be a Banach lattice and $1 < p < \infty$. Then*

(a)

$$\ell_p^{\pi}(X^*) = \left\{ (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (X^*)^{\mathbb{N}^*} : \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, |x_n^*| \rangle| < \infty, \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\ell_{p^*,|\omega|}(X))^+ \right\}$$

and for each $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_p^{\pi}(X^*)$,

$$\|(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{\ell_p^{\pi}(X^*)} = \sup_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in B_{[\ell_{p^*,|\omega|}(X)]^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, |x_n^*| \rangle.$$

(b)

$$\ell_p^\pi(X^*) = \left\{ (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (X^*)^{\mathbb{N}^*} : \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, |x_n^*| \rangle| < \infty \quad \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\ell_{p^*, |\omega|}^u(X))^+ \right\}$$

and for each $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_p^\pi(X^*)$,

$$\|(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{\ell_p^\pi(X^*)} = \sup_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in B_{[\ell_{p^*, |\omega|}^u(X)]^+} \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, |x_n^*| \rangle.$$

Lemma 1.2 [4]. *Let X be a vector lattice, (Y, C) be an ordered vector space, such that $Y = C - C$ and $T : X_+ \rightarrow C$ be a positive, homogeneous and additive bijection. Then Y is a lattice space and T can be uniquely extended to a lattice isomorphism from X onto Y .*

Theorem 1.3. *Let X be a Banach lattice and $1 < p < \infty$.*

(i) *The Banach lattice $\ell_{p^*, |\omega|}(X^*)$ is lattice and isometrically isomorphic to $[\ell_p^\pi(X)]^*$.*

(ii) *The Banach lattice $[\ell_{p^*}^\pi(X^*)]$ is lattice and isometrically isomorphic to $[\ell_{p, |\omega|}^u(X)]^*$ [15, Corollary 3.3 and Corollary 3.4].*

◁ (i) Let $1 < p < \infty$, we define the mapping

$$T : \ell_{p^*, |\omega|}(X^*) \rightarrow [\ell_p^\pi(X)]^*, \quad x^* = (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \mapsto T(x^*) = T_{x^*},$$

where T_{x^*} is the linear functional defined by

$$T_{x^*} : \ell_p^\pi(X) \rightarrow \mathbb{K}, \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mapsto T_{x^*}((x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n).$$

The map T is clearly a positive map from $(\ell_{p^*, |\omega|}(X^*))_+$ to $[\ell_p^\pi(X)]_+^*$, and it is homogeneous, additive and injective. To see that it is surjective, note that if $S \in [\ell_p^\pi(X)]_+^*$ and

$$I_n : X \rightarrow \ell_p(X), \quad x \mapsto (0, \dots, x, 0, \dots),$$

$x_n^* = S \circ I_n \in X_+^*$ for all $n \in \mathbb{N}^*$.

Then

$$\begin{aligned} T_{(S \circ I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}}((x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) &= \sum_{n=1}^{\infty} (S \circ I_n)(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} S(I_n(x_n)) = S(I_1(x_1)) + \dots + S(I_n(x_n)) + \dots \\ &= S((x_1, 0, \dots)) + \dots + S((0, \dots, x_n, \dots)) + \dots = S((x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}). \end{aligned}$$

For $x \in B_X^+$, we get

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n^*, x \rangle^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |S \circ I_n(x)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} = \sup_{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in B_{\ell_p^+}^+} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n S \circ I_n(x) \right| \\ &= \sup_{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in B_{\ell_p^+}^+} |S((\alpha_n x)_{n \in \mathbb{N}^*})| \leq \|S\| \sup_{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in B_{\ell_p^+}^+} \|(\alpha_n x)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{\ell_p(X)}. \end{aligned}$$

We need to estimate the latter expression. Note that

$$\begin{aligned} \|(\alpha_n x)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{\ell_p(X)} &= \sup_{(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \in B_{[\ell_{p^*,|\omega|}(X^*)]^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n^*, |\alpha_n x_n| \rangle \\ &= \sup_{(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \in B_{[\ell_{p^*,|\omega|}(X^*)]^+}} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \langle x_n^*, |x_n| \rangle \\ &\leq \|(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_p \sup_{(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \in B_{[\ell_{p^*,|\omega|}(X^*)]^+}} \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{p^*,|\omega|} \leq \|(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_p. \end{aligned}$$

Then

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |S \circ I_n(x)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \|S\| \sup_{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in B_{\ell_p^+}} \|(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_p = \|S\|.$$

Hence, by (1.4), $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\ell_{p^*,|\omega|}(X^*))_+$.

Since $\ell_{p^*,|\omega|}(X^*)$ is the Riesz space and $[\ell_p^\pi(X)]^* = [\ell_p^\pi(X)]_+^* - [\ell_p^\pi(X)]_+^*$, it follows from Lemma 1.2 that $[\ell_p^\pi(X)]^*$ is a lattice space and that T is a lattice isomorphism from $\ell_{p^*,|\omega|}(X^*)$ onto $[\ell_p^\pi(X)]^*$.

For $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_{p^*,|\omega|}(X^*)$, we have

$$\begin{aligned} \|T((x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*})\|_{[\ell_p^\pi(X)]^*} &= \|T((x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*})\|_{\mathcal{L}(\ell_p^\pi(X), \mathbb{K})} = \|T((x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*})\|_{[\ell_p^\pi(X)]^*} \\ &= \|T(|(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}|)\|_{[\ell_p^\pi(X)]^*} = \|(|x_n^*|)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{p^*,|\omega|} = \|(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{p^*,|\omega|}. \end{aligned}$$

This means that T is an isometry from $\ell_{p^*,|\omega|}(X^*)$ onto $[\ell_p^\pi(X)]^*$. \triangleright

2. Positive (p, q) -Summing Operators Generated by $\ell_{p,|\omega|}^u(X)$

Let $1 \leq q \leq p < \infty$. Following [1, Definition 1] and [3, Proposition 3.2 (1)], an operator $T : X \rightarrow F$ is said to be positive (p, q) -summing if there exists a constant $C > 0$, such that for every $x_1, \dots, x_n \in X$, we have

$$\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_p \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,|\omega|}. \quad (2.1)$$

For $q < p = \infty$, we get

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \|T(x_i)\| \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,|\omega|}.$$

We shall denote by $\Lambda_{p,q}(X, F)$ the space of positive (p, q) -summing operators. This space becomes a Banach space with the norm $\|\cdot\|_{\Lambda_{p,q}}$ given by the infimum of the constants verifying (2.1). For $p = \infty$ and $1 \leq q < \infty$ we consider $\Lambda_{\infty,q}(X, Y) = \mathcal{L}(X, F)$ and $\|T\|_{\Lambda_{\infty,q}} = \|T\|$.

Now, we give characterizations of these classes in terms of transformations of lattice vector-valued sequences.

Proposition 2.1 [1, Proposition 2]. *Let $T : X \rightarrow F$ be an operator and $1 \leq q \leq p \leq \infty$. The following properties are equivalent.*

- (1) $T \in \Lambda_{p,q}(X, F)$.
- (2) The associated operator $\widehat{T} : \ell_{q,|\omega|}(X) \rightarrow \ell_p(F)$ given by $\widehat{T}((x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}) = (T(x_i))_{i \in \mathbb{N}^*}$, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \ell_{q,|\omega|}(X)$ is well-defined and continuous.

In this case $\|T\|_{\Lambda_{p,q}} = \|\widehat{T}\|$.

Theorem 2.2. For a continuous linear $T \in \mathcal{L}(X, F)$ and $1 \leq q \leq p \leq \infty$, the following conditions are equivalent.

- (i) $T \in \Lambda_{p,q}(X, F)$.
- (ii) The sequence $(T(x_i))_{i \in \mathbb{N}^*} \in \ell_p(F)$ whenever $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \ell_{q,|\omega|}^u(X)$.
- (iii) The induced map

$$\widehat{T}: \ell_{q,|\omega|}^u(X) \rightarrow \ell_p(F), \quad \widehat{T}((x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}) = (T(x_i))_{i \in \mathbb{N}^*},$$

is a well-defined continuous linear operator and $\|T\|_{\Lambda_{p,q}} = \|\widehat{T}\|$.

◁ (i) \Rightarrow (ii) Let $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \ell_{q,|\omega|}^u(X)$. We have

$$\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_p \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,|\omega|},$$

for all $n \in \mathbb{N}^*$. So, if $m_1 > m_2$, then

$$\|(T(x_i))_{i=1}^{m_1} - (T(x_i))_{i=1}^{m_2}\|_p = \|(T(x_i))_{i=m_2+1}^{m_1}\|_p \leq C \|(x_i)_{i=m_2+1}^{m_1}\|_{q,|\omega|}.$$

We conclude that $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ with $y_n = (T(x_i))_{i=1}^n$ is the Cauchy sequence in $\ell_p(F)$ and so converges to some $(z_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \ell_p(F)$.

Given $\varepsilon > 0$, we can find $N_0 \in \mathbb{N}^*$ so that $n \geq N_0 \Rightarrow \|(T(x_i))_{i=1}^n - (z_i)_{i \in \mathbb{N}^*}\|_p < \varepsilon$. So, for a fixed $i_0 \in \mathbb{N}^*$, we have $\|T(x_{i_0}) - z_{i_0}\| < \varepsilon$. We conclude that $T(x_{i_0}) = z_{i_0}$. Hence $(T(x_i))_{i \in \mathbb{N}^*} = (z_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \ell_p(F)$.

(ii) \Rightarrow (iii) Is it clear that T is linear implies that \widehat{T} is linear, for show that \widehat{T} is continuous we showing that \widehat{T} has a closed graph. Suppose that the sequence $(T(x_i))_{i \in \mathbb{N}^*} \in \ell_p(F)$ whenever $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \ell_{q,|\omega|}^u(X)$ and let $((x^k, \widehat{T}(x^k)))_{k \in \mathbb{N}^*}$ be a convergent sequence in the Cartesian product $\ell_{q,|\omega|}^u(X) \times \ell_p(F)$ that is, $((x_i^k)_{i \in \mathbb{N}^*}, \widehat{T}((x_i^k)_{i \in \mathbb{N}^*})) \rightarrow (x, y)$. So

$$x^k \rightarrow x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_{q,|\omega|}^u(X), \tag{2.2}$$

and

$$\widehat{T}(x^k) \rightarrow y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_p(F). \tag{2.3}$$

From (2.2), for all $\varepsilon > 0$ there exist $k_0 > 0$, such that

$$\begin{aligned} |x^*(x_i^k - x_i)|^q &\leq \left(|x^*|(x_i^k - x_i)\right)^q \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(x^*|(x_i^k - x_i)|\right)^q \\ &\leq \sup_{x^* \in B_{X^*}_+} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(x^*|(x_i^k - x_i)|\right)^q\right) \leq \|x^k - x\|_{q,|\omega|}^q \leq \varepsilon^q \end{aligned}$$

whenever $k > k_0$, $x^* \in B_{X^*}_+$ and for all $i \in \mathbb{N}^*$. In this way, by the Hanh–Banach theorem, we get

$$\|x_i^k - x_i\|^q = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x_i^k - x_i)|^q \leq 2^q \sup_{x^* \in B_{X^*}_+} |x^*(x_i^k - x_i)|^q \leq 2^q \varepsilon^q, \tag{2.4}$$

whenever $k > k_0$ and for all $i \in \mathbb{N}^*$, then we have $x_i^k \rightarrow x_i \in X$ for all $k \rightarrow \infty$. How T is continuous, we find

$$\lim_k T(x_i^k) = T(x_i) \quad \text{for all } i \in \mathbb{N}^*.$$

From (2.3), for all $\varepsilon > 0$ there exist $k'_0 > 0$, such that

$$\|T(x_i^{k'}) - y_i\|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|T(x_i^{k'}) - y_i\|^p \leq \|(T(x_i^{k'}))_{i \in \mathbb{N}^*} - (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}\|_p^p = \|\widehat{T}(x^{k'}) - y\|_p^p \leq \varepsilon^p,$$

whenever $k' > k'_0$ and for all $i \in \mathbb{N}^*$, we find

$$\lim_k T(x_i^{k'}) = y_i \quad \text{for all } i \in \mathbb{N}^*. \quad (2.5)$$

From (2.4), (2.5) and uniqueness of the limit, it follows that

$$\widehat{T}(x) = (T(x_i))_{i \in \mathbb{N}^*} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*} = y.$$

This implies that the linear mapping \widehat{T} has a closed graph.

(iii) \Rightarrow (i) is straightforward. \triangleright

3. Positive Strongly (p, q) -Summing Operators Generated by $\ell_p^\pi(Y)$

Let $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Recall that an operator $T \in \mathcal{L}(E, Y)$ is called positive strongly (p, q) -summing [3, Remark 4.2] if there exists a constant $C > 0$, such that for all finite sets, $(x_i)_{i=1}^n \subset E$ and $(y_i^*)_{i=1}^n \subset (Y^*)^+$, we have

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_q \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, \omega}. \quad (3.1)$$

We shall denote by $\mathcal{D}_{p,q}^+(E, Y)$ the space of positive strongly (p, q) -summing operators or $\mathcal{D}_p^+(E, Y)$ if $p = q$, the space of positive strongly p -summing operators. This space becomes a Banach space with the norm $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_{p,q}^+}$ given by the infimum of the constants verifying (3.1).

Lemma 3.1. *The operator $T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(E, Y)$ if and only if there exists a constant $C > 0$, such that for all finite sets, $(x_i)_{i=1}^n \subset E$ and $(y_i^*)_{i=1}^n \subset (Y^*)^+$, we have*

$$\|(T(x_i)_{i=1}^n)\|_{\ell_p^\pi(Y)} \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_q. \quad (3.2)$$

\triangleleft Let $T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(E, Y)$, then there exists a constant $C > 0$, such that for all finite sets, $(x_i)_{i=1}^n \subset E$ and $(y_i^*)_{i=1}^n \subset (Y^*)^+$, we have

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_q \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, \omega}.$$

For each $z \in Y$ and $z^* \in Y^*$,

$$|z^*|(|z|) = \sup \{|g^*(z)| : |g^*| \leq |z^*|\}. \quad (3.3)$$

Now let $(y_i^*)_{i=1}^n \in (\ell_{p^*, |\omega|}(Y^*))^+$ and let $\varepsilon > 0$. From (3.3), there exists, for each $1 \leq i \leq n$, an element $g_i^* \in Y^*$, such that $|g_i^*| \leq |y_i^*|$, and

$$|y_i^*|(|T(x_i)|) \leq |g_i^*(T(x_i))| + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Note that $(g_i^*)_{i=1}^n \in (\ell_{p^*,|\omega|}^n(Y^*))^+$. Then

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle |T(x_i)|, y_i^* \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle |T(x_i)|, |y_i^*| \rangle \leq \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), g_i^* \rangle| + \varepsilon \\ &\leq C [\|(x_i)_{i=1}^n\|_q \|(g_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,\omega}] + \varepsilon \leq C [\|(x_i)_{i=1}^n\|_q \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,\omega}] + \varepsilon. \end{aligned}$$

Then

$$\|(T(x_i)_{i=1}^n)\|_{\ell_p^\pi(Y)} \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_q + \varepsilon.$$

Conversely, directly by $|\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq \langle |T(x_i)|, y_i^* \rangle$ for every i . \triangleright

As in classical cases, the natural approach to presenting the summability properties of positive strongly (p, q) -summing operators by defining the corresponding operator between appropriate lattice sequence spaces.

Proposition 3.2. *Let $T : E \rightarrow Y$ be an operator and $1 \leq q \leq p \leq \infty$. The following properties are equivalent:*

(1) $T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(E, Y)$.

(2) *The associated operator $\widehat{T} : \ell_q(E) \rightarrow \ell_p^\pi(Y)$ given by $\widehat{T}((x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}) = (T(x_i))_{i \in \mathbb{N}^*}$, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \ell_q(E)$ is well-defined and continuous.*

In this case $\|T\|_{\mathcal{D}_{p,q}^+} = \|\widehat{T}\|$.

\triangleleft For the necessity, let $T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(E, Y)$, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \ell_q(E)$ and $(y_i^*)_{i \in \mathbb{N}^*} \in (\ell_{p^*,|\omega|}(Y^*))^+$. Then by Lemma 3.1, we have

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \langle |T(x_i)|, y_i^* \rangle &= \sup_n \sum_{i=1}^n \langle |T(x_i)|, y_i^* \rangle \leq \|T\|_{\mathcal{D}_{p,q}^+} \sup_n \|(x_i)_{i=1}^n\|_q \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,\omega} \\ &\leq \|T\|_{\mathcal{D}_{p,q}^+} \|(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}\|_q \|(y_i^*)_{i \in \mathbb{N}^*}\|_{p^*,\omega}, \end{aligned}$$

which implies

$$\sup_{(y_i^*)_{i \in \mathbb{N}^*} \in B_{[\ell_{p^*,|\omega|}(Y^*)]^+}} \sum_{i=1}^{\infty} \langle |T(x_i)|, y_i^* \rangle \leq \|T\|_{\mathcal{D}_{p,q}^+} \|(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}\|_q.$$

Consequently, we obtain

$$\|(T(x_i))_{i \in \mathbb{N}^*}\|_{\ell_p^\pi(Y)} = \sup_{(y_i^*)_{i \in \mathbb{N}^*} \in B_{[\ell_{p^*,|\omega|}(Y^*)]^+}} \sum_{i=1}^{\infty} \langle |T(x_i)|, y_i^* \rangle \leq \|T\|_{\mathcal{D}_{p,q}^+} \|(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}\|_q,$$

and therefore \widehat{T} is continuous with norm $\leq \|T\|_{\mathcal{D}_{p,q}^+}$.

In order to prove sufficiency, suppose \widehat{T} is well-defined and continuous and assume that $T \notin \mathcal{D}_{p,q}^+(E, Y)$. Then for each $n \in \mathbb{N}^*$, we may choose a finite sequence $(x_{i,n})_{i=1}^{m_n} \subset E$, such that $\|(x_{i,n})_{i=1}^{m_n}\|_q \leq 1$ and $\|(T(x_{i,n}))_{i=1}^{m_n}\|_{\ell_p^\pi(Y)} > 2^n$, which implies

$$\sum_{i=1}^{m_n} \langle |T(x_{i,n})|, y_{i,n}^* \rangle > 2^{2n} \tag{3.4}$$

for some $(y_{i,n}^*)_{i=1}^{m_n} \in (\ell_{p^*,|\omega|}(Y^*))^+$, such that $\|(y_{i,n}^*)_{i=1}^{m_n}\|_{p^*,\omega} \leq 1$. Let $(z_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ be the sequence

$$\begin{aligned} &\left(\left(\frac{x_{i,1}}{2^1} \right)_{i=1}^{m_1}, \left(\frac{x_{i,2}}{2^2} \right)_{i=1}^{m_2}, \dots, \left(\frac{x_{i,n}}{2^n} \right)_{i=1}^{m_n}, \dots \right) \\ &= \left(\frac{x_{1,1}}{2^1}, \frac{x_{2,1}}{2^1}, \dots, \frac{x_{m_1,1}}{2^1}, \frac{x_{1,2}}{2^2}, \frac{x_{2,2}}{2^2}, \dots, \frac{x_{m_2,2}}{2^2}, \dots, \frac{x_{1,n}}{2^n}, \frac{x_{2,n}}{2^n}, \dots, \frac{x_{m_n,n}}{2^n}, \dots \right). \end{aligned}$$

We have

$$\|(z_j)_{j \in \mathbb{N}^*}\|_q = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_j} \left\| \frac{x_{i,j}}{2^j} \right\|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{jq}} \|(x_{i,j})_{i=1}^{m_j}\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{jq}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq 1.$$

Then, $(z_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \in \ell_q(E)$. However, $\widehat{T}((z_j)_{j \in \mathbb{N}^*}) \notin \ell_p^\pi(Y)$. In order to see this, consider the sequences

$$(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}^*} = \left(\left(\frac{y_{i,1}^*}{2^1} \right)_{i=1}^{m_1}, \left(\frac{y_{i,2}^*}{2^2} \right)_{i=1}^{m_2}, \dots, \left(\frac{y_{i,n}^*}{2^n} \right)_{i=1}^{m_n}, \dots \right).$$

Clearly $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \in B_{(\ell_{p^*,|\omega|}(Y^*))^+}$. Then

$$\begin{aligned} \|(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}^*}\|_{p^*,|\omega|} &= \sup_{y \in B_{Y^+}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_j} \left\langle x, \frac{y_{i,j}^*}{2^j} \right\rangle^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= \sup_{y \in B_{Y^+}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{jp^*}} \sum_{i=1}^{m_j} \langle x, y_{i,j}^* \rangle^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{jp^*}} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq 1. \end{aligned}$$

By (3.4) it turns out that

$$\begin{aligned} \|\widehat{T}((z_j)_{j \in \mathbb{N}^*})\|_{\ell_p^\pi(Y)} &= \|(T(z_j))_{j \in \mathbb{N}^*}\|_{\ell_p^\pi(Y)} = \sup_{\|(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}^*}\|_{p^*,\omega} \leq 1} \sum_{j=1}^{\infty} \langle |T(z_j)|, \xi_j \rangle \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \langle |T(z_j)|, \varphi_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} \sum_{i=1}^{m_j} \langle |T(x_{i,j})|, y_{i,j}^* \rangle = \infty, \end{aligned}$$

which according (1.5) is a contradiction with the fact that \widehat{T} maps $\ell_q(X)$ (continuously) into $\ell_p^\pi(Y)$. Since

$$\|(T(x_i))_{i \in \mathbb{N}^*}\|_{\ell_p^\pi(Y)} = \|\widehat{T}((x_i)_{i \in \mathbb{N}^*})\|_{\ell_p^\pi(Y)} \leq \|\widehat{T}\| \|(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}\|_q,$$

we have $\|T\|_{\mathcal{D}_{p,q}^+} \leq \|\widehat{T}\|$. \triangleright

In the following result, we characterize the class of positive summing linear operators and positive strongly summing linear operators by utilizing the adjoint operator. For the proof of this result, we will utilize the duality of lattice sequence spaces. Theorem 3.3 was established in [3, Theorem 4.6], and the proof provided there is direct. Using Theorem 1.3, the formula (1.2), Proposition 3.2 and taking into account that the adjoint of the $\widehat{T} : \ell_q(E) \rightarrow \ell_p^\pi(Y)$ can be identified with the operator $\widehat{T}^* : \ell_{p^*,|\omega|}(Y^*) \rightarrow \ell_{q^*}(E^*)$; $\widehat{T}^*((y_i^*)_{i \in \mathbb{N}^*}) = (T^*(y_i^*))_{i \in \mathbb{N}^*}$, we provide an alternative proof of the results in Theorem 3.3.

Theorem 3.3. *Let $T : E \rightarrow Y$ be an operator and $1 \leq q \leq p \leq \infty$.*

(1) *The operator T belongs to $\Lambda_{p,q}(X, F)$ if and only if its adjoint T^* belongs to $\mathcal{D}_{q^*,p^*}^+(F^*, X^*)$. Furthermore, $\|T\|_{\Lambda_{p,q}} = \|T^*\|_{\mathcal{D}_{q^*,p^*}^+}$.*

(2) *The operator T belongs to $\mathcal{D}_{p,q}^+(E, Y)$ if and only if its adjoint T^* belongs to $\Lambda_{q^*,p^*}(Y^*, E^*)$. Furthermore, $\|T\|_{\mathcal{D}_{p,q}^+} = \|T^*\|_{\Lambda_{q^*,p^*}}$.*

\triangleleft (1) Let $T \in \mathcal{L}(X, F)$ and $T^* \in \mathcal{L}(F^*, X^*)$ its adjoint. Suppose that $T \in \Lambda_{p,q}(X, F)$, then by Theorem 2.2 $\widehat{T} : \ell_{q,|\omega|}^u(X) \longrightarrow \ell_p(F)$ is continuous with $\|T\|_{\Lambda_{p,q}} = \|\widehat{T}\|$. By (1.2) and Theorem 1.3, the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccc} \ell_p(F)^* & \xrightarrow{\widehat{T}^*} & \ell_{q,|\omega|}^u(X)^* \\ J_1 \uparrow & & \uparrow J_2 \\ \ell_{p^*}(F^*) & \xrightarrow{\widehat{T}^*} & \ell_{q^*}^\pi(X^*) \end{array}$$

i. e., $\widehat{T}^* \circ J_1 = J_2 \circ \widehat{T}^*$, where J_1 is an isometric isomorphism and J_2 is an isometric lattice isomorphism, such that $J_i((z_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*})((z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) = f((z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) = \sum_{n=1}^\infty \langle z_n, z_n^* \rangle$, $i = 1, 2$, with the inverse I_i , defined by $I_i(f) = (f \circ I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (z_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$. In fact, the map \widehat{T}^* , defined by $(y_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \mapsto (T^*(y_n^*))_{n \in \mathbb{N}^*}$, let $(y_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_{p^*}(F^*)$, then for all $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_{q,|\omega|}^u(X)$,

$$\begin{aligned} & (\widehat{T}^* \circ J_1)((y_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*})((x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) = J_1((y_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}) \left(\widehat{T}((x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) \right) \\ &= J_1((y_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*})((T(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}) \sum_{n=1}^\infty \langle y_n^*, T(x_n) \rangle \sum_{n=1}^\infty \langle T^*(y_n^*), x_n \rangle = J_2((T^*(y_n^*))_{n \in \mathbb{N}^*})((x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) \\ &= J_2(\widehat{T}^*((y_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}))((x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) = (J_2 \circ \widehat{T}^*)((y_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*})((x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}), \end{aligned}$$

i. e., $\widehat{T}^* \circ J_1 = J_2 \circ \widehat{T}^*$. Then, \widehat{T} is well-defined and continuous if and only if \widehat{T}^* is well-defined and continuous. Consequently, from Proposition 3.2, it follows that T is positive (p, q) -summing, if and only if its adjoint $T^* \in \mathcal{L}(F^*, X^*)$ is strongly positive (q^*, p^*) -summing. Furthermore, $\|T\|_{\Lambda_{p,q}} = \|T^*\|_{\mathcal{D}_{q^*,p^*}^+} = \|\widehat{T}\|$.

(2) Let $T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(E, Y)$. Then, by Proposition 3.2, the operator $\widehat{T} : \ell_q(E) \longrightarrow \ell_p^\pi(Y)$ is continuous with $\|T\|_{\mathcal{D}_{p,q}^+} = \|\widehat{T}\|$. Using Theorem 1.3, and taking into account that the adjoint of the operator $\widehat{T} : \ell_q(E) \longrightarrow \ell_p^\pi(Y)$ can be identified with the operator

$$\widehat{T}^* : \ell_{p^*,|\omega|}(Y^*) \longrightarrow \ell_{q^*}(E^*) \text{ given by } \widehat{T}^*((y_i^*)_{i \in \mathbb{N}^*}) = (T^*(y_i^*))_{i \in \mathbb{N}^*},$$

we obtain \widehat{T} and \widehat{T}^* are well-defined and continuous. Therefore, it follows from Proposition 2.1 that T is positive strongly (p, q) -summing if and only if its adjoint T^* is positive (q^*, p^*) -summing, and $\|T\|_{\mathcal{D}_{p,q}^+} = \|T^*\|_{\Lambda_{q^*,p^*}} = \|\widehat{T}\|$. \triangleright

Corollary 3.4. *Let $1 \leq q \leq p \leq \infty$.*

(1) *The operator $T \in \mathcal{L}(E, Y)$ belongs to $\mathcal{D}_{p,q}^+(E, Y)$ if and only if T^{**} belongs to $\mathcal{D}_{p,q}^+(E^{**}, Y^{**})$. Furthermore,*

$$\|T\|_{\mathcal{D}_{p,q}^+} = \|T^{**}\|_{\mathcal{D}_{p,q}^+}.$$

(2) *The operator $T \in \mathcal{L}(X, F)$ belongs to $\Lambda_{p,q}(X, F)$ if and only if T^{**} belongs to $\Lambda_{p,q}(X^{**}, F^{**})$. Furthermore,*

$$\|T\|_{\Lambda_{p,q}} = \|T^{**}\|_{\Lambda_{p,q}}.$$

We say that an operator $T : E \longrightarrow Y$ is called positive (p, q) -majorizing (see [10] for $p = q$) if there exists a constant $C > 0$, such that

$$\left(\sum_{i=1}^n |\langle T(z_i), y_i^* \rangle|^{q^*} \right)^{\frac{1}{q^*}} \leq C \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, \omega} \quad (3.5)$$

for all $(z_i)_{i=1}^n$ in B_E and $(y_i^*)_{i=1}^n$ in $(Y^*)^+$. The space of all positive (p, q) -majorizing from E to Y is denoted by $\Upsilon_{p,q}(E, Y)$. This space becomes a Banach space with the norm $\|\cdot\|_{\Upsilon_{p,q}}$ given by the infimum of the constants C satisfying (3.5). In [10], the authors proved the duality relationships between positive p -summing operators and positive p -majorizing operators. It was known [3] that an operator $T : X \rightarrow F$ is positive p -summing if and only if T^* is positive strongly p^* -summing. Similarly, an operator $T : E \rightarrow Y$ is positive strongly p -summing if and only if T^* is positive p^* -summing. In the following, we directly prove that the concept of positive strongly p -summing and the concept of positive p -majorizing are equivalent.

Theorem 3.5. *Let $T : E \rightarrow Y$ be an operator. The following conditions are equivalent:*

- (1) T is positive (p, q) -majorizing.
- (2) T is positive strongly (p, q) -summing.

◁ Suppose that T is positive (p, q) -majorizing, given any finite sequence $(x_i)_{i=1}^n$ in E and $(y_i^*)_{i=1}^n$ in $(Y^*)^+$, we get

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^n \|x_i\| \left| \left\langle T \left(\frac{x_i}{\|x_i\|} \right), y_i^* \right\rangle \right| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n \left| \left\langle T \left(\frac{x_i}{\|x_i\|} \right), y_i^* \right\rangle \right|^{q^*} \right)^{\frac{1}{q^*}} \leq \|T\|_{\Upsilon_p} \|(x_i)_{i=1}^n\|_q \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, |\omega|}. \end{aligned}$$

This implies that T is positive strongly (p, q) -summing and $\|T\|_{D_{p,q}^+} \leq \|T\|_{\Upsilon_{p,q}}$.

Conversely, assume that T is positive strongly (p, q) -summing. Let $(z_i)_{i=1}^n$ be a finite sequence in B_E and $(y_i^*)_{i=1}^n$ in $(Y^*)^+$, we have

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^n |\langle T(z_i), y_i^* \rangle|^{q^*} \right)^{\frac{1}{q^*}} = \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^n \in B_{\ell_q}} \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle T(z_i), y_i^* \rangle \right| \\ &= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^n \in B_{\ell_q}} \left| \sum_{i=1}^n \langle T(\lambda_i z_i), y_i^* \rangle \right| \leq \|T\|_{D_{p,q}^+} \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^n \in B_{\ell_q}} \|(\lambda_i z_i)_{i=1}^n\|_q \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, |\omega|} \\ &\leq \|T\|_{D_{p,q}^+} \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^n \in B_{\ell_q}} \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_q \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, |\omega|} = \|T\|_{D_{p,q}^+} \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, |\omega|}. \end{aligned}$$

This means that T is positive (p, q) -majorizing and $\|T\|_{\Upsilon_{p,q}} \leq \|T\|_{D_{p,q}^+}$. ▷

Corollary 3.6. *$T \in \mathcal{L}(E, Y)$ is positive p -majorizing if and only if T is positive strongly p -summing.*

4. Positive Cohen (p, q) -Nuclear Operators

Cohen [6] introduced the concept of p -nuclear operators, which was extended to the Cohen (p, q) -nuclear operators by Apiola [14]. Let $1 < p, q \leq \infty$. An operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ is Cohen (p, q) -nuclear if $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_p \langle F \rangle$ whenever $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_{q, \omega}(E)$. We denote the space of Cohen (p, q) -nuclear operators by $\mathcal{CN}_{p,q}(E, F)$. According to [6, 14], the following conditions are equivalent for a linear operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$:

$$T \in \mathcal{CN}_{p,q}(E, F) \iff \widehat{T} \in \mathcal{L}(\ell_{q, \omega}(E), \ell_p \langle F \rangle), \quad (4.1)$$

where $\widehat{T}((x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) = (T(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ for every $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell_{q, \omega}(E)$.

In this section, we introduce the positive Cohen (p, q) -nuclear operators. For $p = q$, these operators are closely linked to positive strongly p -summing and positive p -summing operators, as stated in Kwapien's Factorization Theorem (see [16, Proposition 2]). Here, we distinguish three cases.

DEFINITION 4.1. Let $1 \leq q \leq p < \infty$ and X, Y be Banach lattices, E and F be Banach spaces.

(a) An operator T from a Banach lattice X to a Banach space F is left positive Cohen (p, q) -nuclear if there exists a constant $C > 0$, such that for all $(x_i)_{i=1}^n \subset X_+$, we have (see [17])

$$\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_{\ell_p\langle F \rangle} \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,|\omega|}. \quad (4.2)$$

(b) An operator T from a Banach space E to a Banach lattice Y is right positive Cohen (p, q) -nuclear if there exists a constant $C > 0$, such that for all $(x_i)_{i=1}^n \subset E$, we have

$$\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_{\ell_p^\pi(Y)} \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,\omega}. \quad (4.3)$$

(c) An operator T from a Banach lattice X to a Banach lattice Y is positive Cohen (p, q) -nuclear if there exists a constant $C > 0$, such that for all $(x_i)_{i=1}^n \subset X$, we have

$$\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_{\ell_p^\pi(Y)} \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,|\omega|},$$

see [10, Definition 3.1] for $r = 1$.

The class of all positive Cohen (p, q) -nuclear operators from X to Y (respectively X to F and E to Y) is denoted by $\mathcal{CN}_{p,q}^+(X, Y)$ (respectively $\mathcal{CN}_{p,q}^{left,+}(X, F)$ and $\mathcal{CN}_{p,q}^{right,+}(E, Y)$).

We put $\|T\|_{\mathcal{CN}_{p,q}^+} = \inf C$.

The proof of the following results follows similar lines as in Proposition 3.2 and Proposition 3.22 in [17] and is omitted.

Proposition 4.2. Let $1 \leq q \leq p < \infty$ and X, Y be Banach lattices, E and F be Banach spaces.

(1) $T \in \mathcal{CN}_{p,q}^{left,+}(X, F)$ if and only if $\widehat{T} : \ell_{q,|\omega|}(X) \longrightarrow \ell_p\langle F \rangle$ is a well-defined continuous linear operator [17, Proposition 3.22].

(2) $T \in \mathcal{CN}_{p,q}^{right,+}(E, Y)$ if and only if $\widehat{T} : \ell_{q,\omega}(E) \longrightarrow \ell_p^\pi(Y)$ is a well-defined continuous linear operator.

(3) $T \in \mathcal{CN}_{p,q}^+(X, Y)$ if and only if $\widehat{T} : \ell_{q,|\omega|}(X) \longrightarrow \ell_p^\pi(Y)$ is a well-defined continuous linear operator.

A result by Apiola states that the adjoint of a Cohen (p, q) -nuclear linear operator is Cohen (q^*, p^*) -nuclear linear operator. When $p = q$, this result appears in [6]. Utilizing Theorem 1.3, (1.1) and (1.2) and taking into account that the adjoint of the operators $\widehat{T} : \ell_{q,|\omega|}(X) \longrightarrow \ell_p\langle F \rangle$, $\widehat{T} : \ell_{q,\omega}(E) \longrightarrow \ell_p^\pi(Y)$ and $\widehat{T} : \ell_{q,|\omega|}(X) \longrightarrow \ell_p^\pi(Y)$ can be identified with the operators

$$\widehat{T}^* : \ell_{p^*,\omega}(F^*) \longrightarrow \ell_{q^*}^\pi(X^*), \quad \widehat{T}^* : \ell_{q,|\omega|}(Y^*) \longrightarrow \ell_{q^*}\langle E^* \rangle \quad \text{and} \quad \widehat{T}^* : \ell_{p^*,|\omega|}(Y^*) \longrightarrow \ell_{q^*}^\pi(X^*),$$

defined as $\widehat{T}^*((x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}) = (T^*(x_n^*))_{n \in \mathbb{N}^*}$, we extend this to positive Cohen (p, q) -nuclear operators.

Theorem 4.3. Let $1 \leq q \leq p < \infty$ and X, Y be Banach lattices, E and F be Banach spaces.

(1) The operator T belongs to $\mathcal{CN}_{p,q}^{left,+}(X, F)$ if and only if its adjoint T^* belongs to $\mathcal{CN}_{q^*,p^*}^{right,+}(F^*, X^*)$. Furthermore,

$$\|T\|_{\mathcal{CN}_{p,q}^{left,+}} = \|T^*\|_{\mathcal{CN}_{q^*,p^*}^{right,+}}.$$

(2) The operator T belongs to $\mathcal{CN}_{p,q}^{right,+}(E, Y)$ if and only if its adjoint T^* belongs to $\mathcal{CN}_{q^*,p^*}^{left,+}(Y^*, E^*)$. Furthermore,

$$\|T\|_{\mathcal{CN}_{p,q}^{right,+}} = \|T^*\|_{\mathcal{CN}_{q^*,p^*}^{left,+}}.$$

(3) The operator T belongs to $\mathcal{CN}_{p,q}^+(X, Y)$ if and only if its adjoint T^* belongs to $\mathcal{CN}_{q^*,p^*}^+(Y^*, X^*)$. Furthermore,

$$\|T\|_{\mathcal{CN}_{p,q}^+} = \|T^*\|_{\mathcal{CN}_{q^*,p^*}^+}.$$

REMARK 4.4. In a recent paper [10, Definition 3.1], the authors introduced the concept of positive (p, q) -dominated, where $1/p + 1/q = 1/r$, defined between Banach lattices. Within this framework, both the Pietsch Domination Theorem and the Kwapien Factorization Theorem are established. This concept precisely aligns with the positive Cohen p -nuclear concept presented here when $r = 1$. Thus, by referring the reader to the papers [10, Theorem 3.3 and Theorem 3.7], we can also derive the well-known theorems, namely Pietsch's Domination Theorem and Kwapien's Factorization Theorem, for the other two concepts proposed here (for left and right positive Cohen p -nuclear). Notice that Kwapien's Factorization Theorem ensures that positive Cohen p -nuclear are closely related to positive strongly p -summing and positive p -summing operators.

5. Tensor Characterizations

Now we are interested to characterize the aforementioned classes using abstract summability properties linked to the continuity of tensor product operators defined within vector-valued sequence spaces.

The Wittstock injective tensor product and Fremlin projective tensor product. For Banach lattices X and Y , let $X \otimes Y$ denote the algebraic tensor product of X and Y . For each $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$, define $T_u : X^* \rightarrow Y$ by $T_u(x^*) = \sum_{i=1}^n x^*(x_i)y_i$ for each $x^* \in X^*$. The injective cone on $X \otimes Y$ is defined to be

$$C_i = \left\{ u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y : T_u(x^*) \in Y_+ \forall x^* \in X_+^* \right\}.$$

Wittstock [18, 19] introduced the positive injective tensor norm on $X \otimes Y$ as follows:

$$\|u\|_i = \inf \left\{ \sup \left\{ \|T_v(x^*)\| : x^* \in B_{X_+^*} \right\} : v \in C_i, u \pm v \in C_i \right\}.$$

Let $X \widetilde{\otimes}_i Y$ denote the completion of $X \otimes Y$ with respect to $\|\cdot\|_i$. Then $X \widetilde{\otimes}_i Y$ with C_i as its positive cone is a Banach lattice (also see [20, Section 3.8]), called the Wittstock injective tensor product of X and Y . The projective cone on $X \otimes Y$ is defined to be

$$C_p = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i : x_i \in X_+, y_i \in Y_+, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Fremlin [21, 22] introduced the positive projective tensor norm on $X \otimes Y$ as follows:

$$\|u\|_{|\pi|} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \phi(x_i, y_i) \right| : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y, \phi \in M \right\},$$

where M is the set of all positive bilinear functional ϕ on $X \times Y$ with $\|\phi\| \leq 1$. Let $X \widehat{\otimes}_F Y$ denote the completion of $X \otimes Y$ with respect to $\|\cdot\|_{|\pi|}$. Then $X \widehat{\otimes}_F Y$ with C_p as its positive cone is a Banach lattice (also see [20, Sect. 3.8]), called the Fremlin projective tensor product of X and Y . Let p be real numbers, such that $1 < p < \infty$, then, due to [5, 4] we have

(P₁) $\ell_{p,|\omega|}^u(X)$ is isometrically lattice isomorphic to $\ell_p \widehat{\otimes}_i X$.

(P₂) $\ell_p^\pi(X)$ is isometrically lattice isomorphic to $\ell_p \widehat{\otimes}_F X$.

Let $\ell_p \widehat{\otimes}_\epsilon E$ and $\ell_p \widehat{\otimes}_\pi E$ denote the Grothendieck injective and projective tensor product of ℓ_p with a Banach space E , respectively (see Ryan [23]). It is well known that the space $\ell_{p,\omega}^u(E)$ is isometrically isomorphic to $\ell_p \widehat{\otimes}_\epsilon E$ whereas $\ell_p(X)$ is isometrically isomorphic to $\ell_p \otimes_{\Delta_p} X$ (see [7, 12.9] and $\ell_p \langle E \rangle$ is isometrically isomorphic to $\ell_p \widehat{\otimes}_\pi E$ (see [6, Proposition 2.2.5 and Proposition 2.2.6], [24, Corrolary 3.9] and [25]). Given a linear operator $T : X \rightarrow Y$, its associated tensor product operator $I \otimes T : \ell_p \otimes X \rightarrow \ell_p \otimes Y$ is defined by

$$I \otimes T \left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i \right) := \sum_{i=1}^n e_i \otimes T(x_i),$$

and this map is clearly linear.

We apply now Theorem 2.2 and (P₁) to the class of positive (p, q) -summing operators to get new characterizations in terms of tensor product transformations.

Corollary 5.1. *Let $1 < p < \infty$ and $T \in \mathcal{L}(X, F)$. The following conditions are equivalent:*

- (1) T is positive (p, q) -summing operator.
- (2) The induced linear operator $I \otimes T : \ell_q \widehat{\otimes}_i X \rightarrow \ell_p \widehat{\otimes}_\pi F$ is continuous.

In this case $\|T\|_{\Lambda_{p,q}} = \|I \otimes T\|$.

According to (P₁) and Theorem 3.2, we obtain characterizations in terms of tensor product transformations for the class of positive strongly (p, q) -summing operators.

Corollary 5.2. *Let $1 < p \leq \infty$ and $T \in \mathcal{L}(E, Y)$. The following properties are equivalent:*

- (1) T is positive strongly p -summing.
- (2) The induced linear operator $I \otimes T : \ell_p \widehat{\otimes}_{\Delta_p} E \rightarrow \ell_p \widehat{\otimes}_F Y$ is continuous.

In this case $\|T\|_{\mathcal{S}_{p,q}^+} = \|I \otimes T\|$.

It is known from [6, Theorem 2.1.3] that $T \in \mathcal{L}(E, F)$ is Cohen p -nuclear if and only if the mapping $I \otimes T : \ell_p \widehat{\otimes}_\epsilon E \rightarrow \ell_p \widehat{\otimes}_\pi F$ is continuous. Utilizing Proposition 4.2, (P₁) and (P₂), we extend this result as follows.

Corollary 5.3. *Let $1 \leq q \leq p < \infty$ and X, Y be Banach lattices, E and F be Banach spaces.*

(a₁) $T \in \mathcal{L}(X, F)$ is left positive Cohen (p, q) -nuclear if and only if the mapping $I \otimes T : \ell_q \widehat{\otimes}_i X \rightarrow \ell_p \widehat{\otimes}_\pi F$ is continuous.

(a₂) $T \in \mathcal{L}(E, Y)$ is positive right Cohen (p, q) -nuclear if and only if the mapping $I \otimes T : \ell_q \widehat{\otimes}_\epsilon E \rightarrow \ell_p \widehat{\otimes}_F Y$ is continuous.

(a₃) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ is positive Cohen (p, q) -nuclear if and only if the mapping $I \otimes T : \ell_q \widehat{\otimes}_i X \rightarrow \ell_p \widehat{\otimes}_F Y$ is continuous.

Acknowledgments. We would like to thank the referees for their careful reading of the manuscript and for their valuable suggestions. Also, we acknowledge with thanks the support of the General Direction of Scientific Research and Technological Development (DGRSDT), Algeria.

References

1. Blasco, O. A Class of Operators from a Banach Lattice into a Banach Space, *Collectanea Mathematica*, 1986, vol. 37, Fasciculo. 1, pp. 13–22.
2. Zhukova, O. I. On Modifications of the Classes of p -Nuclear, p -Summing and p -Integral Operators, *Siberian Mathematical Journal*, 1998, vol. 30, no. 5, pp. 894–907.
3. Achour, D. and Belacel, A. Domination and Factorization Theorems for Positive Strongly p -Summing Operators, *Positivity*, 2014, vol. 18, no. 4, pp. 785–804. DOI: 10.1007/s11117-014-0276-6.
4. Labuschagne, C. C. A. Riesz Reasonable Cross Norms on Tensor Products of Banach Lattices, *Quaestiones Mathematicae*, 2004, vol. 27, pp. 243–266. DIO: 10.2989/16073600409486098.
5. Bu, Q. and Buskes, G. The Radon–Nikodym Property for Tensor Products of Banach Lattices, *Positivity*, 2006, vol. 10, no. 2, pp. 365–390. DOI: 10.1007/s11117-005-0025-y.
6. Cohen, J. S. Absolutely p -Summing, p -Nuclear Operators and Their Conjugates, *Mathematische Annalen*, 1973, vol. 201, pp. 177–200. DOI: 10.1007/BF01427941.
7. Defant, A. and Floret, K. *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 176, Amsterdam, North-Holland, 1993.
8. Pietsch, A. *Operator Ideals*, *Mathematische Monographien*, vol. 16, VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.
9. Achour, D., Alouani, A., Rueda, P. and Sánchez Pérez, E. A. Tensor Characterizations of Summing Polynomials, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2018, vol. 15, article no. 127. DOI: 10.1007/s00009-018-1175-z.
10. Chen, D., Belacel A. and Chávez-domínguez, J. A. Positive p -Summing Operators and Disjoint p -Summing Operators, *Positivity*, 2021, vol. 25, pp. 1045–1077. DOI: 10.1007/s11117-020-00798-y.
11. Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I and II. Sequence Spaces and Function Spaces*, Berlin, Springer, 1996. DOI: 10.1007/978-3-662-53294-2.
12. Schaefer, H. H. *Banach Lattices and Positive Operators*, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1974.
13. Jarchow, H. *Locally Convex Spaces*, Stuttgart, B. G. Teubner, 1981.
14. Apiola, H. Duality Between Spaces of p -Summable Sequences, (p, q) -Summing Operators and Characterizations of Nuclearity, *Mathematische Annalen*, 1976, vol. 219, pp. 53–64. DOI: 10.1007/BF01360858.
15. Donghai, J. Craddock, M. and Bu, Q. Reflexivity and the Grothendieck Property for Positive Tensor Products of Banach Lattices – I, *Positivity*, 2010, vol. 14, pp. 59–68. DOI: 10.1007/s11117-009-0004-9.
16. Kwapien, S. On Operators Factorizable Through L_p Space, *Bulletin de la Société mathématique de France. Mémoire*, 1972, no. 31–32, pp. 215–225.
17. Schoeman, I. M. *A Theory of Multiplier Functions and Sequences and its Applications to Banach Spaces*, North-Holland Mathematics Studies, Diss. North-West University, 2005.
18. Wittstock, G. Eine Bemerkung über Tensorprodukte von Banachverbänden, *Archiv der Mathematik*, 1974, vol. 25, pp. 627–634. DOI: 10.1007/BF01238739.
19. Wittstock, G. Ordered Normed Tensor Products, *Foundations of Quantum Mechanics and Ordered Linear Spaces. Lecture Notes in Physics*, vol. 29, Springer, Berlin, Heidelberg, 1974. DOI: 10.1007/3-540-06725-6_10.
20. Meyer-Nieberg, P. *Banach Lattices*, Berlin, Springer-Verlag, 1991. DOI: 10.1007/978-3-642-76724-1.
21. Fremlin, D. H. Tensor Products of Archimedean Vector Lattices, *American Journal of Mathematics*, 1972, vol. 94, no. 3, pp. 778–798. DOI: 10.2307/2373758.
22. Fremlin, D. H. Tensor Products of Banach Lattices, *Mathematische Annalen*, 1974, vol. 211, pp. 87–106. DOI: 10.1007/BF01344164.
23. Ryan, R. A. *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, London, Springer, 2002. DOI: 10.1007/978-1-4471-3903-4.
24. Jan, H. Fourie and Röntgen, I. M. Banach Space Sequences and Projective Tensor Products, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, vol. 277, pp. 629–644.
25. Bu, Q. and Diestel, J. Observations about the Projective Tensor Product of Banach Spaces, I – $\ell_p \widehat{\otimes} X$, $1 < p < \infty$, *Quaestiones Mathematicae*, 2001, vol. 24, no. 4, pp. 519–533. DOI: 10.1080/16073606.2001.9639238.

Received December 28, 2024

ACHOUR DAHMANE

Laboratory of Functional Analysis and Geometry of Spaces,
Faculty of Mathematics and Computer Science, University of M'Sila,
M'Sila 28000, Algeria,

Professor of the Department of Mathematics

E-mail: dahmane.achour@univ-msila.dz

<https://orcid.org/0000-0003-0916-862X>

TOUFIK TIAIBA

Laboratory of Functional Analysis and Geometry of Spaces,
University of M'Sila, High College of Food Sciences and Food Industries,
Algiers 16200, Algeria

E-mail: t.tiaiba@essaia.dz

<https://orcid.org/0009-0004-0040-5224>

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 4, С. 21–37

БАНАХОВЫ РЕШЕТКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И СУММИРУЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Дахман А.¹, Туфик Т.²

¹ Университет Мохамеда Будиафа М'Сила,

Лаборатория функционального анализа и геометрии пространств, М'Сила 28000, Алжир;

² Университет Мохамеда Будиафа М'Сила,

Высший колледж пищевых наук и пищевой промышленности, М'Сила, Алжир

E-mail: dahmane.achour@univ-msila.dz, t.tiaiba@essaia.dz

Аннотация. Данная работа относится к теории положительных суммирующих операторов между банаховыми решетками, исследуя взаимодействие между специализированными пространствами последовательностей, операторными идеалами и методами тензорного произведения. Мы фокусируемся на пространствах положительных сильно p -суммируемых последовательностей $\ell_p^\pi(X)$ и положительных безусловно p -суммируемых последовательностей $\ell_{p,|\omega|}^u(X)$, используя их наряду с банаховой решеткой положительных слабо p -суммируемых последовательностей $\ell_{p,|\omega|}(X)$. Эти инструменты применяются для представления и характеристики трех основных классов: положительных сильно (p, q) -суммирующих операторов, положительных (p, q) -суммирующих операторов и положительных (p, q) -ядерных операторов Козна. Наше исследование позволяет получить новые свойства, включая характеристику положительных (p, q) -суммирующих операторов как тех, которые отображают положительные безусловно p -суммируемые последовательности в q -суммируемые последовательности, а также идентификацию положительного класса сильно (p, q) -суммирующих операторов с классом (p, q) -мажоризирующих операторов. Центральным достижением этой работы является унифицированная характеристика этих классов операторов посредством непрерывности тензорного произведения — метода, хорошо зарекомендовавшего себя для линейных операторных идеалов, который мы теперь распространяем на контекст банаховых решеток. Мы характеризуем каждый класс непрерывностью ассоциированного тензорного оператора $I \otimes T : \ell_p \otimes_\alpha X \rightarrow \ell_q \otimes_\beta Y$ для соответствующих тензорных норм α и β . Этот подход углубляет связи между суммируемостью, структурой порядка банаховых решеток и тензорными нормами.

Ключевые слова: решеточные пространства последовательностей, положительные (p, q) -суммирующие операторы, положительные сильно (p, q) -суммирующие операторы.

AMS Subject Classification: 46B28, 46T99, 47H99, 47L20.

Образец цитирования: *Dahmane, A. and Toufik, T.* Lattice Sequence Spaces and Summing Mappings // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 4.—С. 21–37 (in English). DOI: 10.46698/r7902-6696-2150-a.

УДК 517.53

DOI 10.46698/m9533-0085-1293-h

ОЦЕНКА ВЕРХНЕЙ ПЛОТНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СИСТЕМЫ ГАБОРА#

К. П. Исаев¹, З. Ю. Фазуллин¹, Р. С. Юлмухаметов²

¹ Уфимский университет науки и технологий,
Россия, 450076, Уфа, ул. Заки Валиди, 32;

² Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112

E-mail: orbit81@list.ru, fazullinzu@mail.ru, yulmukhametov@mail.ru

Аннотация. В работе [1] было показано, что верхняя плотность дискретного множества Λ , для которого система Габора G_Λ полна в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, не может быть меньше $\frac{1}{3\pi}$. Из более ранних работ известно также, что при регулярности распределения показателей верхняя плотность не менее $\frac{2}{\pi}$. В данной статье мы уточняем оценку при отсутствии условия регулярности распределения: верхняя плотность дискретного множества Λ , для которого система Габора G_Λ полна в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, не может быть меньше $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$. Улучшение оценок достигнуто за счет более методичного применения симметризации данного множества показателей системы Габора с использованием известного эффекта уменьшения роста модуля целой функции при более симметричном расположении ее нулей. На конкретных примерах обсуждается также возможность улучшения полученной оценки в пределах предлагаемого метода.

Ключевые слова: целые функции, система Габора, гильбертовы пространства, полнота, минимальность, множества единственности.

AMS Subject Classification: 42C15, 30D15.

Образец цитирования: Исаев К. П., Фазуллин З. Ю., Юлмухаметов Р. С. Оценка верхней плотности показателей системы Габора // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 4.—С. 38–45. DOI: 10.46698/m9533-0085-1293-h.

1. Введение

Для функции $\varphi(x) = 2^{\frac{1}{4}}e^{-\pi x^2}$ и для множества $\Lambda = \{(t, w) \in \mathbb{R}^2\}$ рассмотрим систему Габора G_Λ , состоящую из функций

$$\rho_{t,w}\varphi(x) = e^{2i\pi wx}\varphi(x-t), \quad (t, w) \in \Lambda.$$

Подробный обзор исследований по теме систем Габора приведен, например, в работе [2]. Далее мы будем отождествлять \mathbb{R}^2 с комплексной плоскостью \mathbb{C} . Верхней плотностью (Бьерлинга — Ландау) дискретного множества $\Lambda \subset \mathbb{C}$ называется величина

$$D_+(\Lambda) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(\Lambda \cap B(0, r))}{\pi r^2},$$

Исследование первых двух авторов выполнено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2025-1637. Исследование третьего автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 25-21-00044, <https://rscf.ru/project/25-21-00044/>.

© 2025 Исаев К. П., Фазуллин З. Ю., Юлмухаметов Р. С.

где через $B(a, r)$ обозначен круг радиуса r с центром в точке a . Соответственно, величина

$$D_-(\Lambda) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(\Lambda \cap B(0, r))}{\pi r^2}$$

называется *нижней плотностью*. В работе [3] показано, что если система G_Λ полна и минимальна в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ и множество Λ имеет регулярное распределение, то плотность множества находится между числами $\frac{2}{\pi}$ и 1. Регулярность распределения множества Λ означает, что за исключением, возможно, счетного множества точек θ_1, θ_2 существует угловая плотность

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(\Lambda \cap \{\lambda : |\lambda| < r, \theta_1 < \arg \lambda < \theta_2\})}{\pi r^2}$$

и существует конечный предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda| < r, \lambda \in \Lambda} \frac{1}{\lambda^2}.$$

Условие регулярности распределения, таким образом, является серьезным ограничением.

В работе [1] авторы рассматривают вопрос об оценке плотностей в случае отказа от условия регулярности распределения множества Λ . Доказана следующая теорема.

Теорема. (а) Существует дискретное подмножество $\Lambda \subset \mathbb{C}$ такое, что $D_+(\Lambda) = \frac{1}{\pi}$ и система G_Λ полна и минимальна в $L^2(\mathbb{R})$.

(б) Если подмножество $\Lambda \subset \mathbb{C}$ таково, что система G_Λ полна в $L^2(\mathbb{R})$, то $D_+(\Lambda) \geq \frac{1}{3\pi}$.

В данной заметке, мы намерены показать, что нижняя оценка $D_+(\Lambda) \geq \frac{1}{3\pi}$ допускает уточнение.

2. Основные результаты

Мы намерены доказать следующую теорему.

Теорема 1. Если подмножество $\Lambda \subset \mathbb{C}$ таково, что система G_Λ полна в $L^2(\mathbb{R})$, то $D_+(\Lambda) \geq \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$.

Так же, как в работе [1] мы эквивалентным образом переформулируем теорему 1 в виде утверждения о множествах единственности для классических пространств Фока \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} := \left\{ F \in H(\mathbb{C}) : \|F\|^2 := \int |F(z)|^2 e^{-\pi|z|^2} dm(z) < \infty \right\},$$

где $dm(z)$ — плоская мера Лебега. Множество Λ называется множеством единственности для пространства Фока, если

$$(F \in \mathcal{F}, F(\lambda) = 0, \lambda \in \Lambda) \Rightarrow (F(z) = 0, z \in \mathbb{C}).$$

В пространстве Фока точечные функционалы $F \rightarrow f(z)$ непрерывны, поэтому в нем существует порождающее ядро $k_\lambda(z)$:

$$(F, k_\lambda) = F(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, F \in \mathcal{F}.$$

Теорема 2. Если множество $\Lambda \subset \mathbb{C}$ является множеством единственности для пространства Фока, то $D_+(\Lambda) \geq \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$.

Эквивалентность этих двух теорем обосновывается с помощью преобразования Баргмана

$$\mathcal{B}f(x) = e^{-i\pi xy + \frac{\pi|z|^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\rho_{x,-y}\varphi(t)} dt = 2^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\pi t^2} e^{2\pi tz} e^{-\frac{z^2}{2}} dt,$$

где $z = x + iy$. Это преобразование изометрически отображает пространство $L^2(\mathbb{R})$ на пространство Фока, причем $\mathcal{B}\rho_{(\operatorname{Re}\lambda, -\operatorname{Im}\lambda)}\varphi = e^{-\frac{\pi|\lambda|^2}{2}} k_{\overline{\lambda}}$ (см. [4]). Поэтому полнота системы G_{Λ} в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ равносильна полноте системы k_{λ} , $\lambda \in \Lambda$, в пространстве Фока. А полнота системы из воспроизводящих ядер, в свою очередь, очевидным образом эквивалентна тому, что Λ является множеством единственности.

Как известно, чем больше нулей у многочлена, тем больше его рост. Эта простая связь нарушается для трансцендентных целых функций. Например, целая функция $\frac{1}{\Gamma(z)}$, где $\Gamma(z)$ — Гамма-функция Эйлера, с нулями в точках πn , $n \in \mathbb{N}$, имеет бесконечный экспоненциальный тип, а функция $\sin z$ — конечный. В рассматриваемой задаче заданное множество Λ характеризуется только плотностью, о его распределении ничего не известно. Поэтому представляется возможным лишь конструировать большее множество $\Lambda' \supseteq \Lambda$ таким образом, чтобы целая функция с множеством нулей Λ' имела как можно меньший рост. В работе [1] эта идея реализована с помощью множества $\Lambda' = \Lambda \cup i\Lambda$. Мы воспользуемся множеством $\Lambda \cup \alpha\Lambda \cup \overline{\alpha}\Lambda$, где $\alpha^3 = 1$, $\alpha \neq 1$, и покажем, что такой вариант оптимальный при данном подходе.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $\Lambda = \{\lambda_j, j \in \mathbb{N}\}$ — множество единственности для пространства Фока и $D_+(\Lambda) < C$ для некоторого $C > 0$. Через δ_{λ} обозначим единичную атомарную меру в точке λ и положим

$$\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_{\lambda},$$

$$\mu(t) := \mu(B(0, t)) = \operatorname{card}(\Lambda \cap B(0, r)).$$

Поскольку нас будет интересовать лишь верхняя плотность множества Λ , то не уменьшая общности можем считать, что $\mu(1) = 0$ и для некоторого $C' < C$ имеет место соотношение

$$\mu(t) \leq C' \pi t^2, \quad t > 0. \quad (1)$$

Лемма 1. Пусть $p > 0$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ определено из уравнений

$$\begin{aligned} \alpha + \overline{\alpha} &= -p, \\ \alpha^2 + \overline{\alpha}^2 &= -p. \end{aligned} \quad (2)$$

Положим

$$v_p(w) = p \ln |1 - w| + \ln |1 - \alpha w| + \ln |1 - \overline{\alpha} w|, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Тогда функция

$$u(z) = \sum_{j=1}^{\infty} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

субгармонична на всей плоскости и при некоторой постоянной $C(p)$, зависящей от p , удовлетворяет оценке

$$u(z) \leq C' \pi C(p) |z|^2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

◁ В ходе доказательства не уменьшая общности будем считать, что $\mu(1) = 0$.

При $|w| \leq q < \min\left(\frac{1}{|\operatorname{Re} \alpha|}, 1\right)$ функция v_p по соотношению (2) представляется в виде ряда

$$v_p(w) = \operatorname{Re} \sum_{j=3}^{\infty} \frac{p + 2(\operatorname{Re} \alpha)^n}{n} w^n.$$

По определению $\operatorname{Re} \alpha = -\frac{p}{2}$, значит, при $|w| \leq q < \min\left(\frac{2}{p}, 1\right)$ выполняется оценка

$$v_p(w) \leq |w|^3 \sum_{j=1}^{\infty} \left(p + 2\left(\frac{p}{2}\right)^n\right) \frac{|w|^n}{n} \leq C(p, q)|w|^3,$$

где $C(p, q) = -p \ln(1 - q) - 2 \ln\left(1 - \frac{pq}{2}\right)$. Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $|z| \leq R$ для некоторого $R > 0$. Тогда для всех $T > \frac{R}{q}$

$$\sum_{|\lambda_j| \geq T} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \leq C(p, q) \sum_{|\lambda_j| \geq T} \frac{|z|^3}{|\lambda_j|^3} = |z|^3 \int_T^{\infty} \frac{d\mu(t)}{t^3}.$$

Отсюда, интегрируя по частям, для $z \in B(0, R)$, учитывая предположение (1), получим

$$\sum_{|\lambda_j| \geq T} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \leq 3C(p, q)R^3 \int_T^{\infty} \frac{\mu(t)d(t)}{t^4} \leq \frac{3C(p, q)R^3}{T}.$$

Значит,

$$\sum_{|\lambda_j| \geq T} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \rightarrow 0$$

равномерно по $|z| \leq R$ при $T \rightarrow \infty$. Полагая в этой оценке $T = \frac{2|z|}{q}$, имеем

$$\sum_{|\lambda_j| \geq \frac{2|z|}{q}} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \leq \frac{3}{2} C' C(p, q) |z|^2. \quad (3)$$

Для оценки суммы по $|\lambda_j| \leq T$ положим

$$a(t) = (1 + t)^p (1 + pt + |\alpha|^2)t^2.$$

Тогда, как легко проверить,

$$v_p(w) \leq \ln a(|w|), \quad w \in \mathbb{C},$$

и с учетом предположения $\mu(1) = 0$ имеем

$$\sum_{|\lambda_j| < T} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \leq \int_1^T \ln a\left(\frac{|z|}{t}\right) d\mu(t).$$

Отсюда, интегрируя по частям, получим

$$\sum_{|\lambda_j| < T} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \leq \mu(T) \ln a\left(\frac{|z|}{T}\right) + |z| \int_1^T \frac{a'\left(\frac{|z|}{t}\right) \mu(t) dt}{t^2 a\left(\frac{|z|}{t}\right)}.$$

Заменой переменных $\frac{|z|}{t} = x$ в интеграле эту оценку запишем в виде

$$\sum_{|\lambda_j| < \frac{2|z|}{q}} v_p \left(\frac{z}{\lambda_j} \right) \leq \mu \left(\frac{2|z|}{q} \right) \ln a \left(\frac{q}{2} \right) + \int_{\frac{2}{q}}^{|z|} \frac{a'(x)}{a(x)} \mu \left(\frac{|z|}{x} \right) dx$$

и используем предположение (1):

$$\sum_{|\lambda_j| < \frac{2|z|}{2}} v_p \left(\frac{z}{\lambda_j} \right) \leq C' \pi |z|^2 \left(\frac{4}{q^2} \ln a \left(\frac{q}{2} \right) + \int_{\frac{2}{q}}^{|z|} \frac{a'(x) dx}{x^2 a(x)} \right). \quad (4)$$

Непосредственно вычисляя логарифмическую производную $a(t)$, имеем

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{p}{1+t} + \frac{p+2|\alpha|^2 t}{1+pt+|\alpha|^2 t^2}.$$

Поскольку $|\alpha|^2 = \frac{p(p+1)}{2}$ и в интервале интегрирования можно считать выполненным неравенство $2|\alpha|^2 x \geq p$, то

$$\frac{a'(t)}{a(t)} \leq \frac{5p}{x},$$

тем самым,

$$\int_{\frac{2}{q}}^{|z|} \frac{a'(x) dx}{x^2 a(x)} \leq \frac{q}{128}.$$

Учитывая оценку (4), имеем

$$\sum_{|\lambda_j| < 2|z|/2} v_p \left(\frac{z}{\lambda_j} \right) \leq C' \pi C_1(p, q) |z|^2,$$

где

$$C_1(p, q) = \frac{4}{q^2} \ln a \left(\frac{q}{2} \right) + \frac{q}{128}.$$

Последнее соотношение вместе с (3) доказывает утверждение леммы 1. \triangleright

\triangleleft ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Применим лемму при $p = 1$. В этом случае $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ — кубический корень от 1 и

$$v_3(w) = (1-w^3), \quad w \in \mathbb{C}.$$

Постоянную $C(p)$ в лемме 1 можно определить более точно. Полагая $a(t) = (1+t^3)$, получим оценку

$$u(z) = \sum_j v_3 \left(\frac{z}{\lambda_j} \right) \leq \int_1^\infty \ln \left(1 + \frac{|z|^3}{t^3} \right) d\mu(t).$$

Проинтегрируем по частям, с учетом условия $\mu(1) = 0$ и предположения (1) получим

$$u(z) \leq - \int_1^\infty \mu(t) \frac{\partial}{\partial t} \ln \left(1 + \frac{|z|^3}{t^3} \right) dt \leq 3C' \pi |z|^3 \int_0^\infty \frac{t dt}{t^3 + |z|^3}.$$

После замены переменных $t = |z|y$ имеем

$$u(z) \leq 3C' \pi |z|^2 \int_0^\infty \frac{y dy}{y^3 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^2 C' |z|^2, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Рассмотрим бесконечное произведение

$$F(z) = \prod_j \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right) \left(1 - \frac{\alpha z}{\lambda_j}\right) \left(1 - \frac{\bar{\alpha} z}{\lambda_j}\right).$$

Поскольку

$$\ln |F(z)| = u(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

то $F(z)$ — целая функция, причем в силу (5) она удовлетворяет оценке

$$|F(z)| \leq e^{\frac{2}{\sqrt{3}} C' \pi^2 |z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Если допустим, что $C' < \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$, то для некоторого $\beta < 1$ имеем

$$|F(z)|^2 \leq e^{\beta \pi |z|^2}, \quad z \in \mathbb{C},$$

и эта функция, обращаясь в 0 в точках Λ , принадлежит пространству \mathcal{F} , и множество Λ не является множеством единственности. Таким образом, $C' \geq \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$, следовательно, $D_+(\Lambda) \geq \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$. Теорема 2 доказана. \triangleright

Заметим, что оценка (5) — точная в классе всех множеств Λ , удовлетворяющих условию (1). В самом деле, если $\Lambda \in \mathbb{R}_+$, то

$$u(-x) = \int_0^\infty \ln \left(1 + \frac{x^3}{t^3}\right) d\mu(t) = 3 \int_1^\infty \frac{\mu(ry) dy}{y(y^3 + 1)}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Если взять $\Lambda = \{\sqrt{(C'\pi)^{-1}n}, n \in \mathbb{N}\}$, то $\mu(t) = [C'\pi t^2] \leq C'\pi t^2$ ($[x]$ означает целую часть x) и $\mu(t) \geq C'\pi t^2 - 1$. Значит,

$$u(-x) \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^2 C' x^2 - A, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где

$$A = 3 \int_1^\infty \frac{dy}{y(y^3 + 1)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. С применением функции v_p , $p = 2$, целой функции

$$F_2(z) = \prod_j \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right)^2 \left(1 - \frac{\alpha z}{\lambda_j}\right) \left(1 - \frac{\bar{\alpha} z}{\lambda_j}\right)$$

и аппроксимационной теоремы из [5] можно получить оценку $D_+(\Lambda) \geq 0,279/\pi$, которая хуже, чем оценка, полученная в теореме 2.

С применением функции v_p , $p = \frac{1}{2}$, и целой функции

$$F_{\frac{1}{2}}(z) = \prod_j \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right) \left(1 - \frac{\alpha z}{\lambda_j}\right)^2 \left(1 - \frac{\bar{\alpha} z}{\lambda_j}\right)^2$$

можно получить оценку $D_+(\Lambda) \geq 0,243/\pi$, которая хуже, чем предыдущая.

Литература

1. Belov Yu., Borichev A., Kuznetsov A. Upper and lower densities of Gabor Gaussian systems // Applied and Computational Harmonic Analysis.—2020.—Vol. 49, № 2.—P. 438–450. DOI: 10.1016/j.acha.2020.05.003.
2. Heil C. History and evolution of the density theorem for Gabor frames // Journal of Fourier Analysis and Applications.—2007.—№ 13.—P. 113–166. DOI: 10.1007/s00041-006-6073-2.
3. Ascensi G., Lyubarskii Yu., Seip K. Phase space distribution of Gabor expansions // Applied and Computational Harmonic Analysis.—2009.—Vol. 26, № 2.—P. 277–282. DOI: 10.1016/j.acha.2008.07.005.
4. Gröchenig K. Foundations of Time-Frequency Analysis.—Boston: Birkhäuser, 2001.—115 p.—(Applied and Numerical Harmonic Analysis).
5. Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация субгармонических функций // Analysis Mathematica.—1985.—Vol. 11, № 3.—P. 257–282. DOI: 10.1007/BF01907421.

Статья поступила 10 июля 2025 г.

ИСАЕВ КОНСТАНТИН ПЕТРОВИЧ
Уфимский университет науки и технологий,
заведующий кафедрой функционального анализа
и программирования
РОССИЯ, 450076, Уфа, ул. Заки Валиди, 32
E-mail: orbit81@list.ru
<https://orcid.org/0000-0002-3680-0048>

ФАЗУЛЛИН ЗИГАНУР ЮСУПОВИЧ
Уфимский университет науки и технологий,
профессор кафедры функционального анализа
и программирования
РОССИЯ, 450076, Уфа, ул. Заки Валиди, 32
E-mail: fazullinzu@mail.ru

ЮЛМУХАМЕТОВ РИНАД САЛАВАТОВИЧ
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
главный научный сотрудник отдела теории функций
и функционального анализа
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: yulmukhametov@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-3592-7741>

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 4, P. 38–45

ESTIMATE OF THE UPPER DENSITY OF GABOR SYSTEM

Isaev, K. P.¹, Fazullin, Z. Yu.¹ and Yulmukhametov, R. S.²

¹ Ufa University of Science and Technology,
32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia;

² Institute of Mathematics UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia

E-mail: orbit81@list.ru, fazullinzu@mail.ru, yulmukhametov@mail.ru

Abstract. In [1] it was shown that the upper density of a discrete set Λ for which the Gabor system G_Λ is complete in the space $L^2(\mathbb{R})$ cannot be less than $\frac{1}{3\pi}$. It is also known from earlier studies that with a regular distribution of indicators, the upper density is not less than $\frac{2}{\pi}$. In this paper, we refine the estimate in the absence of the regularity condition for the distribution: the upper density of a discrete set Λ for which the

Gabor system G_Λ is complete in the space $L^2(\mathbb{R})$ cannot be less than $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$. Improvement of the estimates is achieved by a more methodical application of symmetrization of this set of indicators of the Gabor system using the known effect of reducing the growth of the modulus of an entire function with a more symmetrical arrangement of its zeros. The possibility of improving the obtained estimate within the proposed method is also discussed using specific examples.

Keywords: completeness, Gabor system, frame, density, fock space, uniqueness set.

AMS Subject Classification: 42C15, 30D15.

For citation: Isaev, K. P., Fazullin, Z. Yu. and Yulmukhametov, R. S. Estimate of the Upper Density of Gabor System, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 38–45. (in Russian). DOI: 10.46698/m9533-0085-1293-h.

References

1. Belov, Yu., Borichev, A. and Kuznetsov, A. Upper and Lower Densities of Gabor Gaussian Systems, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2020, vol. 49, no. 2, pp. 438–450. DOI: 10.1016/j.acha.2020.05.003.
2. Heil, C. History and Evolution of the Density Theorem for Gabor Frames, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2007, vol. 13, pp. 113–166. DOI: 10.1007/s00041-006-6073-2.
3. Ascensi, G., Lyubarskii, Yu. and Seip, K. Phase Space Distribution of Gabor Expansions, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, vol. 26, no. 2, pp. 277–282. DOI: 10.1016/j.acha.2008.07.005.
4. Gröchenig, K. *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Boston, Birkhäuser, 2001, 115 p.
5. Yulmukhametov, R. S. Approximation of Subharmonic Functions, *Analysis Mathematica*, 1985, vol. 11, no. 3, pp. 257–282 (in Russian). DOI: 10.1007/BF01907421.

Received July 10, 2025

KONSTANTIN P. ISAEV

Ufa University of Science and Technology,

32 Zaki Validi St., Ufa 450074, Russia,

Head of Department of Functional Analysis and Programming

E-mail: orbit81@list.ru

<https://orcid.org/0000-0002-3680-0048>

ZIGANUR YU. FAZULLIN

Ufa University of Science and Technology,

32 Zaki Validi St., Ufa 450074, Russia,

Professor of Department of Functional Analysis and Programming

E-mail: fazullinzu@mail.ru

RINAD S. YULMUKHAMETOV

Institute of Mathematics UFRC RAS,

112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,

Chief Researcher of Department of Department of Function

Theory and Functional Analysis

E-mail: yulmukhametov@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-3592-7741>

УДК 517.95

DOI 10.46698/f7969-2225-7035-j

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR INHOMOGENEOUS POLYANALYTIC EQUATIONS IN A TRIANGLE

B. Karaca¹

¹ Izmir Bakircay University, Faculty of Engineering and Architecture,
Department of Fundamental Sciences, Gazi Mustafa Kemal District,
115/1 Kaynaklar Road, Menemen 35665, Izmir, Turkey

E-mail: bahriye.karaca@bakircay.edu.tr

Abstract. In this paper, we investigate Dirichlet and Schwarz type boundary value problems for both the inhomogeneous Cauchy–Riemann equation and higher-order polyanalytic equations in a nonstandard domain, specifically a triangular region formed by the intersection of three circular disks in the complex plane. Such domains introduce additional geometric complexity, which requires careful analytical treatment. By constructing appropriate kernel functions tailored to the geometry of the domain, we develop integral operator techniques that allow us to derive explicit solution formulas for the given boundary conditions. In addition, we establish necessary and sufficient conditions for the solvability of these problems, depending on the compatibility of boundary data and the properties of the inhomogeneous terms. Our approach generalizes classical methods used for standard domains, extending their applicability to more intricate geometric settings. The results presented in this work contribute to the broader theory of boundary value problems for complex partial differential equations and offer new tools for addressing similar problems in applied mathematical physics and complex analysis.

Keywords: polyanalytic equations, Schwarz problem, Dirichlet problem, Pompeiu-type operator, triangular domain.

AMS Subject Classification: 35F15, 35G15, 35C15.

For citation: Karaca, B. Boundary Value Problems for Inhomogeneous Polyanalytic Equations in a Triangle, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 46–60. DOI: 10.46698/f7969-2225-7035-j.

1. Introduction

Boundary value problems (BVPs) for complex partial differential equations have attracted significant attention due to their relevance in mathematical physics, engineering, and complex function theory. Among the fundamental equations in this context are the Cauchy–Riemann and higher-order polyanalytic equations, which admit rich boundary behavior and integral representations. Numerous studies have addressed boundary value problems in complex plane, see [1–13].

In recent years, particular focus has been placed on solving boundary value problems for model equations in nonstandard domains. For instance, the Schwarz and the Dirichlet problems in triangular geometries have been considered by Darya and Taghizadeh [14], Wang and Wang [9], as well as Akel et al. [15], who developed integral representations under various geometric and analytical constraints. Moreover, the works of Begehr and collaborators [1, 4,

5] have provided a comprehensive framework of integral operators and function spaces for generalized analytic structures, including polyanalytic and bi-polyanalytic functions.

Additional insights into boundary properties and solvability for higher-order elliptic and the Sobolev-type equations have recently been developed in [15–19], further enriching the theoretical framework relevant to the present study. Building on these foundations, the present paper investigates the Dirichlet and the Schwarz-type boundary value problems for both the inhomogeneous Cauchy–Riemann and polyanalytic equations within a triangular domain defined as the intersection of three disks.

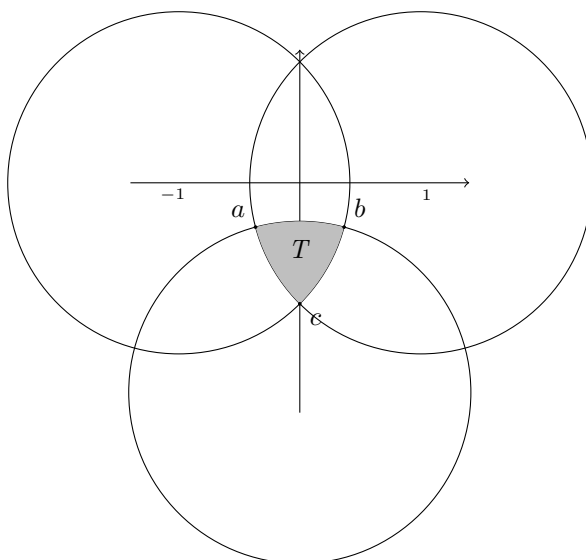


Fig. 1. Triangular domain T bounded by arcs of three circles.

Let T be a triangular domain in the complex plane \mathbb{C} defined by

$$T = \{z \in \mathbb{C} : |z - \epsilon_k| < \sqrt{2}, k = 1, 2, 3\},$$

where

$$\epsilon_1 = 1, \quad \epsilon_2 = -1, \quad \epsilon_3 = -i\sqrt{3}.$$

The sets

$$C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = \sqrt{2}\}, \quad C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| = \sqrt{2}\},$$

$$C_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z + i\sqrt{3}| = \sqrt{2}\}$$

represent three circles in the complex plane centered at ϵ_1 , ϵ_2 , and ϵ_3 , each of radius $\sqrt{2}$. The triangular domain T is the common intersection of the interiors of these three circles, as illustrated in Fig. 1. The boundary of T , denoted by ∂T , consists of three circular arcs. The vertices of T are given by

$$a = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)(1 + i), \quad b = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)(1 - i), \quad c = -i,$$

which correspond to the pairwise intersections of C_1 , C_2 , and C_3 .

2. The Dirichlet Problem for Polyanalytic Functions

In this section, we investigate the Dirichlet boundary value problem for polyanalytic functions of order n in a bounded domain $T \subset \mathbb{C}$. Polyanalytic functions, which are natural generalizations of analytic and harmonic functions, satisfy higher-order equations involving repeated applications of the Cauchy–Riemann operator. Our aim is to determine necessary and sufficient conditions for the solvability of the Dirichlet problem associated with such equations and to construct explicit integral representations of the solutions under suitable assumptions on the boundary data and the inhomogeneous term. We begin with the classical case $n = 1$, corresponding to the inhomogeneous Cauchy–Riemann equation, and then extend the results to arbitrary order n .

Theorem 2.1 [14]. *The Dirichlet problem for the homogeneous Cauchy–Riemann equation in T*

$$\omega_{\bar{z}} = 0 \text{ in } T, \quad \omega = \gamma \text{ on } \partial T, \quad (1)$$

with given $\gamma \in C(\partial T; \mathbb{C})$, is solvable if and only if

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial T} \gamma(\zeta) K_2(z, \zeta) d\zeta = 0, \quad (2)$$

and for $z \in T$ the unique solution can be presented as

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial T} \gamma(\zeta) K_1(z, \zeta) d\zeta, \quad (3)$$

where

$$K_1(z, \zeta) = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\zeta - z_k}, \quad K_2(z, \zeta) = \sum_{k=5}^8 \frac{1}{\zeta - z_k}, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (4)$$

and the points z_k are given by

$$\begin{aligned} z_1 = z, \quad z_2 = -\frac{1}{z}, \quad z_3 = \frac{-(1 + i\sqrt{3})z + 1 - i\sqrt{3}}{(1 - i\sqrt{3})z + 1 + i\sqrt{3}}, \quad z_4 = \frac{(i\sqrt{3} - 1)z - 1 - i\sqrt{3}}{(-1 + i\sqrt{3})z + 1 - i\sqrt{3}}, \\ z_5 = \frac{\bar{z} + 1}{\bar{z} - 1}, \quad z_6 = \frac{-\bar{z} + 1}{\bar{z} + 1}, \quad z_7 = \frac{-i\sqrt{3}\bar{z} - 1}{\bar{z} - i\sqrt{3}}, \quad z_8 = \frac{\bar{z} - i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}\bar{z} + 1}, \end{aligned}$$

with $z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8 \notin T$.

REMARK 2.1. In the analytic case, the classical Cauchy integral

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial T} \frac{\gamma(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

already provides the solution of the Dirichlet problem. The advantage of the representation (3) with kernels (4) is that it generalizes the Cauchy kernel and remains valid in broader contexts, such as polyanalytic and k -analytic equations. While for analytic functions the two formulas coincide, the form with K_1 and K_2 extends naturally to higher-order equations, where the classical Cauchy formula is no longer sufficient.

Theorem 2.1 provides a complete characterization of the solvability and representation of the Dirichlet problem for the *homogeneous* Cauchy–Riemann equation in the domain T .

This result establishes a necessary and sufficient condition for the existence of a solution in terms of a boundary integral and presents an explicit integral formula for the solution.

Building upon this foundational result, the following theorem extends the analysis to the *inhomogeneous* case, where the equation involves a nonzero source term $f(z)$. In this context, the solvability condition naturally incorporates both the boundary data γ and the inhomogeneity f , reflected through the integral relation involving both K_1 and K_2 .

Theorem 2.2. *The Dirichlet problem for the inhomogeneous Cauchy–Riemann equation in T*

$$\omega_{\bar{z}} = f(z) \text{ in } T, \quad \omega = \gamma \text{ on } \partial T, \tag{5}$$

with given boundary data $\gamma \in C(\partial T; \mathbb{C})$ and source term $f \in L^1(T)$ (in particular, $f \in C(\bar{T})$ is admissible), is solvable if and only if

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial T} \gamma(\zeta) K_2(z, \zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_T f(\zeta) K_2(z, \zeta) d\xi d\eta = 0, \tag{6}$$

and for $z \in T$ the unique solution can be presented as

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial T} \gamma(\zeta) K_1(z, \zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_T f(\zeta) K_1(z, \zeta) d\xi d\eta, \tag{7}$$

where $K_1(z, \zeta)$ and $K_2(z, \zeta)$ are the kernels defined in (4).

◁ Assume that the Dirichlet problem (1) is solvable. Then, by Theorem 2.1, the solution can be written in the form given by (3).

Let us define a new unknown function

$$\theta(z) := \omega(z) - T[f](z),$$

where the operator $T[f]$ denotes the area integral

$$T[f](z) := \frac{1}{\pi} \int_T f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta.$$

Applying the operator $\partial_{\bar{z}}$ to both sides of the definition of θ , we obtain:

$$\partial_{\bar{z}}\theta = \partial_{\bar{z}}\omega - \partial_{\bar{z}}T[f].$$

Since ω satisfies $\omega_{\bar{z}} = f(z)$ and by known properties of the area integral operator (i. e. $\partial_{\bar{z}}T[f] = f(z)$), we get:

$$\partial_{\bar{z}}\theta = f(z) - f(z) = 0 \text{ in } T.$$

Moreover, on the boundary ∂T , we have:

$$\theta = \omega - T[f] = \gamma - T[f] \text{ on } \partial T.$$

Thus, θ satisfies the homogeneous Dirichlet problem:

$$\theta_{\bar{z}} = 0 \text{ in } T, \quad \theta = \gamma - T[f] \text{ on } \partial T. \tag{8}$$

By Theorem 2.1, the homogeneous Dirichlet problem (4) is solvable if and only if the following compatibility condition holds:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial T} (\gamma(\zeta) - T[f](\zeta)) K_2(z, \zeta) d\zeta = 0.$$

We now analyze the second term using the properties of the area integral operator. The function $T[f](\zeta)$ is defined as:

$$T[f](\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_T \frac{f(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta} - \zeta} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}.$$

Substituting this into the boundary integral, we get:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial T} T[f](\zeta) K_2(z, \zeta) d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial T} \left(\frac{1}{\pi} \int_T \frac{f(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta} - \zeta} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \right) K_2(z, \zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_T f(\tilde{\zeta}) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial T} \frac{K_2(z, \zeta)}{\tilde{\zeta} - \zeta} d\zeta \right) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} = \frac{1}{\pi} \int_T f(\tilde{\zeta}) K_2(z, \tilde{\zeta}) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}. \end{aligned}$$

Therefore, the solvability condition becomes:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial T} \gamma(\zeta) K_2(z, \zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_T f(\zeta) K_2(z, \zeta) d\xi d\eta = 0,$$

which coincides with the condition stated in (5).

Conversely, suppose that the solvability condition (5) holds. Define $\omega(z)$ as in (3). Then, we can rewrite this expression in the following form:

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial T} \gamma(\zeta) [K_1(z, \zeta) - K_2(z, \zeta)] d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_T f(\zeta) [K_1(z, \zeta) - K_2(z, \zeta)] d\xi d\eta.$$

Using the result of Theorem 2.1 and the fact that the area integral tends to zero as $z \rightarrow \zeta \in \partial T$, we conclude that

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \omega(z) = \gamma(\zeta), \quad \zeta \in \partial T,$$

and clearly,

$$\omega_{\bar{z}} = f(z) \text{ in } T.$$

Therefore, ω is a solution to the inhomogeneous Dirichlet problem (1). We now turn to the uniqueness of the solution to the problem. Suppose that ω_1 and ω_2 are two solutions to the Dirichlet problem (1). Then, by definition, we have

$$(\omega_1)_{\bar{z}} = f \text{ in } T, \quad \omega_1 = \gamma \text{ on } \partial T, \quad (9)$$

and

$$(\omega_2)_{\bar{z}} = f \text{ in } T, \quad \omega_2 = \gamma \text{ on } \partial T. \quad (10)$$

Subtracting these equations, we obtain

$$(\omega_1 - \omega_2)_{\bar{z}} = 0 \text{ in } T, \quad \omega_1 - \omega_2 = 0 \text{ on } \partial T.$$

This is the Dirichlet problem for the homogeneous Cauchy–Riemann equation in the domain T . By Theorem 2.1, which guarantees the uniqueness of the solution to the homogeneous problem

with continuous boundary data, it follows that the only solution is the trivial one. Therefore, $\omega_1 = \omega_2$ in T , and the solution is unique. \triangleright

Theorem 2.2 establishes the solvability and integral representation of the Dirichlet problem for the inhomogeneous Cauchy–Riemann equation, which corresponds to the case $n = 1$ in the general theory of polyanalytic equations. The corresponding boundary condition involves a single function γ , and the unique solution is represented via the standard Cauchy-type integrals over the boundary and the domain of T , using the kernels K_1 and K_2 .

The next theorem generalizes this result to the case of the inhomogeneous polyanalytic equation of order n , where the unknown function ω satisfies $\partial_{\bar{z}}^n \omega = f$ in T , and the boundary conditions involve the traces of the first n \bar{z} -derivatives of ω .

Theorem 2.3. *The Dirichlet problem for the inhomogeneous polyanalytic equation in the domain T ,*

$$\partial_{\bar{z}}^n \omega = f(z) \text{ in } T, \quad \partial_{\bar{z}}^\kappa \omega = \gamma_\kappa \text{ on } \partial T, \quad 0 \leq \kappa \leq n - 1, \tag{11}$$

is uniquely solvable for $f \in L_1(T; \mathbb{C})$ and $\gamma_\kappa \in C(\partial T; \mathbb{C})$ for $0 \leq \kappa \leq n - 1$, if and only if for each $0 \leq \kappa \leq n - 1$, the following compatibility condition holds:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=\kappa}^{n-1} \frac{(-1)^{\sigma-\kappa}}{2\pi i} \int_{\partial T} \gamma_\sigma(\zeta) \frac{\overline{(\zeta - z)^{\sigma-\kappa}}}{(\sigma - \kappa)!} K_2(z, \zeta) d\zeta \\ + \frac{(-1)^{n-\kappa}}{\pi} \int_T f(\zeta) \frac{\overline{(\zeta - z)^{n-1-\kappa}}}{(n - 1 - \kappa)!} K_2(z, \zeta) d\xi d\eta = 0, \quad z \in T. \end{aligned} \tag{12}$$

The solution is then given by

$$\begin{aligned} \omega(z) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(-1)^\kappa}{2\pi i} \int_{\partial T} \frac{\gamma_\kappa(\zeta)}{\kappa!} \overline{(\zeta - z)^\kappa} K_1(z, \zeta) d\zeta \\ + \frac{(-1)^n}{\pi} \int_T \frac{f(\zeta)}{(n - 1)!} \overline{(\zeta - z)^{n-1}} K_1(z, \zeta) d\xi d\eta, \end{aligned} \tag{13}$$

where $K_1(z, \zeta)$ and $K_2(z, \zeta)$ are the kernels defined in (4).

\triangleleft We prove the theorem by mathematical induction on the order $n \in \mathbb{N}$.

Base case: $n = 1$. In this case, the equation reduces to the classical inhomogeneous Cauchy–Riemann equation:

$$\omega_{\bar{z}} = f(z) \text{ in } T, \quad \omega = \gamma_0 \text{ on } \partial T.$$

The solvability condition and the integral representation of the solution are given by Theorem 2.2. Therefore, the result holds for $n = 1$.

Inductive step: Suppose the theorem holds for some $n = s \geq 1$; that is, for the problem

$$\partial_{\bar{z}}^s \omega = f(z) \text{ in } T, \quad \partial_{\bar{z}}^\kappa \omega = \gamma_\kappa \text{ on } \partial T, \quad 0 \leq \kappa \leq s - 1,$$

the unique solvability condition and the solution formula given in the theorem are valid.

We aim to prove that the result holds for $n = s + 1$.

Let ω be a solution of the problem

$$\partial_{\bar{z}}^{s+1}\omega = f(z) \text{ in } T, \quad \partial_{\bar{z}}^{\kappa}\omega = \gamma_{\kappa} \text{ on } \partial T, \quad 0 \leq \kappa \leq s.$$

Define the auxiliary function $v(z) := \partial_{\bar{z}}\omega(z)$. Then v satisfies

$$\partial_{\bar{z}}^s v(z) = f(z) \text{ in } T, \quad \partial_{\bar{z}}^{\kappa} v = \gamma_{\kappa+1} \text{ on } \partial T, \quad 0 \leq \kappa \leq s-1.$$

By the induction hypothesis, the solvability condition for v is

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=\kappa+1}^s \frac{(-1)^{\sigma-\kappa-1}}{2\pi i} \int_{\partial T} \gamma_{\sigma}(\zeta) \frac{\overline{(\zeta-z)^{\sigma-\kappa-1}}}{(\sigma-\kappa-1)!} K_2(z, \zeta) d\zeta \\ + \frac{(-1)^{s-\kappa}}{\pi} \int_T f(\zeta) \frac{\overline{(\zeta-z)^{s-\kappa-1}}}{(k-\kappa-1)!} K_2(z, \zeta) d\xi d\eta = 0 \end{aligned}$$

for $0 \leq \kappa \leq s-1$. To complete the construction of ω , we solve the first-order equation

$$\omega_{\bar{z}} = v(z) \text{ in } T, \quad \omega = \gamma_0 \text{ on } \partial T.$$

By Theorem 2.2, this equation is uniquely solvable if and only if

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial T} \gamma_0(\zeta) K_2(z, \zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_T v(\zeta) K_2(z, \zeta) d\xi d\eta = 0.$$

Substituting the integral representation of v into this expression leads to the full compatibility condition for $\kappa = 0$, completing the induction step.

Finally, by applying the integral representation of v and integrating once more with respect to \bar{z} , we obtain the integral representation of ω , matching the formula given in the theorem for $n = k+1$.

Therefore, by the principle of mathematical induction, the result holds for all $n \in \mathbb{N}$. \triangleright

3. The Schwarz Problem for Polyanalytic Functions

In this section, we investigate the Schwarz boundary value problem for first- and higher-order polyanalytic functions in a triangular domain T . Starting from the classical case, we derive an explicit integral representation for the solution and extend it to polyanalytic functions of arbitrary order.

Theorem 3.1 [14]. *The Schwarz boundary value problem*

$$\omega_{\bar{z}} = f(z) \text{ in } T, \quad [\operatorname{Re} \omega]^+(t) = \gamma(t) \text{ for } t \in \partial T, \quad (14)$$

with given data $f \in L_1(T; \mathbb{C})$, and $\gamma \in C(\partial T; \mathbb{R})$, is uniquely solvable. The solution is given by

$$\begin{aligned} \omega(z) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\pi i} \int_{\partial T \cap C_j} \gamma(\zeta) \left(K_1(z, \zeta) - \frac{2}{\zeta - \epsilon_j} \right) d\zeta \\ + ic - \frac{1}{\pi} \int_T f(\zeta) K_1(z, \zeta) d\xi d\eta - \frac{1}{\pi} \int_T \overline{f(\zeta)} K_2(z, \zeta) d\xi d\eta, \quad (15) \end{aligned}$$

where

$$c = \sum_{j=1}^3 \frac{2}{\pi i} \int_{\partial T \cap C_j} \operatorname{Im} \omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_j}, \tag{16}$$

where $K_1(z, \zeta)$ and $K_2(z, \zeta)$ are the kernels defined in (4).

The solution $\omega(z)$ in (14) can be expressed more compactly as

$$\omega(z) = S[\gamma](z) + T[f](z) + ic, \tag{17}$$

where the operators $S[\gamma]$ and $T[f]$ are given by

$$S[\gamma](z) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\pi i} \int_{\partial T \cap C_j} \gamma(\zeta) \left(K_1(z, \zeta) - \frac{2}{\zeta - \epsilon_j} \right) d\zeta, \tag{18}$$

$$T[f](z) = -\frac{1}{\pi} \int_T f(\zeta) K_1(z, \zeta) d\xi d\eta - \frac{1}{\pi} \int_T \overline{f(\zeta) K_2(z, \zeta)} d\xi d\eta. \tag{19}$$

We now introduce the *poly-Schwarz operator* S_n in the domain T , defined for data $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \in C(\partial T; \mathbb{R})$, as

$$S_n[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}](z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\pi i} \int_{\partial T \cap C_j} (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^k \gamma_k(\zeta) \times \left(K_1(z, \zeta) - \frac{2}{\zeta - \epsilon_j} \right) d\zeta. \tag{20}$$

It is clear that for $n = 1$, this operator reduces to the classical Schwarz operator: $S_0[\gamma] = S[\gamma]$.

3.1. Boundary properties of the Poly-Schwarz operator. We investigate how the poly-Schwarz operator behaves near the boundary of the domain. The results confirm that it reproduces the given real-valued boundary data for all relevant derivatives.

Theorem 3.2. *If $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \in C(\partial T; \mathbb{R})$, then*

$$\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} S_n[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}](z) = 0, \quad z \in T.$$

◁ By the definition of the operator S_n in (15), we have

$$\begin{aligned} & S_n[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}](z) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\pi i} \int_{\partial T \cap C_j} \left[(\zeta - z + \overline{\zeta - z})^k \gamma_k(\zeta) \right] \left(K_1(z, \zeta) - \frac{2}{\zeta - \epsilon_j} \right) d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-1)^{k-l} (z + \bar{z})^{k-l} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\pi i} \int_{\partial T \cap C_j} (\zeta + \bar{\zeta})^l \gamma_k(\zeta) \left(K_1(z, \zeta) - \frac{2}{\zeta - \epsilon_j} \right) d\zeta. \end{aligned}$$

Now define

$$\gamma_{k,l}(\zeta) := (\zeta + \bar{\zeta})^l \gamma_k(\zeta),$$

and set

$$S[\gamma_{k,l}](z) := \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\pi i} \int_{\partial T \cap C_j} \gamma_{k,l}(\zeta) \left(K_1(z, \zeta) - \frac{2}{\zeta - \epsilon_j} \right) d\zeta. \quad (21)$$

Thus, we obtain:

$$S_n[\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}](z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-1)^{k-l} (z + \bar{z})^{k-l} S[\gamma_{k,l}](z).$$

Each term $S[\gamma_{k,l}](z)$ is independent of \bar{z} , since it is defined via integration over the boundary with kernels $K_1(z, \zeta)$ and $\gamma_{k,l}(\zeta)$. Therefore, all \bar{z} -dependence is inside the polynomial $(z + \bar{z})^{k-l}$.

Differentiating n -times with respect to \bar{z} , we obtain:

$$\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} S_n[\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}](z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-1)^{k-l} \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} [(z + \bar{z})^{k-l}] S[\gamma_{k,l}](z).$$

But for all $k - l < n$, the n -th derivative of the polynomial $(z + \bar{z})^{k-l}$ vanishes. Since $k \leq n - 1$, we always have $k - l < n$, so each term is zero.

Hence,

$$\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} S_n[\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}](z) = 0. \triangleright$$

Having established the vanishing of the n -th \bar{z} -derivative in the domain, we now describe how the lower-order derivatives of the poly-Schwarz operator behave on the boundary.

Theorem 3.3. *If $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \in C(\partial T; \mathbb{R})$, then*

$$\left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{\partial^l}{\partial \bar{z}^l} S_n[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}](z) \right] \right\}^+(t) = \gamma_l(t), \quad t \in \partial T, \quad l = 0, \dots, n-1, \quad (22)$$

where the operator S_n is defined by equation (15).

\triangleleft We prove the identity for each $l = 0, 1, \dots, n-1$.

For $l = 0$, we simply have

$$\frac{\partial^0}{\partial \bar{z}^0} S_n[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}](z) = S_n[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}](z).$$

According to Theorem 3.1, the non-tangential boundary value of its real part satisfies

$$\left\{ \operatorname{Re} [S_n[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}](z)] \right\}^+(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-t - \bar{t})^{k-l} \gamma_{k,l}(t),$$

where the functions $\gamma_{k,l}$ are defined as in equation (17).

Note that for $k \geq 1$, the term $(-t - \bar{t} + t + \bar{t})^{k-l} = 0$. Hence, all terms vanish except the one with $k = 0$, giving

$$\left\{ \operatorname{Re} [S_n[\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}](z)] \right\}^+(t) = \gamma_0(t).$$

Thus, equation (19) holds for $l = 0$.

Now, let $l = 1, 2, \dots, n - 1$. Differentiating under the integral sign (justified by the continuity of γ_k), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial^l}{\partial \bar{z}^l} S_n[\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}](z) &= \sum_{k=l}^{n-1} \frac{(-1)^{k-l}}{(k-l)!} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\pi i} \\ &\quad \times \int_{\partial T \cap C_j} (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{k-l} \gamma_k(\zeta) \left(K_1(z, \zeta) - \frac{2}{\zeta - \epsilon_j} \right) d\zeta. \end{aligned}$$

Expanding the power term and reorganizing, we get

$$\sum_{k=l}^{n-1} \frac{(-1)^{k-l}}{(k-l)!} \sum_{m=0}^{k-l} \binom{k-l}{m} (-(z + \bar{z}))^{k-l-m} S[\gamma_{k,m}](z), \quad z \in T.$$

Taking the real part and applying the non-tangential boundary limit, we obtain

$$\left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{\partial^l}{\partial \bar{z}^l} S_n[\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}](z) \right] \right\}^+(t) = \sum_{k=l}^{n-1} \frac{(-1)^{k-l}}{(k-l)!} \sum_{m=0}^{k-l} \binom{k-l}{m} (-t - \bar{t})^{k-l-m} \gamma_{k,m}(t).$$

Again, only the term with $k = l$ and $m = 0$ survives since all other terms involve powers of zero. Hence,

$$\left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{\partial^l}{\partial \bar{z}^l} S_n[\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}](z) \right] \right\}^+(t) = \gamma_{l,0}(t) = \gamma_l(t),$$

which proves equation (19) for all $l = 0, \dots, n - 1$. \triangleright

3.2. Pompeiu operator on the triangle. In this section, we introduce the following area integral defined by

$$\begin{aligned} T_l[f](z) &= \frac{(-1)^l}{\pi(l-1)!} \iint_T (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{l-1} \left[f(\zeta) K_1(z, \zeta) + \overline{f(\zeta) K_2(z, \zeta)} \right] d\xi d\eta, \\ &z \in T, \quad l = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{23}$$

for functions $f \in L_1(T; \mathbb{C})$.

The operator T_l is referred to as the *Pompeiu-type operator* in this context. In particular, for $l = 1$, it reduces to

$$T_1[f](z) = T[f](z), \quad z \in T. \tag{24}$$

We also define

$$T_0[f](z) := f(z), \quad z \in T, \tag{25}$$

and this operator satisfies the following relation:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T[f](z) = T_0[f](z), \quad z \in T. \tag{26}$$

This operator family satisfies a recursive relation involving complex conjugate differentiation. The following theorem establishes this fundamental property.

Theorem 3.4. *If $f \in L_1(T; \mathbb{C})$, then*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_l[f](z) = T_{l-1}[f](z), \quad z \in T, \quad l = 1, 2, \dots, n - 1. \tag{27}$$

◁ Let $f \in L_1(T; \mathbb{C})$, and let us consider the operator

$$T_l[f](z) = \frac{(-1)^l}{\pi(l-1)!} \iint_T (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{l-1} \left[f(\zeta)K_1(z, \zeta) + \overline{f(\zeta)K_2(z, \zeta)} \right] d\xi d\eta.$$

Note that

$$\zeta - z + \overline{\zeta - z} = (\zeta + \bar{\zeta}) - (z + \bar{z}) = 2 \operatorname{Re}(\zeta - z),$$

which is a real-valued function depending smoothly on z . Define

$$\Phi(\zeta, z) := (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{l-1}.$$

Differentiating under the integral sign with respect to \bar{z} , we obtain

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_l[f](z) = \frac{(-1)^l}{\pi(l-1)!} \iint_T \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\Phi(\zeta, z)] \left[f(\zeta)K_1(z, \zeta) + \overline{f(\zeta)K_2(z, \zeta)} \right] d\xi d\eta.$$

Now observe that

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Phi(\zeta, z) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{l-1} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (2 \operatorname{Re}(\zeta - z))^{l-1} \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\zeta + \bar{\zeta} - z - \bar{z})^{l-1} = -(l-1) (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{l-2}. \end{aligned}$$

Thus,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_l[f](z) = \frac{(-1)^l}{\pi(l-1)!} (-(l-1)) \iint_T (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{l-2} \left[f(\zeta)K_1(z, \zeta) + \overline{f(\zeta)K_2(z, \zeta)} \right] d\xi d\eta.$$

Simplifying the constants, we get

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_l[f](z) = \frac{(-1)^{l-1}}{\pi(l-2)!} \iint_T (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{l-2} \left[f(\zeta)K_1(z, \zeta) + \overline{f(\zeta)K_2(z, \zeta)} \right] d\xi d\eta.$$

This is exactly the definition of $T_{l-1}[f](z)$. Therefore, we conclude that

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_l[f](z) = T_{l-1}[f](z), \quad z \in T. \triangleright$$

Theorem 3.5. *Let $f \in L_1(T; \mathbb{C})$. Then, for each $l = 1, 2, 3, \dots$, the real part of the Pompeiu-type operator $T_l[f]$ satisfies*

$$\{\operatorname{Re} T_l[f]\}^+(t) = 0, \quad t \in \partial T,$$

where $\{\cdot\}^+$ denotes the nontangential boundary limit from within the domain T .

◁ Let $z \in T$ and consider

$$T_l[f](z) = \frac{(-1)^l}{\pi(l-1)!} \iint_T (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{l-1} \left[f(\zeta)K_1(z, \zeta) + \overline{f(\zeta)K_2(z, \zeta)} \right] d\xi d\eta.$$

Note that

$$\zeta - z + \overline{\zeta - z} = (\zeta + \bar{\zeta}) - (z + \bar{z}) = 2 \operatorname{Re}(\zeta - z),$$

so the kernel is real-valued:

$$(\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{l-1} \in \mathbb{R}.$$

Then,

$$\operatorname{Re} T_l[f](z) = \frac{(-1)^l}{\pi(l-1)!} \iint_T (2 \operatorname{Re}(\zeta - z))^{l-1} \operatorname{Re} \left[f(\zeta) K_1(z, \zeta) + \overline{f(\zeta) K_2(z, \zeta)} \right] d\xi d\eta.$$

As $z \rightarrow t \in \partial T$ nontangentially, the kernel $(2 \operatorname{Re}(\zeta - z))^{l-1}$ becomes symmetric with respect to the reflection across the line $\operatorname{Re}(\zeta) = \operatorname{Re}(t)$. Due to this symmetry and the regularity of the data $f \in L_p$, we have

$$\lim_{z \rightarrow t \in \partial T} \operatorname{Re} T_l[f](z) = 0.$$

Hence,

$$\{\operatorname{Re} T_l[f]\}^+(t) = 0, \quad t \in \partial T. \triangleright$$

We now consider the Schwarz-type boundary value problem for the inhomogeneous polyanalytic equation in the triangular domain.

Theorem 3.6. *The Schwarz-type boundary value problem for the polyanalytic equation*

$$\partial_{\bar{z}}^n \omega(z) = f(z), \quad z \in T, \quad f \in L_1(T; \mathbb{C}), \tag{28}$$

subject to the boundary conditions

$$\{\operatorname{Re}(\partial_{\bar{z}}^s \omega)\}^+(t) = \gamma_s(t), \quad t \in \partial T, \quad \gamma_s \in C(\partial T; \mathbb{R}), \quad s = 0, \dots, n-1, \tag{29}$$

and the integral normalization conditions

$$\sum_{j=1}^3 \frac{2}{\pi i} \int_{\partial T \cap C_j} \operatorname{Im}(\partial_{\bar{z}}^s \omega(\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_j} = c_s, \quad s = 0, \dots, n-1, \tag{30}$$

is uniquely solvable. The solution is given by

$$\omega(z) = S_n[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}](z) + T_n[f](z) + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(z + \bar{z})^s}{s!} i c_s, \tag{31}$$

where the operators S_n and T_n are defined in equations (15) and (21), respectively, and $c_s \in \mathbb{R}$ are given constants for $s = 0, \dots, n-1$.

◁ We aim to solve the boundary value problem

$$\partial_{\bar{z}}^n \omega(z) = f(z), \quad z \in T,$$

subject to the boundary conditions

$$\{\operatorname{Re}(\partial_{\bar{z}}^s \omega)\}^+(t) = \gamma_s(t), \quad t \in \partial T, \quad s = 0, \dots, n-1,$$

and the normalization conditions

$$\sum_{j=1}^3 \frac{2}{\pi i} \int_{\partial T \cap C_j} \operatorname{Im}(\partial_{\bar{z}}^s \omega(\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_j} = c_s, \quad s = 0, \dots, n-1.$$

We construct the solution as follows:

$$\omega(z) = S_n[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}](z) + T_n[f](z) + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(z + \bar{z})^s}{s!} i c_s.$$

Let us denote:

$$\omega_1(z) := S_n[\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}](z), \quad \omega_2(z) := T_n[f](z), \quad \omega_3(z) := \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(z + \bar{z})^s}{s!} i c_s.$$

We will verify that $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ satisfies the differential equation and both boundary conditions.

Step 1: Verify the differential equation. By definition of the operator $T_n[f]$, we have

$$\partial_{\bar{z}}^n T_n[f](z) = f(z), \quad z \in T.$$

Also, since S_n is constructed from boundary data, it is a solution of the homogeneous equation:

$$\partial_{\bar{z}}^n S_n[\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}](z) = 0, \quad z \in T.$$

Likewise, $\omega_3(z)$ is a polynomial in $z + \bar{z}$, and hence satisfies

$$\partial_{\bar{z}}^n \omega_3(z) = 0, \quad z \in T.$$

Therefore,

$$\partial_{\bar{z}}^n \omega(z) = f(z), \quad z \in T.$$

Step 2: Verify the real part boundary conditions. From the construction of $S_n[\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}]$, we have

$$\{ \operatorname{Re}(\partial_{\bar{z}}^s S_n[\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}]) \}^+(t) = \gamma_s(t), \quad t \in \partial T.$$

On the other hand, it was previously shown (see Pompeiu operator properties) that

$$\{ \operatorname{Re}(\partial_{\bar{z}}^s T_n[f](z)) \}^+(t) = 0, \quad t \in \partial T, \quad s = 0, \dots, n-1.$$

And since ω_3 is a real polynomial multiplied by i , its real part vanishes:

$$\operatorname{Re}(\partial_{\bar{z}}^s \omega_3(z)) \equiv 0.$$

Hence,

$$\{ \operatorname{Re}(\partial_{\bar{z}}^s \omega) \}^+(t) = \gamma_s(t), \quad t \in \partial T.$$

Step 3: Verify the normalization conditions. We compute:

$$\partial_{\bar{z}}^s \omega(z) = \partial_{\bar{z}}^s \omega_1(z) + \partial_{\bar{z}}^s \omega_2(z) + \partial_{\bar{z}}^s \omega_3(z), \quad s = 0, \dots, n-1.$$

By construction, the imaginary part of $\partial_{\bar{z}}^s \omega_1$ and ω_2 satisfy

$$\sum_{j=1}^3 \frac{2}{\pi i} \int_{\partial T \cap C_j} \operatorname{Im}(\partial_{\bar{z}}^s \omega_1 + \partial_{\bar{z}}^s \omega_2) \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_j} = 0.$$

Meanwhile, the contribution from ω_3 is

$$\partial_{\bar{z}}^s \omega_3(z) = \frac{(z + \bar{z})^s}{s!} i c_s,$$

so

$$\operatorname{Im}(\partial_{\bar{z}}^s \omega_3(\zeta)) = \frac{(\zeta + \bar{\zeta})^s}{s!} c_s,$$

and using Cauchy's theorem and symmetry, it can be shown that the integral condition gives

$$\sum_{j=1}^3 \frac{2}{\pi i} \int_{\partial T \cap C_j} \operatorname{Im}(\partial_{\bar{z}}^s \omega_3(\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_j} = c_s.$$

Thus, the full normalization condition is satisfied. \triangleright

Acknowledgments. The author is very grateful to the referees for their valuable suggestions, which have helped improve the quality of this paper.

References

1. Begehr, H. *Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations. An introductory Text*, Singapore, World Scientific, 1994.
2. Begehr, H. and Hile, G. N. A Hierarchy of Integral Operators, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 1997, vol. 27, no. 3, pp. 669–706. DOI: 10.1216/rmj/1181071888.
3. Celebi, A. O. and Aksoy U. Schwarz Problem for Higher-Order Complex Elliptic Partial Differential Equations, *Integral Transforms and Special Functions*, 2008, vol. 19, no. 6, pp. 413–428. DOI: 10.1080/10652460801933645.
4. Chaudhary, A. Neumann and Mixed Boundary Value Problems on the Upper Half Plane, *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Application*, 2022, vol. 6, no. 1, pp. 135–142. DOI: 10.31197/atnaa.950920.
5. Karaca, B. Schwarz Problem for Model Partial Differential Equations with One Complex Variable, *Sakarya University Journal of Science*, 2024, vol. 28, no. 2, pp. 410–417. DOI: 10.16984/saufenbilder.1390617.
6. Yongzhi, X. Riemann Problem and Inverse Riemann Problem of $(\lambda, 1)$ bi-Analytic Functions, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2007, vol. 52, no. 10–11, pp. 853–864. DOI: 10.1080/17476930701483809.
7. Wang, Y. and Wang, Y. Schwarz-Type Problem Of Nonhomogeneous Cauchy–Riemann Equation on a Triangle, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, vol. 377, no. 2, pp. 557–570. DOI: 10.1016/j.jmaa.2010.11.023.
8. Hao, Y. and Hua, L. Schwarz Boundary Value Problem on Reuleaux Triangle, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2021, vol. 67, no. 10, pp. 2444–2457. DOI: 10.1080/17476933.2021.1931150.
9. Wang, Y. and Wang, Y. Two Boundary-Value Problems for the Cauchy–Riemann Equation in a Sector, *Complex Analysis and Operator Theory*, 2012, vol. 6, pp. 1121–1138. DOI: 10.1007/s11785-010-0107-0.
10. Wang, Y. and Zhao, X. Schwarz Boundary Value Problem for the Cauchy–Riemann Equation in a Rectangle, *Boundary Value Problems*, 2016, vol. 2016, Article no. 7. DOI: 10.1186/s13661-016-0520-z.
11. Gençtürk, I. Robin Boundary Value Problem Depending on Parameters in a Ring Domain, *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 2020, vol. 3, no. 2, pp. 161–167. DOI: 10.33401/fujma.795538.
12. Akel, M., Hidan, M. and Abdalla, M. Complex Boundary Value Problems for the Cauchy–Riemann Operator on a Triangle, *Fractals*, 2022, vol. 30, no. 10, Article no. 2240252. DOI: 10.1142/S0218348X22402526.
13. Akel, M. S. and Alabbad, F. A Riemann–Hilbert Boundary Value Problem in a Bounded Sector, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2014, vol. 60, no. 4, pp. 493–509. DOI: 10.1080/17476933.2014.944866.
14. Darya, A. and Taghizadeh, N. Schwarz and Dirichlet Problems for $\bar{\partial}$ -Equation in a Triangular Domain, *Russian Mathematics*, 2024, vol. 68, pp. 9–17. DOI: 10.3103/S1066369X24700853.
15. Soldatov, A. P. On Boundary Properties of Conformal Mappings, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2024, vol. 64, no. 9, pp. 2011–2025. DOI: 10.1134/S0965542524701070.

16. Koshanov, B. D. and Soldatov, A. P. On the Solvability of the Generalized Neumann Problem for a Higher-Order Elliptic Equation in an Infinite Domain, *Contemporary Mathematics Fundamental Directions*, 2021, vol. 67, no. 3, pp. 564–575. DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-564-575.
17. Soldatov, A. P. On the First and Second Boundary Value Problems for Elliptic Systems on the Plane, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 5, pp. 712–725. DOI: 10.1023/A:1026102322259.
18. Kozhanov, A. I. Boundary Value Problems for Fourth-Order Sobolev Type Equations, *Journal of Siberian Federal University Mathematics & Physics*, 2021, vol. 14, no. 4, pp. 425–432. DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-4-425-432.
19. Kozhanov, A. I. and Kenzhebay, Kh. Boundary Value Problems with an Integro-Differential Non-Local Condition for Composite Type Differential Equations of the Fourth Order, *Chelyabinskii Fiziko-Matematicheskii Zhurnal*, 2023, vol. 8, no. 4, pp. 516–527. DOI: 10.47475/2500-0101-2023-8-4-516-527.

Received July 28, 2025

BAHRIYE KARACA

Izmir Bakircay University, Faculty of Engineering and Architecture,
Department of Fundamental Sciences, Gazi Mustafa Kemal District,
115/1 Kaynaklar Road, Menemen 35665, Izmir, Turkey,
Assistant Professor

E-mail: bahriye.karaca@bakircay.edu.tr

<https://orcid.org/0000-0003-4463-8180>

*Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 4, С. 46–60*

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Караджа Б.¹

¹ Измирский университет Бакырчай, факультет инженерии и архитектуры,
Турция, 35665, Измир, Менемен, район Гази Мустафа Кемаль, ул. Кайнаклар, 115/1

E-mail: bahriye.karaca@bakircay.edu.tr

Аннотация. В данной работе исследуются краевые задачи типа Дирихле и Шварца как для неоднородного уравнения Коши — Римана, так и для полианалитических уравнений высокого порядка в нестандартной области, а именно, в треугольной области, образованной пересечением трех круговых дисков в комплексной плоскости. Такие области вносят дополнительную геометрическую сложность, требующую тщательного аналитического анализа. Построив соответствующие функции-ядра, адаптированные к геометрии области, мы развиваем методы интегральных операторов, позволяющие выводить явные формулы решения для заданных граничных условий. Кроме того, мы устанавливаем необходимые и достаточные условия разрешимости этих задач в зависимости от совместности граничных данных и свойств неоднородных членов. Наш подход обобщает классические методы, используемые для стандартных областей, расширяя их применимость на более сложные геометрические ситуации. Результаты, представленные в данной работе, вносят вклад в более широкую теорию краевых задач для сложных уравнений в частных производных и предлагают новые инструменты для решения подобных задач в прикладной математической физике и комплексном анализе.

Ключевые слова: полианалитические уравнения, задача Шварца, задача Дирихле, оператор типа Помпейю, треугольная область.

AMS Subject Classification: 35F15, 35G15, 35C15.

Образец цитирования: Karaca B. Boundary Value Problems for Inhomogeneous Polyanalytic Equations in a Triangle // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 4.—С. 46–60 (in English). DOI: 10.46698/f7969-2225-7035-j.

УДК 517.9

DOI 10.46698/i7249-6874-2842-b

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОВТОРНОГО КВАНТОВАНИЯ К ОДНОМУ КЛАССУ НЕФУКСОВЫХ УРАВНЕНИЙ

М. В. Коровина¹, В. Ю. Смирнов²

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1;

² Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: betelgeuser@yandex.ru, vl-smirnov@mail.ru

Аннотация. Одной из фундаментальных проблем аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений является проблема построения асимптотик решений дифференциальных уравнений в окрестностях иррегулярных особых точек. В общем виде эта проблема до сих пор не решена. Однако в последние годы для ее решения был создан метод повторного квантования, который позволяет строить асимптотики решений для широкого класса уравнений с иррегулярными особенностями. Данная работа посвящена его развитию. К примеру, этим методом удалось построить асимптотические решения для дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечно удаленной особой точки, которая, вообще говоря, является иррегулярной. Метод повторного квантования основан на методах ресургентного анализа, т. е. на применении преобразования Лапласа — Бореля. Он применяется в том случае, когда корни основного символа являются кратными. С помощью результатов этой статьи расширяется класс уравнений с иррегулярными особыми точками, к которым метод повторного квантования применим. А именно к тем уравнениям с иррегулярной особой точкой, для которых асимптотики решений исходного уравнения в образах Лапласа — Бореля содержат экспоненты с показателями в виде полиномов от дробной степени переменной. Применение полученных результатов к уравнению такого типа проиллюстрировано на конкретном примере.

Ключевые слова: асимптотики решений, иррегулярные особенности, ресургентный анализ, преобразование Лапласа — Бореля, метод повторного квантования.

AMS Subject Classification: 34E10.

Образец цитирования: Коровина М. В., Смирнов В. Ю. Применение метода повторного квантования к одному классу нефуксовых уравнений // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 4.—С. 61–71. DOI: 10.46698/i7249-6874-2842-b.

1. Введение

Эта статья посвящена развитию метода, который применяется для решения одной из фундаментальных проблем аналитической теории дифференциальных уравнений, а именно проблеме построения равномерных асимптотик решений уравнений с мероморфными коэффициентами в окрестности иррегулярных особых точек. Этот метод называется методом повторного квантования [1, 2].

Проблема построения равномерных асимптотик решений дифференциальных уравнений в окрестностях особых точек была сформулирована Пуанкаре в работах [3, 4].

В этих работах он рассматривал случай, когда иррегулярной особой точкой является бесконечность, а именно задачу для уравнения вида

$$a_n(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^n u(r) + a_{n-1} \left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1} u(r) + \dots + a_i(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^i u(r) + \dots + a_0(r)u(r) = 0, \quad (1)$$

где $a_i(r)$, $i = 0, \dots, n$, — голоморфные функции. Задача, сформулированная Пуанкаре, заключалась в построении асимптотик решений уравнения (1) в окрестности бесконечности в случае, когда $a_n(r) = 1$. Как известно, бесконечность, вообще говоря, является иррегулярной особой точкой. Эта задача решена в работах [5, 6] с помощью метода повторного квантования. В общем случае, когда коэффициент $a_n(r)$ является произвольной голоморфной или мероморфной функцией, задача построения асимптотик в окрестности иррегулярной особой точки является более сложной и требует дополнительных возможностей метода повторного квантования.

Данный подход был создан для построения асимптотик решений дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярных особых точек в случае, когда корни основного символа дифференциального оператора являются кратными. Напомним определение основного символа.

Без ограничения общности будем считать, что особой точкой уравнения (1) является $r = 0$. В работе [7] показано, что уравнение (1) может быть приведено к виду

$$H \left(r, -r^{k+1} \frac{d}{dr} \right) = \left(-r^{k+1} \frac{d}{dr} \right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i(r) \left(-r^{k+1} \frac{d}{dr} \right)^i. \quad (2)$$

Здесь $k = -1, 0, 1, 2, \dots$, а через $\tilde{a}_i(r)$ обозначены соответствующие голоморфные функции. В работе [7] найдено минимальное значение k , т. е. минимальный порядок вырождения и коэффициенты этого уравнения. Если в представлении (2) уравнения (1) минимальное $k = -1$, то по классификации особых точек, введенной Пуанкаре, получим, что точка $r = 0$ не является особой. Если $k = 0$, то особая точка $r = 0$ является регулярной. Как известно [8], в окрестности регулярной особой точки асимптотика решения является конормальной. Если $k \in \mathbb{N}$, то особая точка является иррегулярной, в этом случае запишем оператор (2) в виде

$$H \left(r, -r^{k+1} \frac{d}{dr} \right) = k^n \left(\left(-\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{d}{dr} \right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i(r) \frac{1}{k^{n-i}} \left(-\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{d}{dr} \right)^i \right).$$

Основным символом дифференциального оператора $H \left(r, -r^{k+1} \frac{d}{dr} \right)$ является функция

$$H_0(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\tilde{a}_i(0)}{k^{n-i}} p^i.$$

В случае, когда основной символ имеет только простые корни, асимптотики решений в окрестности особых точек были получены в работе [9].

Однако методы из [9] оказались неприменимыми в ситуации кратных корней, кроме случая уравнений второго порядка. В работе [10] вопрос о построении асимптотик решений для уравнения второго порядка с произвольными голоморфными коэффициентами решен.

Для решения проблемы кратных корней в последние годы был создан метод повторного квантования. Суть этого метода состоит в том, что делается преобразование Лапласа — Бореля и доказывается теорема о бесконечной продолжимости решений полученного уравнения (для обыкновенных дифференциальных уравнений это доказано в [11]). Далее еще раз применяется преобразование Лапласа — Бореля и для итогового уравнения строятся асимптотики, которые позволяют найти асимптотики исходного уравнения. Иными словами, суть метода повторного квантования состоит в том, что преобразование Лапласа — Бореля делается два раза. Т. е. сдвинув корень основного символа p_j с помощью экспоненциальной подстановки в точку ноль, делается преобразование Лапласа — Бореля и получается интегро-дифференциальное уравнение относительно функции данного преобразования функции $u_j(r)$, которое мы будем обозначать через $\tilde{u}_j(p)$. При этом точка $p = 0$ будет особой точкой полученного уравнения. Она может быть как регулярной особенностью, так и иррегулярной. Если она регулярна, то, как известно, асимптотика функции $\tilde{u}_j(p)$ является конормальной, если иррегулярной, то, чтобы найти асимптотику этой функции в нуле, делается преобразование Лапласа — Бореля второй раз. При этом мы получаем интегральное уравнение относительно функции $\tilde{u}_j(q)$, которая является преобразованием Лапласа — Бореля функции $\tilde{u}_j(p)$. Для полученного уравнения, с помощью метода последовательных приближений строится асимптотика его решения в окрестности корней главного символа. Найдя асимптотику функции $\tilde{u}_j(q)$, и затем, сделав обратное преобразование Лапласа — Бореля, строится асимптотика функции $\tilde{u}_j(p)$ в окрестности нуля. Эта асимптотика может быть ВКБ-асимптотикой или иметь более общий вид и содержать экспоненты с дробными степенями. Поэтому возникает необходимость вычисления обратного преобразования Лапласа — Бореля от функций вида $e^{\alpha/p^{\frac{n}{k}}} g(p)$, где $n, k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим пример, который иллюстрирует применение метода повторного квантования к построению асимптотики решения дифференциального уравнения в окрестности иррегулярной особой точки:

$$\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^5 u - cr^2 u = 0. \quad (3)$$

Применив преобразование Лапласа — Бореля к уравнению (3), получим

$$p^5 \hat{u} - c \hat{r}^2 \hat{u} = f(p). \quad (4)$$

Приведем (4) к виду

$$\left(\frac{d}{dp}\right)^2 p^5 \hat{u} - c \hat{u} = \left(\frac{d}{dp}\right)^2 f(p). \quad (5)$$

Здесь $f(p)$ — произвольная голоморфная функция. Применим метод повторного квантования. Так как выполнено равенство

$$\left(\frac{d}{dp}\right)^2 p^5 \hat{u} = \left(p^{\frac{5}{2}} \frac{d}{dp}\right)^2 \hat{u} + \left(10 - \frac{5}{2}\right) p^{\frac{3}{2}} \left(p^{\frac{5}{2}} \frac{d}{dp}\right) \hat{u} + 20p^3 \hat{u},$$

то уравнение (5) можно переписать в виде

$$\left(-\frac{2}{3} p^{\frac{5}{2}} \frac{d}{dp}\right)^2 \hat{u} - \frac{2}{3} \left(10 - \frac{5}{2}\right) p^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{2}{3} p^{\frac{5}{2}} \frac{d}{dp}\right) \hat{u} + \frac{80}{9} p^3 \hat{u} - \frac{4}{9} c \hat{u} = \left(\frac{2}{3} \frac{d}{dp}\right)^2 f(p). \quad (6)$$

Основной символ дифференциального оператора в (6) равен $q^2 - \frac{4}{9}c$, т. е. основной символ имеет два простых корня $q_{1,2} = \pm \frac{2}{3}\sqrt{c}$. Асимптотика решения уравнения (6) в окрестности регулярной особой точки $p = 0$ имеет вид

$$\hat{u}(p) \approx \exp \frac{\frac{2}{3}\sqrt{c}}{p^{\frac{3}{2}}} p^\sigma \sum_{i=0}^{\infty} b_i^1 p^i + \exp \frac{-\frac{2}{3}\sqrt{c}}{p^{\frac{3}{2}}} p^\sigma \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 p^i.$$

Для того, чтобы найти асимптотику решения (3), надо найти обратное преобразование Лапласа — Бореля от выражения вида $\exp\left(\frac{\alpha}{p^{m/n}}\right) p^\sigma \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i$, где $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Это будет сделано ниже в теореме 2.

2. Основные определения и вспомогательные утверждения

В этом параграфе мы дадим определения основных понятий, которые будут использованы в статье (см. подробнее [12, 13]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Аналитическая на $S_{R,\varepsilon}$ функция f , имеет не более, чем k -экспоненциальный рост, если существуют такие неотрицательные константы C и α , что в секторе $S_{R,\varepsilon}$ выполнено неравенство

$$|f| < C e^{\alpha \frac{1}{|r|^k}}.$$

Обозначим через $E_k(S_{R,\varepsilon})$ пространство функций k -экспоненциального роста. Если ε может быть выбран любым $0 < \varepsilon \leq 2\pi$, то будем обозначать это пространство как $E_k(S_R)$, и $E(S_R) = E_1(S_R)$.

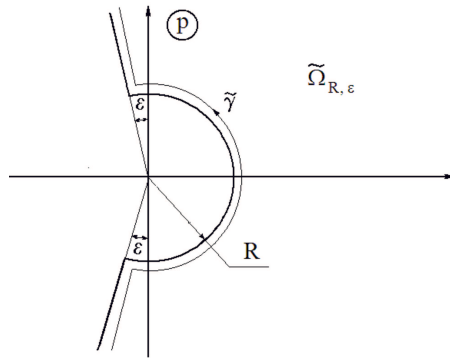


Рис. 1. Контур $\tilde{\gamma}$ и область $\tilde{\Omega}_{R,\varepsilon}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. k -преобразованием Лапласа — Бореля функции $f(r) \in E_k(S_{R,\varepsilon})$ называется отображение $B_k : E_k(S_{R,\varepsilon}) \rightarrow E(\tilde{\Omega}_{R,\varepsilon})/E(C)$ такое, что

$$\tilde{f} = B_k f = \int_0^{r_0} e^{-p/r^k} f(r) \frac{dr}{r^{k+1}}.$$

Обратное k -преобразование Лапласа — Бореля определяется формулой

$$B_k^{-1} \tilde{f} = \frac{k}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} e^{p/r^k} \tilde{f}(p) dp.$$

Контур $\tilde{\gamma}$ изображен на рис. 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция \tilde{f} называется *бесконечно-продолжимой*, если для любого числа R существует такое дискретное множество точек Z_R в \mathbb{C} , что функция \tilde{f} аналитически продолжается из первоначальной области определения вдоль любого пути длины меньше R , не проходящего через Z_R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Элемент f пространства $E_k(S_{R,\varepsilon})$ называется *k-ресургентной функцией*, если его k -преобразование Лапласа – Бореля $\tilde{f} = B_k f$ является бесконечно-продолжимым.

В работе [14] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть f – ресургентная функция, тогда решение уравнения $H\left(-r^{k+1}\frac{d}{dr}, r\right)u = f$ является ресургентной функцией в пространстве $E(S_R)$. Если полином $H_0(p)$ имеет простые корни в точках p_1, \dots, p_m , тогда асимптотика решения в пространстве $E(S_R)$ однородного уравнения $H\left(-r^{k+1}\frac{d}{dr}, r\right)u = 0$ имеет вид:
при $k = 1$

$$u(r) \approx \sum_{j=1}^m \exp\left(\frac{p_j}{r}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i, \tag{7}$$

при $k > 1, k \in \mathbb{N}$

$$u(r) \approx \sum_{j=1}^m \exp\left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{k-i}^1}{r^{k-i}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i, \tag{8}$$

при $k = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m > n$,

$$u \approx \sum_j \exp\left(\frac{p_j}{r^{\frac{m}{k}-1}} + \sum_{i=1}^{m-k-1} \frac{\alpha_{m-k-i}^1}{r^{\frac{m-i}{k}-1}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i, \tag{9}$$

где сумма берется по объединению всех корней полинома $H_0(p)$. Здесь через $b_i^j, \sigma_j, j = 1, \dots, m$, обозначены некоторые числа.

Введем обозначение:

$$\hat{r}^n = B r^n B^{-1}. \tag{10}$$

В работе [14] было доказано равенство

$$\hat{r}^n \tilde{f}(p) = (-1)^n \int_{p_0}^p \frac{(p-p')^{n-1}}{\Gamma(n)} \tilde{f}(p') dp'. \tag{11}$$

В частном случае

$$\hat{r} \tilde{f}(p) = - \int_{p_0}^p \tilde{f}(p') dp'. \tag{12}$$

3. Основные результаты

В этом параграфе мы формулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 2. Асимптотика функции $B_m^{-1} p^\sigma e^{-\alpha/p^{\frac{k}{n}}} g(p), k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, k \geq n$, и $\sigma, \alpha \in \mathbb{C}$, в окрестности нуля имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n+k} \exp\left(\frac{\alpha_j}{r^{\frac{mk+n}{n+k}-1}} + \sum_{i=1}^{mk+n-1} \frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{mk+n-i}{k+n}-1}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i. \tag{13}$$

Здесь $\alpha_j, j = 1, \dots, k+n$, — корни полинома $p^{n+k} + (-1)^{n+1} (m-1)^n \left(\frac{\alpha k}{n}\right)^n \left(\frac{n+k}{k}\right)^{n+k}$, а α_i^j, σ_j — соответствующие числа, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i$ — асимптотический ряд.

◁ Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} & \left(-r^m \frac{d}{dr}\right)^{n+k} u + c_{n-1} r^{m-1} \left(-r^m \frac{d}{dr}\right)^{k+n-1} u \\ & + c_{n-2} r^{2(m-1)} \left(-r^m \frac{d}{dr}\right)^{k+n-2} u + \dots + c_1 r^{(n-1)(m-1)} \left(-r^m \frac{d}{dr}\right)^{k+1} u \\ & + c r^{n(m-1)} u + c_0 r^{n(m-1)} \left(-r^m \frac{d}{dr}\right)^k u = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь через $c_i, i = 0, \dots, n-1$, и c обозначены некоторые константы. Перепишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{m-1} r^m \frac{d}{dr}\right)^{n+k} u + c_{n-1} \frac{1}{m-1} r^{m-1} \left(-\frac{1}{m-1} r^m \frac{d}{dr}\right)^{k+n-1} u \\ & + c_{n-2} \frac{1}{(m-1)^2} r^{2(m-1)} \left(-\frac{1}{m-1} r^m \frac{d}{dr}\right)^{k+n-2} u \\ & + \dots + c_1 \frac{1}{(m-1)^{n-1}} r^{(n-1)(m-1)} \left(-\frac{1}{m-1} r^m \frac{d}{dr}\right)^{k+1} u \\ & + c \frac{1}{(m-1)^{n+k}} r^{n(m-1)} u + c_0 \frac{1}{(m-1)^n} r^{n(m-1)} \left(-\frac{1}{m-1} r^m \frac{d}{dr}\right)^k u = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Сделаем в (15) преобразование Лапласа — Бореля

$$\begin{aligned} & p^{n+k} \tilde{u} + \frac{c_0 (-1)^n}{(m-1)^{2n}} \int_1^p \dots \int_1^{p^2} p_1^k \tilde{u}(p_1) dp_1 \dots dp_n \\ & + \frac{c_1 (-1)^{n-1}}{(m-1)^{2(n-1)}} \int_1^p \dots \int_1^{p^2} p_1^{k+1} \tilde{u}(p_1) dp_1 \dots dp_{n-1} \\ & + \dots + \frac{c_2 (-1)^{n-2}}{(m-1)^{2(n-2)}} \int_1^p \dots \int_1^{p^2} p_1^{k+2} \tilde{u}(p_1) dp_1 dp_2 \dots dp_{n-2} \\ & + \dots + \frac{c_{n-1} (-1)}{(m-1)^2} \int_1^p p_1^{k+n-1} \tilde{u}(p_1) dp_1 \\ & + c (-1)^n \frac{1}{(m-1)^{2n+k}} \int_1^p \dots \int_1^{p^2} \tilde{u}(p_1) dp_1 \dots dp_n = f(p). \end{aligned} \quad (16)$$

Через $f(p)$ обозначена произвольная голоморфная функция. Продифференцируем n раз

уравнение (16). Тогда

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dp}\right)^n p^{n+k} u + \frac{c_0(-1)^n}{(m-1)^{2n}} p^k u + \frac{c_1(-1)^{n-1}}{(m-1)^{2(n-1)}} \left(\frac{d}{dp}\right) p^{k+1} u \\ & \quad + \frac{c_2(-1)^{n-2}}{(m-1)^{2(n-2)}} \left(\frac{d}{dp}\right)^2 p^{k+2} u \\ & + \dots + \frac{c_{n-1}(-1)}{(m-1)^2} \left(\frac{d}{dp}\right)^{n-1} p^{k+n-1} u + \frac{(-1)^n}{(m-1)^{2n+k}} cu = \left(\frac{d}{dp}\right)^n f(p). \end{aligned} \quad (17)$$

Покажем, что можно выбрать константы $c, c_i, i = 0, \dots, n-1$ так, чтобы функция $\tilde{u}(p) = p^\sigma e^{-\alpha/p^{\frac{k}{n}}}$ являлась решением (17), для этого подставим эту функцию в данное уравнение. Тогда получим соотношение относительно констант $c, c_i, i = 0, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_0^n p^{\sigma+k} + \alpha_1^n p^{\sigma+k-\frac{k}{n}} + \alpha_2^n p^{\sigma+k-\frac{2k}{n}} + \alpha_3^n p^{\sigma+k-\frac{3k}{n}} + \dots + \alpha_n^n p^\sigma\right) + \frac{c_{n-1}(-1)}{(m-1)^{2(n-1)}} \\ & \times \left(\alpha_0^{n-1} p^{\sigma+k} + \alpha_1^{n-1} p^{\sigma+k-\frac{k}{n}} + \alpha_2^{n-1} p^{\sigma+k-\frac{2k}{n}} + \alpha_3^{n-1} p^{\sigma+k-\frac{3k}{n}} + \dots + \alpha_{n-1}^{n-1} p^{\sigma+k-\frac{(n-1)k}{n}}\right) \\ & \quad + \frac{c_{n-2}}{(m-1)^{2(n-2)}} \left(\alpha_0^{n-2} p^{\sigma+k} + \alpha_1^{n-2} p^{\sigma+k-\frac{k}{n}} + \dots + \alpha_{n-2}^{n-2} p^{\sigma+k-\frac{(n-2)k}{n}}\right) \\ & + \dots + \frac{c_1(-1)^{n-1}}{(m-1)^{2(n-1)}} \left(\alpha_0^1 p^{\sigma+k} + \alpha_1^1 p^{\sigma+k-\frac{k}{n}}\right) + \frac{c_0(-1)^n}{(m-1)^{2n}} p^{\sigma+k} + \frac{(-1)^n}{(m-1)^{2n+k}} cp^\sigma = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha_i^j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$, — соответствующие постоянные, которые зависят от α и σ . Заметим, что $\alpha_n^n = \left(\frac{\alpha k}{n}\right)^n, \alpha_i^i \neq 0, i = 1, \dots, n$. Из последнего уравнения следует, что выполнена система

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n}{(m-1)^{2n+k}} c = -\alpha_n^n \\ & \alpha_{n-1}^{n-1} c_{n-1} = -\alpha_{n-1}^n \\ & \alpha_{n-1}^{n-2} c_{n-1} + \alpha_{n-2}^{n-2} c_{n-2} = -\alpha_{n-2}^n \\ & \dots \\ & \alpha_0^{n-1} c_{n-1} + \alpha_0^{n-2} c_{n-2} + \dots + \alpha_0^1 c_1 + c_0 = -\alpha_0^n \end{aligned}$$

Очевидно, что она имеет единственное решение. Отсюда следует, что можно выбрать константы $c, c_i, i = 0, \dots, n-1$, так, чтобы функция $\tilde{u}(p) = p^\sigma e^{-\alpha/p^{\frac{k}{n}}}$ была решением уравнения (17). Решение (14) является обратным преобразованием Лапласа — Бореля этой функции. Найдем все асимптотики его решений. Разделим это уравнение на $r^{n(m-1)}$ и запишем его в виде

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{n+k}{k(m-1)} r^{m-\frac{n(m-1)}{n+k}} \frac{d}{dr}\right)^{n+k} u \\ & + c'_{n-1} \frac{n+k}{k(m-1)} r^{m-\frac{n(m-1)}{n+k}-1} \left(-\frac{n+k}{k(m-1)} r^{m-\frac{n(m-1)}{n+k}} \frac{d}{dr}\right)^{k+n-1} u \\ & + c'_{n-2} \left(\frac{n+k}{k(m-1)}\right)^2 r^{2\left(m-\frac{n(m-1)}{n+k}-1\right)} \left(-\frac{n+k}{k(m-1)} r^{m-\frac{n(m-1)}{n+k}} \frac{d}{dr}\right)^{k+n-2} u \\ & + \dots + c'_1 \left(\frac{n+k}{k(m-1)}\right)^{n-1} r^{(n-1)\left(m-\frac{n(m-1)}{n+k}-1\right)} \left(-\frac{n+k}{k(m-1)} r^{m-\frac{n(m-1)}{n+k}} \frac{d}{dr}\right)^{k+1} u \\ & + c'_0 \left(\frac{n+k}{k(m-1)}\right)^n r^{n\left(m-\frac{n(m-1)}{n+k}-1\right)} \left(-\frac{n+k}{k(m-1)} r^{m-\frac{n(m-1)}{n+k}} \frac{d}{dr}\right)^k u + c \left(\frac{n+k}{k(m-1)}\right)^{n+k} u = 0. \end{aligned}$$

Здесь основной символ $H_0 = p^{n+k} + c \left(\frac{n+k}{k(m-1)} \right)^{n+k}$, где $c = (-1)^{n+1} (m-1)^{2n+k} \alpha_n^n = (-1)^{n+1} (m-1)^{2n+k} \left(\frac{\alpha k}{n} \right)^n$, а c'_i , $i = 0, \dots, n-1$, — соответствующие константы.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} H_0 &= p^{n+k} + (-1)^{n+1} (m-1)^{2n+k} \left(\frac{\alpha k}{n} \right)^n \left(\frac{n+k}{k(m-1)} \right)^{n+k} \\ &= p^{n+k} + (-1)^{n+1} (m-1)^n \left(\frac{\alpha k}{n} \right)^n \left(\frac{n+k}{k} \right)^{n+k}. \end{aligned}$$

Из теоремы 1 видно, что если $k+1 = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $m > k$, асимптотика решения удовлетворяет соотношению

$$u \approx \sum_{j=1}^{n+k} \exp \left(\frac{\alpha_j}{r^{\frac{mk+n}{n+k}-1}} + \sum_{i=1}^{mk+n-1} \frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{mk+n-i}{k+n}-1}} \right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i. \quad (18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнение (17) может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{n}{k} p^{1+\frac{k}{n}} \frac{d}{dp} \right)^n u + b_0 p^k u + b_1 p^{\frac{(n-1)k}{n}} \left(p^{1+\frac{k}{n}} \frac{d}{dp} \right) u + b_1 p^{\frac{(n-2)k}{n}} \left(p^{1+\frac{k}{n}} \frac{d}{dp} \right)^2 u \\ &+ \dots + b_{n-1} p^{\frac{k}{n}} \left(p^{1+\frac{k}{n}} \frac{d}{dp} \right)^{n-1} + \left(\frac{n}{k} \right)^n \frac{1}{(m-1)^{2n+k}} c u = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь через b_i , $i = 0, \dots, n-1$, обозначены соответствующие константы. Основной символ оператора равен $q^n + \left(\frac{n}{k} \right)^n \frac{1}{(m-1)^{2n+k}}$, c . Он имеет простые корни $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Отсюда следует, что асимптотики уравнения (19) представимы в виде линейной комбинации функций u_j , $j = 1, \dots, n$:

$$u_j \approx \exp \left(\frac{\alpha_j}{p^{\frac{k}{n}-1}} + \sum_{i=1}^{k-n-1} \frac{\alpha_i^j}{p^{\frac{k-i}{n}-1}} \right) p^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j p^i.$$

Отсюда следует, что $B_{k/n}^{-1} u_j$ представимо в виде (18).

Вернемся к рассмотрению примера (3). Найдем

$$B_2^{-1} \exp \frac{\frac{2}{3}\sqrt{c}}{p^{\frac{3}{2}}} p^{\sigma_1} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^1 p^i.$$

Так как в этом случае $k = 3$, $n = 2$, $m = 2$, то из формулы (13) следует, что

$$B_2^{-1} \exp \frac{\pm \frac{2}{3}\sqrt{c}}{p^{\frac{3}{2}}} p^{\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i \approx \sum_{j=1}^5 \exp \left(\frac{\alpha_j}{r^{\frac{3}{5}}} + \sum_{i=1}^{mk+n-1} \frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{3-i}{5}}} \right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i.$$

Коэффициенты α_j , $j = 1, 2, \dots, 5$, определяются из теоремы, а именно они являются корнями многочлена $p^5 - \left(\frac{5}{2} \right)^5$.

Отсюда следует, что асимптотики решения уравнения (3) имеет вид (18).

Таким образом, результат теоремы 2 расширяет возможность применения метода повторного квантования к дифференциальным уравнениям, образы Лапласа — Бореля которых являются уравнениями с дробными порядками вырождения и основными символами имеющими простые корни.

Литература

1. Korovina M. V., Smirnov V. Yu. Requantization method and its application to the construction of asymptotics for solutions of non-Fuchsian equations with holomorphic coefficients // J. Math. Sci.—2022.—Vol. 268, № 1.—P. 70–83. DOI: 10.1007/s10958-022-06181-4.
2. Korovina M. V. Repeated quantization method and its applications to the construction of asymptotics of solutions of equations with degeneration // Diff. Equat.—2016.—Vol. 52, № 1.—P. 58–75. DOI: 10.1134/S0012266116010055.
3. Poincare H. Sur les integrales irregulieres: Des equations lineaires // Acta Math.—1886.—Vol. 8.—P. 295–344. DOI: 10.1007/BF02417092.
4. Poincare H. Analysis of the mathematical and natural works of Henri Poincare. In Selected works in three volumes. Vol. 3. Mathematics. Theoretical physics.—Moscow: Nauka, 1974.
5. Korovina M. V. Asymptotics of solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely distant point // MDPI Mathematics.—2020.—Vol. 8, № 12.—P. 1–15. DOI: 10.3390/math8122249.
6. Korovina M. V. Uniform asymptotics of solutions of the linear differential equations with holomorphic coefficients in a neighborhood of an infinitely // Lobachevskii J. Math.—2023.—Vol. 44, № 7.—P. 2765–2780. DOI: 10.1134/S1995080223070260.
7. Кац Д. С. Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов // Дифференц. уравнения.—2015.—Т. 51, № 12.—С. 1612–1617. DOI: 10.1134/s0374064115120067.
8. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московского мат. об-ва.—1967.—Т. 16.—С. 209–292.
9. Korovina M. V., Shatalov V. E. Differential equations with degeneration and resurgent analysis // Diff. Equat.—2010.—Vol. 46, № 9.—P. 1267–1286. DOI: 10.1134/S0012266110090041.
10. Korovina M. V., Matevossian H. A. Uniform asymptotics of solutions of second-order differential equations with meromorphic coefficients in a neighborhood of singular points and their applications // MDPI Mathematics.—2022.—Vol. 10, № 14.—P. 1–21. DOI: 10.3390/math10142465.
11. Korovina M. V. Application of the repeated quantization method to the problem of making asymptotic solutions of equations with holomorphic coefficients // International Journal of Open Information Technologies.—2019.—Vol. 7, № 9.—P. 14–22.
12. Ecalle J. Cinq Applications des Fonctions Resurgentes.—Paris: Prepublications Mathematiques d’Orsay, 1984.—110 p.
13. Sternin B. Yu., Shatalov V. E. Borel–Laplace Transform and Asymptotic Theory: Introduction to Resurgent Analysis.— Boca Raton, FL.: CRC Press, 1996.
14. Коровина М. В. Асимптотики решений уравнений с высшими вырождениями // Дифференц. уравнения.—2012.—Т. 48, № 5.—С. 710–722.

Статья поступила 16 ноября 2024 г.

КОРОВИНА МАРИЯ ВИКТОРОВНА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
ведущий научный сотрудник кафедры общей математики
РОССИЯ, 119991, Москва, Ленинские горы, 1
E-mail: betelgeuser@yandex.ru
<https://orcid.org/0000-0002-4366-8292>

СМИРНОВ ВЛАДИМИР ЮРЬЕВИЧ
Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет),
доцент кафедры прикладных программных средств
и математических методов
РОССИЯ, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4
E-mail: vl-smirnov@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-2348-8614>

APPLICATION OF THE REPEATED QUANTIZATION METHOD
TO A CLASS OF NON-FUCHSIAN EQUATIONSKorovina, M. V.¹ and Smirnov, V. Yu.²¹ Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia;² Moscow Aviation Institute (National Research University),
4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russia

E-mail: betelgeuser@yandex.ru, vl-smirnov@mail.ru

Abstract. One of the fundamental problems of the analytic theory of ordinary differential equations is the problem of constructing asymptotics of solutions of differential equations in the neighborhood of irregular singular points. In general, this problem has not yet been solved. However, in recent years, the method of repeated quantization has been created to solve this problem, which allows constructing asymptotics of solutions for a wide class of equations with irregular singularities. This work is devoted to the development of this method. For example, this method has been used to construct asymptotic solutions for differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely distant singular point, which, generally speaking, is irregular. The method of repeated quantization is based on the methods of resurgent analysis, that is, on the application of the Laplace-Borel transform. This method is applied when the roots of the principal symbol are multiple. Using the results of this article, the class of equations with irregular singular points to which the repeated quantization method is applicable is expanded. Namely, to those equations with an irregular singular point such that the asymptotics of solutions of the original equation in the Laplace-Borel images contain exponentials in whose exponents there are polynomials of a fractional degree of the variable. The application of the obtained results to an equation of this type is illustrated by a specific example.

Keywords: asymptotics of solutions, irregular singularities, resurgent analysis, Laplace–Borel transform, requantization method.

AMS Subject Classification: 34E10.

For citation: Korovina, M. V. and Smirnov, V. Yu. Application of the Repeated Quantization Method to a Class of Non-Fuchsian Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 61–71 (in Russian). DOI: 10.46698/i7249-6874-2842-b.

References

1. Korovina, M. V. and Smirnov, V. Yu. Requantization Method and Its Application to the Construction of Asymptotics for Solutions of Non-Fuchsian Equations with Holomorphic Coefficients, *Journal of Mathematical Sciences*, 2022, vol. 268, no. 1, pp. 70–83. DOI: 10.1007/s10958-022-06181-4.
2. Korovina, M. V. Repeated Quantization Method and Its Applications to the Construction of Asymptotics of Solutions of Equations with Degeneration, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 58–75. DOI: 10.1134/S0012266116010055.
3. Poincare, H. Sur les Integrales Irregulieres: Des Equations Lineaires, *Acta Mathematica*, 1886, vol. 8, pp. 295–344. DOI: 10.1007/BF02417092.
4. Poincare, H. *Analysis of the Mathematical and Natural Works of Henri Poincare, In Selected Works in Three Volumes, vol. 3. Mathematics. Theoretical Physics*, Moscow, Nauka, 1974.
5. Korovina, M. V. Asymptotics of Solutions of Linear Differential Equations with Holomorphic Coefficients in the Neighborhood of an Infinitely Distant Point, *MDPI Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 12, pp. 1–15. DOI: 10.3390/math8122249.
6. Korovina, M. V. Uniform Asymptotics of Solutions of the Linear Differential Equations with Holomorphic Coefficients in a Neighborhood of an Infinitely, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, no. 7, pp. 2765–2780. DOI: 10.1134/S1995080223070260.

7. Kats, D. S. Computation of the Asymptotics of Solutions for Equations with Polynomial Degeneration of the Coefficients, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 12, pp. 1589–1594. DOI: 10.1134/S001226611512006X.
8. Kondrat'ev, V. A. Boundary Value Problems for Elliptic Equations in Domains with Conical or Angular Points, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva* [Proceedings of Moscow Mathematical Society], 1967, vol. 16, pp. 209–292 (in Russian).
9. Korovina, M. V. and Shatalov, V. E. Differential Equations with Degeneration and Resurgent Analysis, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 9, pp. 1267–1286. DOI: 10.1134/S0012266110090041.
10. Korovina, M. V. and Matevossian, H. A. Uniform Asymptotics of Solutions of Second-Order Differential Equations with Meromorphic Coefficients in a Neighborhood of Singular Points and Their Applications, *MDPI Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 14, pp. 1–21. DOI: 10.3390/math10142465.
11. Korovina, M. V. Application of the Repeated Quantization Method to the Problem of Making Asymptotic Solutions of Equations with Holomorphic Coefficients, *International Journal of Open Information Technologies*, 2019, vol. 7, no. 9, pp. 14–22.
12. Ecalle, J. *Cinq Applications des Fonctions Resurgentes*, Paris, France, Prepublications Mathematiques d'Orsay, 1984.
13. Sternin, B. Yu. and Shatalov, V. E. *Borel–Laplace Transform and Asymptotic Theory. Introduction to Resurgent Analysis*, Boca Raton, FL., CRC Press, 1996.
14. Korovina, M. V. Asymptotics of Solutions of Equations with Higher Degenerations, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 717–729. DOI: 10.1134/S0012266112050102.

Received November 16, 2024

MARIA V. KOROVINA
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia,
Leading Scientific Researcher
E-mail: betelgeuser@yandex.ru
<https://orcid.org/0000-0002-4366-8292>

VLADIMIR YU. SMIRNOV
Moscow Aviation Institute (National Research University),
4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russia,
Associate Professor
E-mail: vl-smirnov@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-2348-8614>

УДК 514.12, 514.13
DOI 10.46698/m2064-2286-7424-1

ТЕОРЕМЫ ТИПА КЕЙСИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАГЕРРА

А. В. Костин¹

¹ Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета,
Россия, 423812, Набережные Челны, пр. Мира, 68/19 (1/18)
E-mail: kostin_andrei@mail.ru

Аннотация. В статье исследуются связи между теоремами Кейси и их обобщениями на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях. Наряду с теоремами типа Кейси об окружностях и «касательных расстояниях» между ними рассматриваются преобразования Лагерра, сохраняющие такие расстояния. С использованием неевклидовой геометрии описываются некоторые связи между этими преобразованиями. В теореме Кейси, являющейся одним из обобщений теоремы Птолемея о вписанном четырехугольнике, рассматриваются четыре окружности, касающиеся одной окружности на евклидовой плоскости. Вместо длин сторон и диагоналей берутся длины общих касательных соответствующих пар окружностей. Эта теорема легко обобщается на большее количество окружностей. Кроме того, у нее существуют различные аналоги в пространствах постоянной кривизны. На псевдоевклидовой плоскости также можно рассматривать аналоги теоремы Кейси и ее обобщений. Теоремы такого типа на псевдоевклидовой плоскости являются непосредственным следствием соответствующих евклидовых теорем. В работе строится соответствие между конфигурациями окружностей на евклидовой плоскости и конфигурациями окружностей мнимого радиуса на псевдоевклидовой плоскости. При этом соотношению из евклидовой геометрии соответствует то же самое соотношение в псевдоевклидовой геометрии. Преобразования Лагерра на евклидовой плоскости воздействуют на ориентированные прямые. При этом семейство прямых, огибающее окружность, под воздействием преобразований Лагерра переходит в аналогичное семейство. Если прямая принадлежит двум таким семействам, то при преобразованиях Лагерра сохраняется длина отрезка прямой между точками касания с окружностями. С использованием изотропной проекции преобразования Лагерра на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях можно рассматривать как преобразования, индуцированные движениями трехмерного псевдоевклидова пространства. Для описания свойств однопараметрических подгрупп группы Лагерра на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях используются геометрии Лобачевского и де Ситтера.

Ключевые слова: теорема Птолемея, теорема Кейси, теорема Фурмана, преобразования Лагерра, пространство постоянной кривизны.

AMS Subject Classification: 51M09, 53B30.

Образец цитирования: Костин А. В. Теоремы типа Кейси и преобразования Лагерра // Владикавказ. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 4.—С. 72–85. DOI: 10.46698/m2064-2286-7424-1.

1. Введение

В теореме Птолемея утверждается, что произведение длин диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений длин противоположных сторон. Эта теорема имеет многочисленные обобщения и на самой евклидовой плоскости по числу сторон вписанного многоугольника, по типу фигур, участвующих в конфигурациях. Существуют пространственные обобщения этой теоремы, а также различные ее неевклидовы аналоги.

Простейшим обобщением по числу сторон вписанного многоугольника является теорема Фурмана.

Теорема 1. *На евклидовой плоскости для выпуклого шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, вписанного в окружность, имеет место соотношение*

$$A_1A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_3A_6 = A_1A_2 \cdot A_3A_6 \cdot A_4A_5 + A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6 \\ + A_2A_3 \cdot A_1A_4 \cdot A_5A_6 + A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_1A_6 + A_3A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_1A_6.$$

Слева в этом равенстве стоят длины диагоналей, соединяющих противоположные вершины шестиугольника. Справа в трех слагаемых стоят длины таких диагоналей и сторон, не имеющих с ними общих точек, в двух — длины трех сторон, взятых через одну. Гиперболические аналоги теоремы Птолемея о вписанном четырехугольнике с разной степенью общности независимо доказали Т. Кубота [1] в 1912 г. и П. А. Широков [2] в 1924 г. Версия этой теоремы в релятивистской модели аналитической гиперболической геометрии получена в работе А. Унгара (A. Ungar) [3] в 2023 г. В 1947 г. Й. Хаантгес [4] доказал гиперболический аналог неравенства Птолемея. Опубликованная в 2024 г. статья М. Гомеса и Ф. Мемоли [5] посвящена рассмотрению неравенства Птолемея в САТ-пространствах.

В других обобщениях теоремы Птолемея вершины вписанных в окружность многоугольников заменяются на окружности, касающиеся этой окружности, а длины сторон и диагоналей — на длины отрезков общих касательных соответствующих окружностей. При этом, если две окружности касаются основной окружности одинаково — обе внутренним или обе внешним образом, то берется отрезок внешней касательной к этим окружностям, если же по-разному, то берется отрезок внутренней касательной. Первую теорему такого типа доказал Джон Кейси в 1866 г. (см. [6, 7]). Многомерное евклидово обобщение теоремы Кейси (в других транслитерациях Кези или Кэзи) получили Н. В. Абросимов и В. В. Асеев в 2018 г. в статье [8].

Гиперболический аналог теоремы Кейси получен Н. В. Абросимовым и Л. А. Михайловой [9] в 2015 г. Различные обобщения последней теоремы для шести окружностей или циклов другого вида, касающихся линии постоянной кривизны на плоскости Лобачевского, получены в [10] и [11].

Интерпретация гиперболического аналога теоремы Кейси (Кези) как теоремы о четырехугольнике, вписанном в изотропную сферу псевдогиперболического пространства, дана в [12]. Там же приведена интерпретация евклидовой теоремы как теоремы о четырехугольнике, вписанном в сферу нулевого радиуса трехмерного псевдоевклидова пространства (трехмерного пространства Минковского). Необходимая информация о неевклидовых геометриях имеется в монографиях Б. А. Розенфельда [13] и [14].

Основной целью работы является доказательство теоремы Кейси и ее обобщения для шести псевдоевклидовых окружностей на псевдоевклидовой плоскости и установление взаимосвязей между преобразованиями Лагерра на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях.

2. Теоремы типа Кейси на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях

В условиях таких теорем можно снабдить окружности и касательные ориентацией и брать касательные в соответствии с согласованной ориентацией. Длину отрезка общей касательной будем называть также касательным расстоянием между окружностями.

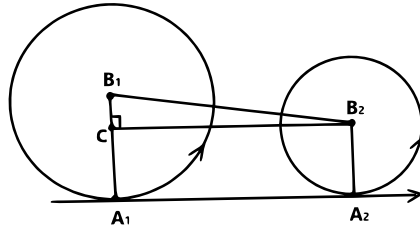


Рис. 1. Одинаковая ориентация окружностей.

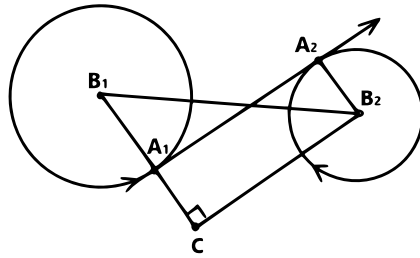


Рис. 2. Разная ориентация окружностей.

Если окружность с центром в точке $B_1(a_1, b_1)$ имеет радиус c_1 (рис. 1 и рис. 2), а окружность с центром в точке $B_2(a_2, b_2)$ имеет (относительный) радиус c_2 на евклидовой плоскости с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$, то длина отрезка общей касательной этих окружностей будет удовлетворять условию $|A_1A_2|^2 = |B_1B_2|^2 - |B_1C|^2$. Если у отрицательно ориентированной окружности считать радиус отрицательным, т. е. приписать его длине знак минус, то в обоих случаях имеем: $|A_1A_2|^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 - (c_1 - c_2)^2$. Вместо ориентации можно рассматривать окраску окружностей в один из двух цветов и у одинаково окрашенных окружностей брать отрезок внешней касательной, у окрашенных по-разному — внутренней (см. [15]). Из последней работы заимствован удачный термин в названии статьи.

Теорема Кейси о четырех окружностях, касающихся одной окружности на евклидовой плоскости, с использованием изотропной проекции интерпретируется как теорема Птолемея о четырехугольнике, вписанном в сферу нулевого радиуса трехмерного псевдоевклидова пространства [12]. На рис. 3 с использованием такой интерпретации показано, как определяются касательные расстояния между двумя окружностями, касающимися одной окружности, в зависимости от способов касания с нею. Все эти расстояния равны расстоянию S_1S_2 .

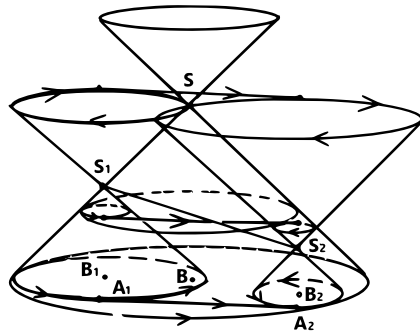


Рис. 3. Сечения изотропных конусов евклидовыми плоскостями.

Аналогичную интерпретацию можно дать для псевдоевклидова аналога этой теоремы. Это сводит доказательство псевдоевклидова аналога к доказательству евклидовой

теоремы. Такая интерпретация позволяет установить и наглядные геометрические связи между преобразованиями Лагерра на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях. Для псевдоевклидовой плоскости, структура которой задается индефинитной квадратичной формой, будут использоваться понятия метрика, длина, расстояние и т.д., аналогично и для псевдоевклидова пространства. Это не должно приводить к недоразумениям.

На псевдоевклидовой плоскости с метрикой $ds^2 = dx^2 - dz^2$ в декартовых координатах будем рассматривать окружности с мнимыми радиусами. Пусть $O_1(a_1, c_1)$ — координаты центра одной псевдоевклидовой окружности, $b_1 \cdot i$, где $i^2 = -1$, — ее радиус. Аналогично, $O_2(a_2, c_2)$ и $b_2 \cdot i$ — у другой окружности. Пусть T_1, T_2 — точки касания общей касательной прямой с данными окружностями (рис. 4). Проведем прямую T_1T параллельно прямой O_1O_2 . В треугольнике T_1T_2T имеем: $|T_1T_2|^2 - |T_2T|^2 = |T_1T|^2$. Отсюда

$$|T_1T_2|^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 - (c_1 - c_2)^2.$$

Это квадрат расстояния между точками с координатами (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) в трехмерном псевдоевклидовом пространстве с метрикой $ds^2 = da^2 + db^2 - dc^2$.

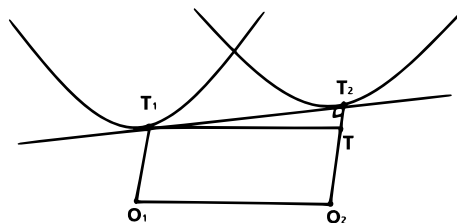


Рис. 4. Касательная к псевдоевклидовым окружностям.

Псевдоевклидовы окружности тоже можно ориентировать по часовой стрелке или против нее. То есть, если на одной ветви (полуокружности) ориентация слева направо, то на другой ветви этой окружности — наоборот. У одинаково ориентированных окружностей берется касательная к односторонним ветвям (верхним или нижним одновременно), у ориентированных окружностей с разной ориентацией — касательная к разным ветвям. Если плоскость с рассматриваемыми псевдоевклидовыми окружностями поместить в трехмерное псевдоевклидово пространство с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$, то точки с координатами $x_1 = a_1, y_1 = b_1, z_1 = c_1$ и $x_2 = a_2, y_2 = b_2, z_2 = c_2$ будут вершинами изотропных конусов, высекающих данные окружности из плоскости $y = 0$.

Длина отрезка общей касательной псевдоевклидовых окружностей в плоскости Oxz с центрами $O_1(a_1, c_1), O_2(a_2, c_2)$ и радиусами $b_1 \cdot i, b_2 \cdot i$ соответственно совпадает с длиной отрезка общей касательной евклидовых окружностей с центрами $B_1(a_1, b_1), B_2(a_2, b_2)$ и радиусами c_1, c_2 соответственно в плоскости Oxy с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Равенство длин общих касательных рассматриваемых евклидовых и псевдоевклидовых окружностей является частным случаем более общего факта.

Лемма 1. Пусть в псевдоевклидовом пространстве зафиксированы два изотропных конуса, и плоскости пересекают конусы по евклидовым или псевдоевклидовым окружностям. Тогда длины общих касательных пар окружностей (при соответствующем выборе этих касательных) будут равны.

◁ Пусть зафиксированы изотропные конусы с вершинами S_1 и S_2 (рис. 5). Пусть общая касательная плоскость этих конусов пересекает евклидову плоскость по прямой A_1A_2 . Эта касательная плоскость является полуевклидовой. Расстояния по прямой A_1A_2 вещественные, по прямой A_1S_1 — нулевые. Плоскости, пересекающие эти изотропные конусы по евклидовым или псевдоевклидовым окружностям, пересекают плоскость $A_1A_2S_1$

по общим касательным к этим окружностям. При этом точки касания будут лежать на изотропных образующих A_1S_1 , A_2S_2 . Вследствие полуевклидовости плоскости $A_1A_2S_1$ длины отрезков общих касательных (таких, например, как T_1T_2) будут равны их проекциям параллельно указанным образующим на прямую A_1A_2 . \triangleright

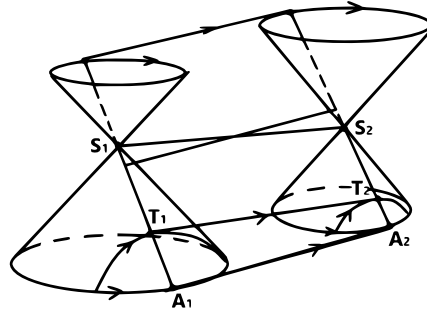


Рис. 5. Изотропные конусы с общей касательной плоскостью.

Если изотропная плоскость пересекает эти конусы по параболам, то длина отрезка их общей касательной также будет равна длине отрезка A_1A_2 , но в данной работе нас интересуют сечения конусов именно евклидовыми и псевдоевклидовыми плоскостями.

Теорема 2. Пусть на псевдоевклидовой плоскости окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ мнимого радиуса касаются в указанном порядке одной окружности ω мнимого радиуса. Пусть t_{ij} — длина отрезка общей касательной окружностей ω_i, ω_j , взятой с учетом ориентации окружностей. Тогда имеют место соотношения:

$$t_{13} \cdot t_{24} = t_{12} \cdot t_{34} + t_{14} \cdot t_{23}$$

и

$$t_{14} \cdot t_{25} \cdot t_{36} = t_{12} \cdot t_{36} \cdot t_{45} + t_{12} \cdot t_{34} \cdot t_{56} + t_{23} \cdot t_{14} \cdot t_{56} + t_{23} \cdot t_{45} \cdot t_{16} + t_{34} \cdot t_{25} \cdot t_{16}.$$

\triangleleft Первое соотношение — теорема Кейси, второе обобщает ее и теорему Фурмана (см. [10, 11]) на шесть окружностей, касающихся одной окружности. Доказательство следует из общей интерпретации этих теорем из евклидовой и псевдоевклидовой геометрий как теорем о многоугольниках, вписанных в изотропную сферу трехмерного псевдоевклидова пространства. Действительно, если псевдоевклидовы окружности касаются, то при изотропной проекции вершины соответствующих им конусов в трехмерном псевдоевклидовом пространстве соединяет вектор нулевой длины. Значит, шести окружностям, касающимся одной окружности ω , будут соответствовать шесть вершин конусов, лежащих на одном изотропном конусе, соответствующем окружности ω . Касательным расстояниям между окружностями будут соответствовать расстояния между точками одного изотропного конуса. Если всю конфигурацию пересечем евклидовой плоскостью, то в сечении получим набор евклидовых окружностей, касающихся одной евклидовой окружности. Расстояниям между вершинами конусов будут соответствовать длины отрезков общих касательных к этим окружностям. При этом соотношение между отрезками псевдоевклидовой плоскости станет эквивалентно аналогичному соотношению на евклидовой плоскости, что и завершает доказательство. \triangleright

3. Преобразования Лагерра

Преобразования Лагерра на евклидовой плоскости рассматривали различные авторы. Обширная библиография по геометрии Лагерра имеется в [16]. Преобразования Лагерра и их аналоги в различных пространствах являются преобразованиями многообразий фигур этих пространств. Допуская определенную вольность речи, будем просто говорить о преобразованиях Лагерра рассматриваемых пространств. В двумерном случае эти преобразования воздействуют на (ориентированные) прямые. Семейства прямых, огибающие окружности, при этом переводятся в аналогичные семейства. Если прямая принадлежит двум таким семействам, то при преобразованиях сохраняется длина отрезка прямой между точками касания. А. П. Широков [17] предложил следующий подход к построению группы Лагерра, точнее, ее алгебры Ли, на E^2 с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$. На евклидовой окружности

$$\begin{cases} x = \cos(u^1), \\ y = \sin(u^1), \end{cases}$$

рассматриваются векторные поля

$$\frac{d}{du^1}, \quad \cos(u^1) \frac{d}{du^1}, \quad \sin(u^1) \frac{d}{du^1},$$

которые, в свою очередь, порождаются операторами группы вращений и параллельных переносов в направлении координатных осей. Затем строятся их полные $V_1 - V_3$ и вертикальные $V_4 - V_6$ лифты в касательное расслоение окружности:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\partial}{\partial u^1}, & V_2 &= \cos(u^1) \frac{\partial}{\partial u^1} - u^2 \sin(u^1) \frac{\partial}{\partial u^2}, & V_3 &= \sin(u^1) \frac{\partial}{\partial u^1} + u^2 \cos(u^1) \frac{\partial}{\partial u^2}, \\ V_4 &= \frac{\partial}{\partial u^2}, & V_5 &= \cos(u^1) \frac{\partial}{\partial u^2}, & V_6 &= \sin(u^1) \frac{\partial}{\partial u^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь, как обычно, отождествляются векторные поля и соответствующие дифференциальные операторы. Ориентированная прямая, имеющая направление $\vec{e}(\cos(u^1), \sin(u^1))$, задается нормальным уравнением

$$-x \sin(u^1) + y \cos(u^1) - u^2 = 0.$$

Пусть вещественные числа a, b, c фиксированы, а u^1, u^2 меняются. Тогда семейство прямых

$$-a \sin(u^1) + b \cos(u^1) - u^2 = c$$

оглаивает цикл (окружность) с центром (a, b) и радиусом c . Преобразования прямых индуцируют преобразования циклов. В переменных a, b, c соответствующие операторы примут следующий вид:

$$\begin{aligned} V_1 &= -b \frac{\partial}{\partial a} + a \frac{\partial}{\partial b}, & V_2 &= -c \frac{\partial}{\partial a} - a \frac{\partial}{\partial c}, & V_3 &= -c \frac{\partial}{\partial b} - b \frac{\partial}{\partial c}, \\ V_4 &= -\frac{\partial}{\partial c}, & V_5 &= \frac{\partial}{\partial b}, & V_6 &= -\frac{\partial}{\partial a}. \end{aligned} \quad (2)$$

Аналогично, зададим прямую на псевдоевклидовой плоскости с метрикой $ds^2 = dx^2 - dz^2$ нормальным уравнением:

$$-x \sinh(u^1) + z \cosh(u^1) - u^2 = 0.$$

Базис алгебры Ли группы преобразований Лагерра на псевдоевклидовой плоскости может быть задан следующим образом [18]:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\partial}{\partial u^1}, & W_2 &= \cosh(u^1) \frac{\partial}{\partial u^1} + u^2 \sinh(u^1) \frac{\partial}{\partial u^2}, \\ W_3 &= \sinh(u^1) \frac{\partial}{\partial u^1} + u^2 \cosh(u^1) \frac{\partial}{\partial u^2}, & W_4 &= \frac{\partial}{\partial u^2}, \\ W_5 &= \cosh(u^1) \frac{\partial}{\partial u^2}, & W_6 &= \sinh(u^1) \frac{\partial}{\partial u^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Как и выше, векторные поля $W_1 - W_3$ в (3) являются полными лифтами векторных полей

$$\frac{d}{du^1}, \quad \cosh(u^1) \frac{d}{du^1}, \quad \sinh(u^1) \frac{d}{du^1},$$

заданных на псевдоевклидовой окружности, в ее касательное расслоение, поля $W_4 - W_6$ — их вертикальными лифтами.

Пусть опять вещественные числа a, b, c фиксированы, а u^1, u^2 меняются. Тогда прямые

$$-a \sinh(u^1) + c \cosh(u^1) - u^2 = b$$

касаются псевдоевклидовой окружности с центром (a, c) и радиусом $b \cdot i$. Преобразования псевдоевклидовых прямых, индуцированные операторами $W_1 - W_6$, порождают преобразования циклов. В переменных a, b, c соответствующие операторы примут следующий вид:

$$\begin{aligned} W_1 &= c \frac{\partial}{\partial a} + a \frac{\partial}{\partial c}, & W_2 &= -b \frac{\partial}{\partial a} + a \frac{\partial}{\partial b}, & W_3 &= b \frac{\partial}{\partial c} + c \frac{\partial}{\partial b}, \\ W_4 &= \frac{\partial}{\partial b}, & W_5 &= \frac{\partial}{\partial c}, & W_6 &= -\frac{\partial}{\partial a}. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда, сравнивая (2) и (4), имеем

$$\begin{aligned} W_1 &= -V_2, & W_2 &= V_1, \\ W_3 &= -V_3, & W_4 &= V_5, \\ W_5 &= -V_4, & W_6 &= V_6. \end{aligned}$$

Таким образом, операторы групп преобразований совпадают с точностью до порядка следования и знака. Отличие в знаке для операторов означает, что они порождают однопараметрические группы трансляций или вращений в противоположных направлениях. Полученное соответствие позволяет установить взаимосвязи между преобразованиями Лагерра на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях. Проиллюстрируем это на конкретных примерах.

3.1 Преобразования Лагерра, индуцированные гиперболическими винтовыми движениями. Рассмотрим однопараметрические группы преобразований, порождаемые оператором $W_3 + \mu W_6$, где μ — некоторая вещественная константа. В трехмерном псевдоевклидовом пространстве этот оператор порождает однопараметрическую группу винтовых движений гиперболического типа. Покажем, как связаны действия соответствующих преобразований Лагерра на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях.

На евклидовой плоскости соответствующий оператор имеет следующий вид:

$$-\sin(u^1) \frac{\partial}{\partial u^1} + (-u^2 \cos(u^1) + \mu \sin(u^1)) \frac{\partial}{\partial u^2}.$$

Траектории в многообразии прямых евклидовой плоскости задаются системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{du^1}{dt} = -\sin(u^1), \\ \frac{du^2}{dt} = -u^2 \cos(u^1) + \mu \sin(u^1). \end{cases}$$

Отсюда

$$u^2 = -\mu \sin(u^1) \ln \left(\operatorname{tg} \frac{u^1}{2} \right) + C \sin(u^1).$$

Здесь C — константа интегрирования. Из системы уравнений

$$\begin{cases} -x \sin(u^1) + y \cos(u^1) = -\mu \sin(u^1) \ln \left(\operatorname{tg} \frac{u^1}{2} \right) + C \sin(u^1), \\ -x \cos(u^1) - y \sin(u^1) = -\mu \cos(u^1) \ln \left(\operatorname{tg} \frac{u^1}{2} \right) - \mu + c \cos(u^1), \end{cases}$$

находится огибающая этого однопараметрического семейства прямых:

$$\begin{cases} x = \mu \left(\ln \left(\operatorname{tg} \frac{u^1}{2} \right) + \cos(u^1) \right) - C, \\ y = \mu \sin(u^1). \end{cases}$$

Отсюда следует, что прямая на евклидовой плоскости под действием однопараметрической группы гиперболических винтовых движений скользит по трактрисе с параметром μ . Базой трактрисы служит ось Ox . Преобразования псевдоевклидова пространства переводят изотропный конус с вершиной в точке $(x = a, y = b, z = c)$ в изотропный конус. Касательная плоскость к изотропному конусу переходит в касательную плоскость к его образу. Образ прямой, по которой касательная плоскость пересекается с евклидовой плоскостью Oxy (псевдоевклидовой плоскостью Oxz), определяется пересечением образа касательной плоскости с евклидовой (соответственно, псевдоевклидовой) плоскостью. Это позволяет связать геометрические характеристики орбит однопараметрических подгрупп группы Лагерра на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях. Пусть прямая n на евклидовой плоскости касается огибающей в точке N . Построим изотропный конус, касающийся прямой в этой же точке. Отрезок NP прямой от точки касания до оси Ox имеет длину $|\mu|$. Плоскость Oxy пересекает конус по евклидовой окружности. Плоскость Oxz пересекает его по псевдоевклидовой окружности. В плоскости Oxz касательная плоскость к конусу высекает псевдоевклидову прямую m , касающуюся псевдоевклидовой окружности и огибающей семейства прямых, полученных из псевдоевклидовой прямой m под действием однопараметрической группы, в точке M . Поскольку касательная плоскость к конусу полуевклидова, в треугольнике MNP сторона MN лежит на изотропной прямой, и длина отрезка MP будет равна длине отрезка NP (рис. 6). Это означает, что на псевдоевклидовой плоскости Oxz прямая также будет скользить по линии, длина отрезка касательной которой до оси Ox постоянна и равна $|\mu|$.

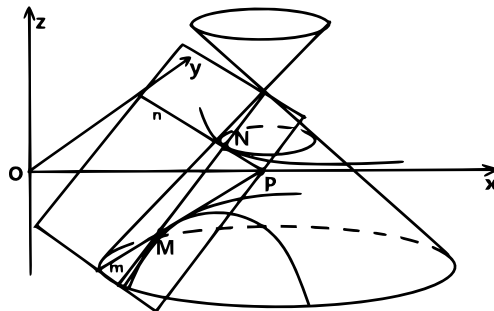


Рис. 6. Связь преобразований.

Аналитически выражение для орбит можно найти аналогично предыдущему. Оператор однопараметрической группы преобразований имеет вид

$$\sinh(u^1) \frac{\partial}{\partial u^1} + (u^2 \cosh(u^1) + \mu \sinh(u^1)) \frac{\partial}{\partial u^2}.$$

Переменные u^1, u^2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{du^1}{dt} = \sinh(u^1), \\ \frac{du^2}{dt} = u^2 \cosh(u^1) + \mu \sinh(u^1). \end{cases} \quad (5)$$

Для u^2 из (5) получаем следующее выражение через u^1 :

$$u^2 = \mu \sinh(u^1) \ln \left(\tanh \frac{u^1}{2} \right) + C \sinh(u^1).$$

Далее, из системы уравнений

$$\begin{cases} -x \sinh(u^1) + y \cosh(u^1) = \mu \sinh(u^1) \ln \left(\tanh \frac{u^1}{2} \right) + C \sinh(u^1), \\ -x \cosh(u^1) + y \sinh(u^1) = \mu \cosh(u^1) \ln \left(\tanh \frac{u^1}{2} \right) + \mu + C \cosh(u^1), \end{cases}$$

находим параметрические уравнения орбит — линий, по которым скользят псевдоевклидовы прямые под действием однопараметрической группы преобразований:

$$\begin{cases} x = -\mu \left(\ln \left(\tanh \frac{u^1}{2} \right) + \cosh(u^1) \right) - C, \\ y = -\mu \sinh(u^1). \end{cases}$$

У этого псевдоевклидова аналога трактрисы база и касательная являются прямыми одного типа. Кроме базы имеется еще изотропная асимптота. Кривая не имеет особых точек.

Хорошо известно, что на поверхности, полученной вращением трактрисы в евклидовом пространстве, локально реализуется геометрия Лобачевского. При гиперболическом вращении этого псевдоевклидова аналога трактрисы относительно ее базы получается поверхность, являющаяся одним из аналогов псевдосферы и глобально изометричная плоскости Лобачевского. Некоторые свойства других псевдоевклидовых аналогов псевдосферы отмечены в статье [19].

3.2 Преобразования Лагерра, индуцированные изотропными винтовыми движениями. Рассмотрим однопараметрические группы преобразований, порождаемые оператором $W_1 + W_2 + \mu \cdot (W_4 + W_5)$. В трехмерном псевдоевклидовом пространстве этот оператор порождает однопараметрическую группу винтовых движений, ось вращения и вектор переноса у которых изотропны. Покажем, что и в этом случае преобразования Лагерра, индуцированные этим оператором на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях, будут иметь похожие геометрические свойства. На псевдоевклидовой плоскости соответствующий оператор имеет следующий вид:

$$(1 + \cosh(u^1)) \frac{\partial}{\partial u^1} + (u^2 \sinh(u^1) + \mu (1 + \cosh(u^1))) \frac{\partial}{\partial u^2}.$$

Пусть t — групповой параметр однопараметрической группы преобразований, порождаемой данным оператором. Переменные u^1, u^2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{du^1}{dt} = 1 + \cosh(u^1), \\ \frac{du^2}{dt} = u^2 \sinh(u^1) + \mu (1 + \cosh(u^1)). \end{cases}$$

Отсюда нетрудно получить, что псевдоевклидова прямая под действием преобразований, порожденных рассматриваемым оператором, будет скользить по псевдоевклидовой окружности

$$(x - \mu)^2 - (z - C)^2 = -C^2. \quad (6)$$

Псевдоевклидова окружность также является одним из аналогов трактрисы. У нее отрезок касательной до изотропной прямой имеет постоянную длину. Для интерпретации параметра t однопараметрической группы преобразований можно привлечь геометрию так называемой идеальной области плоскости Лобачевского, локально несущей геометрию де Ситтера, следующим образом. Введем на плоскости Oxz дополнительно к псевдоевклидовой метрике $ds^2 = \frac{dx^2 - dz^2}{z^2}$. В качестве абсолюта в такой модели идеальной области выступает ось абсцисс. Метрика в ней конформна псевдоевклидовой метрике. Эллиптические прямые плоскости де Ситтера в такой модели изображаются псевдоевклидовыми окружностями мнимого радиуса с центром на абсолюте, изотропные прямые — окружностями нулевого радиуса с центром на абсолюте, гиперболические прямые — окружностями вещественного радиуса и прямыми, ортогональными абсолюту, орициклы — окружностями, касающимися абсолюта и прямыми, параллельными абсолюту. Каждая псевдоевклидова полуплоскость, границей которой служит абсолют, покрывает всю идеальную область плоскости Лобачевского за исключением одной изотропной прямой. Псевдоевклидова окружность (6) станет орициклом плоскости де Ситтера. Пусть псевдоевклидова прямая касается орицикла в точке M (рис. 7). Если угол u^1 , задающий направляющий вектор прямой, при смещении прямой по окружности получает некоторое приращение, то такое же приращение получает угол, задающий направление псевдоевклидовой нормали этой прямой. Под углом, точнее под величиной угла, между двумя пространственно подобными или времениподобными прямыми здесь понимается величина гиперболического угла — численное значение площади сектора гиперболы с единичными полуосями на евклидовой плоскости. Величина угла LKM равна u^1 , величина вписанного угла NSL вдвое меньше, т. е. $u^1/2$.

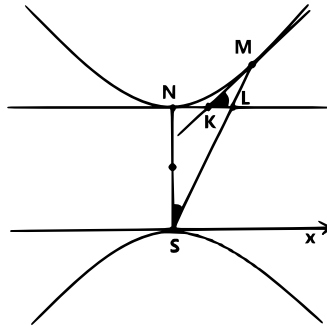


Рис. 7. Орицикл плоскости де Ситтера.

На рис. 7 касательная в южном полюсе S псевдоевклидовой окружности принята за абсолют плоскости де Ситтера. Псевдоевклидовой инверсией (см. [14]) с центром в точке S переведем дугу NM орицикла в отрезок NL . Такая инверсия является движением метрики де Ситтера. Далее воспользуемся свойством элементарной геометрии псевдоевклидовой плоскости. В треугольнике NSL катет $|NL| = |NS| \cdot \tanh(NSL)$. В метрике де Ситтера отношение $\frac{|NL|}{|NS|}$ равно длине дуги орицикла NL . Для геометрической характеристики группового параметра t обратимся к уравнению

$$\frac{du^1}{dt} = 1 + \cosh(u^1),$$

характеризующему вращение прямой, касающейся псевдоевклидовой окружности. Из этого уравнения получим

$$\tanh \frac{u_0^1}{2} - \tanh \frac{u^1}{2} = t,$$

где $u_0^1 = u^1(0)$. А отсюда следует, что групповой параметр однопараметрической группы, индуцированной оператором группы винтовых движений с изотропной осью, можно интерпретировать как длину дуги орицикла идеальной области плоскости Лобачевского, локально несущей геометрию де Ситтера.

Теперь нетрудно получить геометрическую характеристику орбит соответствующих преобразований на евклидовой плоскости, не прибегая к интегрированию. На псевдоевклидовой плоскости Oxz прямая скользит по окружности мнимого радиуса. Такой окружности при изотропной проекции соответствует изотропный конус с вершиной в точке с координатами (μ, C, C) . Преобразования однопараметрической группы индуцируют преобразования изотропных конусов и их касательных плоскостей, отсекающих прямые в рассматриваемых евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях. Эти конусы и их касательные плоскости смещаются, оставаясь касательными к конусу с вершиной в точке (μ, C, C) . Значит, в евклидовой плоскости Oxy прямая будет смещаться, оставаясь касательной к окружности с центром в точке $(x = \mu, y = C)$ и радиусом C .

Групповому параметру t можно дать интерпретацию аналогично предыдущему случаю, но уже с использованием метрики Лобачевского. В качестве абсолюта берется касательная прямая к евклидовой окружности, являющейся орбитой. Окружность в этом случае станет орициклом плоскости Лобачевского, а групповой параметр истолковывается как длина дуги орицикла плоскости Лобачевского.

4. Заключительные замечания

Для истолкования преобразований Лагерра, индуцированных другими операторами, также можно привлечь гиперболическую геометрию. В частности, можно показать, что при преобразованиях, индуцированных оператором однопараметрической группы эллиптических вращений, псевдоевклидова прямая смещается по другому псевдоевклидову аналогу трактрисы. Этот аналог может служить меридианом псевдоевклидовой поверхности вращения, являющейся продолжением псевдосферы Бельтрами — Миндинга. Связь псевдосферических поверхностей Миндинга и их псевдоевклидовых продолжений с поверхностями в трехмерном гиперболическом пространстве описана в [20].

Используя интерпретацию теорем о циклах гиперболической плоскости и касательных расстояниях между ними как теорем о вписанных многоугольниках в сферы псевдогиперболического пространства, можно установить взаимосвязи между преобразованиями Лагерра в пространствах ненулевой постоянной кривизны. Приведенные в работе [11] взаимосвязи между евклидовыми и гиперболическими теоремами о циклах и касательных расстояниях допускают дальнейшие обобщения. В частности, теоремы типа Кейси, в которых вместо отрезков общих касательных прямых рассматриваются дуги касательных орициклов можно обобщить на другие циклы плоскости Лобачевского. Из неравенства Птолемея в гиперболической геометрии также можно получить ряд наглядно интерпретируемых следствий. Одним из следствий является аналог теоремы Помпею о том, что из трех отрезков, соединяющих произвольную точку M плоскости с вершинами правильного треугольника ABC , можно составить треугольник. Если точка M

лежит на описанной окружности треугольника ABC , то в евклидовом случае треугольник, составленный из отрезков MA , MB , MC , вырождается. На плоскости Лобачевского, в отличие от этого, треугольник не вырождается, а лишь оказывается вписанным не в окружность, а в орицикл.

Литература

1. Kubota T. On the extended Ptolemy's theorem in hyperbolic geometry // Science Reports of the Tohoku University. Ser. 1: Physics, Chemistry, Astronomy.—1912.—Vol. 2.—P. 131–156.
2. Широков П. А. Этюды по геометрии Лобачевского // Изв. Физ.-мат. общества при КГУ. Сер. 2.—1924.—Т. 24, № 1.—С. 26–32.
3. Ungar A. A. Ptolemy's theorem in the relativistic model of analitic hyperbolic geometry // Symmetry.—2023.—Vol. 15, № 3.—Article no. 649. DOI: 10.3390/sym15030649.
4. Haantjes J. A characteristic local property of Geodesies in certain metric spaces // Proc. Akad. Wetensch.—Amsterdam, 1947.—Vol. 50.—P. 496–508.
5. Gómez M., Mévoli F. The four point condition: An elementary tropicalization of Ptolemy's inequality // Amer. Math. Monthly.—2024.—Vol. 131, № 3.—P. 187–203. DOI: 10.1080/00029890.2023.2285695.
6. Casey J. A Seqyel to the First Six Books of the Elements of Euclid, Containing an Easy Introduction to Modern Geometry, with Numerous Examples / Classic Reprint.—London: Forgotten Books, 2012.
7. Maehara H., Martini H. Casey's theorem // Circles, Spheres and Spherical Geometry.—Cham: Birkhauser, 2024.—P. 261–277.—(Birkhauser Advanced Texts Basler Lehrbucher). DOI: 10.1007/978-3-031-62776-7_13.
8. Abrosimov N. V., Aseev V. V. Generalizations of Casey's theorem for higher dimensions // Lobachevskii J. Math.—2018.— Vol. 39.—P. 1–12. DOI: 10.1134/S199508021801002X.
9. Abrosimov N. V., Mikaiylova L. A. Casey's theorem in hyperbolic geometry // Сиб. электрон. мат. изв.—2015.—Т. 12.—С. 354–360. DOI: 10.17377/semi.2015.12.029.
10. Костин А. В. Об обобщениях теоремы Птолемея на плоскости Лобачевского // Сиб. электрон. мат. изв.—2022.—Т. 19, № 2.—С. 404–414. DOI: 10.33048/semi.2022.19.035.
11. Костин А. В. Об аналогах теоремы Фурмана на плоскости Лобачевского // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, № 4.—С. 58–67. DOI: 10.46698/d0031-4733-6473-n.
12. Костин А. В., Костина Н. Н. Интерпретации теоремы Кеши и ее гиперболического аналога // Сиб. электрон. мат. изв.—2016.—Т. 13.—С. 242–251. DOI: 10.17377/semi.2016.13.017.
13. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства.—М.: Ленанд, 2021, 552 с.
14. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства.—М.: Ленанд, 2021, 672 с.
15. Maehara H., Martini H. Bipartite sets of spheres and Casey-type theorems // Results Math.—2018.— Vol. 74.—Art. 47. DOI: 10.1007/s00025-019-0973-3.
16. Bobenko A. I., Lutz C. O. R., Pottmann H., Techter J. Non-Euclidean Laguerre Geometry and Incircular Nets.—Cham: Springer, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-81847-0_1.
17. Широков А. П. О группе Лагерра и ее аналогах в релятивной линейчатой геометрии плоскости // Движения в обобщенных пространствах.—Рязань: Рязанский гос. пед. ин-т, 1985.—С. 25–30.
18. Шустова К. П. Преобразования Лагерра в псевдоевклидовом пространстве и геометрия Лобачевского: Дисс. . . . канд. физ.-мат. наук.—Казань, 1994.
19. Костин А. В. Асимптотические на псевдосферах и угол параллельности // Изв. вузов. Матем.—2021.—Т. 65, № 6.—С. 25–34. DOI: 10.26907/0021-3446-2021-6-25-34.
20. Костин А. В. Задача о тени и поверхности постоянной кривизны // Сиб. электрон. мат. изв.—2023.—Т. 20, № 1.—С. 150–164. DOI: 10.33048/semi.2023.20.014.

Статья поступила 20 декабря 2024 г.

Костин Андрей Викторович
Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского)
федерального университета,
доцент кафедры математики,
РОССИЯ, 423812, Набережные Челны, пр. Мира, 68/19 (1/18)
E-mail: kostin_andrei@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-5353-6138>

CASEY TYPE THEOREM AND LAGUERRE TRANSFORMATIONS

Kostin, A. V.¹

¹ Kazan Federal University – Naberezhnye Chelny Institute,
68/19 (1/18) Mir Ave., Naberezhnye Chelny 423812, Russia

E-mail: kostin_andrei@mail.ru

Abstract. The article explores the connections between Casey’s theorems and their generalizations on the Euclidean and pseudo-Euclidean planes. Along with Casey type theorems about circles and “tangent distances” between them, Laguerre transformations that preserve such distances are considered. Using non-Euclidean geometry, some connections between such transformations are described. In Casey’s theorem, which is one of the generalizations of Ptolemy’s theorem on an inscribed quadrilateral, four circles are considered that are tangent to one circle on the Euclidean plane. Instead of the lengths of the sides and diagonals, Casey’s theorem takes the lengths of the common tangents of the corresponding pairs of circles. This theorem can be easily generalized to a larger number of circles. In addition, this theorem has various analogs and generalizations in spaces of constant curvature. On the pseudo-Euclidean plane, one can also consider analogs of Casey’s theorem and its generalizations. Theorems of this type on the pseudo-Euclidean plane are a direct consequence of the corresponding Euclidean theorems. In this paper, a correspondence is constructed between configurations of circles on the Euclidean plane and configurations of circles of imaginary radius on the pseudo-Euclidean plane. In this case, the relationship from Euclidean geometry corresponds to the same relationship in pseudo-Euclidean geometry. Laguerre transformations on the Euclidean plane affect oriented lines. In this case, the family of straight lines enveloping the circle, under the influence of Laguerre transformations, passes into a similar family. If a straight line belongs to two such families, then under Laguerre transformations the length of the straight line segment between the points of contact with the circles is preserved. Using isotropic projection, Laguerre transformations on Euclidean and pseudo-Euclidean planes can be considered as transformations induced by the movements of three-dimensional pseudo-Euclidean space. To describe the properties of one-parameter subgroups of the Laguerre group on the Euclidean and pseudo-Euclidean planes, the Lobachevsky and de Sitter geometries are used.

Keywords: Ptolemy’s theorem, Casey’s theorem, Fuhrmann’s theorem, Laguerre transformations, space of constant curvature.

AMS Subject Classification: 51M09, 53B30.

For citation: Kostin, A. V. Casey Type Theorem and Laguerre Transformations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 72–85. (in Russian). DOI: 10.46698/m2064-2286-7424-1.

References

1. Kubota, T. On the Extended Ptolemy’s Theorem in Hyperbolic Geometry, *Science Reports of the Tohoku University. Ser. 1: Physics, Chemistry, Astronomy*, 1912, vol. 2, pp. 131–156.
2. Shirokov, P. A. Etudes on the Lobachevskii Geometry, *Izvestia Fiziko-Matematicheskogo Obschestva pri KGU, Ser. 2*, 1924, vol. 24, no. 1, pp. 26–32 (in Russian).
3. Ungar, A. A. Ptolemy’s Theorem in the Relativistic Model of Analytic Hyperbolic Geometry, *Symmetry*, 2023, vol. 15, no. 3, article no. 649. DOI: 10.3390/sym15030649.
4. Haantjes, J. A Characteristic Local Property of Geodesics in Certain Metric Spaces, *Proc. Akad. Wetensch.*, Amsterdam, 1947, vol. 50, pp. 496–508.
5. Gómez, M. and Mémoli, F. The Four Point Condition: An Elementary Tropicalization of Ptolemy’s Inequality, *The American Mathematical Monthly*, 2024, vol. 131, no. 3, pp. 187–203. DOI: 10.1080/00029890.2023.2285695.
6. Casey, J. A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid, Containing an Easy Introduction to Modern Geometry, with Numerous Examples, *Classic Reprint, Forgotten Books, London*, 2012.

7. Maehara, H. and Martini, H. Casey's Theorem, *Circles, Spheres and Spherical Geometry*, Birkhauser Advanced Texts Basler Lehrbuecher, Cham, Birkhauser, 2024, pp. 261–277. DOI: 10.1007/978-3-031-62776-7_13.
8. Abrosimov, N. V. and Aseev, V. V. Generalizations of Casey's Theorem for Higher Dimensions, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2018, vol. 39, pp. 1–12. DOI: 10.1134/S199508021801002X.
9. Abrosimov, N. V. and Mikaiylova, L. A. Casey's Theorem in Hyperbolic Geometry, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2015, vol. 12, pp. 354–360. DOI: 10.17377/semi.2015.12.029.
10. Kostin, A. V. On Generalizations of Ptolemy's Theorem on the Lobachevsky Plane, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2022, vol. 19, no. 2, pp. 404–414 (in Russian). DOI: 10.33048/semi.2022.19.035.
11. Kostin, A. V. On Analogues of the Fuhrmann's Theorem on the Lobachevsky Plane, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 4, pp. 58–67 (in Russian). DOI: 10.46698/d0031-4733-6473-n.
12. Kostin, A. V. and Kostina, N. N. An Interpretation of Casey's Theorem and Its Hyperbolic Analogue, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2016, vol. 13, pp. 242–251. DOI: 10.17377/semi.2016.13.017.
13. Rosenfeld, B. A. *Neevklidovy prostranstva* [Non-Euclidean Spaces], Moscow, Lenand, 2021, 552 p. (in Russian).
14. Rosenfeld, B. A. *Mnogomernyye prostranstva* [Multidimensional Spaces], Moscow, Lenand, 2021, 672 p. (in Russian).
15. Maehara, H. and Martini, H. Bipartite Sets of Spheres and Casey-Type Theorems, *Results in Mathematics*, 2018, vol. 74, art. 47. DOI: 10.1007/s00025-019-0973-3.
16. Bobenko, A. I., Lutz, C. O. R., Pottmann, H. and Techter, J. *Non-Euclidean Laguerre Geometry and Incircular Nets*, Cham, Springer, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-81847-0_1.
17. Shirokov, A. P. On the Laguerre Group and Its Analogues in the Relative Ruled Geometry of the Plane, *Movements in generalized spaces*, Ryazan, Ryazan State Pedagogical Institute, 1985, pp. 25–30 (in Russian).
18. Shustova, K. P. *Laguerre Transformations in Pseudo-Euclidean Spaces and Lobachevsky Geometry*, Dissertaciia kand. fiz.-mat. nauk, Kazan, 1994 (in Russian).
19. Kostin, A. V. Asymptotic Lines on Pseudospheres and the Angle of Parallelisms, *Russian Mathematics*, 2021, vol. 65, no. 6, pp. 21–28. DOI: 10.3103/S1066369X21060037.
20. Kostin, A. V. Problem of Shadow and Surface of Constant Curvature, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2023, vol. 20, no. 1, pp. 150–164 (in Russian). DOI: 10.33048/semi.2023.20.014.

Received December 20, 2024

ANDREY V. KOSTIN

Kazan Federal University – Naberezhnye Chelny Institute,
68/19 (1/18) Mir Ave., Naberezhnye Chelny 423812, Russia,

Associate Professor of the Department of Mathematics

E-mail: kostin_andrei@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-5353-6138>

УДК 517.9

DOI 10.46698/h3876-8857-0078-b

CLASSIFICATION OF DYNAMICAL SYSTEMS NEAR
A COSYMMETRIC EQUILIBRIUM[#]

L. G. Kurakin^{1,2,3} and A. V. Kurdoglyan^{2,4}

¹ Water Problems Institute of RAS,

3 Gubkin St., Moscow 119333, Russia;

² Southern Mathematical Institute of VSC RAS,

53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia;

³ Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of SFedU,

8 a Milchakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia;

⁴ North Caucasus Center for Mathematical Research of VSC RAS,

1 Williams St., Village of Mikhailovskoye 363110, Russia

E-mail: kurakin@math.rsu.ru, aik_kurdoglyan@mail.ru

Abstract. A local classification is developed in a neighborhood of a cosymmetric equilibrium for differential equations with invertible cosymmetry and a vector parameter, under the assumption that the kernel of the linearization matrix at the cosymmetric equilibrium is two-dimensional and that the entire stability spectrum, except for the double zero eigenvalue, is stable. Equations with such properties are of codimension one among even-dimensional systems with a cosymmetric equilibrium. In all cases, such a system admits a straightenable family of non-cosymmetric equilibria near the cosymmetric one. The classification is based on the following properties: the type of the cosymmetric equilibrium (node, focus, saddle); the relative position of the cosymmetric equilibrium and the family (including the case where the cosymmetric equilibrium belongs to the family); the number of boundary equilibria of the family separating its stable and unstable regions (≤ 3); the number of intersections of each separatrix of the cosymmetric saddle equilibrium with the family (≤ 3). Each property is determined by polynomial conditions, and the classification therefore reduces to identifying sets of conditions with a non-empty intersection. The defining polynomial conditions and corresponding phase portraits are presented for each identified class. The existence of each nonempty class is established by a scalable example for non-obvious cases, while the emptiness of the remaining classes is established separately. This work continues the studies of L. G. Kurakin and V. I. Yudovich [1, 2], where analogous results were obtained in the neighborhood of a non-cosymmetric equilibrium.

Keywords: differential equation, equilibrium, cosymmetry, classification.

AMS Subject Classification: 34C23, 34C40.

For citation: Kurakin, L. G. and Kurdoglyan, A. V. Classification of Dynamical Systems Near a Cosymmetric Equilibrium, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 86–102. DOI: 10.46698/h3876-8857-0078-b.

1. Problem Statement

The theory of cosymmetry was founded by V. I. Yudovich [3] to explain an unusual effect in the problem of plane filtration convection posed by D. V. Lyubimov [4]. According to his definition, a mapping $L : H \times \Lambda \rightarrow H$ in the Euclidean space $H = \mathbb{R}^n$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ is called a co-

[#] The work of L. G. Kurakin was carried out as part of Topic no. FMWZ-2022-0001 of the State Assignment at the Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences (Registration no. 122041100222-7). The work of A. V. Kurdoglyan was performed at the North Caucasus Center for Mathematical Research, VSC RAS, with support from the Ministry of Science and Higher Education of Russia (Agreement no. 075-02-2025-1633).

© 2025 Kurakin, L. G. and Kurdoglyan, A. V.

symmetry of a mapping $F : H \times \Lambda \rightarrow H$, or of the differential equation

$$\dot{u} = F(u, \lambda), \quad u \in H, \quad \lambda \in \Lambda, \quad (1)$$

if F and L are orthogonal at every point $u \in H$ for any fixed value of the parameter $\lambda \in \Lambda$.

Let $u = u_0 \in H$ be an equilibrium of system (1) at $\lambda = \lambda_0 \in \Lambda$. This equilibrium is called *cosymmetric* if it is also a zero of the cosymmetry:

$$F(u_0, \lambda_0) = L(u_0, \lambda_0) = 0.$$

In what follows, we assume that the mappings F and L are analytic. If given equilibrium of the system is non-cosymmetric with respect to a specified cosymmetry, then, in the absence of additional degeneracies, it belongs to an analytic family of equilibria. As later shown by L. G. Kurakin [5], the converse also holds. In the neighborhood of a cosymmetric equilibrium, V. I. Yudovich studied the properties of cosymmetry in a sufficiently general form for applications to the filtration convection problem. In particular, for a system with a real parameter, the cosymmetry was assumed to be a linear *skew*-symmetric operator $L^* = -L$ independent of the parameter. For an odd-dimensional system, such an operator is non-invertible. By replacing the skew-symmetry of a linear cosymmetry with the less degenerate requirement of its local invertibility, and by allowing the cosymmetry to be a nonlinear operator depending on a real parameter, we are led to the problem of analyzing the bifurcations of the system in a neighborhood of a cosymmetric equilibrium.

This study was carried out in [6] using the Lyapunov–Schmidt method [7], where it was shown that the dimension of the kernel of the linearization at a cosymmetric equilibrium has the same parity as the dimension n of the original system. Moreover, in an odd-dimensional system with one-dimensional kernel, the cosymmetric equilibrium belongs to an analytic family of equilibria. Consequently, according to the results of [5], the original system also admits another cosymmetry for which this equilibrium is non-cosymmetric. Bifurcations in even-dimensional systems with a two-dimensional kernel were described. Thus, the problem arises of a more detailed study of system (1) by means of the center manifold method [8] under the following assumptions:

1°. n is even.

2°. The point u_0 is an equilibrium of system (1) for all λ :

$$F(u_0, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

3°. The equilibrium u_0 is cosymmetric for all λ :

$$L(u_0, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

4°. The cosymmetry $L(u, \lambda)$ is invertible in a neighborhood of the point $u = u_0$ for all $\lambda \in \Lambda$.

5°. The Jacobian of F at $(u_0, 0)$ has a two-dimensional kernel:

$$\dim \ker F_0 = 2, \quad F_0 := \left. \frac{dF(u, 0)}{du} \right|_{u=u_0}.$$

6°. The entire stability spectrum of the matrix F_0 , except for the double zero eigenvalue, lies strictly in the left half-plane.

Under assumptions 1°–6°, the center-manifold reduction of system (1) yields the following two-dimensional system of differential equations in the Euclidean space:

$$\dot{x} = f(x, y, \lambda), \quad \dot{y} = g(x, y, \lambda) \quad (2)$$

with variables $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ and m -dimensional ($m \geq 1$) parameter $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$, defined in a small neighborhood of the point $0 \in V := \Omega \times \Lambda$.

REMARK 1. In this paper, the theory of the center manifold is invoked only insofar as it allows the reduction of the original higher-dimensional system (1) to the two-dimensional system (2). Moreover, one may instead begin with the two-dimensional system (2) and develop the classification for it, reducing the higher-dimensional case to the two-dimensional one by means of the center manifold theory under assumptions 1°–6°.

Let the mapping

$$L^\circ : V \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, \lambda) \mapsto \begin{pmatrix} L_1(x, y, \lambda) \\ L_2(x, y, \lambda) \end{pmatrix}$$

denote the cosymmetry of system (2) inherited from system (1) via the center-manifold reduction:

$$f(x, y, \lambda)L_1(x, y, \lambda) + g(x, y, \lambda)L_2(x, y, \lambda) = 0, \quad (x, y, \lambda) \in V. \quad (3)$$

We further assume that system (2) satisfies the following properties:

1°. The mappings f , g , L_1 , and L_2 are analytic in the neighborhood V .

2°. System (2) has the zero equilibrium for all $\lambda \in \Lambda$, so that the functions f and $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ satisfy the condition

$$f(0, 0, \lambda) = g(0, 0, \lambda) = 0, \quad \lambda \in \Lambda. \quad (4)$$

3°. The equilibrium $x = y = 0$ is cosymmetric for all $\lambda \in \Lambda$, so that the equality

$$L^\circ(0, 0, \lambda) = 0, \quad \lambda \in \Lambda, \quad (5)$$

is satisfied.

4°. The cosymmetry L° is locally invertible in a neighborhood of the point $x = y = 0$ at $\lambda = 0$:

$$\det B \neq 0, \quad B := \begin{pmatrix} \frac{\partial L_1(x, y, 0)}{\partial x} & \frac{\partial L_1(x, y, 0)}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2(x, y, 0)}{\partial x} & \frac{\partial L_2(x, y, 0)}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{x=y=0}. \quad (6)$$

5°. The linearization matrix A of system (2), (4) at the zero equilibrium for $\lambda = 0$ has the two-dimensional kernel:

$$\dim \ker A = 2, \quad A := \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y, 0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y, 0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y, 0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y, 0)}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{x=y=0} = 0. \quad (7)$$

REMARK 2. Properties 2°–5° are inherited by system (2) from system (1). Property 1°, however, need not be inherited. Indeed, even if the mappings in the original system are analytic, the center manifold may fail to be analytic. For the results obtained below, the analyticity assumption on the subsequent mappings, as well as on the functions f , g , L_1 , and L_2 , is adopted merely for convenience and is not essential. Throughout the paper, analyticity may be replaced by C^4 -regularity.

2. Effect of Cosymmetry on the System's Structure

The following theorem states.

Theorem 1. *Under assumptions 1 $^\diamond$ –5 $^\diamond$, system (2) can be written in the form*

$$\dot{x} = -L_2(x, y, \lambda) h(x, y, \lambda), \quad \dot{y} = L_1(x, y, \lambda) h(x, y, \lambda), \quad (8)$$

where the function $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ is analytic in the neighborhood V and satisfies

$$h(0, 0, 0) = 0. \quad (9)$$

◁ According to the inverse function theorem, conditions (5) and (6) imply that the system of equations

$$K_1 = L_1(x, y, \lambda), \quad K_2 = L_2(x, y, \lambda),$$

has a unique solution

$$x = X(K_1, K_2, \lambda), \quad y = Y(K_1, K_2, \lambda),$$

which is analytic in the variables K_1 , K_2 and in the parameter λ in a small neighborhood of the origin. Substituting this solution into the identity (3) and viewing it as an identity in the variables K_1 and K_2 , we obtain

$$K_1 f_1(K_1, K_2, \lambda) + K_2 g_1(K_1, K_2, \lambda) = 0, \quad (10)$$

where f_1 and g_1 are analytic functions of K_1 , K_2 and the parameter λ in a neighborhood of the origin:

$$\begin{aligned} f_1(K_1, K_2, \lambda) &:= f(X(K_1, K_2, \lambda), Y(K_1, K_2, \lambda), \lambda), \\ g_1(K_1, K_2, \lambda) &:= g(X(K_1, K_2, \lambda), Y(K_1, K_2, \lambda), \lambda). \end{aligned}$$

It follows that $f_1(K_1, 0, \lambda) = g_1(0, K_2, \lambda) = 0$ for all sufficiently small values of K_1 , K_2 , and λ . Hence, the functions f_1 and g_1 can be written in the form

$$g_1(K_1, K_2, \lambda) = K_1 h_1(K_1, K_2, \lambda), \quad f_1(K_1, K_2, \lambda) = -K_2 h_2(K_1, K_2, \lambda),$$

where h_1 and h_2 are analytic functions of K_1 , K_2 , and the parameter λ in a neighborhood of the origin. It follows from the identity (10) that $h_1 = h_2$.

Thus, equations (2) can be rewritten in the form (8), where the function h is defined by

$$h(x, y, \lambda) := h_1(L_1(x, y, \lambda), L_2(x, y, \lambda), \lambda)$$

and is analytic in the neighborhood V .

Now let us prove that $h(0, 0, 0) = 0$. It follows from (2) and (8) that

$$h(x, y, \lambda) = \frac{g(x, y, \lambda)}{L_1(x, y, \lambda)}.$$

By the analyticity of the functions g and L_1 , from condition (4) and assumptions 4 $^\diamond$ and 2 $^\diamond$ we obtain the following asymptotic expansions for small x , y и λ :

$$\begin{aligned} L_1(x, y, \lambda) &= l_1 x + l_2 y + O(x^2 + y^2 + (|x| + |y|) \cdot |\lambda|), \\ g(x, y, \lambda) &= O(x^2 + y^2 + (|x| + |y|) \cdot |\lambda|). \end{aligned}$$

It follows from the condition $\det B \neq 0$ that $l_1^2 + l_2^2 \neq 0$. Taking the limit, we obtain the equality (9):

$$\begin{aligned} h(0, 0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x, 0, 0)}{L_1(x, 0, 0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{O(x^2)}{l_1 x + O(x^2)} = 0 \quad (l_1 \neq 0), \\ h(0, 0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(0, y, 0)}{L_1(0, y, 0)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{O(y^2)}{l_2 y + O(y^2)} = 0 \quad (l_2 \neq 0). \triangleright \end{aligned}$$

Theorem 1 reduces the problem of studying the properties of the original system (2), (4) under assumptions 1[◊]–5[◊] to system (8), in which the functions L_1 , L_2 , and h are analytic in the neighborhood V and satisfy the conditions (5), (6), and (9).

The phase portrait of the system (8) for each fixed value of λ can be constructed by combining the phase portrait of the equations

$$\dot{x} = -L_2(x, y, \lambda), \quad \dot{y} = L_1(x, y, \lambda), \quad (11)$$

with the set of equilibria S of the system (8):

$$S := \{x, y \in \Omega : h(x, y, \lambda) = 0\}. \quad (12)$$

The system (8) always possesses the cosymmetric zero equilibrium. Each of its nonzero equilibria is noncosymmetric, lies on some phase trajectory of the system (11), and separates it into two parts, which are trajectories of the system (8). In the region where $h(x, y, \lambda) < 0$, the directions of motion along the phase trajectories of the systems (8) and (11) are opposite.

3. Stability of Equilibria

The linearization matrix of the system (8) at an equilibrium $(x, y) = (\alpha, \beta)$ of the family (12) has the form

$$\mathcal{A}(\alpha, \beta, \lambda) = \begin{pmatrix} -L_2(\alpha, \beta, \lambda) \frac{\partial h(x, \beta, \lambda)}{\partial x} \Big|_{x=\alpha} & -L_2(\alpha, \beta, \lambda) \frac{\partial h(\alpha, y, \lambda)}{\partial y} \Big|_{y=\beta} \\ L_1(\alpha, \beta, \lambda) \frac{\partial h(x, \beta, \lambda)}{\partial x} \Big|_{x=\alpha} & L_1(\alpha, \beta, \lambda) \frac{\partial h(\alpha, y, \lambda)}{\partial y} \Big|_{y=\beta} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

The eigenvalues of the matrix $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \lambda)$ are zero, and its trace is given by

$$N := \text{tr} \mathcal{A}(\alpha, \beta, \lambda). \quad (14)$$

In particular, $\mathcal{A}(0, 0, \lambda) = 0$, so that $\dim \ker \mathcal{A}(0, 0, \lambda) = 2$.

Consider the equilibria (12) with $x^2 + y^2 \neq 0$. If $N \neq 0$, then $\dim \ker \mathcal{A}(\alpha, \beta, \lambda) = 1$, and, according to the cosymmetric version of the implicit function theorem [3], each nonzero equilibrium of the family (12) is nonisolated and belongs to the one-parameter family of equilibria. The equilibria of (12) with $N > 0$ are unstable. When $N < 0$, the stability problem for the equilibria of the family (12) of the system (8) corresponds to the critical case of a simple zero eigenvalue. This case was studied by Lyapunov A. M. (see [9], Theorem of Section 32, degenerate case). According to his results, the equilibria of the family (12) with $N < 0$ are the Lyapunov stable and asymptotically stable in the directions transverse to the family S . In the present work, for $N = 0$, a situation arises where the linearization matrix $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \lambda)$ has a double zero eigenvalue, while $\dim \ker \mathcal{A}(\alpha, \beta, \lambda) = 1$. In this case, the equilibrium (α, β) , called a *boundary equilibrium* [6], is non-isolated, and its stability problem requires a nonlinear analysis. This boundary equilibrium locally separates the family S into two arcs, each of which consists entirely of either linearly stable or linearly unstable equilibria.

4. Model Systems and the Principle of Their Classification

In addition to assumptions 1[◊]–5[◊], let the following condition hold for the system (8): 6[◊]. The inequality

$$h_{10}^2 + h_{01}^2 \neq 0, \quad (15)$$

is satisfied, where

$$h_{10} := \left. \frac{\partial h(x,y,0)}{\partial x} \right|_{x=y=0}, \quad h_{01} := \left. \frac{\partial h(x,y,0)}{\partial y} \right|_{x=y=0}.$$

Without loss of generality, assume that

$$h_{01} \neq 0. \quad (16)$$

The case $h_{10} \neq 0$ can be reduced to this one by interchanging $x \leftrightarrow y$ and $f \leftrightarrow g$.

Let $\varepsilon_0 := h(0, 0, \lambda)$. The change of variables

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow h(x, y, \lambda) - \varepsilon_0 \quad (17)$$

in the system (8) brings the function h to the form $\varepsilon_0 + y$, thereby straightening the family (12).

Expanding the right-hand side of the resulting system in the Taylor series in the variables x and y , we write it in the asymptotic form as $|x| + |y| + |\lambda| \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [f_0(x, y, \mu) + O(\tilde{f}(x, y, \lambda))] \cdot (\varepsilon_0 + y), \\ \dot{y} &= [g_0(x, y, \mu) + O(\tilde{g}(x, y, \lambda))] \cdot (\varepsilon_0 + y), \end{aligned} \quad (18)$$

where

$$\begin{aligned} f_0(x, y, \mu) &:= (\tilde{a}_{10} + \mu_3)x + \tilde{a}_{01}y, \\ g_0(x, y, \mu) &:= (a_{10} + \mu_1)x + (a_{01} + \mu_0)y + (a_{20} + \mu_2)x^2 + a_{30}x^3, \end{aligned} \quad (19)$$

and

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y, \lambda) &:= x^2 + y^2 + |y| \cdot |\lambda| + |x| \cdot |\lambda|^2, \\ \tilde{g}(x, y, \lambda) &:= |x|^4 + |xy| + y^2 + (|x|^3 + |y|) \cdot |\lambda| + |x| \cdot |\lambda|^2. \end{aligned}$$

The quantities \tilde{a}_{10} , \tilde{a}_{01} , a_{10} , a_{01} , a_{20} , a_{30} are real coefficients of the system (18). Let $\mu := (\varepsilon_0, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ denote a new small parameter whose components are functions of the m -dimensional parameter λ . We assume that the five components of μ are independent. This situation occurs in the generic case when $m \geq 5$.

Neglecting in (18) the terms insignificant for further consideration, we obtain the system:

$$\dot{x} = f_0(x, y, \mu) \cdot (\varepsilon_0 + y), \quad \dot{y} = g_0(x, y, \mu) \cdot (\varepsilon_0 + y). \quad (20)$$

Its cosymmetry

$$\widehat{L}(x, y, \mu) := \begin{pmatrix} g_0(x, y, \mu) \\ -f_0(x, y, \mu) \end{pmatrix}$$

is invertible and vanishes at the equilibrium $x = y = 0$. Thus, system (20) with cosymmetry \widehat{L} satisfies assumptions 1 $^\circ$ –6 $^\circ$.

Note that the symmetry between the variables x and y in system (20) is broken due to condition (16) and the transformation (17).

The further analysis of equations (8) reduces to the study of system (20), whose coefficients and small parameters can be regarded as arbitrary, provided that they satisfy the inequality $\det B = \tilde{a}_{10}a_{01} - \tilde{a}_{01}a_{10} \neq 0$, where the matrix B , according to definition (6), has the form

$$B = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{01} \\ -\tilde{a}_{10} & -\tilde{a}_{01} \end{pmatrix}.$$

The system corresponding to equations (11) takes the form:

$$\dot{x} = f_0(x, y, \mu), \quad \dot{y} = g_0(x, y, \mu). \quad (21)$$

The linearization matrix

$$M := \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_0(x,y,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_0(x,y,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g_0(x,y,0)}{\partial x} & \frac{\partial g_0(x,y,0)}{\partial y} \end{array} \right) \Big|_{x=y=0} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{10} & \tilde{a}_{01} \\ a_{10} & a_{01} \end{pmatrix} \quad (22)$$

of the system (21) at the zero equilibrium for $\mu = 0$ is invertible, since $\det M = \det B \neq 0$.

The classification of the zero equilibrium of system (21) in generic case

$$\det M \neq 0, \quad \text{tr} M \neq 0, \quad d_M := \text{tr}^2 M - 4 \det M \neq 0 \quad (23)$$

is as follows:

$$\text{Node:} \quad \det M > 0, \quad d_M > 0; \quad (24)$$

$$\text{Focus:} \quad \det M > 0, \quad d_M < 0; \quad (25)$$

$$\text{Saddle:} \quad \det M < 0. \quad (26)$$

The invariants (23) are expressed by the formulas:

$$\begin{aligned} \det M &= \tilde{a}_{10} a_{01} - \tilde{a}_{01} a_{10}, \quad \text{tr} M = \tilde{a}_{10} + a_{01}, \\ d_M &= (\tilde{a}_{10} - a_{01})^2 + 4\tilde{a}_{01} a_{10}. \end{aligned}$$

The linearization matrix of the system (20) along the family of equilibria $y = -\varepsilon_0$ has the form

$$\begin{pmatrix} 0 & f_0(x, -\varepsilon_0, \mu) \\ 0 & g_0(x, -\varepsilon_0, \mu) \end{pmatrix}.$$

Setting the eigenvalue $g_0(x, -\varepsilon_0, \mu)$ equal to zero, we obtain the cubic equation

$$(a_{10} + \mu_1)x + (a_{20} + \mu_2)x^2 + a_{30}x^3 = (a_{01} + \mu_0)\varepsilon_0, \quad (27)$$

which determines the *boundary* equilibria $(x, -\varepsilon_0)$ of the family $y = -\varepsilon_0$. These equilibria separate the family $y = -\varepsilon_0$ into several connected sets of the type interval or ray, within each of which the equilibria are either linearly stable or unstable. If the multiplicity of at least one of these roots is greater than one, then when passing from the system (20) to equations (18), the number of boundary equilibria may, in general, change. In the generic case, all real roots of the polynomial (27) are simple. The number of such real roots is determined solely by the nondegeneracy conditions.

We construct a classification of the system (20) according to the following set of properties, which are preserved under the perturbation of the system (20) to (18):

1* Type of the cosymmetric equilibrium of (11): node / focus / saddle.

2* Number of boundary equilibria of the family $y = -\varepsilon_0$ of (8): 0 / 1 / 2 / 3.

3* Relative position of the cosymmetric equilibrium $x = y = 0$ and the family $y = -\varepsilon_0$.

The family $y = -\varepsilon_0$ lies in the lower half-plane, on the x -axis, or in the upper half-plane: $\text{sgn } \varepsilon_0 = 1 \setminus 0 \setminus -1$.

4* Vector of separatrix intersections (only for a saddle equilibrium):

$$v := (v_1, v_2, v_3, v_4), \quad (28)$$

where the j -th component denotes the number of intersections of the j -th separatrix of the saddle of the system (21) with the equilibrium family $y = -\varepsilon_0$. The separatrices are numbered

counterclockwise around a sufficiently small circle centered at the origin, starting from the vector $(x, y) = (0, 1)$ (inclusive).

For example, $v = (0, 1, 1, 0)$ in Fig. 1 (c_1), and $v = (0, 0, 0, 0)$ in Fig. 1 (c_0).

In the sequel we impose nondegeneracy conditions on the coefficients of (20) on which properties 1* and 2* depend. These properties also depend on certain small parameters of (20). Setting the remaining coefficients and small parameters to zero yields a *truncated system*. By further simplifying the truncated system via invertible changes of variables and time rescaling we obtain a *model system*. Considering each model system under all nondegenerate relations among its small parameters, we classify the model systems according to properties 1*–4*. Degenerate parameter relations, i. e. relations for which at least one of the properties 1*–4* of the model system ceases to persist under the passage first to the system (20) and then to its perturbation (18), are omitted. Moreover, *two systems are regarded as belonging to the same class if they coincide up to an invertible analytic change of variables x, y , a time reparametrization t (including time reversal), and a reparametrization of μ .*

Table 7 lists all truncated and model systems considered in this work.

Class names are formed as follows:

- 1) Choose the letter (a)–(h) of the model system (see Table 7) to which the class belongs.
- 2) Append indices corresponding to the discriminating signs of certain functions of the parameter μ . Instead of the usual sign function $\operatorname{sgn} x$ we use the function w defined by

$$w(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ 2, & x < 0, \end{cases} \quad (29)$$

- 3) If the equilibrium $x = y = 0$ is a saddle, append indices corresponding to the separatrix intersection vector v to the model system letter (a)–(h).

5. Classification of the System (20) by the Codimension of Degeneracy

Generic Case. Assume that $a_{10} \neq 0$. The truncated system derived from equations (20) has the form:

$$\dot{x} = (\tilde{a}_{10}x + \tilde{a}_{01}y) \cdot (\varepsilon_0 + y), \quad \dot{y} = (a_{10}x + a_{01}y) \cdot (\varepsilon_0 + y). \quad (30)$$

The change of variables

$$x \rightarrow a_{10}x + a_{01}y, \quad y \rightarrow \sqrt{|\det M|} \cdot y, \quad (31)$$

reduces it to the model system

$$\dot{x} = (a_1x - s_1y) \cdot (\varepsilon_1 + y), \quad \dot{y} = x \cdot (\varepsilon_1 + y), \quad a_1 \neq 0, \quad s_1 = \pm 1, \quad (32)$$

where

$$a_1 := \frac{\operatorname{tr} M}{\sqrt{|\det M|}}, \quad s_1 := \operatorname{sgn} \det M, \quad \varepsilon_1 := \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{|\det M|}}. \quad (33)$$

REMARK 3. The system (32) retains its form under the transformation $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, t \rightarrow -t, \varepsilon_1 \rightarrow -\varepsilon_1$. Therefore, without loss of generality, we may assume that $\varepsilon_1 \geq 0$.

The classification of system (32) is presented in Table 1 and the corresponding Fig. 1.

Table 1

Classification of system (32) in a neighborhood of the equilibrium $x = y = 0$

Class	Conditions	
	s_1, a_1	$\text{sgn } \varepsilon_1$
(a ₁)	$s_1 = 1, a_1^2 > 4$	1
(a ₀)	(node)	0
(b ₁)	$s_1 = 1, a_1^2 < 4$	1
(b ₀)	(focus)	0
(c ₁)	$s_1 = -1$	1
(c ₀)	(saddle)	0

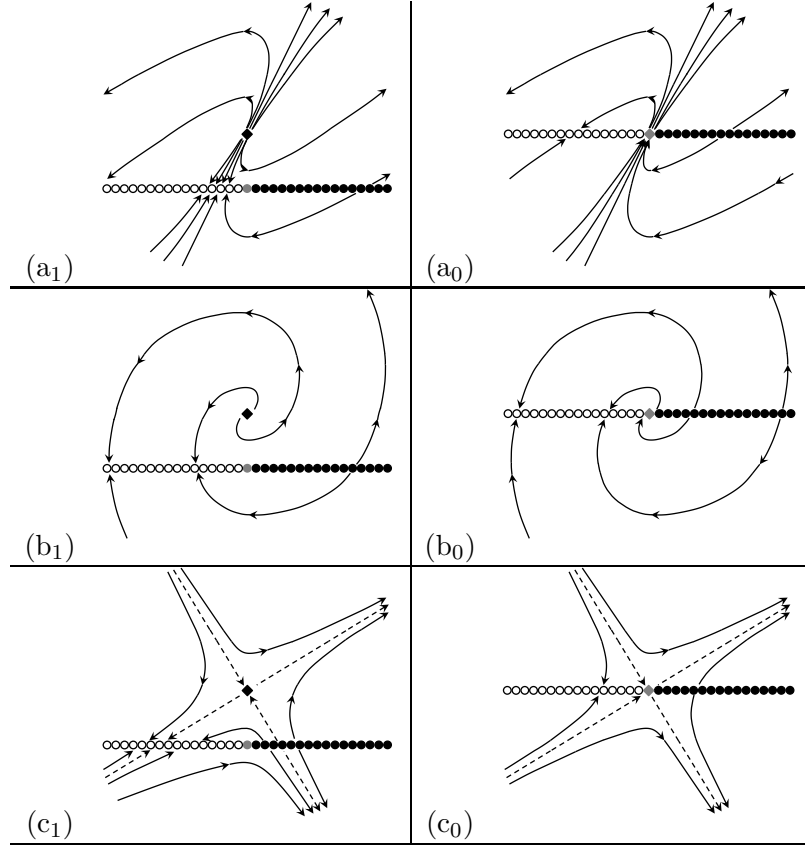


Fig. 1. Phase portraits of the model system (32) corresponding to the classification in Table 1.

Here: $\diamond \setminus \circ$ – cosymmetric \ non-cosymmetric equilibrium;
 $\circ \setminus \bullet \setminus \bullet$ – stable \ boundary \ unstable equilibrium; dashed lines
are separatrices of the saddle equilibrium of system (32).

Case of a Single Degeneracy. Let

$$a_{10} = 0, \quad a_{20}a_{01} \neq 0, \quad \tilde{a}_{10} \neq a_{01}. \quad (34)$$

The system truncated from equations (20) and given by

$$\dot{x} = \tilde{a}_{10}x \cdot (\varepsilon_0 + y), \quad \dot{y} = (\mu_1x + a_{01}y + a_{20}x^2) \cdot (\varepsilon_0 + y), \quad (35)$$

is transformed, by a change of variables and, when $a_{20} < 0$, a reversal of time,

$$x \rightarrow \sqrt{|a_{20}|}x, \quad y \rightarrow a_{01} \text{sgn } a_{20} \cdot y, \quad t \rightarrow \text{sgn } a_{20} \cdot t, \quad (36)$$

to the model system

$$\dot{x} = a_2 x \cdot (\varepsilon_2 + y), \quad \dot{y} = (\nu_1 x + y + x^2) \cdot (\varepsilon_2 + y), \quad a_2 \neq 0, 1. \quad (37)$$

The coefficient and parameters of the model system (37) are given by

$$a_2 := \frac{\tilde{a}_{10}}{a_{01}}, \quad \nu_1 := \frac{\operatorname{sgn} a_{20}}{\sqrt{|a_{20}|}} \cdot \mu_1, \quad \varepsilon_2 := a_{01} \operatorname{sgn} a_{20} \cdot \varepsilon_0. \quad (38)$$

Let us denote by

$$\delta_1(a, b) := a^2 - 4b \quad (39)$$

the discriminant of the polynomial $x^2 + ax + b$.

REMARK 4. The substitution $x \rightarrow -x$ in (37) changes only the parameter ν_1 and the intersection vector:

$$\nu_1 \rightarrow -\nu_1, \quad v \rightarrow (v_1, v_4, v_3, v_2).$$

The analytical classification of the system (37) is summarized in Tables 2 and 3, and the corresponding phase portraits are shown in Fig. 3.

Theorem 2. *In the classification of (37), all classes not appearing in Tables 2 and 3 are empty:*

$$(d_{12}), (d_{02}), (e_{11}^2), (e_{12}^1), (e_{12}^2), (e_{01}^2), (e_{02}^1), (e_{02}^2), (e_{22}^1). \quad (40)$$

Table 2

Classification of the system (37) in a neighborhood of the node $x = y = 0$ in the space of small parameters ν_1 and ε_2 . Here $\delta_{11} = \nu_1^2 + 4\varepsilon_2$. The classes are written in the form $(d_{w(\varepsilon_2), w(\delta_{11})})$, where the function w is defined by (29)

Class	Conditions			Example ($\alpha \neq 0$)	
	a_2	$\operatorname{sgn} \varepsilon_2$	$\operatorname{sgn} \delta_{11}$	ε_2	ν_1
(d ₁₁)	$a_2 > 0$	1	1	α^2	α
(d ₂₁)	$a_2 \neq 1$	-1		$-\alpha^2$	3α
(d ₀₁)	(node)	0		0	α
(d ₂₂)		-1	-1	$-\alpha^2$	α

Table 3

Classification of the system (37) in a neighborhood of the saddle $x = y = 0$ in the space of small parameters ν_1 and ε_2 . Here $\delta_{11} = \nu_1^2 + 4\varepsilon_2$, $\delta_{12} = \frac{1-2a_2}{(1-a_2)^2} \nu_1^2 + 4\varepsilon_2$. The classes are written in the form $(e_{w(\varepsilon_2), w(\delta_{11})}^w)$, where the function w is defined by (29)

Class	Conditions				Example ($\alpha \neq 0$)	
	a_2	$\operatorname{sgn} \varepsilon_2$	$\operatorname{sgn} \delta_{11}$	$\operatorname{sgn} \delta_{12}$	ε_2	ν_1
(e ₁₁ ¹)	$a_2 < 0$ (saddle)	1	1	1	α^2	α
(e ₂₁ ¹)		-1			$-(1-2a_2)\alpha^2$	$3(1-a_2)\alpha$
(e ₀₁ ¹)		0			0	α
(e ₂₁ ²)		-1	1	-1	$2(a_2^2 - 2(1-a_2)^2)\alpha^2$	$4(1-a_2)\alpha$
(e ₂₂ ²)		-1	-1	-1	$-\alpha^2$	α

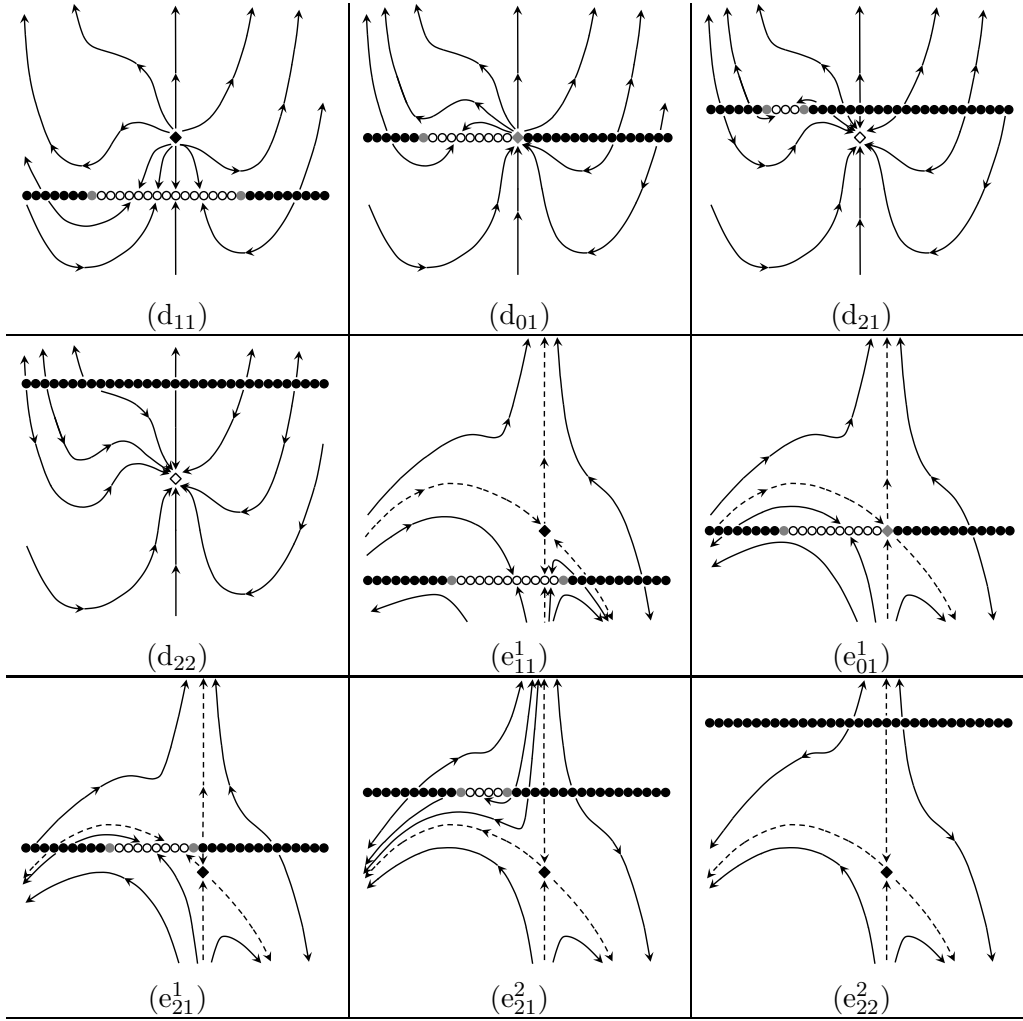


Fig. 2. Phase portraits of the model system (37) corresponding to the classification in Tables 2 and 3.

First Case of Double Degeneracy. Let

$$a_{10} = 0, \quad \tilde{a}_{10} = a_{01}, \quad a_{20}a_{01}\tilde{a}_{01} \neq 0. \quad (41)$$

The system, truncated from equations (20), is given by

$$\dot{x} = ((a_{01} + \mu_3)x + \tilde{a}_{01}y) \cdot (\varepsilon_0 + y), \quad \dot{y} = (\mu_1x + (a_{01} + \mu_0)y + a_{20}x^2) \cdot (\varepsilon_0 + y), \quad (42)$$

and can be reduced to the form

$$\dot{x} = (x + \nu_2x + y) \cdot (\varepsilon_3 + y), \quad \dot{y} = (\nu_3x + y + x^2) \cdot (\varepsilon_3 + y), \quad (43)$$

by a change of variables and of time, and by time reversal, when $a_{20} < 0$:

$$x \rightarrow \frac{a_{20}\tilde{a}_{01}}{(a_{01} + \mu_0)^2} \cdot x, \quad y \rightarrow \frac{a_{20}\tilde{a}_{01}^2}{(a_{01} + \mu_0)^3} \cdot y, \quad t \rightarrow \frac{(a_{01} + \mu_0)^4}{a_{20}\tilde{a}_{01}^2} \cdot t. \quad (44)$$

The parameters ν_2 , ν_3 , and ε_3 are determined by

$$\nu_2 := \frac{\mu_3 - \mu_0}{a_{01} + \mu_0}, \quad \nu_3 := \frac{\tilde{a}_{01}\mu_1}{(a_{01} + \mu_0)^2}, \quad \varepsilon_3 := \frac{a_{20}\tilde{a}_{01}^2\varepsilon_0}{(a_{01} + \mu_0)^3}. \quad (45)$$

The classification of the system (43) is presented in Table 4 and illustrated in Fig. 3.

Table 4

Classification of the system (43) in a neighborhood of the equilibrium $x = y = 0$ in the space of small parameters ν_2 , ν_3 , and ε_3 . Here $\delta_{13} = \nu_2^2 + 4\nu_3$, $\delta_{14} = \nu_3^2 + 4\varepsilon_3$. The classes are written in the form $(f_{w(\delta_{13}), w(\delta_{14}), w(\varepsilon_3)})$, where the function w is defined by (29)

Class	Conditions		
	$\text{sgn } \delta_{13}$	$\text{sgn } \delta_{14}$	$\text{sgn } \varepsilon_3$
$(f_{111}) = (d_{11})$	1 (node)	1	1
$(f_{112}) = (d_{21})$			-1
$(f_{110}) = (d_{01})$			0
$(f_{122}) = (d_{22})$			-1
(f_{211})	-1 (focus)	1	1
(f_{212})			-1
(f_{210})			0
(f_{222})			-1

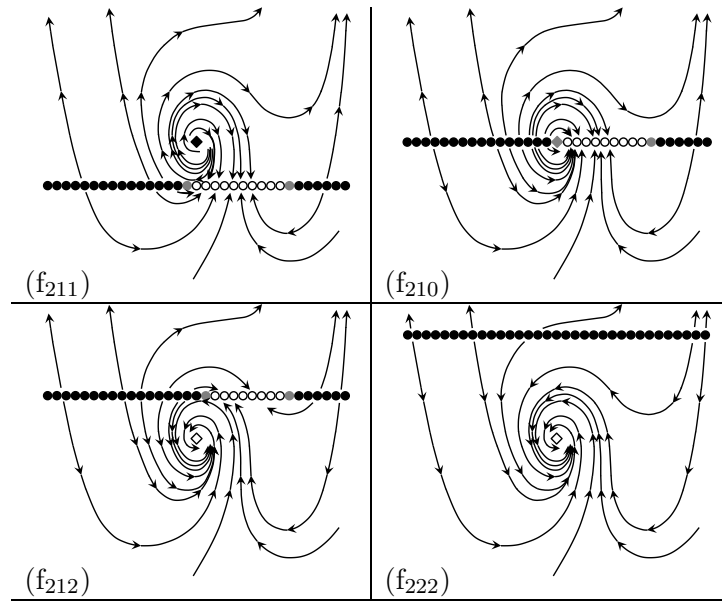


Fig. 3. Phase portraits of the model system (43) corresponding to the classification in Table 4. The case where the zero equilibrium is a focus ($\nu_2^2 + 4\nu_3 < 0$).

Second case of double degeneracy. Let

$$a_{10} = a_{20} = 0, \quad a_{30}a_{01} \neq 0, \quad \tilde{a}_{10} \neq a_{01}. \quad (46)$$

The truncated system derived from equations (20) has the form

$$\dot{x} = \tilde{a}_{10}x \cdot (\varepsilon_0 + y), \quad \dot{y} = (\mu_1x + a_{01}y + \mu_2x^2 + a_{30}x^3) \cdot (\varepsilon_0 + y), \quad (47)$$

and under the change of variables

$$x \rightarrow \sqrt[3]{a_{30}} \cdot x, \quad y \rightarrow a_{01}y, \quad (48)$$

reduces to the model system

$$\dot{x} = a_2x \cdot (\varepsilon_4 + y), \quad \dot{y} = (\nu_4x + y + \nu_5x^2 + x^3) \cdot (\varepsilon_4 + y), \quad a_2 \neq 0, 1, \quad (49)$$

where

$$a_2 := \frac{\tilde{a}_{10}}{a_{01}}, \quad \nu_4 := \frac{\mu_1}{\sqrt[3]{a_{30}}}, \quad \nu_5 := \frac{\mu_2}{\sqrt[3]{a_{30}^2}}, \quad \varepsilon_4 := a_{01}\varepsilon_0. \quad (50)$$

Denote by

$$\delta_2(a, b, c) \quad (51)$$

the discriminant of the cubic polynomial $x^3 + ax^2 + bx + c$.

REMARK 5. For the system (49), the transformation $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, t \rightarrow -t$, is equivalent to the substitution $\varepsilon_4 \rightarrow -\varepsilon_4, \nu_5 \rightarrow -\nu_5$. This substitution changes the parameters as $\varepsilon_4 \rightarrow -\varepsilon_4$ and $v \rightarrow (v_1, v_4, v_3, v_2)$, while preserving the discriminant $\delta_{21} := \delta_2(\nu_5, \nu_4, -\varepsilon_4)$. Therefore, without loss of generality, we assume $v_2 \geq v_4$.

The classification of the system (49) is presented in Tables 5, 6 and in Fig. 4.

Table 5

Classification of the system (49) in a neighborhood of the node $x = y = 0$ in the space of small parameters ν_4, ν_5 , and ε_4 . Here $\delta_{21} = \delta_2(\nu_5, \nu_4, -\varepsilon_4)$. The classes are written in the form $(g_{w(\varepsilon_4), w(\delta_{21})})$, where the function w is defined by (29)

Class	Conditions			Example ($\alpha > 0$)		
	a_2	$\text{sgn } \varepsilon_4$	$\text{sgn } \delta_{21}$	ε_4	ν_4	ν_5
(g_{11})	$a_2 > 0,$ $a_2 \neq 1$ (node)	1	1	α^3	α^2	3α
$(g_{12}) = (a_1)$		1	-1	α^3	α^2	α
(g_{21})		-1	1	$-\alpha^3$	α^2	-3α
$(g_{22}) = (a_1)$		-1	-1	$-\alpha^3$	α^2	$-\alpha$
(g_{01})		0	1	0	$-\alpha^2$	α
$(g_{02}) = (a_0)$		0	-1	0	α^2	α

Table 6

Classification of the system (49) in a neighborhood of the saddle $x = y = 0$ in the space of small parameters ν_4, ν_5 , and ε_4 . Here $\delta_{21} = \delta_2(\nu_5, \nu_4, -\varepsilon_4), \eta_0 = -(1 - 3a_2)\varepsilon_4, \eta_1 = \frac{1-3a_2}{1-a_2}\nu_4, \eta_2 = \frac{1-3a_3}{1-2a_2}\nu_5$. The classes are written in the form $(h_{w(\varepsilon_4), w(\delta_{21})}^{v_2, v_4})$, where v_2 and v_4 are the components of the separatrix-intersection vector (28), and the function w is defined by (29)

Class	Conditions					Example ($\alpha > 0$)		
	a_2	$\text{sgn } \varepsilon_4$	$\text{sgn } \delta_{21}$	v_2	v_4	η_0	η_1	η_2
(h_{11}^{21})	$a_2 < 0$ (saddle)	1	1	2	1	$-6\alpha^3$	α^2	4α
(h_{21}^{30})		3		0	$6\alpha^3$	$11\alpha^2$	6α	
(h_{21}^{10})		2		1	$\frac{4a_2^4(3-a_2)^2}{(1-3a_2)^2}\alpha^3$	$-3\alpha^2$	0	
$(h_{22}^{10}) = (c_1)$		-1	1	0	$4\alpha^3$	$5\alpha^2$	2α	
(h_{01}^{20})		0	1	2	0	0	$2\alpha^2$	3α
(h_{01}^{11})				1	1		$-2\alpha^2$	α
(h_{01}^{00})				0	0		$\frac{2\alpha^2}{2-8a_2+7a_2^2}$	$\frac{2\alpha}{1-2a_2}$
$(h_{02}^{00}) = (c_0)$				-1	0		0	α^2

Theorem 3. In the classification of the system (49), all classes not listed in Tables 5 and 6 are empty:

$$(h_{11}^{30}), \quad (h_{11}^{10}), \quad (h_{12}^{10}), \quad (h_{21}^{21}), \quad (52)$$

$$(h_{22}^{30}), \quad (h_{12}^{30}), \quad (h_{12}^{21}), \quad (h_{22}^{21}), \quad (h_{02}^{20}), \quad (h_{02}^{11}). \quad (53)$$

The authors thank the two anonymous reviewers for their valuable comments.

Table 7

Model systems (a) – (h) derived from equations (20) for which the codimension of degeneracy does not exceed two. The symbols a_j denote new coefficients, while ε_j and ν_j denote new small parameters. The matrix M is defined by (22)

General conditions	Truncated system	Additional conditions	Model system	N ^o
$a_{10} \neq 0$	(30) $\dot{x} = (\tilde{a}_{10}x + \tilde{a}_{01}y)(\varepsilon_0 + y)$ $\dot{y} = (a_{10}x + a_{01}y)(\varepsilon_0 + y)$	$\det M > 0$ $\operatorname{tr} M \neq 0$	(32) $\dot{x} = (a_1x - y) \cdot (\varepsilon_1 + y)$ $\dot{y} = x \cdot (\varepsilon_1 + y)$	(a) $a_1^2 > 4$
		$d_M < 0$		(b) $a_1^2 < 4$ $a_1 \neq 0$
$a_{10} = 0$ $\tilde{a}_{10} \neq a_{01}$ $a_{20}a_{01} \neq 0$	(35) $\dot{x} = \tilde{a}_{10}x(\varepsilon_0 + y)$ $\dot{y} = (\mu_1x + a_{01}y + a_{20}x^2) \cdot (\varepsilon_0 + y)$	$\det M < 0$	(32) $\dot{x} = (a_1x + y) \cdot (\varepsilon_1 + y)$ $\dot{y} = x \cdot (\varepsilon_1 + y)$	(c)
		$\tilde{a}_{10}a_{01} > 0$	(37) $\dot{x} = a_2x(\varepsilon_2 + y)$ $\dot{y} = (\nu_1x + y + x^2) \cdot (\varepsilon_2 + y)$	(d) $a_2 > 0$ $a_2 \neq 1$
$a_{10} = 0$ $\tilde{a}_{10} = a_{01}$ $a_{20}a_{01} \neq 0$	(42) $\dot{x} = (\tilde{a}_{10}x + \mu_3x + \tilde{a}_{01}y) \cdot (\varepsilon_0 + y)$ $\dot{y} = (\mu_1x + a_{01}y + \mu_0y + a_{20}x^2) \cdot (\varepsilon_0 + y)$	$\tilde{a}_{10}a_{01} < 0$		(e) $a_2 < 0$
		—	(43) $\dot{x} = (x + \nu_2x + y)(\varepsilon_3 + y)$ $\dot{y} = (\nu_3x + y + x^2)(\varepsilon_3 + y)$	(f)
$a_{10} = 0$ $a_{20} = 0$ $a_{30}a_{01} \neq 0$	(47) $\dot{x} = \tilde{a}_{10}x(\varepsilon_0 + y)$ $\dot{y} = (\mu_1x + a_{01}y + \mu_2x^2 + a_{30}x^3)(\varepsilon_0 + y)$	$\tilde{a}_{10}a_{01} > 0$	(49) $\dot{x} = a_2x(\varepsilon_4 + y)$ $\dot{y} = (\nu_4x + y + \nu_5x^2 + x^3) \cdot (\varepsilon_4 + y)$	(g) $a_2 > 0$ $a_2 \neq 1$
		$\tilde{a}_{10}a_{01} < 0$		(h) $a_2 < 0$

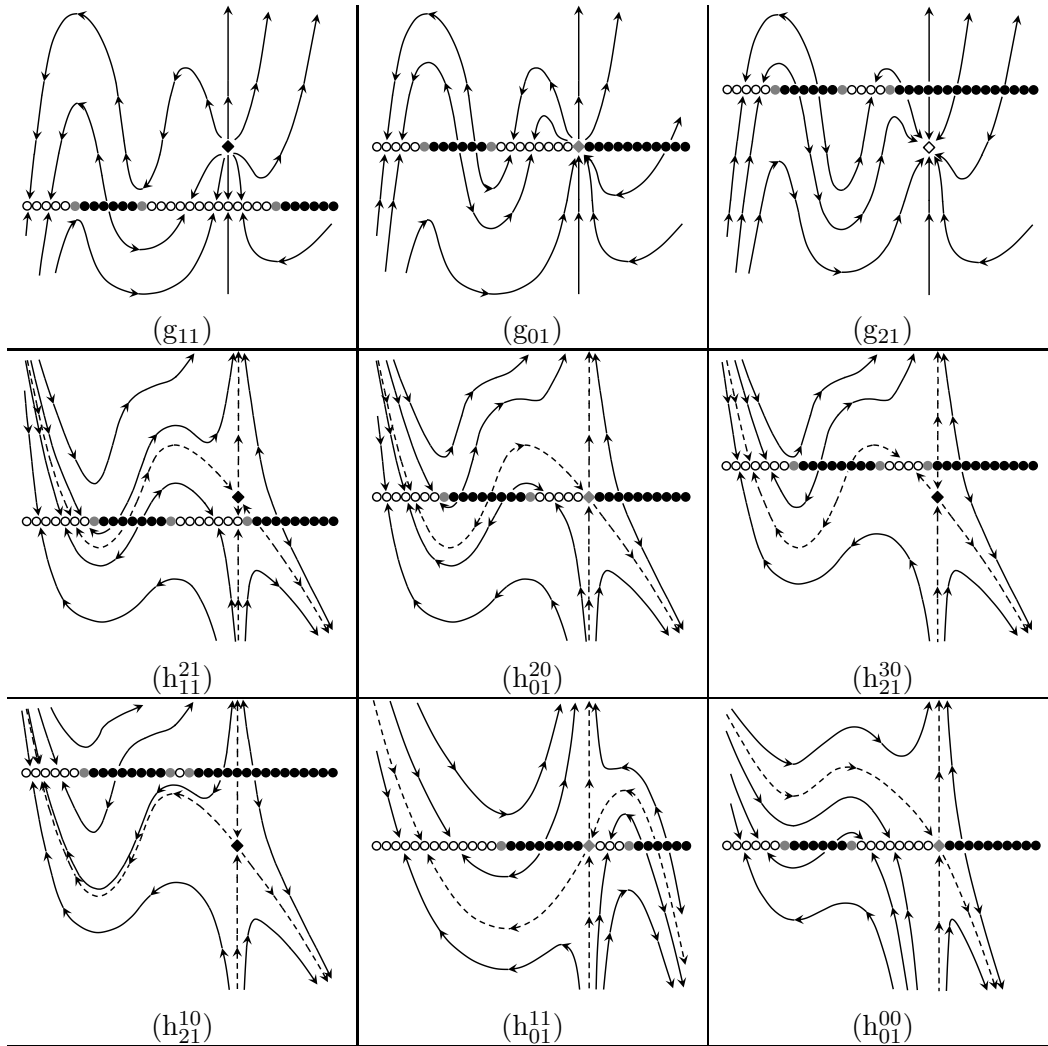


Fig. 4. Phase portraits of the model system (49) corresponding to the classification in Tables 5 and 6.

References

1. Kurakin, L. G. and Yudovich, V. I. Bifurcations Accompanying Monotonic Instability of an Equilibrium of a Cosymmetric Dynamical System, *Chaos*, 2000, vol. 10, no. 2, pp. 311–330. DOI: 10.1063/1.166497.
2. Kurakin, L. G. and Yudovich, V. I. Bifurcations under Monotone Loss of Stability of Equilibrium in a Cosymmetric Dynamical System, *Doklady Akademii Nauk*, 2000, vol. 61, no. 3, pp. 433–437 (in Russian).
3. Yudovich, V. I. Cosymmetry, Degeneration of Solutions of Operator Equations, and Onset of a Filtration Convection, *Mathematical Notes*, 1991, vol. 49, no. 5, pp. 540–545. DOI: 10.1007/BF01142654.
4. Lyubimov, D. V. Convective Motions in a Porous Medium Heated from Below, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1975, vol. 16, no. 2, pp. 257–261. DOI: 10.1007/BF00858924.
5. Kurakin, L. G. Critical Cases of Stability. Converse Implicit Function Theorem For Dynamical Systems With Cosymmetry, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1975, vol. 63, pp. 503–508. DOI: 10.1007/BF02311253.
6. Kurakin, L. G. and Kurdoglyan, A. V. On the Isolation/Nonisolation of a Cosymmetric Equilibrium and Bifurcations in its Neighborhood, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2021, vol. 26, no. 3, pp. 258–270. DOI: 10.1134/S1560354721030047.
7. Vainberg, M. M. and Trenogin, V. A. *Teoriya vetvleniya reshenij nelinejnyh uravnenij* [Branching Theory of Solutions of Nonlinear Equations], Moscow, Nauka, 1969, 528 p. (in Russian).

8. Marsden, J. E. and McCracken, M. *The Hopf Bifurcation and its Applications*, vol. 19, New York, Springer Science & Business Media, 2012, 407 p.
9. Lyapunov, A. M. *Obshchaya zadacha ob ustojchivosti dvizheniya* [The General Problem of the Stability of Motion], *Gostekhizdat*, Moscow, 1950, 471 p. (in Russian).

Received August 10, 2025

LEONID G. KURAKIN

Water Problems Institute of RAS,
3 Gubkin St., Moscow 119333, Russia,
Chief Researcher;

Southern Mathematical Institute of VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Leading Researcher;

Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of SFedU,
8 a Milchakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Professor

E-mail: kurakin@math.rsu.ru

AIK V. KURDOGLYAN

Southern Mathematical Institute of VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Junior Researcher;

North Caucasus Center for Mathematical Research of VSC RAS,
1 Williams St., Village of Mikhailovskoye 363110, Russia,
Junior Researcher

E-mail: aik_kurdoglyan@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-9238-0877>

*Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 4, С. 86–102*

КЛАССИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОКРЕСТНОСТИ КОСИММЕТРИЧНОГО РАВНОВЕСИЯ

Куракин Л. Г.^{1,2,3}, Курдоглыан А. В.^{2,4}

¹ Институт водных проблем РАН,

Россия, 119333, Москва, ул. Губкина, 3;

² Южный математический институт — филиал ВНИЦ РАН,

Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;

³ Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ,

Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

⁴ Северо-Кавказский центр математических исследований ВНИЦ РАН,

Россия, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1

E-mail: kurakin@math.rsu.ru, aik_kurdoglyan@mail.ru

Аннотация. В окрестности косимметричного равновесия построена локальная классификация дифференциальных уравнений с обратимой косимметрией и векторным параметром в предположении, что ядро матрицы линеаризации на косимметричном равновесии двумерно, а весь ее спектр устойчивости, за исключением двукратного нуля, устойчив. Уравнения с такими свойствами имеют коразмерность 1 среди четномерных систем с косимметричным равновесием. Во всех рассмотренных случаях такая система обладает спрямляемым семейством некосимметричных равновесий вблизи косимметричного. Классификация проведена по следующим свойствам: тип косимметричного равновесия (узел, фокус, седло); взаимное расположение косимметричного равновесия и семейства (включая случай принадлежности косимметричного равновесия семейству); число граничных равновесий этого семейства, разделяющих его

области устойчивости и неустойчивости (≤ 3); число пересечений каждой из сепаратрис косимметричного седлового равновесия с семейством (≤ 3). Каждое из этих свойств определяется полиномиальными условиями. Таким образом, классификация сведена к выделению тех наборов условий, пересечение которых не пусто. Для каждого найденного класса приведены определяющие его полиномиальные условия и соответствующий фазовый портрет. В неочевидных случаях, существование каждого непустого класса устанавливается предъявлением масштабируемого примера, а пустота остальных классов доказывается отдельными утверждениями. Данная статья продолжает работы [1, 2] Куракина Л. Г. и Юдовича В. И., где были проведены аналогичные исследования в окрестности некосимметричного равновесия.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, равновесие, косимметрия, классификация.

AMS Subject Classification: 34C23, 34C40.

Образец цитирования: Kurakin L. G. and Kurdoglyan A. V. Classification of Dynamical Systems Near a Cosymmetric Equilibrium // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 4.—С. 86–102 (in English). DOI: 10.46698/h3876-8857-0078-b.

УДК 514.14

DOI 10.46698/o1944-0990-7792-e

ONE APPLICATION OF PTOLEMY'S THEOREM

Yu. G. Nikonorov¹ and D. N. Oskorbin²

¹ Southern Mathematical Institute of VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia;

² Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutsky Per., Dolgoprudny 141701, Russia

E-mail: nikonorov2006@mail.ru, oskorbin.dn@phystech.edu

Abstract. In this paper, we present a simple proof of one result from a recent paper by Yu. G. Nikonorov and O. Yu. Nikonorova, the original proof of which is rather cumbersome and based on the study of polynomial ideals and symbolic computations using a computer. The new proof is based on Ptolemy's theorem on inscribed quadrilaterals. In addition, other properties of inscribed quadrilaterals and related problems are considered.

Keywords: convex polygon, convex quadrilateral, extremal problems, inscribed quadrilateral, integer pentagon, perimeter, Ptolemy's theorem.

AMS Subject Classification: 52A10, 52A40, 52B60.

For citation: Nikonorov, Yu. G. and Oskorbin, D. N. One Application of Ptolemy's Theorem, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 103–108. DOI: 10.46698/o1944-0990-7792-e.

In this short note, we consider elementary and short proof of one result, which was proved originally with using of symbolic computations based on the study of polynomial ideals.

1. New Proof of One Result on Special Pentagons

The following result was originally proved in [1, Theorem 4], where the proof was based on the study of polynomial ideals and symbolic computations using a computer.

Theorem 1 [1]. *Let P be a convex pentagon in the Euclidean plane with the consecutive vertices A, B, C, E, F such that $|AE| = |BE| = |BF| = |CF| = 1$ and $|AB| + |BC| \geq 1$. Then the perimeter $L(P)$ of this pentagon is not less than 3.*

In [1], the authors consider also the case when the pentagon P degenerates into a polygon with fewer sides. For example, B may degenerately lie in the segment $[A, C]$, E may coincide with C or F , F may coincide with E or A . This assumption is useful since it allows to consider a compact subset of polygons in the plane with respect to the Hausdorff metric. In particular, one can be sure that there exists a pentagon with a minimum perimeter.

Let us consider the following values: $\alpha = \angle EAB = \angle EBA$, $\beta = \angle FBC = \angle FCB$, $\gamma = \angle BEF = \angle BFE$, $\theta = \angle EBF = \pi - 2\gamma$. It is clear that $|AB| = 2 \cos \alpha$, $|BC| = 2 \cos \beta$, $|EF| = 2 \cos \gamma = 2 \sin(\theta/2)$, see Fig. 1 a).

In terms of the angles α, β, γ , one can give a complete description of the cases when the equality $L(P) = 3$ holds in Theorem 1. Namely, $L(P) = 3$ exactly for the following

values of (α, β, γ) : $(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$, which corresponds to $E = C, F = A, |EF| = |AB| = |BC| = 1$; $(\pi/3, \pi/2, \pi/3)$, which corresponds to $B = C, A = F, |EF| = |AB| = |BE| = 1$; $(\pi/2, \pi/3, \pi/3)$, which corresponds to $B = A, C = E, |BF| = |BC| = |EE| = 1$; $(\alpha, \beta, \pi/2)$ with $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 1$, which corresponds to a family of quadrangles with $E = F$ and $|AB| + |BC| = 1$; $(\arccos(1/4), \arccos(1/4), \arccos(1/4))$, which corresponds to a special pentagon with perimeter 3, see Fig. 1 b), see details in [1, Section 3].

The pentagon in Fig. 1 b) with $\alpha = \beta = \gamma = \arccos(1/4)$ is quite remarkable. Note that $\angle CEB = \angle CFB = \angle CAB = \angle AFB = \angle AEB = \angle ACB = \angle ECF = \angle EBF = \angle EAF = 2 \arcsin(1/4) = \arccos(7/8)$. In particular, all vertices of this pentagon lie on the same circle. This implies $|AF| = |CE| = 3/4$. Moreover, $|AC| = 7/8$. Note also that the radius of the circumscribed circle is $\sqrt{17}/8$. Thus, if we increase this pentagon by 8 times, we get an *integer pentagon*, in which all sides and diagonals have integer lengths. This pentagon was found at first in [2], see also the discussion in [3, p. 19].

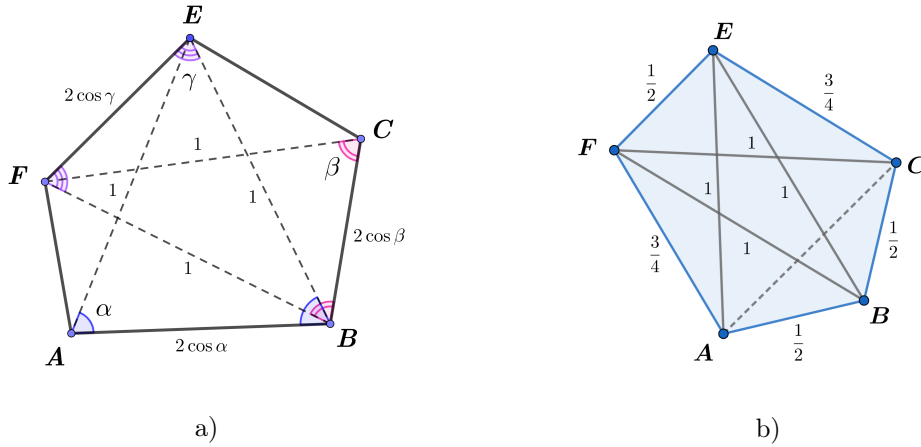


Fig. 1. a) A pentagon P as in Theorem 1; b) A special pentagon P with perimeter 3.

Here we consider a simple proof of Theorem 1, which is based on well know Ptolemy’s theorem (see the next section). In fact, the proof is also suitable for the case of a degenerate pentagon.

◁ PROOF OF THEOREM 1. Denote by Π the perimeter of the pentagon P .

If $|EF| \geq 1$, then, taking into account $|FA| + |AB| \geq |FB| = 1$ and $|BC| + |CE| \geq |BE| = 1$ (by the triangle inequality), we get $\Pi = |BC| + |CE| + |EF| + |FA| + |AB| \geq 3$. The equality here is possible only when $|EF| = 1, A \in \{F, B\},$ and $C \in \{E, B\},$ i. e., P degenerates into a regular triangle with the side length 1.

Now, we suppose that $|EF| < 1$. Note that $(|AB| + |BC| - 1)(1 - |EF|) \geq 0$ (the equality here is equivalent to $|AB| + |BC| = 1$). Therefore,

$$|AB| + |BC| + |EF| - (|AB| + |BC|) \cdot |EF| \geq 1.$$

By Ptolemy’s theorem for the quadrilateral $ABEF,$ we get

$$|AB| \cdot |EF| + |AF| = |AB| \cdot |EF| + |AF| \cdot |EB| \geq |AE| \cdot |BF| = 1.$$

By Ptolemy’s theorem for the quadrilateral $BCEF,$ we get

$$|BC| \cdot |EF| + |EC| = |BC| \cdot |EF| + |EC| \cdot |FB| \geq |FC| \cdot |EB| = 1.$$

The last three inequalities imply the following one:

$$\begin{aligned} \Pi = |AB| + |BC| + |EC| + |EF| + |AF| &= (|AB| + |BC| + |EF| - (|AB| + |BC|) \cdot |EF|) \\ &+ (|AB| \cdot |EF| + |AF|) + (|BC| \cdot |EF| + |EC|) \geq 1 + 1 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Now, we consider in detail the case when this inequality becomes the equality. It is easy to see that $\Pi = 3$ if and only if $|AB| + |BC| = 1$ and both quadrilateral $ABEF$ and $BCEF$ are inscribed (by Ptolemy's theorem). Note that triangle BEF is a subset of both these quadrangles. If it is degenerate ($E = F$), then we get a 1-parameter family of quadrangles $ABCF$ with $\Pi = 3$. In this case, $|AF| = |CF| = 1$, $|AB| = t$, $|BC| = 1 - t$, $t \in (0, 1)$; for $t = 0$ or $t = 1$, P degenerates to a regular triangle. If the triangle BEF is not degenerate, then both quadrilateral $ABEF$ and $BCEF$ are inscribed in the circumscribed circle S for $\triangle BEF$. Therefore, the pentagon P is inscribed in S . Since chords of equal length rest on equal arcs in any circle, the triangles AEB , BFC , and EBF must be equal each to other. Hence, $|EF| = |AB| = |BC| = 1/2$. Therefore, we get the pentagon in Fig. 1 b). \triangleright

It should be noted that the results of the paper [1] are closely related to finding n -gons with an extreme perimeter value among all n -gons with a given self Chebyshev radius of the boundary (recall that the self Chebyshev radius of a compact set A on the Euclidean plane is the smallest radius of a circle centered within the set A that encloses A). The study of this class of problems was initiated in [4], and some related extreme problems were solved in [5] and [6].

2. Ptolemy's Theorem and Related Results

In Euclidean geometry, a cyclic quadrilateral or inscribed quadrilateral is a quadrilateral whose vertices all lie on a single circle. It is well known that a convex quadrilateral $ABCD$ is inscribed if and only if $\angle ABC + \angle CDA = \pi$ (or, equivalently, $\angle DAB + \angle BCD = \pi$). On the other hand, there are many other criterias to be inscribed for a convex quadrangle. One of the most popular and useful is the following one:

Theorem 2 (Ptolemy's theorem). *Let Q be a convex quadrilateral in the Euclidean plane with the consecutive vertices A, B, C, D , then the sides and diagonals of Q satisfy the inequality*

$$|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|,$$

which becomes an equality if and only if Q is a cyclic quadrilateral.

There are many proofs of Ptolemy's theorem, see e. g. [7, Problem 9.67], [8], [9, pp. 20–21].

It should be noted that $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$ for points A, B, C, D from a straight line. It is related to the fact that the image of any circle under any inversion is either a circle or a straight line (that can be considered as a circle of infinite radius).

It is interesting the following result (which is sometimes called "Ptolemy's second theorem"):

Theorem 3. *Let Q be a convex quadrilateral in the Euclidean plane with the consecutive vertices A, B, C, D , then the sides and diagonals of Q satisfy the equality*

$$\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|BA| \cdot |AD| + |BC| \cdot |CD|}{|AB| \cdot |BC| + |CA| \cdot |AD|}$$

if and only if Q is a cyclic quadrilateral.

This result was obtained independently in [8] and [10], see some details in [9, pp. 24–25].

Note that many other results are known related to quadrangles inscribed in a circle. The interested reader can be advised to read the papers [9] and [11] on this topic.

Finally, we consider one result obtained by A. Mannheim in [12], see also [13] and [14, Appendix 3], see Fig. 2 a).

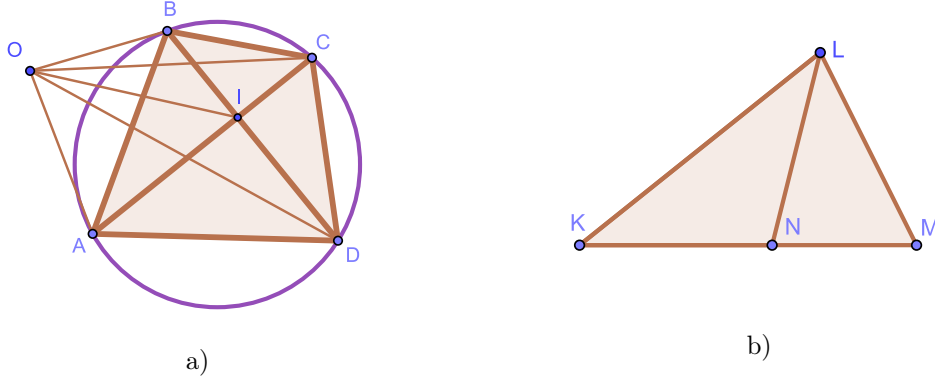


Fig. 2. a) Mannheim's theorem; b) Stewart's theorem.

Theorem 4 (Mannheim's theorem). *Let $ABCD$ be a convex cyclic quadrilateral (with consecutive vertices) in some Euclidean plane \mathbb{E}^2 , that is situated in 3-dimensional Euclidean space \mathbb{E}^3 . Then for any point $O \in \mathbb{E}^3$, we have the following equality:*

$$\begin{aligned} & |AB| \cdot |BD| \cdot |AD| \cdot |OC|^2 + |BC| \cdot |CD| \cdot |BD| \cdot |OA|^2 \\ &= |AB| \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot |OD|^2 + |AC| \cdot |CD| \cdot |AD| \cdot |OB|^2. \end{aligned}$$

If we take $O := A$ in this theorem, then we get $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$, the equality in Theorem 2. On the other hand, if we take the center of the circumscribed circle as the point O , then $|OA| = |OB| = |OC| = |OD|$ and we get the equality in Theorem 3.

For the convenience of readers, we will present a proof of Theorem 4. The simplest way to prove this theorem is to use one standard result which is known as Stewart's theorem, see Fig. 2 b).

Lemma 1 (Stewart's theorem). *Let $\triangle KLM$ be a convex triangle in the Euclidean plane, and N is a point of the side KN . Then we have the following equality:*

$$|LN|^2 = |KL|^2 \cdot \frac{|NM|}{|KM|} + |LM|^2 \cdot \frac{|KN|}{|KM|} - |KN| \cdot |NM|.$$

◁ If we express $\cos \angle LKM$ from the triangles KLM and KLN , then we get

$$2 \cdot |KL| \cdot \cos \angle LKM = \frac{|KL|^2 + |KM|^2 - |LM|^2}{|KM|} = \frac{|KL|^2 + |KN|^2 - |LN|^2}{|KN|},$$

that easily implies what we want. ▷

◁ PROOF OF THEOREM 4. We use a little modified arguments from [13]. Let I be the intersection point of the diagonals AC and BD . Applying Lemma 1 to the triangles AOC and BOD with points on the sides AC and BD , we get

$$|OI|^2 = |OA|^2 \cdot \frac{|CI|}{|AC|} + |OC|^2 \cdot \frac{|AI|}{|AC|} - |AI| \cdot |IC|, \quad (1)$$

$$|OI|^2 = |OB|^2 \cdot \frac{|DI|}{|BD|} + |OD|^2 \cdot \frac{|BI|}{|BD|} - |BI| \cdot |ID|. \quad (2)$$

Since the quadrilateral $ABCD$ is inscribed, then $\angle DAC = \angle DBC$ and $\angle BAC = \angle BDC$. This implies that $\triangle AID$ is similar to $\triangle BID$, as well as, $\triangle BIA$ is similar to $\triangle CID$. These observations imply that

$$\frac{|AI|}{|BI|} = \frac{|DI|}{|CI|} = \frac{|AD|}{|BC|}, \quad \frac{|AI|}{|DI|} = \frac{|BI|}{|CI|} = \frac{|AB|}{|CD|}. \quad (3)$$

In particular, $|AI| \cdot |IC| = |BI| \cdot |ID|$. Hence, (1) and (2) imply

$$|OA|^2 \cdot \frac{|AI|}{|AC|} + |OC|^2 \cdot \frac{|CI|}{|AC|} = |OB|^2 \cdot \frac{|BI|}{|BD|} + |OD|^2 \cdot \frac{|DI|}{|BD|} \quad \text{and}$$

$$|BD| \cdot (|OA|^2 \cdot |AI| + |OC|^2 \cdot |CI|) = |AC| \cdot (|OB|^2 \cdot |BI| + |OD|^2 \cdot |DI|). \quad (4)$$

We get from (3), that

$$|AI| = \frac{|AB|}{|CD|} \cdot |DI|, \quad |CI| = \frac{|BC|}{|AD|} \cdot |DI|, \quad |BI| = \frac{|AB|}{|CD|} \cdot |CI| = \frac{|AB|}{|CD|} \cdot \frac{|BC|}{|AD|} \cdot |DI|.$$

Substituting the obtained expressions into (4), we complete the proof. \triangleright

References

1. Nikonorov, Yu. G. and Nikonorova, O. Yu. Some Extremal Problems for Polygons in the Euclidean Plane, *Aequationes Mathematicae*, 2024, vol. 98, no. 2, pp. 603–624. DOI: 10.1007/s00010-023-00991-w.
2. Müller, A. Auf Einem Kreis Liegende Punktmengen Ganzzahliger Entfernungen, *Elem. Math.*, 1953, vol. 8, pp. 37–38.
3. Peterson, B. E. and Jordan, J. H. Integer Geometry: Some Examples and Constructions, *The Mathematical Gazette*, 1997, vol. 81, no. 490, pp. 18–28.
4. Walter, R. On a Minimax Problem for Ovals, *Minimax Theory and Its Applications*, 2017, vol. 2, no. 2, pp. 285–318.
5. Balestro, V., Martini, H., Nikonorov, Yu. G. and Nikonorova, Yu. V. Extremal Problems for Convex Curves with a Given Self Chebyshev Radius, *Results in Mathematics*, 2021, vol. 76, no. 2, 13 p. DOI: 10.1007/s00025-021-01394-6.
6. Nikitenko, E. V. and Nikonorov, Yu. G. The Extreme Polygons for the Self Chebyshev Radius of the Boundary, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 2023, vol. 60, no. 4, pp. 193–236. DOI: 10.1556/012.2023.04297.
7. Prasolov, V. V. *Zadachi po planimetrii* [Problems in Plane Geometry], 5th ed., rev. and compl., Moscow, The Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2006, 640 p. (in Russian). URL: <https://mccme.ru/free-books/prasolov/planim5.pdf>.
8. Rashid, M. A. and Ajibade, A. O. Two Conditions for a Quadrilateral to be Cyclic Expressed in Terms of the Lengths of Its Sides, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 2003, vol. 34, no. 5, pp. 739–742. DOI: 10.1080/0020739031000148831.
9. Josefsson, M. More Characterizations of Cyclic Quadrilaterals, *International Journal of Geometry*, 2019, vol. 8, no. 2, pp. 14–32.
10. Sadov, S. On a Necessary and Sufficient Cyclicity Condition for a Quadrilateral, Preprint, Keldysh Institute of Applied Mathematics, 2004, 28 p. ArXiv:0410234. DOI: 10.48550/arXiv.math/0410234. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0410234>.
11. Josefsson, M. Characterizations of Cyclic Quadrilaterals, *International Journal of Geometry*, 2019, vol. 8, no. 1, pp. 5–21.
12. Mannheim, A. Note de Géométrie à Propos d'un Théorème de M. Stewart, *The Messenger of Mathematics*, 1889, vol. 19, pp. 178–180. URL: gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN599484047_0019.

13. Mannheim, A. Note de Géométrie, *Journal de Mathématique Élémentaire*, 1895, pp. 140–143. URL: <https://archive.org/details/journaldemathma34unkngoog/page/n150/mode/2up>.
14. Méray, Ch. *Nouveaux Elements de Géométrie. 2e édition*, Dijon: Jobard. VII u. 450 S. 22, 1903. URL: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k889406j/>

Received March 25, 2025

YURIĬ G. NIKONOROV
Southern Mathematical Institute of VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Principal Investigator
E-mail: nikonorov2006@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-9671-2314>

DMITRIĬ N. OSKORBIN
Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutsky Per., Dolgoprudny 141701, Russia,
Associate Professor
E-mail: oskorbin.dn@phystech.edu
<https://orcid.org/0009-0002-6385-3214>

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 4, С. 103–108

ОДНО ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПТОЛЕМЕЯ

Никоноров Ю. Г.¹, Оскорбин Д. Н.²

¹ Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;

² Московский физико-технический институт,
Россия, 141701, Долгопрудный, Институтский переулок, 9

E-mail: nikonorov2006@mail.ru, oskorbin.dn@phystech.edu

Аннотация. В данной работе приведено простое доказательство одного результата из недавней работы Ю. Г. Никонорова и О. Ю. Никоноровой, первоначальное доказательство которого довольно громоздко и основано на исследовании полиномиальных идеалов и символьных вычислениях с использованием компьютера. Новое доказательство опирается на теорему Птолемея о вписанных четырехугольниках. В дополнение к этому рассмотрены другие свойства вписанных четырехугольников и смежные задачи.

Ключевые слова: выпуклый многоугольник, выпуклый четырехугольник, вписанный четырехугольник, теорема Птолемея, экстремальные задачи, целочисленный пятиугольник.

AMS Subject Classification: 52A10, 52A40, 52B60.

Образец цитирования: *Nikonorov Yu. G. and Oskorbin D. N. One Application of Ptolemy's Theorem // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 4.—С. 103–108 (in English).* DOI: 10.46698/o1944-0990-7792-e.

УДК 517.968.220

DOI 10.46698/q2158-4503-2268-b

К ТЕОРИИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ОСОБЫМИ ЛИНИЯМИ

Л. Н. Раджабова¹, Н. Раджабов¹

¹Таджикский национальный университет,
Таджикистан, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17
E-mail: lutfya62@mail.ru, nusrat38@mail.ru

Аннотация. В прямоугольнике $D = \{(x, y) : a < x < a_1, b < y < b_1\}$ с границей $\Gamma_1 = \{y = b, a < x < a_1\}$, $\Gamma_2 = \{x = a, b < y < b_1\}$ изучается переопределенная система интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями, которая состоит из двумерного интегрального уравнения и двух одномерных интегральных уравнений. Решение переопределенной системы интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями ищется в классе непрерывных функций в прямоугольнике D и обращающихся в нуль на Γ_1, Γ_2 . В случае, когда основным уравнением изучаемой переопределенной системы интегральных уравнений является первое уравнение системы, и коэффициенты двумерного интегрального уравнения связаны и не связаны между собой особым образом, получим условия совместности уравнений системы. В случае, когда коэффициенты первого уравнения переопределенной системы не связаны между собой, решение переопределенной системы интегральных уравнений ищется в виде обобщенных степенных рядов. В работе получены явные решения переопределенной системы уравнений, которые в зависимости от знака коэффициентов могут содержать произвольные постоянные. Определены условия совместности уравнений системы, изучены свойства решений, ставятся и решаются задачи типа Коши, где условия задаются на сингулярных многообразиях.

Ключевые слова: переопределенная система уравнений, интегральное уравнение типа Вольтерра, особые линии, произвольные постоянные.

AMS Subject Classification: 45D05.

Образец цитирования: Раджабова Л. Н., Раджабов Н. К теории переопределенных систем интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 4.—С. 109–123. DOI: 10.46698/q2158-4503-2268-b.

1. Введение

Отметим, что изучению интегральных уравнений и краевых задач для аналитических функций посвящены известные монографии Н. И. Мухелишвили [1], Ф. Д. Гахова [2], И. Н. Векуа [3]. Достойный вклад в развитие теории интегральных уравнений с непрерывными ядрами, со слабо-сингулярными ядрами, многомерных интегральных уравнений внес труд С. Г. Михлина [4]. Работы А. Джураева [5], Г. Джангибекова [6] и их учеников посвящены изучению обобщенных аналитических функций, также связанных с ними двумерных сингулярных интегральных уравнений. Исследованию характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши в исключительном случае, получению условия разрешимости и явной формулы представления решения посвящена

работа А. П. Солдатова [7]. Теория сингулярных интегральных уравнений с особенностями логарифмического или степенного типа, а также одновременно со слабыми и сильными особенностями в различных сочетаниях, была разработана Н. Б. Плещинским [8]. Основам вычисления определенных, сингулярных и гиперсингулярных одномерных и двумерных интегралов, а также численному решению уравнений с ними, построению и обоснованию вычислительных схем решений для слабо-сингулярных и сингулярных интегральных уравнений различных видов посвящены труды С. А. Довгого, И. К. Лифанова [9], Г. А. Расолько [10] и И. В. Байкова [11].

Отметим, что ранее в работах Н. Раджабова [12] были исследованы интегральные уравнения типа Вольтерра с особыми левыми и правыми граничными, а также внутренними сингулярными или сверх-сингулярными ядрами. Изучению переопределенных систем одномерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сингулярными или сверх-сингулярными точками в ядре посвящена монография [13]. В [14] исследованы двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра с особыми и сильно-особыми граничными линиями в прямоугольнике. Работы [15–17] посвящены изучению двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми и сильно-особыми граничными линиями по одной из переменных и слабо-особыми линиями по второй переменной на полосе. В данной статье исследуется переопределенная система интегральных уравнений, которая состоит из одного двумерного и двух одномерных интегральных уравнений с особыми линиями. Для этой системы уравнений получены явные решения, которые могут содержать произвольные постоянные, определены условия совместности уравнений системы, изучены свойства решений, а также выписываются решения соответствующих задач типа Коши.

2. Основной результат

Пусть дан прямоугольник $D = \{(x, y) : a < x < a_1, b < y < b_1\}$ с граничными линиями $\Gamma_1 = \{y = b, a < x < a_1\}$, $\Gamma_2 = \{x = a, b < y < b_1\}$. Рассмотрим в нем переопределенную систему интегральных уравнений с особыми линиями вида

$$\begin{cases} u(x, y) + \lambda \int_a^x \frac{u(t, y)}{t-a} dt - \mu \int_y^b \frac{u(x, s)}{b-s} ds + \delta \int_a^x \frac{dt}{t-a} \int_y^b \frac{u(t, s)}{b-s} ds = f(x, y), \\ u(x, y) + \nu \int_a^x \frac{u(t, y)}{t-a} dt = g_1(x, y), \\ u(x, y) - \chi \int_y^b \frac{u(t, s)}{b-s} ds = g_2(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где f, g_1, g_2 — заданные функции, $\lambda, \mu, \delta, \nu, \chi$ — заданные числа, u — искомая функция.

Решение переопределенной системы интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми ядрами (1) будем искать в классе функций $u \in C(\overline{D})$, обращающихся в нуль на Γ_1 и Γ_2 с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0, \quad x \rightarrow a,$$

$$u(x, y) = o[(y - b)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0, \quad y \rightarrow b.$$

Будем говорить, что в системе (1) основным уравнением является первое, если сначала находится его решение, а после подчиняется второму и третьему уравнению.

Аналогичным образом вводится понятие основного второго и третьего уравнений.

Отметим, что если в системе интегральных уравнений (1) основным уравнением является первое, то функция f обращается в нуль на Γ_1 и Γ_2 с асимптотическим поведением:

$$f(x, y) = o\left[(x - a)^{\delta_1}\right], \quad \delta_1 > |\lambda|, \text{ при } x \rightarrow a, \quad (2)$$

$$f(x, y) = o\left[(b - y)^{\gamma_1}\right], \quad \gamma_1 > \mu, \text{ при } y \rightarrow b. \quad (3)$$

Тогда согласно [14], явное решение первого уравнения системы (1) при $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$ представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) = & (b - y)^\mu \varphi(x) + (x - a)^\lambda \psi(y) + f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a}\right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t - a} dt \\ & + \mu \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s}\right)^\mu \frac{f(x, s)}{b - s} ds - \lambda\mu \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a}\right)^\lambda \frac{dt}{t - a} \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s}\right)^\mu \frac{f(t, s)}{b - s} ds, \end{aligned} \quad (4)$$

где φ, ψ — произвольные функции.

Подставляя решение вида (4) во второе и третье уравнения системы, определяем условия совместности уравнений системы, значения произвольных функций в решении вида (4) для различных значений коэффициентов переопределенной системы (1). Для данной системы в случае, когда коэффициенты первого уравнения связаны между собой, справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть в системе интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями (1) при соотношениях $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $\nu < 0$, $\chi > 0$, $|\nu| > |\lambda|$, $f, g_1, g_2 \in C(\overline{D})$, $f(a, b) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$f(x, y) = o\left[(x - a)^{\delta_1}\right], \quad \delta_1 > |\lambda|, \text{ при } x \rightarrow a, \quad (5)$$

$$f(x, y) = o\left[(b - y)^{\gamma_1}\right], \quad \gamma_1 > \mu, \text{ при } y \rightarrow b, \quad (6)$$

существуют пределы

$$(b - y)^{-\mu} g_1(x, y) |_{y=b} = g_1(x), \quad (7)$$

$$(x - a)^\lambda g_2(x, y) |_{x=a} = g_2(y), \quad (8)$$

причем $g_1(a) = 0$, $g_2(b) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$g_1(x) = o\left[(x - a)^{\delta_2}\right], \quad \delta_2 > |\nu|, \text{ при } x \rightarrow a, \quad (9)$$

$$g_2(y) = o\left[(b - y)^{\gamma_3}\right], \quad \gamma_3 > \chi, \text{ при } y \rightarrow b. \quad (10)$$

При этом функции f, g_1, g_2 связаны между собой условиями совместности

$$\begin{aligned} & \mu g_1(x, y) + (b - y) \frac{\partial}{\partial x} (g_1(x, y) - f(x, y)) + \left(\frac{\nu - \lambda}{\lambda}\right) (x - a)^{-\lambda} \\ & \times \left[\mu \psi(y) \frac{\partial \psi(y)}{\partial y} + (b - y)(\lambda - \nu) \lambda \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a}\right)^\lambda \frac{f(x, s)}{t - a} ds \right] = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
& \lambda g_2(x, y) + \left(\frac{\chi}{\mu} - 1\right) (b - y)^\mu \left[(\lambda - \nu)(x - a)^{-\nu} c_1 + (\lambda - \nu)g_1(x) \right. \\
& \quad \left. + \nu(1 - \lambda) \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a}\right)^\nu \frac{g_1(t)}{t - a} dt + (x - a) \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) \right] \\
& = (x - a) \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x, y) - g_2(x, y) + (\mu - \chi) \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s}\right)^\mu \frac{f(x, s)}{b - s} ds \right],
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\psi(y) = (b - y)^\chi c_2 + g_2(y) + \chi \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s}\right)^\chi \frac{g_2(s)}{b - s} ds.$$

Тогда система (1) всегда разрешима и решение выражается равенством

$$\begin{aligned}
u(x, y) & = (b - y)^\mu \left[(x - a)^{-\nu} c_1 + g_1(x) - \nu \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a}\right)^{|\nu|} \frac{g_1(t)}{t - a} dt \right] \\
& \quad + (x - a)^{|\lambda|} \left[(b - y)^\chi c_2 + g_2(y) + \chi \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s}\right)^\chi \frac{g_2(s)}{b - s} ds \right] \\
& \quad + f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a}\right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t - a} dt + \mu \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s}\right)^\mu \frac{f(x, s)}{b - s} ds \\
& \quad - \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a}\right)^\lambda \frac{dt}{t - a} \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s}\right)^\mu \frac{f(t, s)}{b - s} ds,
\end{aligned} \tag{13}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 любое решение системы (1) из класса $C(\overline{D})$ на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x - a)^{|\lambda|}], \text{ при } x \rightarrow a;$$

$$u(x, y) = o[(y - b)^{\nu_3}], \text{ где } \nu_3 = \min(\mu, \chi) \text{ при } y \rightarrow b.$$

Свойство решения. Умножая на $(b - y)^{(-\mu)}$ обе стороны полученного решения (13) системы (1), далее при $\mu < \chi, y = b$, получим

$$(b - y)^{-\mu} u(x, y)|_{y=b} = \left[(x - a)^{-\nu} c_1 + g_1(x) - \nu \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a}\right)^{|\nu|} \frac{g_1(t)}{t - a} dt \right].$$

Тогда

$$(x - a)^\nu (b - y)^{-\mu} u(x, y) \Big|_{y=b, x=a} = c_1.$$

Теперь, умножая обе стороны решения (13) на $(x - a)^\lambda$, при $|\nu| > |\lambda|, x = a$, имеем

$$(x - a)^\lambda u(x, y)|_{x=a} = (b - y)^\chi c_2 + g_2(y) + \chi \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s}\right)^\chi \frac{g_2(s)}{b - s} ds.$$

Тогда

$$(y - b)^{-\chi}(x - a)^\lambda u(x, y) \Big|_{\substack{x=a, \\ y=b}} = c_2.$$

Теорема 2. Пусть в системе (1) при соотношениях $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $\nu > 0$, $\chi < 0$, $f, g_1, g_2 \in C(\overline{D})$, $f(a, b) = 0$ с асимптотическим поведением (5), (6) существуют пределы (7), (8), где

$$g_1(x) = o[(x - a)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0, \quad x \rightarrow a; \tag{14}$$

$$g_2(y) = o[(y - b)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0, \quad y \rightarrow b, \tag{15}$$

а функции f, g_1, g_2 связаны между собой условиями совместности (11) и

$$\begin{aligned} \lambda g_2(x, y) + \left(\frac{\chi}{\mu} - 1\right) (b - y)^\mu \left[(\lambda - \nu)g_1(x) + (\nu - \lambda\nu) \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a}\right)^\nu \frac{g_1(t)}{t - a} dt + (x - a) \frac{\partial g_1(x)}{\partial x} \right] \\ = (x - a) \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x, y) - g_2(x, y) + (\mu - \chi) \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s}\right)^\mu \frac{f(x, s)}{b - s} ds \right]. \end{aligned}$$

Тогда система (1) всегда разрешима и ее единственное решение представимо в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y) = g_1(x, y) - \nu \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a}\right)^{|\nu|} \frac{g_1(t)}{t - a} dt + g_2(x, y) + \chi \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s}\right)^\chi \frac{g_2(s)}{b - s} ds \\ + f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a}\right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t - a} dt + \mu \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s}\right)^\mu \frac{f(x, s)}{b - s} ds \\ - \lambda\mu \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a}\right)^\lambda \frac{dt}{t - a} \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s}\right)^\mu \frac{f(t, s)}{b - s} ds. \end{aligned}$$

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 2 любое решение системы (1) из класса $C(\overline{D})$ на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon] \text{ при } \varepsilon > 0;$$

$$u(x, y) = o[(y - b)^\varepsilon] \text{ при } \varepsilon > 0.$$

Теорема 3. Пусть в системе (1) при соотношениях $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $\nu > 0$, $\chi > 0$, $f, g_1, g_2 \in C(\overline{D})$, $f(a, b) = 0$ с асимптотическим поведением (5), (6) существуют пределы (7), (8), где $g_1(a) = 0$, $g_2(b) = 0$ с асимптотическим поведением (14), (10). Функции f, g_1, g_2 связаны между собой условиями совместности (11) и

$$\begin{aligned} \lambda g_2(x, y) + \left(\frac{\chi}{\mu} - 1\right) (b - y)^\mu \left[(\lambda - \nu)g_1(x) + \nu(1 - \lambda) \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a}\right)^\nu \frac{g_1(t)}{t - a} dt + (x - a) \frac{\partial g_1(x)}{\partial x} \right] \\ = (x - a) \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x, y) - g_2(x, y) + (\mu - \chi) \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s}\right)^\mu \frac{f(x, s)}{b - s} ds \right]. \end{aligned}$$

Тогда переопределенная неоднородная система интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями (1) всегда разрешима, решение содержит одну произвольную постоянную и представимо в виде:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & (b - y)^\mu \left[g_1(x) - \nu \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^{|\nu|} \frac{g_1(t)}{t - a} dt \right] \\
 & + (x - a)^{|\lambda|} \left[(b - y)^\chi c_2 + g_2(y) + \chi \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\chi \frac{g_2(s)}{b - s} ds \right] \\
 & + f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t - a} dt + \mu \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b - s} ds \\
 & - \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \frac{dt}{t - a} \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b - s} ds.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Следствие 3. При выполнении условий теоремы 3 любое решение системы (1) из класса $C(\overline{D})$ на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon] \text{ при } \varepsilon > 0;$$

$$u(x, y) = o[(y - b)^{\gamma_4}], \text{ где } \gamma_4 = \min(\mu, \chi) \text{ при } y \rightarrow b.$$

Свойство решения. Умножая обе стороны решения (16) на $(x - a)^\lambda$, при $|\nu| > |\lambda|$, $x = a$, получим

$$(x - a)^\lambda u(x, y)|_{x=a} = (b - y)^\chi c_2 + g_2(y) + \chi \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\chi \frac{g_2(s)}{b - s} ds.$$

Тогда

$$(y - b)^{-\chi} (x - a)^\lambda u(x, y) \Big|_{\substack{x=a, \\ y=b}} = c_2.$$

Теорема 4. Пусть в системе (1) при соотношениях $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $\nu < 0$, $\chi < 0$, $|\nu| > |\lambda|$, $f, g_1, g_2 \in C(\overline{D})$, $f(a, b) = 0$ с асимптотическим поведением (5), (6) существуют пределы (7), (8), где $g_1(a) = 0$, $g_2(b) = 0$ с асимптотическим поведением (9), (15). Функции f, g_1, g_2 связаны между собой условиями совместности (11), (12), где

$$\psi(y) = g_2(y) + \chi \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\chi \frac{g_2(s)}{b - s} ds.$$

Тогда переопределенная система (1) всегда разрешима, решение содержит одну произ-

вольную постоянную и выражается равенством

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & (b - y)^\mu \left[(x - a)^{-\nu} c_1 + g_1(x) - \nu \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^{|\nu|} \frac{g_1(t)}{t - a} dt \right] \\
 & + (x - a)^{|\lambda|} \left[g_2(y) + \chi \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\chi \frac{g_2(s)}{b - s} ds \right] \\
 & + f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t - a} dt + \mu \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b - s} ds \\
 & - \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \frac{dt}{t - a} \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b - s} ds.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Следствие 4. При выполнении условий теоремы 4 любое решение системы (1) из класса $C(\overline{D})$ на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= o[(x - a)^{|\lambda|}], \text{ при } x \rightarrow a; \\
 u(x, y) &= o[(y - b)^\varepsilon], \varepsilon > 0 \text{ при } y \rightarrow b.
 \end{aligned}$$

Свойство решения. Умножая на $(y - b)^{-\mu}$ обе стороны полученного решения (17) системы (1), при выполнении условия $(b - y)^{-\mu} g_2(y)|_{y=b} = 0$, при $x = a$, получим

$$(b - y)^{-\mu} u(x, y)|_{y=b} = (x - a)^{-\nu} c_1 + g_1(x) - \nu \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^{|\nu|} \frac{g_1(t)}{t - a} dt.$$

Тогда

$$(x - a)^\nu (b - y)^{-\mu} u(x, y) \Big|_{\substack{y=b, \\ x=a}} = c_1.$$

Теорема 5. Пусть в системе (1) при соотношениях $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $f, g_1, g_2 \in C(\overline{D})$, $f(a, b) = 0$, $g_1(a, b) = 0$, $g_2(a, b) = 0$, соответственно, с асимптотическим поведением:

$$f(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow a; \tag{18}$$

$$f(x, y) = o[(y - b)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } y \rightarrow b, \tag{19}$$

$$g_1(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow a; \tag{20}$$

$$g_1(x, y) = o[(y - b)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } y \rightarrow b, \tag{21}$$

$$g_2(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow a; \tag{22}$$

$$g_2(x, y) = o[(y - b)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } y \rightarrow b. \tag{23}$$

Функции f , g_1 , g_2 связаны между собой условиями совместности:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) - (\nu - \lambda) \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t - a} dt + \mu \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b - s} ds \\
 + \mu(\nu - \lambda) \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \frac{dt}{t - a} \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b - s} ds = g_1(x, y),
 \end{aligned}$$

$$f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t-a} dt + (\mu - \chi) \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds$$

$$+ \lambda(\chi - \mu) \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b-s} ds = g_2(x, y).$$

Тогда переопределенная система (1) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$u(x, y) = f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t-a} dt + \mu \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds$$

$$- \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b-s} ds.$$

Следствие 5. При выполнении условий теоремы 5 любое решение системы (1) из класса $C(\overline{D})$ на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o\left[(x-a)^\varepsilon\right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow a;$$

$$u(x, y) = o\left[(y-b)^\varepsilon\right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } y \rightarrow b.$$

Теорема 6. Пусть в системе (1) при соотношениях $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\nu < 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $f, g_1, g_2 \in C(\overline{D})$, $f(a, b) = 0$ с асимптотическим поведением (6), (14), существует предел (7), где $g_1(a) = 0$ и $g_2(a, b) = 0$ удовлетворяют (9), (22), (23), соответственно. Функции f, g_1, g_2 связаны между собой условиями совместности:

$$\mu g_1(x, y) + (b-y) \frac{\partial}{\partial x} \left[g_1(x, y) - (f(x, y)) + (\lambda - \nu)(b-y) \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t-a} dt \right] = 0, \quad (24)$$

$$g_2(x, y) = \left(1 - \frac{\chi}{\mu} \right) (b-y)^\mu \left[(x-a)^{-\nu} c_1 + g_1(x) + \nu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\nu \frac{g_1(t, y)}{t-a} dt \right]$$

$$+ f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t-a} dt + (\mu - \chi) \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b-s} ds$$

$$- \lambda(\mu - \chi) \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds.$$

Тогда неоднородная система (1) всегда разрешима, решение содержит одну произволь-

ную постоянную и выражается равенством

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = (b - y)^\mu & \left[(x - a)^{-\nu} c_1 + g_1(x) - \nu \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^{|\nu|} \frac{g_1(t)}{t - a} dt \right] \\
 + f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t - a} dt + \mu \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b - s} ds \\
 - \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \frac{dt}{t - a} \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b - s} ds.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Следствие 6. При выполнении условий теоремы 6 любое решение системы (1) из класса $C(\overline{D})$ на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow a;$$

$$u(x, y) = o[(y - b)^\mu] \text{ при } y \rightarrow b.$$

Свойство решения. Умножая на $(y - b)^{-\mu}$ обе стороны полученного решения (25) системы (1), при выполнении условий теоремы 6, при $y = b$, получим

$$(b - y)^{-\mu} u(x, y)|_{y=b} = \left[(x - a)^{-\nu} c_1 + g_1(x) - \nu \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^{|\nu|} \frac{g_1(t)}{t - a} dt \right].$$

Следовательно, $(x - a)^\nu (b - y)^{-\mu} u(x, y)|_{y=b, x=a} = c_1$.

Теорема 7. Пусть в системе (1) при соотношениях $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $f, g_1, g_2 \in C(\overline{D})$, $f(a, b) = 0$ с асимптотическим поведением (18), (6), существует предел (7), где $g_1(a) = 0$ и $g_2(a, b) = 0$ удовлетворяют формулам $g_1(x) = o[(x - a)^\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, при $x \rightarrow a$, и (22), (23), соответственно. Функции f, g_1, g_2 связаны между собой условиями совместности (24) и

$$\begin{aligned}
 g_2(x, y) = \left(1 - \frac{\chi}{\mu} \right) & \left[g_1(x, y) - \nu \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\nu \frac{g_1(t, y)}{t - a} dt \right] \\
 + f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t - a} dt + (\mu - \chi) \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b - s} ds \\
 - \lambda(\mu - \chi) \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^\lambda \frac{dt}{t - a} \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b - s} ds.
 \end{aligned}$$

Тогда неоднородная система (1) всегда разрешима и ее единственное решение выража-

ется равенством

$$\begin{aligned} u(x, y) = & g_1(x, y) - \nu \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{|\nu|} \frac{g_1(t, y)}{t-a} dt \\ & + f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t-a} dt + \mu \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds \\ & - \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b-s} ds. \end{aligned}$$

Следствие 7. При выполнении условий теоремы 7, любое решение системы (1) из класса $C(\overline{D})$ на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x-a)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow a;$$

$$u(x, y) = o[(y-b)^\mu] \text{ при } y \rightarrow b.$$

Теорема 8. Пусть в системе (1) при соотношениях $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\nu < 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $\chi > 0$, $|\nu| > |\lambda|$, $f, g_1, g_2 \in C(\overline{D})$, $f(a, b) = 0$ с асимптотическим поведением (5), (19), существует предел $(x-a)^\lambda g_1(x, y)|_{x=a} = g_1(y)$, где $g_1(b) = 0$ и $g_2(a, b) = 0$ удовлетворяют формулам $g_1(y) = o[(y-b)^\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, при $y \rightarrow b$, и (22), (23), соответственно. Функции f , g_1 , g_2 связаны между собой условиями совместности:

$$\begin{aligned} g_1(x, y) = & \frac{1}{\lambda} \left[\nu f(x, y) - (x-a) \frac{\partial}{\partial x} (g_1(x, y) - f(x, y)) \right] \\ & + \mu(x-a) \frac{\partial}{\partial x} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds + \nu \mu \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds, \\ g_2(x, y) = & g_1(x, y) - \chi \int_y^b \frac{g_1(x, s)}{b-s} ds + f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t-a} dt \\ & + (\mu - \chi) \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds + \lambda(\chi - \mu) \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds. \end{aligned}$$

Тогда неоднородная система (1) всегда разрешима и ее единственное решение выражается равенством

$$\begin{aligned} u(x, y) = & g_1(x, y) + f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t-a} dt + \mu \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds \\ & - \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b-s} ds. \end{aligned}$$

Следствие 8. При выполнении условий теоремы 7 любое решение системы (1) из класса $C(\overline{D})$ на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x-a)^{|\lambda|}] \text{ при } x \rightarrow a;$$

$u(x, y) = o[(y - b)^\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ при $y \rightarrow b$.

В случае, когда коэффициенты первого уравнения системы (1) не связаны между собой, т. е. $\delta_1 = \delta + \lambda\mu \neq 0$, решение переопределенной системы (1) будем искать в классе непрерывных функций, представимых в виде обобщенного степенного ряда:

$$u(x, y) = (x - a)^{-\lambda}(y - b)^\mu \sum_{n=0}^{\infty} (b - y)^{n+\gamma} u_n(x). \quad (26)$$

Справедливо утверждение.

Теорема 9. Пусть в системе (1) при соотношениях $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta_1 = \delta + \lambda\mu \neq 0$, $\delta_1 < 0$, функции f , g_1 , g_2 представимы в виде:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - a)^{-\lambda}(y - b)^\mu \sum_{n=0}^{\infty} (b - y)^{n+\gamma} f_n(x), \\ g_1(x, y) &= (x - a)^{-\lambda}(y - b)^\mu \sum_{n=0}^{\infty} (b - y)^{n+\gamma} g_{1n}(x), \\ g_2(x, y) &= (x - a)^{-\lambda}(y - b)^\mu \sum_{n=0}^{\infty} (b - y)^{n+\gamma} g_{2n}(x), \end{aligned}$$

где $f_n, g_{1n}, g_{2n} \in C(\Gamma_1)$, в точке $x = a$ обращаются в нуль с асимптотическим поведением:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= o\left[(x - a)^{\gamma_2^1}\right], \quad \gamma_2^1 > \frac{|\delta_1|}{n + \gamma}, \quad x \rightarrow a, \\ g_{1n}(x) &= o[(x - a)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0, \quad x \rightarrow a, \\ g_{2n}(x) &= o[(x - a)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0, \quad x \rightarrow a. \end{aligned}$$

Функции f_n, g_{1n} и g_{2n} связаны между собой условиями совместности:

$$\begin{aligned} g_{1n}(x) &= \left(1 + \frac{\mu}{n + \gamma}\right) (x - a) f'_n(x) - (x - a) g'_{1n}(x) + \left(1 - \lambda + \nu - \frac{\delta_1}{n + \gamma}\right) \left(1 + \frac{\mu}{n + \gamma}\right) f_n(x) \\ &\quad - \left(1 + \frac{\mu}{n + \gamma}\right) \left(\lambda - \nu + \frac{\delta_1}{n + \gamma}\right) \left(1 - \frac{\delta_1}{n + \gamma}\right) \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a}\right)^{\frac{\delta_1}{n + \gamma}} \frac{f_n(t)}{t - a} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{2n}(x) &= (n + \gamma + \mu - \chi) \left[\left(1 - \frac{\nu(n + \gamma)}{\lambda(n + \gamma) + \delta_1} \frac{g_{1n}(x)}{n + \gamma + \mu} + \frac{\nu}{\lambda(n + \gamma) + \delta_1} f_n(x)\right) \right. \\ &\quad \left. + \nu \left(\frac{\nu}{\lambda(n + \gamma) + \delta_1} - \frac{2}{n + \gamma}\right) \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a}\right)^{\frac{\delta_1}{n + \gamma}} \frac{f_n(t)}{t - a} dt \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда неоднородная система (1) в классе функций (26), имеет единственное решение, представимое в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (x - a)^{-\lambda}(y - b)^\mu \sum_{n=0}^{\infty} (b - y)^{n+\gamma} \left[(x - a)^{-\frac{\delta_1}{n + \gamma}} c_n - \left(1 + \frac{\mu}{n + \gamma}\right) f_n(x) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{\mu}{n + \gamma}\right) \left(\frac{\delta_1 + \lambda(n + \gamma)}{n + \gamma}\right) \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a}\right)^{\frac{\delta_1}{n + \gamma}} \frac{f_n(t)}{t - a} dt \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Причем, если существует предел $(x - a)^{\frac{\delta_1}{n+\gamma}} g_{2n}(x)|_{x=a} = c_n^1$, тогда c_n определяется из равенства $c_n = \frac{\delta_1 + (n+\gamma)(\lambda-\nu)}{\lambda(n+\gamma) + \delta_1} c_n^1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а при существовании предела $(x - a)^{\frac{\delta_1}{n+\gamma}} g_{2n}(x) = c_n^2$, c_n определяется из равенства $c_n = \frac{\mu+n+\gamma}{\mu+n+\gamma-\chi} c_n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Следствие 9. При выполнении условий теоремы 9 любое решение системы (1) из класса $C(\overline{D})$ на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x - a)^{|\lambda|}] \text{ при } x \rightarrow a;$$

$$u(x, y) = o[(y - b)^\mu] \text{ при } y \rightarrow b.$$

Подобные утверждения получены и для других знаков коэффициентов системы интегральных уравнений (1), когда коэффициенты первого уравнения системы не связаны между собой. Явные представления многообразия решений и свойства системы интегральных уравнений (1) дают возможность для постановки и решения задач типа Коши, когда условия задаются на сингулярных многообразиях.

Задача K_1 . Требуется найти решение системы интегральных уравнений (1) из класса $C(\overline{D})$ при $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\nu < 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $\chi > 0$, $|\nu| > |\lambda|$, по граничным условиям:

$$(x - a)^\nu (y - b)^{-\mu} u(x, y) \Big|_{\substack{y=a \\ x=a}} = A_1;$$

$$(y - b)^{-\chi} (x - a)^\lambda u(x, y) \Big|_{\substack{y=a \\ x=a}} = B_1.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ K_1 . Пусть выполнены условия теоремы 1. Используя интегральное представление (13) и свойства решения, получим $c_1 = A_1$, $c_2 = B_1$.

Подставляя значения c_1, c_2 в (13), имеем решение задачи K_1 . Следовательно, доказана следующая

Теорема 10. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда задача K_1 имеет единственное решение, представимое в виде (13), где $c_1 = A_1$, $c_2 = B_1$.

Задача K_2 . Требуется найти решение системы (1) из класса $C(\overline{D})$ при $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $\chi > 0$, по граничному условию $(y - b)^{-\chi} (x - a)^\lambda u(x, y) \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} = B_2$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ K_2 . Пусть выполнены условия теоремы 3. Используя интегральное представление (16) и свойства решения, имеем $c_2 = B_2$.

Подставляя в (16) данное значение c_2 , получим решение задачи K_2 . Следовательно, доказана следующая теорема.

Теорема 11. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда задача K_2 имеет единственное решение, представимое в виде (16), где $c_2 = B_1$.

Задача K_3 . Требуется найти решение системы (1) из класса $C(\overline{D})$ при $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\nu < 0$, $\chi < 0$, $|\nu| > |\lambda|$, $\delta = -\lambda\mu$, по граничному условию $(x - a)^\nu (b - y)^{-\mu} u(x, y) \Big|_{\substack{y=a \\ x=a}} = A_2$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ K_3 . При выполнении условий теоремы 4 и условия $(b - y)^{-\mu} g_2(y) \Big|_{y=a} = 0$, используя (17) и свойства решения, имеем $c_1 = A_2$.

Подставляя в (17) данное значение c_1 , получим решение задачи K_3 . Следовательно, верно следующее утверждение.

Теорема 12. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда задача K_3 имеет единственное решение, представимое в виде (17), где $c_1 = A_2$.

Задача K_4 . Требуется найти решение системы (1) из класса $C(\overline{D})$ при $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\nu < 0$, $\delta = -\lambda\mu$, по граничному условию $(x - a)^\nu (b - y)^{-\mu} u(x, y) \Big|_{\substack{y=b \\ x=a}} = A_3$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ K_4 . Используя интегральное представление (25) и свойства решения при выполнении условий теоремы 6, имеем $c_1 = A_3$.

Подставляя в интегральное представление (25) это значение c_1 , получим решение задачи K_4 . Следовательно, доказана следующая теорема.

Теорема 13. Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда задача K_4 имеет единственное решение, представимое в виде (25), где $c_1 = A_3$.

Литература

1. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 3.—М.: Наука, 1968.—512 с.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.—640 с.
3. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—672 с.
4. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1962.—254 с.
5. Джураев А. Д. Метод сингулярных интегральных уравнений.—М.: Наука, 1987.—415 с.
6. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах // Матем. заметки.—1989.—Т. 46, № 46.—С. 91–93.
7. Солдатов А. П., Урбанович Т. М. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае // Науч. ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика.—2011.—№ 17 (112), вып. 24.—С. 165–171.
8. Плещинский Н. Сингулярные интегральные уравнения со сложной особенностью в ядре.—Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2018.—160 с.
9. Довгий С. А., Лифанов И. К. Методы решения интегральных уравнения.—Киев: Наукова думка, 2002.—343 с.
10. Расолько Г. А. Численное решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши методом ортогональных многочленов.—Минск: Изд-во БГУ, 2007.—293 с.
11. Байков И. В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений.—Пенза: Изд-во ПГУ, 2004.—297 с.
12. Раджабов Н. Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх- сингулярными ядрами и их приложения.—Душанбе, 2007.—221 с.
13. Раджабова Л. Н., Раджабов Н. Переопределенная линейная система интегральных уравнений и сингулярные, сверх- сингулярные интегральные уравнения типа Вольтерра третьего рода с логарифмическими и сверх- сингулярными ядрами и их приложения.—Душанбе: Изд-во ТНУ, 2021.—317 с.
14. Раджабов Н., Раджабова Л. Н. Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверх- сингулярными ядрами и их приложения.—Germany: LAV LAMBERT Academic Publ., 2012.—502 с.
15. Раджабова Л. Н., Хушвахтов М. Б. К теории особых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой // Докл. АН Республики Таджикистан.—2018.—Т. 61, № 4.—С. 331–337.
16. Rajabova L. N., Khushvakhtov M. B. To the theory of non-model two-dimensional integral equations of Volterra type with a strongly singular and weakly singular line on a strip // Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series.—2019.—Vol. 129, № 4.—P. 67–72.
17. Хушвахтов М. Б. О некоторых случаях немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе // Междунар. науч. журн. «Молодой ученый».—2019.—Т. 287, № 49.—С. 1–4.

Статья поступила 19 октября 2024 г.

РАДЖАБОВА ЛУТФИЯ НУСРАТОВНА
Таджикский национальный университет,
профессор кафедры математического анализа и теории функций
ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17
E-mail: lutfya62@mail.ru
<https://orcid.org/0009-0005-8238-9818>

РАДЖАБОВ НУСРАТ
 Таджикский национальный университет,
 профессор кафедры математического анализа и теории функций
 ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17
 E-mail: nusrat38@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0001-8974-6500>

Vladikavkaz Mathematical Journal
 2025, Volume 27, Issue 4, P. 109–123

ON THE THEORY OF OVERDETERMINED SYSTEMS OF VOLTERRA-TYPE INTEGRAL EQUATIONS WITH SPECIAL LINES

Rajabova, L. N.¹ and Radjabov, N.¹

¹ Tajik National University,
 17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Tajikistan
 E-mail: nusrat38@mail.ru, lutfya62@mail.ru

Abstract. In the rectangle $D = \{(x, y) : a < x < a_1, b < y < b_1\}$ with boundary lines $\Gamma_1 = \{y = b, a < x < a_1\}$, $\Gamma_2 = \{x = a, b < y < b_1\}$ we study a overdetermined system of the Volterra-type integral equations with special lines, which consists of a two-dimensional integral equation and two one-dimensional integral equations. The solution of the overdetermined system of the Volterra-type integral equations with special lines is sought in the class of continuous functions in the rectangle D and vanishing on the lines Γ_1 , Γ_2 . In the case when the main equation of the studied overdetermined system of integral equations is the first equation of the system and the coefficients of the two-dimensional integral equation are related and not related to each other in a special way, we obtain the conditions of jointness of the equations of the system. In the case when the coefficients of the first equation of the overdetermined system are not related, the solution of the overdetermined system of integral equations is sought in the form of generalized power series. We obtain explicit solutions of the overdetermined system of equations, which, depending on the sign of the coefficients, may contain arbitrary constants, determine the conditions of coexistence of the equations of the system, study the properties of the solutions, set and solve Cauchy-type problems, where the conditions are set on singular manifolds.

Keywords: overdetermined system of equations, Volterra type integral equation, special lines, arbitrary constants.

AMS Subject Classification: 45D05.

For citation: Rajabova, L. N. and Radjabov, N. On the Theory of Overdetermined Systems of Volterra-Type Integral Equations with Special Lines, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 109–123 (in Russian). DOI: 10.46698/q2158-4503-2268-b.

References

1. Muskhelishvili, N. I. *Singular Integral Equations*, Publ. 3, Moscow, Nauka, 1968.
2. Gakhov, F. D. *Boundary Value Problems*, Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).
3. Vekua, I. N. *Generalized Analytical Functions*, Moscow, Fizmatgiz, 1959 (in Russian).
4. Mikhlin, C. G. *Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*, New York, Pergamon Press, 1965.
5. Dzhuraev, A. D. *Methods of Singular Integral Equations*, New York, J. Wiley, 1992.
6. Dzhangibekov, G. On Some Two-Dimensional Singular Integral Operators, *Mathematical Notes*, 1991, vol. 49, no. 4, pp. 434–436. DOI: 10.1007/BF01158226.
7. Soldatov, A. P. and Urbanovich, T. M. A Characteristic Singular Integral Equation with a Cauchy Kernel in the Exceptional Case, *Scientific Bulletin of the Belarusian State University. Ser. Mathematics. Physics*, 2011, vol. 17 (112), no. 24, pp. 165–171 (in Russian).
8. Pleshchinsky, N. *Singular Integral Equations with a Complex Singularity in the Core*, Kazan, 2018, 160 p. (in Russian).

9. Dovgiy, C. A. and Lifanov, I. K. *Methods for Solving Integral Equations*, Kiev, Publishing House “Naukova Dumka”, 2002, 343 p. (in Russian).
10. Rasolko, G. A. *Numerical Solution of Some Singular Integral Equations with Cauchy Kernel by Orthogonal Polynomial Method*, Minsk, BSU, 2007, 293 p. (in Russian).
11. Boykov, I. V. *Approximate Methods for Solving Singular Integral Equations*, Penza, Publishing House of PSU, 2004, 297 p. (in Russian).
12. Rajabov, N. *Integral Equations of Volterra types with Fixed Boundary and Internal Singular and Super-Singular Kernels and Their Applications*, Dushanbe, 2007, 221 p. (in Russian).
13. Rajabova, L. N. and Rajabov, N. *Redefined Linear System of Integral Equations and Singular, Super-Singular Volterra Type Integral Equations of the Third Kind with Logarithmic and Super-Singular Kernels and Their Applications*, Dushanbe, Tajik National University, 2021, 320 p. (in Russian).
14. Rajabov, N. and Rajabova, L. N. *Introduction to the Theory of Multidimensional Integral Equations of the Type Volterra with Fixed Singular and Super-Singular Kernels and Their Application*, Lambert Academic Publ., 2011, 502 p. (in Russian).
15. Radjabova, L. N. and Khushvakhtov, M. B. On the Theory of Special Two-Dimensional Integral Equations of the Type Volterra with a Special and Weakly-Special Line on the Strip in the Case when the Parameters of the Equation are not Related, *Reports of the Academy of Sciences of Tajikistan*, 2018, vol. 61, no. 4, pp. 331–337 (in Russian).
16. Rajabova, L. N. and Khushvakhtov, M. B. To the Theory of Non-Model Two-Dimensional Integral Equations of Volterra Type with a Strongly Singular and Weakly Singular Line on a Strip, *Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University, Mathematics. Computer Science. Mechanics Series*, 2019, vol. 129, no. 4, pp. 67–72.
17. Khushvakhtov, M. B. On Some Cases of Non-Model Two-Dimensional Volterra-Type Integral Equations with a Strongly-Singular and Weakly-Singular Line on the Strip, *International Scientific Journal “Young Scientist”*, 2019, vol. 287, no. 49, pp. 1–4 (in Russian).

Received October, 19, 2024

LUTFYA N. RAJABOVA

Tajik National University,

17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Tajikistan,

Professor of the Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions,

E-mail: lutfya62@mail.ru

<https://orcid.org/0009-0005-8238-9818>

NUSRAT RAJABOV

Tajik National University,

17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Tajikistan,

Professor of the Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions,

E-mail: nusrat38@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0001-8974-6500>

УДК 517.986.7+517.988.8+517.926.4
DOI 10.46698/a3908-1212-5385-q

CHERNOFF APPROXIMATIONS OF THE SOLUTION
OF LINEAR ODE WITH VARIABLE COEFFICIENTS#

I. D. Remizov^{1,2}

¹ Laboratory of Topological Methods in Dynamics, NRU HSE,
25/12, Room 224, Bol. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia;

² Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences,
19, Build. 1, Bolshoy Karetny Per., Moscow 127051, Russia

E-mail: ivremizov@yandex.ru

Abstract. The Chernoff approximation method is a powerful and flexible tool of functional analysis, which allows in many cases to express $\exp(tL)$ in terms of variable coefficients of a linear differential operator L . In this paper, we prove a theorem that allows us to apply this method to find the resolvent of L . Our theorem states that the Laplace transforms of Chernoff approximations of a C_0 -semigroup converge to the resolvent of the generator of this semigroup. We demonstrate the proposed method on a second-order differential operator with variable coefficients. As a consequence, we obtain a new representation of the solution of a nonhomogeneous linear ordinary differential equation of the second order in terms of functions that are coefficients of this equation, playing the role of parameters of the problem. For the Chernoff function, based on the shift operator, we give an estimate for the rate of convergence of approximations to the solution.

Keywords: operator semigroups, resolvent operator, linear ODE with variable coefficients, representation of the solution, Chernoff approximations.

AMS Subject Classification: 47A10, 47D06, 34A05.

For citation: Remizov, I. D. Chernoff Approximations of the Solution of Linear ODE with Variable Coefficients, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 124–135. DOI: 10.46698/a3908-1212-5385-q.

1. Introduction

The straightforward way to find the resolvent $(\lambda I - L)^{-1}$ of the linear operator $(L, D(L))$ in the Banach space \mathcal{F} is to study (for given $\lambda \in \mathbb{C}$) if the equation $\lambda f - Lf = g$ has for each $g \in \mathcal{F}$ a unique solution $f \in D(L)$. If we know that $(L, D(L))$ is closed then this is enough, but if not then we must also check that f depends on g continuously. In case of success we have $f = (\lambda I - L)^{-1}g$. For example, if \mathcal{F} is one of the subsets of space of all functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, and $Lf = af'' + bf' + cf$ is a differential operator defined by constant coefficients $a, b, c \in \mathbb{C}$, then this task is not difficult. Indeed $\lambda f - Lf = g$ is a second order differential equation $\lambda f(x) - af''(x) - bf'(x) - cf(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, with only one variable coefficient g , and there are standard formulas in ODE books to solve this equation using the variation of parameters method. But if a, b, c are not constants, but functions that depend on x then the

#The work (except theorem 5) was supported by the Russian Science Foundation (project 23-71-30008). Theorem 5 was obtained in IITP (Dobrushin's Math. Lab.).

situation becomes much worse because there are no standard formulas for solution of equation $\lambda f(x) - a(x)f''(x) - b(x)f'(x) - c(x)f(x) = g(x), x \in \mathbb{R}$.

However, if $(L, D(L))$ holds one additional property, then we can use a non-straightforward method of finding the resolvent, this method is the main result of the paper. The property is that $(L, D(L))$ is the generator of a C_0 -semigroup, which informally means that exponent e^{tL} exists as a linear bounded operator, and depends on $t \in [0, +\infty)$ continuously in some sense. If $(L, D(L))$ is a linear bounded operator with $D(L) = \mathcal{F}$ then this condition holds automatically, but if $(L, D(L))$ is not bounded then there is a beautiful theory around it, see e.g. [1–5]. In most interesting cases (e.g. if L is a differential operator with variable coefficients) it is difficult to calculate e^{tL} directly because power series $e^{tL} = \sum_{n=0}^{\infty} (tL)^n/n!$ is useless in case of unbounded operator L . Yet it is possible to find e^{tL} approximately using the Chernoff theorem [6], this theorem will be discussed below. After that, having e^{tL} we calculate the resolvent via well known [3] formula $(\lambda I - L)^{-1}f = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{tL} f dt$. The method may look complicated because of the many steps it has (find Chernoff function for L , find e^{tL} via Chernoff approximations, find $(\lambda I - L)^{-1}$ via e^{tL}), however all these steps are supported by known methods, and so our proposed method may still be much simpler than considering the equation $\lambda f - Lf = g$.

Brief history and overview of the results obtained up to 2017 in constructing Chernoff approximations of e^{tL} for several classes of operators L can be found in [7]. Several papers on the topic showing the diversity of cases studied are [8–13], see also [14–16]. Speed of convergence of Chernoff approximations were studied in [17–23], see also references therein. See also paper [24] which numerically investigates the efficiency of the Monte Carlo method based on the application of the Chernoff theorem, and paper [25] that mathematically substantiate such an approach to the Chernoff approximations.

Summing up, we can say that the method of Chernoff approximation is an extremely effective tool for expressing e^{tL} in terms of variable coefficients of operator L . The present paper shows that this method can be also be used for expressing $(\lambda I - L)^{-1}$ in terms of variable coefficients of operator L , and for finding the solution of the corresponding differential equation $\lambda f - Lf = g$. As an example we consider second order linear ODE with variable coefficients.

Limits of multiple integral as multiplicity tends to infinity (such expressions are called Feynman formulas [8]) are one of the ways (which actually was used originally by Richard Feynman [26, 27]) to define Feynman path integral [28, 29]. So in Theorem 5 a solution of an ODE is in the first time in history of science represented via Feynman formula, which can also be interpreted as Feynman integral if one wishes to do. Such theoretical step is novel and may lead to some unexpected applications in the future.

2. Preliminaries: Operator Semigroups and their Chernoff Approximations

Let us recall some relevant definitions and facts of C_0 -semigroup theory following [3].

DEFINITION 1. Let \mathcal{F} be a Banach space over the field \mathbb{R} or \mathbb{C} . Let $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ be the set of all bounded linear operators in \mathcal{F} . Suppose we have a mapping $V: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$, i. e. $V(t)$ is a bounded linear operator $V(t): \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ for each $t \geq 0$. The mapping V , or equivalently the family $(V(t))_{t \geq 0}$, is called a *strongly continuous one-parameter semigroup of linear bounded operators* (or just a *C_0 -semigroup*) iff it satisfies the following three conditions:

- 1) $V(0)$ is the identity operator I , i. e. $V(0)\varphi = \varphi$ for each $\varphi \in \mathcal{F}$;
- 2) V maps the addition of numbers in $[0, +\infty)$ into the composition of operators in $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, i. e. for all $t \geq 0$ and all $s \geq 0$ we have $V(t + s) = V(t) \circ V(s)$, where for each $\varphi \in \mathcal{F}$ the notation $(A \circ B)(\varphi) = A(B(\varphi)) = AB\varphi$ is used;

3) V is continuous with respect to the strong operator topology in $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, i. e. for all $\varphi \in \mathcal{F}$ vector $V(t)\varphi$ depends on t continuously, i. e. the function $[0, +\infty) \ni t \mapsto V(t)\varphi \in \mathcal{F}$ is continuous.

REMARK 1. The definition of a C_0 -group $(V(t))_{t \in \mathbb{R}}$ is obtained by substituting $[0, +\infty)$ with \mathbb{R} in the definition above.

DEFINITION 2. Let $(V(t))_{t \geq 0}$ be a C_0 -semigroup in Banach space \mathcal{F} . Its *infinitesimal generator* (or just *generator*) is defined as the operator $L: D(L) \rightarrow \mathcal{F}$ with the domain

$$D(L) = \left\{ \varphi \in \mathcal{F} : \text{there exists a limit } \lim_{t \rightarrow +0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t} \right\} \subset \mathcal{F},$$

and

$$L\varphi = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t}.$$

REMARK 2. It is known [3] that for each C_0 -semigroup $(V(t))_{t \geq 0}$ in Banach space \mathcal{F} , the set $D(L)$ is a dense linear subspace of \mathcal{F} . Moreover, $(L, D(L))$ is a closed linear operator that uniquely defines the semigroup $(V(t))_{t \geq 0}$. Also for each C_0 -semigroup $(V(t))_{t \geq 0}$ in Banach space there exist constants $M \geq 1$ and $\omega \in \mathbb{R}$ such that $\|V(t)\| \leq Me^{\omega t}$ for all $t \geq 0$.

REMARK 3. Very often the notation $V(t) = e^{tL}$ is used. This is a good notation for several reasons. First, properties $e^{0 \cdot L} = I$ and $e^{(t+s)L} = e^{tL}e^{sL}$ are consistent with the case when L is a number or a matrix. Second, if L is a bounded linear operator then the exponent can be defined via the standard power series $e^{tL} = \sum_{n=0}^{\infty} (tL)^n/n!$ that converges in the operator norm. Finally, in general case we have $e^{tL}f = (I + tL)f + o(t)$ for all $f \in D(L)$ which again retains properties of the exponent in number and matrix case.

Now we are ready to state the Chernoff theorem. From several options (see [3, 5, 6, 29]), we choose the one given in [5] (in equivalent formulation):

Theorem 1 (P. R. Chernoff (1968), cf. [3, 5, 6, 29]). *Suppose that the following three conditions are met:*

1. C_0 -semigroup $(e^{tL})_{t \geq 0}$ with generator $(L, D(L))$ in Banach space \mathcal{F} is given, such that for some $w \geq 0$ the inequality $\|e^{tL}\| \leq e^{wt}$ holds for all $t \geq 0$.

2. There exists a strongly continuous mapping $S: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$ such that $S(0) = I$ and the inequality $\|S(t)\| \leq e^{wt}$ holds for all $t \geq 0$.

3. There exists a dense linear subspace $D \subset \mathcal{F}$ such that for all $f \in D$ there exists a limit $S'(0)f := \lim_{t \rightarrow +0} (S(t)f - f)/t$. Moreover, $S'(0)$ on D has a closure that coincides with the generator $(L, D(L))$.

Then the following statement holds:

(C) for every $f \in \mathcal{F}$, as $n \rightarrow \infty$ we have $S(t/n)^n f \rightarrow e^{tL}f$ locally uniformly with respect to $t \geq 0$, i. e. for each $T > 0$ and each $f \in \mathcal{F}$ we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|S(t/n)^n f - e^{tL}f\| = 0.$$

Above $S(t/n)^n = \underbrace{S(t/n) \circ \dots \circ S(t/n)}_n$ is the composition of n copies of linear bounded operator $S(t/n)$ defined everywhere on \mathcal{F} .

DEFINITION 3. Let C_0 -semigroup $(e^{tL})_{t \geq 0}$ with generator L in Banach space \mathcal{F} be given. The mapping $S: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$ is called a *Chernoff function for operator L* iff it satisfies

the condition (C) of Chernoff theorem 1. In this case expressions $S(t/n)^n$ are called *Chernoff approximations to the semigroup e^{tL}* .

There is also a variant of the Chernoff theorem that allows us to prove the existence of the semigroup.

Theorem 2 (Chernoff-type theorem, Corollary 5.3 from Theorem 5.2 in [3]). *Let \mathcal{F} be a Banach space, and $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ be the space of all linear bounded operators on \mathcal{F} . Suppose there is a function $S: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$, meeting the condition $S(0) = I$, where I is the identity operator. Suppose there are numbers $M \geq 1$ and $\omega \in \mathbb{R}$ such that $\|S(t)^k\| \leq Me^{k\omega t}$ for every $t \geq 0$ and every $k \in \mathbb{N}$. Suppose the limit $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{S(t)\varphi - \varphi}{t} =: L\varphi$ exists for every $\varphi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, where \mathcal{D} is a dense subspace of \mathcal{F} . Suppose there is a number $\lambda_0 > \omega$ such that $(\lambda_0 I - L)(\mathcal{D})$ is a dense subspace of \mathcal{F} .*

Then the closure \overline{L} of the operator L is a generator of a strongly continuous semigroup of operators $(e^{\overline{L}t})_{t \geq 0}$ given by the formula $e^{\overline{L}t}\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t/n)^n \varphi$ where the limit exists for every $\varphi \in \mathcal{F}$ and is uniform with respect to $t \in [0, T]$ for every $T > 0$. Moreover $(e^{\overline{L}t})_{t \geq 0}$ satisfies the estimate $\|e^{\overline{L}t}\| \leq Me^{\omega t}$ for every $t \geq 0$.

REMARK 4. There are several theorems that help to find out if some linear operator (or the closure of it) generates a C_0 -semigroup. Most general are Hille–Yosida theorem and Feller–Miyadera–Phillips theorem. Unfortunately both heavily use properties of the resolvent which is a kind of circulus vitiosus because we start all this activity to find the resolvent but need its properties to do it.

However there are several results that only use properties of the operator to prove that it generates a C_0 -semigroup:

1. Stone’s generation theorem: if A is a self-adjoint operator in Hilbert space, then iA generates a C_0 -semigroup; even more, this is a C_0 -group of unitary operators.
2. Lumer–Phillips theorem: linear, closed, densely defined in Banach space, dissipative operator A with a property that $A - \lambda_0 I$ is surjective for some $\lambda_0 > 0$, generates a C_0 -semigroup of contraction operators.
3. A. Yu. Neklyudov’s inversion of Chernoff’s theorem [30].

REMARK 5. Chernoff’s theorem is a deep result of functional analysis and is designed for dealing with infinite-dimensional spaces \mathcal{F} . However, it can be illustrated in one-dimensional setting in two ways, which helps to build intuition. First, one-dimensional version of Chernoff’s theorem, when $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}$, says that if $s: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ and $s(t) = 1 + tl + o(t)$ as $t \rightarrow 0$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} (s(t/n))^n = e^{tl}$, which is a simple fact of calculus. Second, one can see that Chernoff’s theorem is an infinite-dimensional analogue of the forward Euler method for solving ordinary differential equations numerically.

3. Main Result

Theorem 3. *Let \mathcal{F} be real or complex Banach space, and let $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ be the set of all linear bounded operators in \mathcal{F} . Suppose that linear operator $L: \mathcal{F} \supset D(L) \rightarrow \mathcal{F}$ generates C_0 -semigroup $(e^{tL})_{t \geq 0}$ satisfying for some constants $M \geq 1$ and $\omega \geq 0$ inequality $\|e^{tL}\| \leq Me^{\omega t}$ for all $t \geq 0$. Suppose that function $S: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$ is given and $\|S(t)^k\| \leq Me^{\omega tk}$ for all $t \geq 0$ and all $k = 1, 2, 3, \dots$. Let us denote the resolvent of $(L, D(L))$ by the symbol $R_\lambda = (\lambda I - L)^{-1}$ for all $\lambda \in \rho(L)$. Suppose that the number $\lambda \in \mathbb{C}$ is given and $\operatorname{Re} \lambda > \omega$. Then $\lambda \in \rho(L)$ and:*

1. If for all $T > 0$ we have $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|e^{tL} f - (S(t/n))^n f\| = 0$ for every $f \in \mathcal{F}$, then we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| R_\lambda f - \int_0^\infty e^{-\lambda t} (S(t/n))^n f dt \right\| = 0, \quad f \in \mathcal{F}. \quad (1)$$

2. If for all $T > 0$ we have $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|e^{tL} - (S(t/n))^n\| = 0$, then we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| R_\lambda - \int_0^\infty e^{-\lambda t} (S(t/n))^n dt \right\| = 0. \quad (2)$$

\triangleleft Integrals in (1) and (2) can be understood as improper Riemann integrals because for each n integrands are continuous functions of t . Moreover $\|e^{-\lambda t} (S(t/n))^n\| \leq e^{-t \operatorname{Re} \lambda} M e^{(t/n)\omega n} = M e^{t(\omega - \operatorname{Re} \lambda)}$ with $\omega - \operatorname{Re} \lambda < 0$, so both integrals converge. Theorem II.1.10 from [3] says that $\lambda \in \rho(L)$ and $R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tL} f dt$ for each $f \in \mathcal{F}$ with $\|R_\lambda\| \leq M/(\operatorname{Re} \lambda - \omega)$.

Let us prove item 1. Suppose $\varepsilon > 0$ and $f \in \mathcal{F}$ are given. Let us prove that there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that for all $n > n_0$ the estimate $\|R_\lambda f - \int_0^\infty e^{-\lambda t} (S(t/n))^n f dt\| < \varepsilon$ holds.

Integral in (1) and $\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tL} f dt$ both converge hence the integral on the right hand side of the equality

$$R_\lambda f - \int_0^\infty e^{-\lambda t} (S(t/n))^n f dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (e^{tL} f - (S(t/n))^n f) dt$$

converges. Moreover, it converges uniformly in $n \in \mathbb{N}$ due to the estimate

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\lambda t} (e^{tL} - (S(t/n))^n) \right\| &\leq e^{-\operatorname{Re} \lambda t} (\|e^{tL}\| + \|(S(t/n))^n\|) \\ &\leq e^{-\operatorname{Re} \lambda t} (M e^{\omega t} + M e^{(t/n)\omega n}) \leq 2M e^{t(\omega - \operatorname{Re} \lambda)} \end{aligned}$$

with $\omega - \operatorname{Re} \lambda < 0$.

Let us use the so-called $\varepsilon/2$ -method to prove that $\int_0^\infty < \varepsilon$, using representation $\int_0^\infty = \int_0^T + \int_T^\infty$. First, using ε , we find such $T > 0$ that $\int_T^\infty \leq \varepsilon/2$ for all n , and then for this T we find such n_0 that for all $n > n_0$ we have $\int_0^T < \varepsilon/2$. This will give us $\int_0^\infty < \varepsilon$. Indeed, we have

$$\left\| \int_T^\infty e^{-\lambda t} (e^{tL} f - (S(t/n))^n f) dt \right\| \leq \int_T^\infty 2M e^{t(\omega - \operatorname{Re} \lambda)} dt = 2M \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \omega} e^{T(\omega - \operatorname{Re} \lambda)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

for all $n \in \mathbb{N}$ and all T satisfying inequality $T \geq \max\left(0, \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \omega} \ln \frac{4M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)\varepsilon}\right)$. Suppose that such number T is selected.

Next, thanks to the conditions of the Theorem we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|e^{tL} f - (S(t/n))^n f\| = 0,$$

so there exists n_0 such that for all $n > n_0$, we have

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T e^{-\lambda t} (e^{tL} f - (S(t/n))^n f) dt \right\| &\leq \int_0^T e^{-t \operatorname{Re} \lambda} \|e^{tL} f - (S(t/n))^n f\| dt \\ &\leq T \max_{t \in [0, T]} e^{-t \operatorname{Re} \lambda} \sup_{t \in [0, T]} \|e^{tL} f - (S(t/n))^n f\| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

So we proved that for arbitrary $\varepsilon > 0$ there exists n_0 such that for all $n > n_0$ we get

$$\left\| R_\lambda f - \int_0^\infty e^{-\lambda t} (S(t/n))^n f dt \right\| < \varepsilon.$$

Item 1 is proved. Proof of item 2 is obtained by deleting f from the proof of item 1. \square

4. Corollary: Feynman Formula for the Resolvent

Assumption 1. Consider functions $a, b, c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on \mathbb{R} . Assume that $a(x) > 0$ for all $x \in \mathbb{R}$. Assume that there exists such $\beta \in (0, 1]$ that function c is bounded and Hölder continuous with Hölder exponent β , and functions $a, x \mapsto 1/a(x), b$ are bounded and Hölder continuous with Hölder exponent β with derivatives of order one and two.

Consider Banach space $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ of all continuous functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vanishing at infinity (i. e. $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0$), with the uniform norm $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Consider space $C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ of all compactly-supported functions that are continuous with derivatives of order one and two; note that this space is a dense linear subspace in $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

For all $f \in C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ define linear operator H via the formula

$$(Hf)(x) = a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + c(x)f(x). \tag{3}$$

Assume that the closure $(\overline{H}, D(\overline{H}))$ of operator $H: D(H) = C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ exists and generates a C_0 -semigroup $(e^{t\overline{H}})_{t \geq 0}$ in $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; this assumption is fulfilled, e. g. if $a(x) \geq a_0$ for some constant $a_0 > 0$, and b, c only satisfy already mentioned conditions. Now operator $(\overline{H}, D(\overline{H}))$ is well defined.

REMARK 6. Following [31], let us consider operator-valued functions S_1, S_2, S_3, S that are defined on $[0, \infty)$ and take values in $\mathcal{L}(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$. For all $x, y \in \mathbb{R}, t > 0$ define

$$\begin{aligned} (S_1(t)f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi ta(x)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4ta(x)}\right) f(y) dy, \\ (S_2(t)f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi ta(x)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4ta(x)} - \frac{b(x)(x-y)}{2a(x)}\right) f(y) dy, \\ (S_3(t)f)(x) &= \exp\left(t\left(c(x) - \frac{b(x)^2}{4a(x)}\right)\right) f(x), \quad S(t) = S_3(t)S_2(t). \end{aligned} \tag{4}$$

It is proved in [31] that for all $f \in C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ and $t \rightarrow 0$ we have

$$\begin{aligned} (S_1(t)f)(x) &= f(x) + ta(x)f''(x) + o(t), \\ (S(t)f)(x) &= f(x) + t[a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + c(x)f(x)] + o(t), \end{aligned}$$

and inequality $\|S(t)\| \leq e^{wt}$ holds for all $t \geq 0$ with $w = \max(0, \sup_{x \in \mathbb{R}} C(x))$. Operator \overline{H} generates a C_0 -semigroup, so all conditions of the Chernoff theorem are fulfilled. Hence

$$\left(e^{t\overline{H}}f\right)(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S(t/n)^n f\right)(x), \text{ for all } t > 0, x \in \mathbb{R}, f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

locally uniformly in t , i. e. for all $T > 0$ we have $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|e^{t\overline{H}}f - (S(t/n))^n f\| = 0$.

The expression for $S(t/n)^n f$ can be rewritten as follows:

$$\begin{aligned} \left(e^{t\overline{H}}f\right)(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}}}_n \exp\left(\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n \left(c(x_{j-1}) - \frac{b(x_{j-1})^2}{4a(x_{j-1})}\right)\right) \exp\left(\sum_{j=1}^n \frac{b(x_{j-1})(x_j - x_{j-1})}{2a(x_{j-1})}\right) \\ &\times \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4\pi t}}\right)^n \left(\prod_{j=0}^{n-1} a(x_j)\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{n}{4t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x_j - x_{j+1})^2}{a(x_j)}\right) f(x_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Now we can apply Theorem 3 and obtain a formula for the resolvent of \overline{H} .

Theorem 4. *Under notation and assumptions from Assumption 1 and Remark 6, the resolvent $R_\lambda = (\lambda I - \overline{H})^{-1}$ is given for all $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfying $\operatorname{Re} \lambda > w$, all $g \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, all $x_0 \in \mathbb{R}$ by the following formula:*

$$\begin{aligned} (R_\lambda g)(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}}}_n \times \exp\left(\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n \left(c(x_{j-1}) - \frac{b(x_{j-1})^2}{4a(x_{j-1})}\right)\right) \right. \\ &\times \exp\left(\sum_{j=1}^n \frac{b(x_{j-1})(x_j - x_{j-1})}{2a(x_{j-1})}\right) \times \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4\pi t}}\right)^n \left(\prod_{j=0}^{n-1} a(x_j)\right)^{-1/2} \\ &\left. \times \exp\left(-\frac{n}{4t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x_j - x_{j+1})^2}{a(x_j)}\right) g(x_n) dx_1 \dots dx_n \right] dt, \end{aligned}$$

where the limit $\lim_{n \rightarrow \infty}$ exists uniformly in $x_0 \in \mathbb{R}$.

◁ Let us check conditions of Theorem 3. Set $\mathcal{F} = C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ with the uniform norm $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Consider $L = \overline{H}$ defined via (3), $D(L) = D(\overline{H})$, $\omega = w$, $M = 1$. Consider $S(t)$ defined in (4). We already have $\|S(t)\| \leq e^{wt}$, which implies $\|S(t)^k\| \leq e^{wtk}$. Condition $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|e^{t\overline{H}}f - (S(t/n))^n f\| = 0$ for all $f \in \mathcal{F}$ and all $T > 0$ is true thanks to [31], where the Chernoff theorem is used. The proof is finished due to item 1 of Theorem 3. ▷

REMARK 7. Note that for an arbitrary linear operator $(L, D(L))$ the resolvent $(\lambda I - L)^{-1}$ and the semigroup e^{tL} , if they exist, are defined by $(L, D(L))$ uniquely. Meanwhile, there are many Chernoff functions for the same operator $(L, D(L))$, so there are many Chernoff approximations for $(\lambda I - L)^{-1}$ and e^{tL} . This gives us some freedom in constructing such approximations. The representation for the resolvent proposed in Theorem 4 is only one of the representations that can be obtained via the Chernoff theorem.

5. Corollary: Representing Solution of ODEs via Feynman Formula

There is no standard well known method of expressing the solution of ODE $-a(x)f''(x) - b(x)f'(x) - c(x)f(x) + \lambda f(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ in terms of variable coefficients a, b, c, g and constant λ . Meanwhile, our method gives a formula for the solution, because $f = (\lambda I - L)^{-1}g$ for L given by $(Lf)(x) = a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + c(x)f(x)$. We will rewrite $\lambda f - Lf = g$ as $Lf - \lambda f = -g$ because it is easier to follow the idea. Please allow us to make the statement of the theorem a bit wordy to keep it self-contained.

Theorem 5. Consider second order ordinary differential equation for function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + (c(x) - \lambda)f(x) = -g(x) \text{ for all } x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

where functions $a, b, c, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are known parameters and number $\lambda \in \mathbb{C}$ is also a known parameter. Assume that there exists constant $a_0 > 0$ such that $a(x) > a_0$ for all $x \in \mathbb{R}$. Suppose that there exists $\beta \in (0, 1]$ such that function c is bounded and Hölder continuous with Hölder exponent β , and functions $a, x \mapsto 1/a(x), b$ are bounded and Hölder continuous with Hölder exponent β with derivatives of order one and two. Assume that function g is continuous and vanishes at infinity. Assume that $\mathbb{R} \ni \lambda > \max(0, \sup_{x \in \mathbb{R}} c(x))$.

Then for (5) there exists a unique continuous and vanishing at infinity solution f given for all $x_0 \in \mathbb{R}$ by the formula

$$\begin{aligned} f(x_0) = & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}}}_{n} \exp \left(\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n \left(c(x_{j-1}) - \frac{b(x_{j-1})^2}{4a(x_{j-1})} \right) \right) \right. \\ & \times \exp \left(\sum_{j=1}^n \frac{b(x_{j-1})(x_j - x_{j-1})}{2a(x_{j-1})} \right) \times \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4\pi t}} \right)^n \left(\prod_{j=0}^{n-1} a(x_j) \right)^{-1/2} \\ & \left. \times \exp \left(-\frac{n}{4t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x_j - x_{j+1})^2}{a(x_j)} \right) g(x_n) dx_1 \dots dx_n \right] dt, \end{aligned}$$

where the limit $\lim_{n \rightarrow \infty}$ exists uniformly in $x_0 \in \mathbb{R}$.

◁ In Theorem 4 set $f = R_\lambda g$. ▷

REMARK 8. This reasoning also works in the multi-dimensional situation for $x \in \mathbb{R}^d$, where we have an elliptic PDE instead of ODE.

6. Corollary: Translation-Based Formula as a Method of Solving ODEs

Another Chernoff approximations for the same semigroup are known, these approximations do not involve multiple integrals but use multiple shifts instead [12]. For these approximations error bounds are known. Rate of convergence of Chernoff approximations is given in [19] for the general case of arbitrary semigroup, and also in this particular case of translation-based approximations [18] for the semigroup that is discussed in the next theorem. The word “translation” is used because for $a(x) = a_0 \equiv \text{const}$ operator $f \mapsto [x \mapsto f(x + 2\sqrt{a_0 t})]$ is indeed a translation (shift) of f by the value $2\sqrt{a_0 t}$.

Let us use symbol $UC_b(\mathbb{R})$ to denote Banach space of all bounded and uniformly continuous functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with the uniform norm $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Let us use symbol $C_b^\infty(\mathbb{R})$

for the subspace of $UC_b(\mathbb{R})$ consisting of all infinitely differentiable functions that are bounded and have bounded derivatives of all orders.

Theorem 6. *Suppose that functions $a, b, c \in UC_b(\mathbb{R})$ are bounded with their derivatives up to order 3, and there exists such a constant $a_0 > 0$ that estimate $\inf_{x \in \mathbb{R}} a(x) \geq a_0 > 0$ is satisfied for all $x \in \mathbb{R}$. For each function $\phi \in C_b^\infty(\mathbb{R}) = D(A)$ define $A\phi = a\phi'' + b\phi' + c\phi$. For each $t \geq 0$, each $x \in \mathbb{R}$ and each $f \in UC_b(\mathbb{R})$ define*

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{4}f\left(x + 2\sqrt{a(x)t}\right) + \frac{1}{4}f\left(x - 2\sqrt{a(x)t}\right) + \frac{1}{2}f(x + 2b(x)t) + tc(x)f(x). \quad (6)$$

Assume also that $\mathbb{R} \ni \lambda > \sup_{x \in \mathbb{R}} |c(x)| = \|c\|$. Then:

1. Closure \bar{A} of operator A generates a C_0 -semigroup in $UC_b(\mathbb{R})$.
2. For each $g \in UC_b(\mathbb{R})$ the solution $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ of the equation

$$a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + (c(x) - \lambda)f(x) = -g(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

exists, is unique in $UC_b(\mathbb{R})$ and is given for all $x \in \mathbb{R}$ by the formula

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(e^{\bar{A}g} \right) (x) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left((S(t/n))^n g \right) (x) dt, \quad (8)$$

where $S(t/n)$ is obtained by substitution of t with t/n in (6), and $(S(t/n))^n$ is the composition of n copies of linear bounded operator $S(t/n)$.

Suppose additionally that function g is bounded with derivatives up to order 5. Then:

3. There exist nonnegative constants C_0, C_1, \dots, C_4 such that for all $t > 0$ and all $n \in \mathbb{N}$ the following inequality holds:

$$\|S(t/n)^n g - e^{t\bar{A}}g\| \leq \frac{t^2 e^{\|c\|t}}{n} \left(C_0\|g\| + C_1\|g'\| + C_2\|g''\| + C_3\|g'''\| + C_4\|g^{(IV)}\| \right). \quad (9)$$

4. Error bound in (8) for all $n \in \mathbb{N}$ is given by inequality

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left((S(t/n))^n g \right) (x) dt \right| \leq \frac{2C_g}{n \cdot (\lambda - \|c\|)^3},$$

where $C_g = C_0\|g\| + C_1\|g'\| + C_2\|g''\| + C_3\|g'''\| + C_4\|g^{(IV)}\|$.

5. Integral in item 2 can be calculated over $[0, T]$ instead of $[0, \infty)$ with controlled level of error. This means that for each $\varepsilon > 0$ there exists $T = \max\left(0, \frac{1}{\lambda - \|c\|} \ln \frac{2}{(\lambda - \|c\|)\varepsilon}\right)$ such that for all $n \in \mathbb{N}$ we have

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \int_0^T e^{-\lambda t} \left((S(t/n))^n g \right) (x) dt \right| \leq \frac{2C_g}{n \cdot (\lambda - \|c\|)^3} + \varepsilon.$$

◁ Item 1 follows from Theorem 4.2 in [18]. Item 2 is a particular case of the main result of the paper, Theorem 3. Item 3 follows from Example 4.2 in [18]. Item 4 follows from items 2

and 3 with simple estimate

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} (e^{\overline{A}}g)(x) dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} ((S(t/n))^n g)(x) dt \right\| \\ & \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|e^{\overline{A}}g - (S(t/n))^n g\| dt \leq \int_0^\infty e^{(\|c\|-\lambda)t} \frac{t^2}{n} C_g dt = \frac{2C_g}{n \cdot (\lambda - \|c\|)^3}. \end{aligned}$$

Item 5 (by repeating the reasoning in the first part of the proof of Theorem 3) follows from item 4 and the well known fact that the semigroup $(e^{t\overline{A}})_{t \geq 0}$ is a quasi-contraction, i. e. in estimate for norm $\|e^{t\overline{A}}\| \leq M e^{\omega t}$ it is possible to set $M = 1$, $\omega = \|c\|$. \triangleright

REMARK 9. Independently of Chernoff function used (is it based on integral operators as in Theorem 5 or on translation operators as in Theorem 6), Chernoff approximations are allowing to calculate value of the solution in only one point of the domain of solution (in one point $x \in \mathbb{R}$ in our examples). Meanwhile methods based on a computational grid calculate values of the solution in all points of the computational grid. Moreover, values of Chernoff approximations at different points of the domain can be calculated in parallel, using multi-core processors and GPU which is an advantage of this approach.

Acknowledgments. Author is thankful to Oleg Galkin, Denis Mineev and Polina Panteleva for comments on the manuscript.

References

1. Arendt, W. Chapter 1 Semigroups and Evolution Equations: Functional Calculus, Regularity and Kernel Estimates, *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations*, vol. 1, 2002, pp. 1–85. DOI: 10.1016/S1874-5717(04)80003-3.
2. Arendt, W., Batty, C. J. K., Hieber, M. and Neubrander, F. *Cauchy Problems. Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems. Monographs in Mathematics*, vol. 96, Birkhäuser, Basel, 2001. DOI: 10.1007/978-3-0348-0087-7.
3. Engel, K.-J. and Nagel, R. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Graduate Texts in Mathematics*, vol. 194, Springer-Verlag, 2000. DOI: 10.1007/b97696.
4. Goldstein, J. A. *Semigroups of Linear Operators and Applications: Second Edition*, New York, Dover Publications, 2017.
5. Bogachev, V. I. and Smolyanov, O. G. *Real and Functional Analysis*, Springer, 2020. DOI: 10.1007/978-3-030-38219-3.
6. Chernoff, P. R. Note on Product Formulas for Operator Semigroups, *Journal of Functional Analysis*, 1968, vol. 2, no. 2, pp. 238–242. DOI: 10.1016/0022-1236(68)90020-7.
7. Butko, Ya. A. The Method of Chernoff Approximation, *Semigroups of Operators – Theory and Applications, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, vol. 325, Springer, Cham, 2020, pp. 19–46. DOI: 10.1007/978-3-030-46079-2_2.
8. Remizov, I. D. Feynman and Quasi-Feynman Formulas for Evolution Equations, *Doklady Mathematics*, 2017, vol. 96, no. 2, pp. 433–437. DOI: 10.1134/S1064562417050052.
9. Remizov, I. D. Formulas that Represent Cauchy Problem Solution for Momentum and Position Schrödinger Equation, *Potential Analysis*, 2020, vol. 52, no. 2, pp. 339–370. DOI: 10.1007/s11118-018-9735-1.
10. Remizov, I. D. New Method for Constructing Chernoff Functions, *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 4, pp. 566–570. DOI: 10.1134/S0012266117040152.
11. Remizov, I. D. Quasi-Feynman Formulas — a Method of Obtaining the Evolution Operator for the Schrödinger Equation, *Journal of Functional Analysis*, 2016, vol. 270, no. 12, pp. 4540–4557. DOI: 10.1016/j.jfa.2015.11.017.
12. Remizov, I. D. Approximations to the Solution of Cauchy Problem for a Linear Evolution Equation Via the Space Shift Operator (Second-Order Equation Example), *Applied Mathematics and Computation*, 2018, vol. 328, pp. 243–246. DOI: 10.1016/j.amc.2018.01.057.

13. Remizov, I. D. Solution-Giving Formula to Cauchy Problem for Multidimensional Parabolic Equation with Variable Coefficients, *Journal of Mathematical Physics*, 2019, vol. 60, no. 7, article no. 071505. DOI: 10.1063/1.5038102.
14. Orlov, Yu. N. and Sakbaev, V. Zh. and Smolyanov, O. G. Feynman Formulas and the Law of Large Numbers for Random One-Parameter Semigroups, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2019, vol. 306, no. 1, pp. 196–211. DOI: 10.1134/S0081543819050171.
15. Sakbaev, V. Zh. and Tsoy, N. V. Analogue of Chernoff Theorem for Cylindrical Pseudo-measures, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, vol. 41, no. 12, pp. 2369–2382. DOI: 10.1134/S1995080220120306.
16. Kalmetiev, R. Sh., Orlov, Yu. N. and Sakbaev, V. Zh. Averaging of Random Affine Transformations of Functions Domain, *Ufa Mathematical Journal*, 2023, vol. 15, no. 2, pp. 55–64. DOI: 10.13108/2023-15-2-55.
17. Dragunova, K. A., Nikbakht, N. and Remizov, I. D. Numerical Study of the Rate of Convergence of Chernoff Approximations to Solutions of the Heat Equation, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 2023, vol. 25, no. 4, pp. 255–272. DOI: 10.15507/2079-6900.25.202304.255-272.
18. Galkin, O. E. and Remizov, I. D. Upper and Lower Estimates for Rate of Convergence in the Chernoff Product Formula for Semigroups of Operators, *Israel Journal of Mathematics*, 2025, vol. 265, pp. 929–943. DOI: 10.1007/s11856-024-2678-x.
19. Galkin, O. E. and Remizov, I. D. Rate of Convergence of Chernoff Approximations of Operator C_0 -semigroups, *Mathematical Notes*, 2022, vol. 111, no. 2, pp. 305–307. DOI: 10.1134/S0001434622010345.
20. Gomilko, A., Kosowicz, S. and Tomilov, Yu. A General Approach to Approximation Theory of Operator Semigroups, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2019, vol. 127, pp. 216–267. DOI: 10.1016/j.matpur.2018.08.008.
21. Vedenin, A. V., Voevodkin, V. S., Galkin, V. D., Karatetskaya, E. Yu. and Remizov, I. D. Speed of Convergence of Chernoff Approximations to Solutions of Evolution Equations, *Mathematical Notes*, 2020, vol. 108, no. 3–4, pp. 451–456. DOI: 10.1134/S0001434620090151.
22. Zagrebnov, V. A. Notes on the Chernoff Product Formula, *Functional Analysis*, 2020, vol. 279, no. 7, arXiv:1911.09480 [math.FA]. DOI: 10.48550/arXiv.1911.09480.
23. Zagrebnov, V. A. Comments on the Chernoff Estimate, *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2022, vol. 13, no. 1, pp. 17–23. DOI: 10.17586/2220-8054-2022-13-1-17-23.
24. Kalmetev, R. Sh. *Approximate Solution of Multidimensional Kolmogorov Equation Using Feynman–Chernoff iterations*, Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, 2023, 021, 15 p. DOI: 10.20948/prepr-2023-21.
25. Kalmetev, R. Sh., Orlov, Yu. N. and Sakbaev, V. Zh. Chernoff Iterations as an Averaging Method for Random Affine Transformations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2022, vol. 62, no. 6, pp. 996–1006. DOI: 10.1134/S0965542522060100.
26. Feynman, R. P. Space-Time Approach to Nonrelativistic Quantum Mechanics, *Physical Review*, 1948, vol. 20, pp. 367–387. DOI: 10.1103/RevModPhys.20.367.
27. Feynman, R. P. An Operation Calculus Having Applications in Quantum Electrodynamics, *Physical Review*, 1951, vol. 84, pp. 108–128. DOI: 10.1103/PhysRev.84.108.
28. Mazzucchi, S. *Mathematical Feynman Path Integrals and Their Applications*, World Scientific, 2009. DOI: 10.1142/7104.
29. Johnson, G. W. and Lapidus, M. L. *The Feynman Integral and Feynman’s Operational Calculus*, Oxford, Clarendon Press, 2000.
30. Neklyudov, A. Yu. Inversion of Chernoff’s Theorem, *Mathematical Notes*, 2008, vol. 83, no. 4, pp. 530–538. DOI: 10.1134/S0001434608030267.
31. Butko, Ya. A. Grothaus, M. and Smolyanov, O. G. Lagrangian Feynman Formulas for Second-Order Parabolic Equations in Bounded and Unbounded Domains, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 2010, vol. 13, no. 3, pp. 377–392. DOI: 10.1142/S0219025710004097.

Received January 31, 2025

IVAN D. REMIZOV

National Research University Higher School of Economics,
25/12, Room 224, Bol. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia,
Senior Research Fellow;

Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences,
19, Build. 1, Bolshoy Karetny Per., Moscow 127051, Russia,

Senior Research Fellow
E-mail: ivremizov@yandex.ru
<https://orcid.org/0000-0002-1968-0793>

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 4, С. 124–135

ЧЕРНОВСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОДУ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ремизов И. Д.^{1,2}

¹ Лаборатория топологических методов в динамике НИУ ВШЭ,
Россия, 603155, Нижний Новгород, Большая Печерская, 25/12;

² Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН,
Россия, 127051, Москва, Большой Каретный переулок, 19, стр. 1

E-mail: ivremizov@yandex.ru

Аннотация. Метод черновских аппроксимаций является мощным и гибким инструментом функционального анализа, позволяющим во многих случаях выразить $\exp(tL)$ через переменные коэффициенты линейного дифференциального оператора L . В данной работе доказывается теорема, позволяющая применять этот метод для нахождения резольвенты оператора L . Наша теорема утверждает, что преобразования Лапласа аппроксимаций Чернова C_0 -полугруппы сходятся к резольвенте генератора этой полугруппы. Мы демонстрируем предложенный метод на дифференциальном операторе второго порядка с переменными коэффициентами. В качестве следствия мы получаем новое представление решения неоднородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в терминах функций, являющихся коэффициентами этого уравнения, играющих роль параметров задачи. Для функции Чернова на основе оператора сдвига мы даем оценку скорости сходимости приближений к решению.

Ключевые слова: полугруппы операторов, резольвента оператора, линейное ОДУ с переменными коэффициентами, представление решения, черновские аппроксимации.

AMS Subject Classification: 47A10, 47D06, 34A05.

Образец цитирования: *Remizov I. D. Chernoff Approximations of the Solution of Linear ODE with Variable Coefficients // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 4.—С. 124–135 (in English). DOI: 10.46698/a3908-1212-5385-q.*

УДК 517.925.51

DOI 10.46698/b9180-8816-3043-b

THE EFFECT OF PROCESSES LEADING TO CELL DEATH
ON THE DYNAMIC REGIMES OF THE TISSUE FORMATION MODEL

M. A. Smirnov¹

¹ National Research University of Electronic Technology,
1 Shokin Square, Zelenograd, Moscow 124498, Russia

E-mail: mikhail.smirnov.aat@yandex.ru

Abstract. The article generalizes a mathematical model describing the population dynamics of cell clusters, based on a system of first-order nonlinear differential equations by introducing additional parameters. It is proposed to add two types of coefficients to the model: a survival coefficient, which describes the proportion of cells that die due to some environmental influences and subsequent autophagy or as a result of intracellular processes leading to death (necrosis, apoptosis), and the aging coefficient, which describes the limitation in the rate and possibility of cell division due to reduction in the length of telomers of the cells chromosomes during mitosis. The added coefficients have a biological meaning and can be evaluated during the experiment, as required by the considered model of morphogenesis. Taking these parameters into account in the mathematical model made it possible to determine new dynamic regimes in the system of differential equations describing the behavior of multicellular clusters. For the obtained system of differential equations, an analysis of its equilibrium points and the stability of steady states corresponding to these points was carried out. The values of the parameters of the mathematical model at which the system can reach a steady state were determined. Also, limitations on the parameters were identified, at which it is impossible to estimate the stability of steady states using the Lyapunov method. It follows from the obtained conditions that one of the cases when the system of cell clusters comes to a steady state is either the extinction of all cells, or the cessation of division of cell clusters. Steady states of different type are also possible, for which the criteria of existence and possibility have yet to be determined.

Keywords: systems of nonlinear differential equations, modeling of morphogenesis, programming cell death, Hayflick limit.

AMS Subject Classification: 34A34, 34D20.

For citation: Smirnov, M. A. The Effect of Processes Leading to Cell Death on the Dynamic Regimes of the Tissue Formation Model, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 136–147. DOI: 10.46698/b9180-8816-3043-b.

Introduction

The simplest way to describe tissue formation processes is to quantify changes in the total number of cells in populations. Such estimates can be obtained using population models like in [1] or [2]. Their main advantage is abstraction from the nature of interaction between individual cells and the ability to evaluate scenarios for the development of the system with minimal computational costs. Possible behavioural scenarios can be estimated using dynamic regimes of a system of differential equations describing the cell populations.

An important requirement when choosing a mathematical model is the portability of results between models of different types. If a certain result is obtained using a population

model, it should qualitatively coincide with the result of using simulation models with the same system parameters (e. g., [3, 4]). A population model using a set of universal parameters in [5] satisfies these requirements.

In population models, for certain values of the system parameters, situations are possible where cell populations grow without limit. This behavior contradicts the fact that cells have a divisibility limit called the Hayflick limit [6]. If the possibility of cell population aging is not considered, an adequate assessment of the development scenarios of multicellular cluster systems is impossible.

Models of morphogenesis primarily describe interactions between cells. In addition, the impact of environment on cell populations is an important factor to consider. If environmental conditions (heat, radiation, lack of chemicals necessary for life, etc.) are too aggressive, then, regardless of the interactions between cells, some of the cells will always die out [7]. The death of some part of the cell population can also be initiated by intracellular processes (necrosis, apoptosis) [8]. A population of cells in which at least half of the cells are born dead cannot grow without limits. If these factors are not taken into account, then morphogenesis scenarios are also determined incorrectly.

The mathematical model with universal parameters does not take these factors into account. Adding parameters describing populations aging, environmental influences and intracellular processes leading to cell death allows us to more accurately determine the behavior of the system of multicellular clusters.

The added parameters must satisfy the requirement of having a clear biological meaning, as do other universal parameters from [9].

1. Description of the New Model Parameters

The main variables of the population model [5] are the sizes of the cell population $N(\tau, t)$ and the rates of their division $v_d(\tau, t)$. The change of these values over time is determined by the following expressions:

$$\frac{dN(\tau, t)}{dt} = \text{Surplus}(\tau, N) - \text{Loss}(\tau, N), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_d(\tau, t)}{dt} = & \left(1 - \frac{v_d(\tau, t)}{v_d^{\max}(\tau)}\right) \sum_{\hat{\tau}: K(\tau \leftarrow \hat{\tau}) > 0} K(\tau \leftarrow \hat{\tau}) \text{Sig}(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N) \\ & + \left(\frac{v_d(\tau, t)}{v_d^{\max}(\tau)}\right) \sum_{\hat{\tau}: K(\tau \leftarrow \hat{\tau}) < 0} K(\tau \leftarrow \hat{\tau}) \text{Sig}(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N). \end{aligned} \tag{2}$$

The parameter $\text{Loss}(\tau, N)$ determines the decrease in the number of cells of type τ per unit of time:

$$\text{Loss}(\tau, N) = v_d(\tau, t)N(\tau, t). \tag{3}$$

The values $\text{Surplus}(\tau, N)$ and $\text{Sig}(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N)$ are determined by equations (4) and (5), respectively. To find them, the following parameters are taken into consideration:

$$\begin{aligned} \hat{N}(\tau) = \sigma(N(\tau) - 1 + c)N(\tau), \quad \text{Disp}(\hat{\tau}, N) = \max\left(1, \sum_{\text{Pr}(\tau^* \leftarrow \hat{\tau}) > 0} \hat{N}(\tau^*)\right), \\ \text{Inf}(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N) = \text{Pr}(\tau \leftarrow \hat{\tau}) \frac{I_s(\hat{\tau})\hat{N}(\hat{\tau})}{\text{Disp}(\hat{\tau}, N)}, \quad \text{SumInf}(\tau, N) = \sum_{\hat{\tau}} \text{Inf}(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N). \end{aligned}$$

The function σ is a sigmoid or Heaviside function with parameter c : $0 < c \ll 1$.

The $\text{Sig}(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N)$ parameter specifies the distribution of signals from cells of type $\hat{\tau}$ between cells capable of receiving these signals:

$$\text{Sig}(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N) = \begin{cases} \frac{\text{Inf}(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N)}{\text{SumInf}(\tau, N)}, & \text{if } \text{Inf}(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N) > 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4)$$

The distributional parameters $\varepsilon_d(\tau, N)$ and $\delta(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N)$ are also considered:

$$\begin{aligned} \varepsilon_d(\tau, N) &= \sum_{\hat{\tau}: O(\tau \leftarrow \hat{\tau})=1} \text{Sig}(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N), \\ \delta(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N) &= \sum_{\tau^*: D(\hat{\tau} \leftarrow \tau^*)=\tau} \text{Sig}(\hat{\tau} \leftarrow \tau^*, N). \end{aligned}$$

The value of $\text{Surplus}(\tau, N)$ determines the increase in the number of cells of type τ per unit of time:

$$\text{Surplus}(\tau, N) = v_d(\tau, t) \hat{N}(\tau, t) \varepsilon_d(\tau, N) + \sum_{\hat{\tau}} v_d(\hat{\tau}) \hat{N}(\hat{\tau}, t) \delta(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N) (2 - \varepsilon_d(\hat{\tau}, N)). \quad (5)$$

It is proposed to add the following new parameters to the considered model:

1. $S_r(\tau_1), \dots, S_r(\tau_n)$ — survival rate, which determines the proportion of cells of type τ of each new generation that will be able to divide again in the future;
2. $\alpha(\tau_1), \dots, \alpha(\tau_n)$ — coefficients that determine the process of cell aging. Each type of cells has a certain division limit, after which they lose the ability to divide.

The survival rate $S_r(\tau)$ should only affect the number of cells of type τ that appeared as a result of division at time t . Accordingly, the value $\text{Surplus}(\tau, t)$ should be taken into account in equations with the factor $S_r(\tau)$ as a new multiplier.

The value $\alpha(\tau)$ characterizes the aging of cells due to a large number of repeated divisions or their rejuvenation caused by the appearance of new cells of type τ from cells with a large (or infinite) value of the divisibility limit (for example, from stem cells). This parameter should only affect the rate of cell division, but not their number.

Aging and rejuvenation of cells of type τ directly depend on the cell types and the division type of their parents $\hat{\tau}$. Thus, in the expression for the rate $v_d(\tau)$, one should take into account the values $\alpha(\hat{\tau})$ with the distributional indices $\varepsilon_d(\hat{\tau}, N)$, $\delta(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N)$ and $S_r(\tau)$.

The change in the rate of division of τ -type cells is influenced by signaling influences from cells of other types, the aging of cells of type τ of the previous generation that have chosen asymmetric division, and the division of cells of other types that have changed their type to τ . The rate of division of cells that are not subjected to aging should not change over time.

The division rates $v_d(\tau, t)$ are limited below by zero, and above by the values $v_d^{\max}(\tau)$. Therefore, positive and negative values of the parameters $K(\tau \leftarrow \hat{\tau})$ and $\alpha(\tau)$ must be considered separately and included in the expression for the change of the division rate with normalization coefficients.

Taking into account the introduced parameters, equations (1) and (2) will take the following form:

$$\frac{dN(\tau, t)}{dt} = S_r(\tau) \text{Surplus}(\tau, N) - \text{Loss}(\tau, N), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_d(\tau, t)}{dt} &= \left(1 - \frac{v_d(\tau, t)}{v_d^{\max}(\tau)}\right) \left(\text{Sum}_{K^+}(\tau) + \text{Sum}_{\alpha^+}(\tau)\right) \\ &+ \left(\frac{v_d(\tau, t)}{v_d^{\max}(\tau)}\right) \left(\text{Sum}_{K^-}(\tau) + \text{Sum}_{\alpha^-}(\tau)\right), \end{aligned} \quad (7)$$

where the expressions for $\text{Sum}_{K^+}(\tau)$, $\text{Sum}_{\alpha^+}(\tau)$, $\text{Sum}_{K^-}(\tau)$, $\text{Sum}_{\alpha^-}(\tau)$ are defined as:

$$\begin{aligned} \text{Sum}_{K^+}(\tau) &= \sum_{\dot{\tau}: K(\tau \leftarrow \dot{\tau}) > 0} K(\tau \leftarrow \dot{\tau}) \text{Sig}(\tau \leftarrow \dot{\tau}, N), \\ \text{Sum}_{K^-}(\tau) &= \sum_{\dot{\tau}: K(\tau \leftarrow \dot{\tau}) < 0} K(\tau \leftarrow \dot{\tau}) \text{Sig}(\tau \leftarrow \dot{\tau}, N), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \text{Sum}_{\alpha^+}(\tau) &= S_r(\tau) \sum_{\dot{\tau} \neq \tau: \alpha(\dot{\tau}) > 0} (2 - \varepsilon_d(\dot{\tau}, N)) \delta(\tau \leftarrow \dot{\tau}, N) \alpha(\dot{\tau}, N), \\ \text{Sum}_{\alpha^-}(\tau) &= \begin{cases} S_r(\tau) \sum_{\dot{\tau}: \alpha(\dot{\tau}) < 0} (2 - \varepsilon_d(\dot{\tau}, N)) \delta(\tau \leftarrow \dot{\tau}, N) \alpha(\dot{\tau}), & \alpha(\tau) > 0; \\ S_r(\tau) \left[\sum_{\dot{\tau}: \alpha(\dot{\tau}) < 0} (2 - \varepsilon_d(\dot{\tau}, N)) \delta(\tau \leftarrow \dot{\tau}, N) \alpha(\dot{\tau}) + \alpha(\tau) \varepsilon_d(\tau, N) \right], & \alpha(\tau) \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

REMARK 1. The coefficient $\alpha(\tau)$ has a biological meaning.

◁ If the coefficient $\alpha(\tau) < 0$, then we consider a system consisting of one population in the absence of all factors except the aging of population itself. The equation for the division rate in this case is:

$$\frac{dv_d(\tau, t)}{dt} = S_r(\tau) \left(\frac{v_d(\tau, t)}{v_d^{\max}(\tau)} \right) [(2 - \varepsilon_d(\tau, N)) \delta(\tau \leftarrow \tau, N) \alpha(\tau) + \alpha(\tau) \varepsilon_d(\tau, N)].$$

In the case of a system consisting of only one type of cells, $\varepsilon_d(\tau, N) = O(\tau \leftarrow \tau) = 0$, $\delta(\tau \leftarrow \tau, N) = 1$. Then the parameter $\alpha(\tau)$ can be found as:

$$\alpha(\tau) = \frac{v_d^{\max}(\tau)}{2S_r(\tau)t} \ln \frac{v_d(\tau, t)}{v_0}$$

taking into account the initial condition $v_d(\tau, 0) = v_0$.

Accordingly, the parameter $\alpha(\tau)$ can be estimated directly from the moment in time when the rate of cell division becomes negligibly small, that is, from the divisibility limit of cells of type τ .

Let us consider a system of two populations of types τ_0 and τ_1 , where $\alpha(\tau_0) > 0$, $\alpha(\tau_1) = 0$. During division, cells differentiate as follows: $\tau_0 \rightarrow \tau_1$, $\tau_1 \rightarrow \tau_1$. Cells exchange signals only within their populations. All interaction effects, except rejuvenation, are absent. The equation for the rate of cell division of type τ_1 is:

$$\frac{dv_d(\tau_1, t)}{dt} = \left(1 - \frac{v_d(\tau_1, t)}{v_d^{\max}(\tau_1)} \right) (2 - \varepsilon_d(\tau_0, N)) \delta(\tau_1 \leftarrow \tau_0, N) \alpha(\tau_0).$$

Under given conditions $\varepsilon_d(\tau_0, N) = O(\tau_0 \leftarrow \tau_0) = 0$, $\delta(\tau_1 \leftarrow \tau_0, N) = 1$. Then the parameter $\alpha(\tau_0)$ can be found:

$$\alpha(\tau_0) = \frac{v_d^{\max}(\tau_1)}{2t} \ln \left(\frac{v_d^{\max}(\tau_1) - v_0}{v_d^{\max}(\tau_1) - v_d(\tau_1, t)} \right).$$

That is, the coefficient $\alpha(\tau_0)$ can be estimated at the moment of time t , when the division rate becomes close to its maximum value.

If cells with $\alpha(\tau_0) > 0$ are differentiated into several other types, then among all the values found, the largest value of $\alpha(\tau_0)$ can be selected.

The $\alpha(\tau_0)$ parameter is not included in the $\text{Sum}_{\alpha+}(\tau_0)$ of the expression (9) due to the $\hat{\tau} \neq \tau_0$ summation condition. For this reason, the parameter $\alpha(\tau_0)$ does not affect the change in the cell division rate $v_d(\tau_0, t)$. \triangleright

The coefficient $S_r(\tau)$ can be estimated by definition as the proportion of surviving cells among those that appeared as a result of division.

The model that takes into account population aging must have steady states. This hypothesis is based on the fact that over time, the number of cells of certain types should stop changing due to a decrease in the rate of division. As it turns out, the system of differential equations under consideration actually has equilibrium points corresponding to such steady states. Important issues are the studying of the stability of steady states of the system and the identifying of the dependence of the stability of these states on the values of the model parameters.

2. Steady States of the System and Their Stability

Let us write the system under consideration in the following form:

$$\begin{cases} \frac{dN(\tau_i, t)}{dt} = f_i(\tau_i, t); \\ \frac{dv(\tau_i, t)}{dt} = g_i(\tau_i, t), \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

To assess the stability of steady states, we use the Lyapunov stability criterion.

It turns out that for some equilibrium points of systems it is possible to derive stationarity conditions and draw a conclusion about the stability of such states.

Proposition 1. *If there is a moment of time t_0 such that for any cell type τ at $t \geq t_0$ at least one of the conditions is satisfied:*

1. $N(\tau, t) = 0$;
2. $v_d(\tau, t) = 0$ and $\forall \hat{\tau} K(\tau \leftarrow \hat{\tau}) > 0$, $\text{Sig}(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N) = 0$ and $\forall \hat{\tau} \neq \tau$, $\alpha(\hat{\tau}) > 0$: $\forall \tau^* D(\hat{\tau} \leftarrow \tau^*) = \tau$: $\text{Sig}(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N) = 0$.

Then the set of values $(N(\tau_1), N(\tau_2), \dots, N(\tau_n), v_d(\tau_1), v_d(\tau_2), \dots, v_d(\tau_n))$ is an equilibrium point of the system (10).

\triangleleft Further we will assume that $t \geq t_0$. The equation for $f(\tau)$ can be written as follows:

$$\begin{aligned} f(\tau) = v_d(\tau) \hat{N}(\tau) [S_r(\tau) \varepsilon_d(\tau, N) + S_r(\tau) \delta(\tau \leftarrow \tau, N) (2 - \varepsilon_d(\tau, N)) - 1] \\ + S_r(\tau) \sum_{\hat{\tau} \neq \tau} v_d(\hat{\tau}) \hat{N}(\hat{\tau}) \delta(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N) (2 - \varepsilon_d(\hat{\tau}, N)). \end{aligned}$$

Since each term contains the value $v_d(\tau^*)N(\tau^*)$, then when the conditions of the proposition are met, all terms will be equal to zero. Thus, $f(\tau) = 0$.

Let us show that the same is true for $g(\tau)$.

When $v_d(\tau) = 0$ the equation takes the form:

$$g(\tau) = \text{Sum}_{K+}(\tau) + \text{Sum}_{\alpha+}(\tau).$$

The fulfillment of the condition $\forall \hat{\tau} K(\tau \leftarrow \hat{\tau}) > 0$, $\text{Sig}(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N) = 0$ implies $\text{Sum}_{K+}(\tau) = 0$. The fulfillment of the condition $\forall \hat{\tau} \neq \tau$, $\alpha(\hat{\tau}) > 0$: $\forall \tau^* D(\hat{\tau} \leftarrow \tau^*) = \tau$: $\text{Sig}(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N) = 0$ implies $\text{Sum}_{\alpha+}(\tau) = 0$. Accordingly, $v_d(\tau) = 0$ is a solution to the equation $g(\tau) = 0$.

Let us consider the case when the condition $v_d(\tau) \neq 0$ is not satisfied for the type τ . Since the equation $g(\tau) = 0$ is linear with respect to $v_d(\tau)$, we can write the equation for $v_d(\tau)$:

$$v_d(\tau) = v_d^{\max}(\tau) \frac{\text{Sum}_{K+}(\tau) + \text{Sum}_{\alpha+}(\tau)}{(\text{Sum}_{K+}(\tau) + \text{Sum}_{\alpha+}(\tau)) - (\text{Sum}_{K-}(\tau) + \text{Sum}_{\alpha-}(\tau))}.$$

If the denominator of this fraction is not equal to zero, then the equation $g(\tau) = 0$ has the solution $v_d(\tau) \neq 0$. Let us assume the opposite. The denominator of the fraction can be written as follows:

$$\text{Sum}_{K^+}(\tau) + \text{Sum}_{\alpha^+}(\tau) + (-\text{Sum}_{K^-}(\tau)) + (-\text{Sum}_{\alpha^-}(\tau)).$$

All terms in the sums $\text{Sum}_{K^-}(\tau)$ and $\text{Sum}_{\alpha^-}(\tau)$ are non-positive, so we can assume that all terms in the denominator are non-negative. Accordingly, the denominator is equal to zero when each term is equal to zero. But in this case $g(\tau) = 0$ for any value of $v_d(\tau)$. Thus, there is a contradiction with the assumption that there are no solutions.

It can be assumed that if the conditions of the proposition are met, the equation $g(\tau) = 0$ is solvable. \triangleright

Proposition 2. *If a equilibrium point satisfies the conditions of Proposition 1 and for at least one type of cells $\tilde{\theta}$ $N(\tilde{\theta}) = 0$ is true, then it is impossible to determine the stability of the steady state corresponding to this point from the eigenvalues of the matrix of the linearized system.*

\triangleleft Let us show that when the conditions of the proposition are satisfied, the column of the matrix of the linearized system corresponding to the derivative with respect to $N(\tilde{\theta})$ is equal to zero. In this case, one of the eigenvalues of the matrix is equal to zero and it is impossible to draw a conclusion about the stability of the steady state.

Let us consider the derivatives of $\frac{\partial f(\tau, t)}{\partial N(\theta)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\tau, t)}{\partial N(\theta)} = & S_r(\tau) \left[v_d(\tau) \delta_{\tau\theta} h_\theta \varepsilon_d(\tau, N) + v_d(\tau) \hat{N}(\tau) \frac{\partial \varepsilon_d(\tau, N)}{\partial N(\theta)} \right. \\ & \left. + v_d(\theta) h_\theta \delta(\tau \leftarrow \theta, N) (2 - \varepsilon_d(\theta, N)) \right] + S_r(\tau) \sum_{\acute{\tau}} \left[v_d(\acute{\tau}) \hat{N}(\acute{\tau}) \frac{\partial \delta(\tau \leftarrow \acute{\tau})}{\partial N(\theta)} (2 - \varepsilon_d(\acute{\tau}, N)) \right. \\ & \left. - v_d(\acute{\tau}) \hat{N}(\acute{\tau}) \delta(\tau \leftarrow \acute{\tau}, N) \frac{\partial \varepsilon_d(\acute{\tau}, N)}{\partial N(\theta)} \right] - v_d(\tau) \delta_{\tau\theta} h_\theta, \end{aligned}$$

where $\delta_{\tau\theta}$ is the Kronecker delta, $h_\theta = h(N(\theta) - 1 + c)$ is the Heaviside function.

Since each term contains the value $v_d(\tau^*)N(\tau^*)$ or $v_d(\theta)h_\theta$, and for each type of cell the conditions of proposition 1 are true, then $\frac{\partial f(\tau, t)}{\partial N(\theta)} = 0$.

Let us show that if there is a cell type $\tilde{\theta}$ for which $N(\tilde{\theta}) = 0$, then $\frac{\partial g(\tau, t)}{\partial N(\tilde{\theta})} = 0$.

$$\frac{\partial \text{Inf}(\tau \leftarrow \acute{\tau}, N)}{\partial N(\tilde{\theta})} = \begin{cases} \text{Pr}(\tau \leftarrow \acute{\tau}) I_s(\acute{\tau}) \frac{\delta_{\acute{\tau}\tilde{\theta}} h_{\tilde{\theta}} \text{Disp}(\acute{\tau}, N) - \hat{N}(\acute{\tau}) h_{\tilde{\theta}}}{\text{Disp}(\acute{\tau}, N)^2}, & \text{if } \text{Pr}(\tau \leftarrow \acute{\tau}) \hat{N}(\acute{\tau}) > 0; \\ 0, & \text{if } \text{Pr}(\tau \leftarrow \acute{\tau}) \hat{N}(\acute{\tau}) = 0. \end{cases}$$

Both expressions in the numerator are either equal to zero or depend on $h_{\tilde{\theta}}$, which is also equal to zero at $N(\tilde{\theta}) = 0$.

The equality to zero of the derivatives $\text{Inf}(\tau \leftarrow \acute{\tau}, N)$ implies the equality to zero of the derivatives $\text{Sig}(\tau \leftarrow \acute{\tau}, N)$, $\varepsilon_d(\tau, N)$, $\delta(\tau \leftarrow \acute{\tau}, N)$, $\text{Sum}_{K^+}(\tau, N)$, $\text{Sum}_{\alpha^+}(\tau, N)$, $\text{Sum}_{K^-}(\tau, N)$, $\text{Sum}_{\alpha^-}(\tau, N)$. This implies that the derivatives of $\frac{\partial g(\tau, t)}{\partial N(\tilde{\theta})}$ are equal to zero for all values of τ . \triangleright

An exception to the situation under consideration is the equilibrium point, at which the conditions $N(\tau) \neq 0$, $v_d(\tau) = 0$ are satisfied for all cell types. We will show that in this case it is also impossible to estimate the stability of the steady state using the sign of the eigenvalues of the matrix of the linearized system.

Proposition 3. *If there is a moment of time t_0 such that for any cell type τ at $t \geq t_0$ at least one of the conditions is true:*

1. $N(\tau, t) \neq 0$;
2. $v_d(\tau, t) = 0$ and $\forall \hat{\tau} K(\tau \leftarrow \hat{\tau}) > 0 : \Pr(\tau \leftarrow \hat{\tau}) = 0$ and $\forall \hat{\tau} \neq \tau \alpha(\hat{\tau}) > 0$, $O(\tau \leftarrow \hat{\tau}) = 1 : \Pr(\tau \leftarrow \hat{\tau}) = 0$ and $\forall \hat{\tau} \neq \tau \alpha(\hat{\tau}) > 0$, $\forall \tau^* D(\hat{\tau} \leftarrow \tau^*) = \tau : \Pr(\tau \leftarrow \hat{\tau}) = 0$.

Then the set of values $(N(\tau_1), N(\tau_2), \dots, N(\tau_n), v_d(\tau_1), v_d(\tau_2), \dots, v_d(\tau_n))$ is an equilibrium point of the system (10).

◁ This proposition is a special case of Proposition 1. For such equilibrium points, the second condition of this proposition is satisfied for all types. The conditions $\text{Sig}(\tau \leftarrow \hat{\tau}, N) = 0$ are satisfied when $\Pr(\tau \leftarrow \hat{\tau}) = 0$. ▷

Proposition 4. *If the equilibrium point satisfies the conditions of Proposition 3, then it is impossible to determine the stability of the corresponding steady state from the eigenvalues of the matrix of the linearized system.*

◁ This proposition is proved similarly to Proposition 2.

Since each term in the expression for $\frac{\partial f(\tau, t)}{\partial N(\theta)}$ contains $v_d(\tau)$, $v_d(\hat{\tau})$ or $v_d(\theta)$, the entire sum is equal to zero. Accordingly, all derivatives $\frac{\partial f(\tau, t)}{\partial N(\theta)} = 0$.

Let us consider the derivative $\frac{\partial g(\tau, t)}{\partial N(\theta)}$. When $v_d(\tau) = 0$, the expression for it takes the form:

$$\frac{\partial g(\tau, t)}{\partial N(\theta)} = \frac{\partial \text{Sum}_{K^+}(\tau)}{\partial N(\theta)} + \frac{\partial \text{Sum}_{\alpha^+}(\tau)}{\partial N(\theta)}.$$

The fulfillment of the condition $\forall \hat{\tau} K(\tau \leftarrow \hat{\tau}) > 0 : \Pr(\tau \leftarrow \hat{\tau}) = 0$ implies $\frac{\partial \text{Sum}_{K^+}(\tau)}{\partial N(\theta)} = 0$.

The fulfillment of the conditions $\forall \hat{\tau} \neq \tau \alpha(\hat{\tau}) > 0$, $O(\tau \leftarrow \hat{\tau}) = 1 : \Pr(\tau \leftarrow \hat{\tau}) = 0$ and $\forall \hat{\tau} \neq \tau \alpha(\hat{\tau}) > 0$, $\forall \tau^* D(\hat{\tau} \leftarrow \tau^*) = \tau : \Pr(\tau \leftarrow \hat{\tau}) = 0$ implies that the derivatives $\frac{\partial \varepsilon_d(\tau, N)}{\partial N(\theta)}$ and $\frac{\partial \delta(\tau \leftarrow \hat{\tau})}{\partial N(\theta)}$. It follows that $\frac{\partial \text{Sum}_{\alpha^+}(\tau)}{\partial N(\theta)} = 0$. ▷

Thus, for the specified types of equilibrium points it is necessary to use other methods of stability research. In addition to the considered types of equilibrium points, another case is possible: equality to zero of the function $f(\tau)$ can be achieved not only if all terms defining this expression are equal to zero, but also if the condition is met:

$$S_r(\tau)\varepsilon_d(\tau, N) + S_r(\tau)\delta(\tau \leftarrow \tau, N)(2 - \varepsilon_d(\tau, N)) - 1 < 0.$$

In this case, the first term will be negative and other solutions of the equation are possible. The existence of equilibrium points of this type needs to be checked. It is also necessary to assess the possibility of using the eigenvalues of the matrix of the linearized system to determine the stability of such steady states.

3. Modeling

To assess the adequacy of the influence of the introduced parameters $\alpha(\tau)$ and $S_r(\tau)$, modeling of the population dynamics of multicellular clusters was carried out for different values of the parameters under consideration. The modeling results are presented in the graphs below.

- 1) Division of cells of arbitrary type $\alpha(\tau) < 0$.

As the population ages, its rate of division decreases to zero. Fig. 1 shows that at a certain point in time, cells stop dividing and the system reaches a steady state.

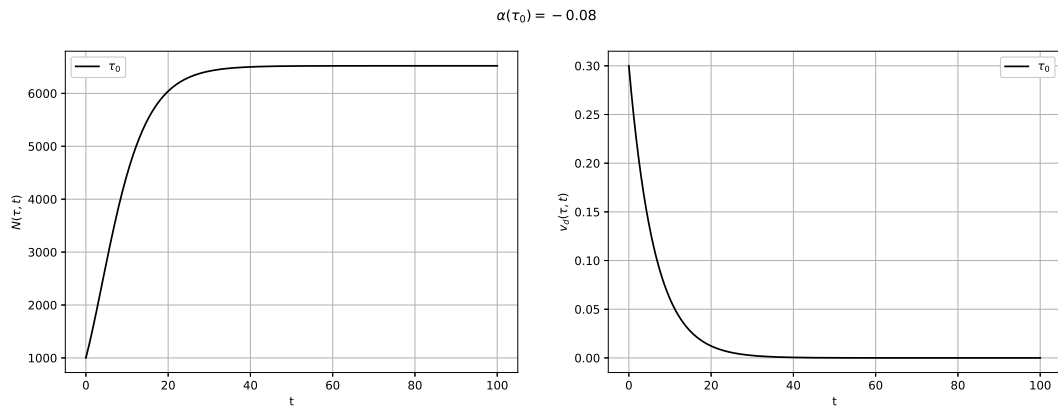


Fig. 1.

2) Two cell types (stem cells τ_0 and arbitrary type τ_1). $\alpha(\tau_0) > 0$, $\alpha(\tau_1) < 0$. All stem cells differentiate into τ_1 . All cells of type τ_1 divide into cells of the same type.

Fig. 2 shows that after all stem cells have differentiated into τ_1 , the number of τ_1 cells continues to increase in a different way for some time and then stops changing.

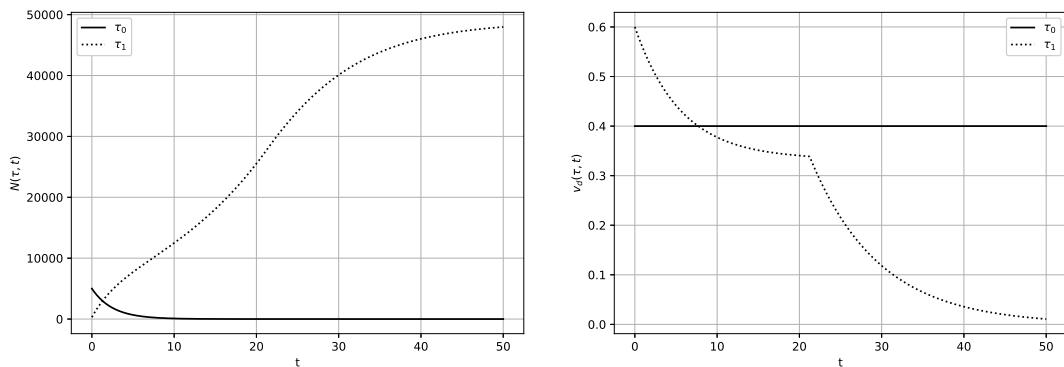


Fig. 2.

3) Division of stem cells. No effect of population aging.

The simulation was performed with different values of the population survival rate. The simulation results are presented in Figure 3.

The graphs show three possible scenarios for the development of a cell population:

1. $S_r(\tau_0) > 0.5$: the population is growing.
2. $S_r(\tau_0) = 0.5$: the number of new cells is exactly twice as large as the number of dead cells — the population size does not change.
3. $S_r(\tau_0) < 0.5$: the population goes extinct.

To confirm the adequacy of the above propositions describing the type and stability of the steady states of the system, a modeling of change in the number of cells and the rate of their division was carried out. The values of the system parameters were generated randomly. For each system, the eigenvalues of the matrices of the linearized systems were found. The results of the modeling are presented in the graphs.

4) The steady state of the system, satisfying the conditions of Proposition 1.

Several eigenvalues of the matrix of the linearized system are equal to zero. Fig. 4 shows an example of an equilibrium point. It is clear that if the population size is not equal to zero, then the division rate is equal to zero (types τ_0 and τ_3) and, conversely, if the population size is equal to zero, then the division rate is not equal to zero (types τ_1, τ_2).

5) The steady state of the system, satisfying the conditions of Proposition 3.

Several eigenvalues of the matrix of the linearized system are also equal to zero when all division rates are equal to zero.

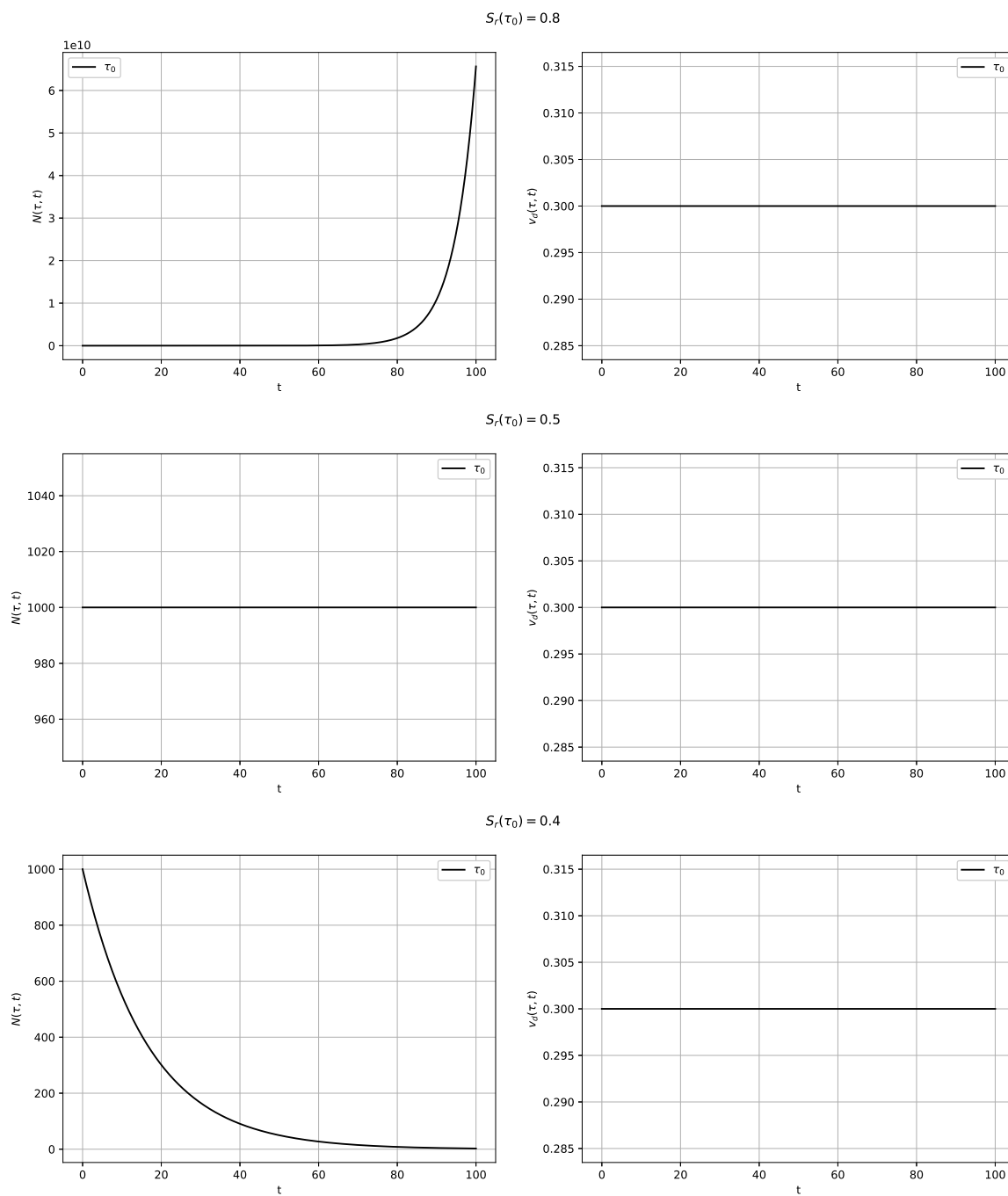


Fig. 3.

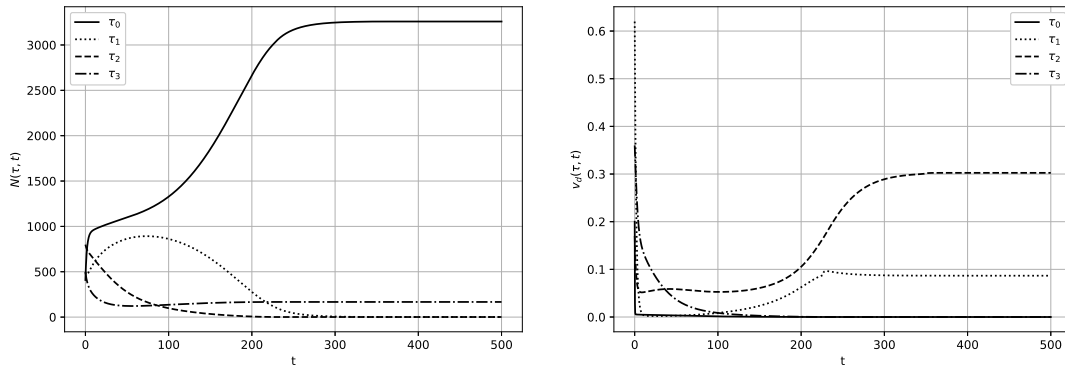


Fig. 4.

Fig. 5 shows an example of an equilibrium point at which all cell types have non-zero population sizes and all division rates is equal to zero.

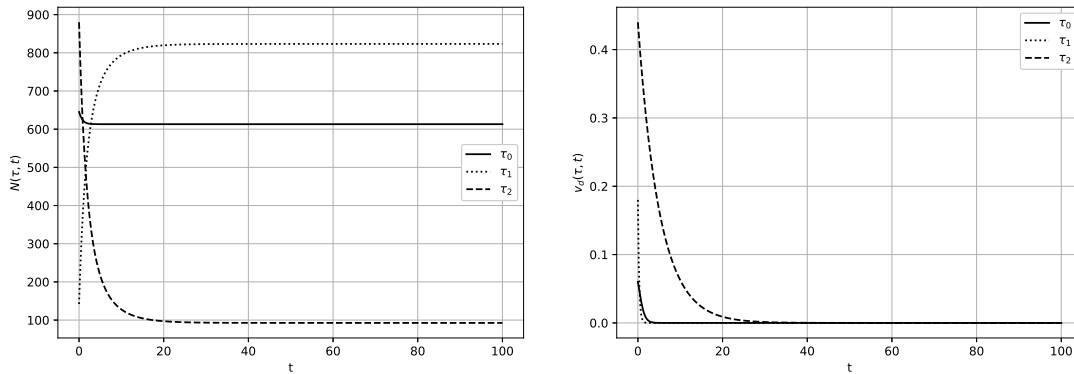


Fig. 5.

6) A steady state of the system that does not satisfy the conditions of Proposition 1.

One of the eigenvalues is also equal to zero. Presumably, this is due to the fact that one of the values of the division rate at the equilibrium point is equal to zero. Fig. 6 shows an example of an equilibrium point at which the population sizes and cell division rates of types τ_0 and τ_1 are not equal to zero simultaneously.

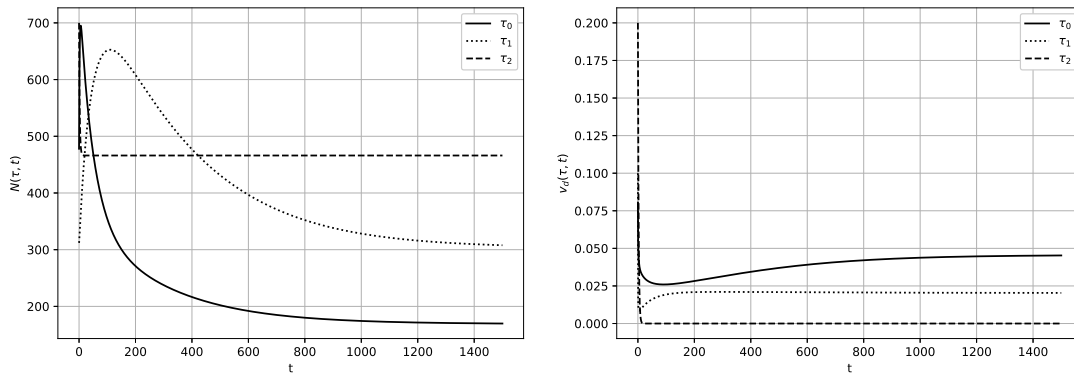


Fig. 6.

4. Results

Adding the cell division limit and the survival rate to the consideration allows us to take into account a larger number of scenarios for the development of multicellular cluster systems. Aging of cell populations and limitation of their growth due to the influence of the environmental and intracellular processes for necrosis and apoptosis leads to the emergence of steady states in systems. In mathematical models that do not take these factors into account, the behavior of systems will show unlimited population growth instead of establishing a steady state, which does not allow for an adequate assessment of dynamic regimes.

The main limitation in the obtained model is the impossibility of assessing the stability of steady states using the eigenvalues of the matrix of the linearized system. Many of the equilibrium points of the system of differential equations have either zero values of the population size $N(\tau)$ or the cell division rate $v_d(\tau)$. Such situations arise in two cases:

1. The population goes extinct due to aggressive external conditions ($S_r(\tau) < 0.5$) or when differentiating into cells of a different type.
2. The population loses the ability to divide due to signaling interactions between cells ($K(\tau \leftarrow \hat{\tau}) < 0$) or natural aging of the population ($\alpha(\tau) < 0$).

In systems with a large number of cell types, the possibility of such development scenarios cannot be excluded. Determining the stability of these steady states is problematic. To adequately assess possible scenarios for the morphogenesis of systems with a large number of cell types, it is necessary to answer the following questions:

1. are steady states of other types possible;
2. is it possible to estimate the stability of steady states of other types using the Lyapunov method;
3. what are the conditions for the emergence of steady states of other types.

References

1. Brauer, F. and Castillo-Chavez, C. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Texts in Applied Mathematics, vol. 40, New York, Springer Verlag, 2012, xxiv+508 pp. DOI: 10.1007/978-1-4614-1686-9.
2. Wyczalkowski, M. A., Chen, Z., Filas, B. A., Varner, V. D. and Taber, L. A. Computational Models for Mechanics of Morphogenesis, *Birth Defects Research, Part C*, 2012, vol. 96, no. 2. pp. 132–152. DOI: 10.1002/bdrc.21013.
3. Krasnyakov, I. V., Bratsun, D. A. and Pismen, L. M. Mathematical Modelling of Epithelial Tissue Dynamics, *Russian Journal of Biomechanics*, 2020, vol. 24, no. 4, pp. 375–388. DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2020.4.03.
4. Okuda, S., Inoue, Y. and Adachi, T. Three-Dimensional Vertex Model for Simulating Multicellular Morphogenesis, *Biophysics and Physicobiology*, 2015, vol. 12, pp. 13–20. DOI: 10.2142/biophysico.12.0_13.
5. Nazarov, M. N. Mathematical Modelling of Tissue Formation on the Basis of Ordinary Differential Equations, *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2017, vol. 21, no. 3, pp. 581–594 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1535.
6. Hayflick, L. The Limited in Vitro Lifetime of Human Diploid Cell Strains, *Experimental Cell Research*, 1965, vol. 37, no. 3, pp. 614–636. DOI: 10.1016/0014-4827(65)90211-9.
7. Shliapina, V. L., Yurtaeva, S. V., Rubtsova, M. P. and Dontsova, O. A. At the Crossroads: Mechanisms of Apoptosis and Autophagy in Cell Life and Death, *Acta Naturae*, 2021, vol. 13, no. 2, pp. 106–115. DOI: 10.32607/actanaturae.11208.
8. Festjens, N., Berghe, T. V. and Vandennebeele, P. Necrosis, a Well-Orchestrated form of Cell Demise: Signalling Cascades, Important Mediators and Concomitant Immune Response, *Biochimica et Biophysica Acta (BBA) – Bioenergetics*, 2006, vol. 1757, no. 9–10, pp. 1371–1387. DOI: 10.1016/j.bbabi.2006.06.014.
9. Nazarov, M. N. The Search for Universal Parameters for the Models of Morphogenesis, *Vladikavkaz Math. J.*, 2013, vol. 15, no. 3, pp. 58–66 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2014.3.7353.

Received October 31, 2024

MIKHAIL A. SMIRNOV

National Research University of Electronic Technology,
1 Shokin Square, Zelenograd, Moscow 124498, Russia,
Master's Student of the High Mathematics-1 Department
E-mail: mikhail.smirnov.aat@yandex.ru

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 4, С. 136–147

О ВЛИЯНИИ ПРОЦЕССОВ, ВЕДУЩИХ К СМЕРТИ КЛЕТОК, НА ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ МОДЕЛИ ТКАНЕОБРАЗОВАНИЯ

Смирнов М. А.¹

¹ Национальный исследовательский университет «МИЭТ»,
Россия, 124498, Москва, Зеленоград, пл. Шокина, 1

E-mail: mikhail.smirnov.aat@yandex.ru

Аннотация. В статье за счет введения дополнительных параметров обобщается математическая модель, которая описывает популяционную динамику клеточных скоплений на основе системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Предлагается добавить в модель два типа коэффициентов: коэффициент выживаемости, описывающий долю клеток, погибающих в результате воздействия на клетки внешней среды и последующего процесса аутофагии или из-за внутриклеточных процессов, ведущих к смерти (некроз, апоптоз), и коэффициент старения, описывающий ограничение в скорости и возможности деления клеток из-за сокращения длины теломер хромосом клеток при митозе. Добавляемые коэффициенты обладают биологическим смыслом и могут быть оценены в ходе эксперимента, как того требует исходная рассмотренная модель. Учет в математической модели этих параметров позволил определить у системы дифференциальных уравнений, описывающей поведение многоклеточных скоплений, новые динамические режимы. Для полученной системы дифференциальных уравнений был проведен анализ ее особых точек и устойчивости стационарных состояний, которые соответствуют этим точкам. Были определены значения параметров математической модели, при которых система переходит в стационарное состояние. Также были выявлены ограничения на значения параметров, при которых оценка устойчивости стационарных состояний по методу Ляпунова невозможна. Из полученных условий следует, что одним из случаев, когда система клеточных скоплений приходит к стационарному состоянию, является вымирание или прекращение деления клеток каждой популяции. Возможны также и стационарные состояния другого вида, для которых критерии существования и устойчивости еще предстоит оценить.

Ключевые слова: системы нелинейных дифференциальных уравнений, моделирование морфогенеза, программируемая клеточная смерть, предел Хейфлика.

AMS Subject Classification: 34A34, 34D20.

Образец цитирования: Smirnov M. A. The Effect of Processes Leading to Cell Death on the Dynamic Regimes of the Tissue Formation Model // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 4.—С. 136–147 (in English). DOI: 10.46698/b9180-8816-3043-b.

УДК 517.98

DOI 10.46698/x9860-3651-6483-z

WHAT REMAINS THE SAME IN ORDER CONVERGENCE TYPES

A. Uyar¹

¹Gazi University, Department of Mathematics and Science Education,
Ankara 06560, Turkey

E-mail: ayseuyar70@gmail.com

Abstract. In this paper, we examine what remains the same between order convergence and unbounded order convergence, as well as between unbounded order continuity and strongly unbounded order continuity. In [1], Gao et al. proved that a sublattice of a Riesz space is order closed if and only if it is unbounded order closed. It is shown that σ -ideals and unbounded σ -ideals are the same. Additionally, it is established that injective band operators are unbounded order continuous, while bijective order bounded disjoint preserving operators are order continuous. Let G be an order dense majorizing Riesz subspace of a Riesz space E , and let F be a Dedekind complete Riesz space. In reference [2], the question is posed: If $T : G \rightarrow F$ is a positive strongly unbounded order continuous operator, does T have a unique positive strongly unbounded order continuous extension to all of E ? We prove that this problem has a positive answer whenever G is *su*o-convergence reducing of E , namely, if $x_\alpha \xrightarrow{su} 0$ in E then $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ in G for any net (x_α) in G .

Keywords: unbounded order convergent, unbounded order closed ideal, unbounded order continuous operator, strongly unbounded order continuous operator.

AMS Subject Classification: 46A40, 47B65.

For citation: Uyar, A. What Remains the Same in Order Convergence Types, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 148–156. DOI: 10.46698/x9860-3651-6483-z.

1. Introduction and Preliminaries

In classical literature such as [3, 4], the definition of order convergence are slightly different. In [5], various types of order convergence are investigated. We will consider two of them. A *net* of a set X is a mapping $u : \Gamma \rightarrow X$ from a directed set Γ to X . As usual, $u(\alpha)$ is denoted by x_α and the net $u : \Gamma \rightarrow X$ by (x_α) , omitting the directed set Γ if its presence is not necessary.

Let E be the Riesz space. A net $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ in E is:

(a) *order convergent* (*o-convergent*) to $x \in E$ if there is another net $(z_\beta)_{\beta \in \Lambda}$ in E with $z_\beta \downarrow 0$ and for every β , there exists α_0 such that $|x_\alpha - x| \leq z_\beta$ for all $\alpha \geq \alpha_0$. In this case, we write $x_\alpha \xrightarrow{o} x$.

(b) *strongly order convergent* (*so-convergent*) to $x \in E$ if there is a net $(y_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ in E such that $(y_\alpha) \downarrow 0$ and $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ for some α_0 and for all $\alpha \geq \alpha_0$. In this case, we write $x_\alpha \xrightarrow{so} x$.

Obviously, $x_\alpha \xrightarrow{so} x$ implies $x_\alpha \xrightarrow{o} x$. In general, *o*-convergence of a sequence does not imply *so*-convergence (see [5, Example 1.4]). If E is the Dedekind complete Riesz space, then strongly order convergence is equivalent to order convergence. A net (x_α) is *unbounded order convergent* (*uo-convergent*) to $x \in E$, written as $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$, if $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ for all $u \in E_+$.

Similarly, strongly unbounded order convergence is defined. In this case, we write $x_\alpha \xrightarrow{su0} x$. It is clear that $x_\alpha \xrightarrow{su0} x$ implies $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$.

Recall that a net (x_α) in a Riesz space E is said to be *order bounded* if there exists $x \in E_+$ such that $|x_\alpha| \leq x$ for all α . For any net (x_α) in E ,

- (i) $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ iff $|x_\alpha| \xrightarrow{uo} 0$;
- (ii) $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ iff $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ and a tail of (x_α) is order bounded;
- (iii) $x_\alpha \xrightarrow{so} 0$ iff $x_\alpha \xrightarrow{su0} x$ and a tail of (x_α) is order bounded.

Note that the *uo*-limit is unique whenever it exists. Let \mathbb{R}^X be the Riesz space of all real-valued functions on a non-empty set X , equipped with the pointwise order. It is not difficult to see that a net x_α in \mathbb{R}^X *uo*-converges to $x \in \mathbb{R}^X$ iff it converges pointwise to x . For general results on *uo*-convergence we refer the reader to [1, 6, 7].

An order closed ideal is referred to as *band*. Let A be a nonempty subset of the Riesz space E . Then the band generated by A is the smallest band that contains A . The band generated by a set A and an element x is denoted by B_A and B_x , respectively. We write A^{dd} for $(A^d)^d$ where A^d is *disjoint complement* of A , namely, $A^d = \{x \in E : x \perp y \text{ for all } y \in A\}$. The band generated by a nonempty subset A of an Archimedean Riesz space is A^{dd} . The ideal A in E is called *σ -ideal* whenever it follows from $(x_n) \subset A$ and $\sup x_n = x$ in E that $x \in A$.

All Riesz spaces are assumed to be Archimedean. For terminology and results on Riesz spaces not explained in this paper we refer to [3, 4, 8, 9].

In [10], unbounded order continuous operators are introduced. An operator $T : E \rightarrow F$ between two Riesz spaces is said to be *unbounded order continuous (uo-continuous)*, if $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ in E implies $Tx_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ in F . The definition of the *strongly unbounded order continuous (suo-continuous)* operator is similar. In particular, lattice operations are unbounded order continuous (see [7, Lemma 3.1]).

It is known that the sublattice of a Riesz space is order closed if and only if it is unbounded order closed (see [1, Proposition 3.15]). In section 2 of this paper, a simpler proof of this proposition is given, taking the ideal instead of the sublattice. Moreover, it is obtained that the class of σ -ideals is the same as the class of unbounded σ -ideals. In section 3, it is demonstrated that an injective principal band operator is *uo*-continuous, and a bijective order bounded disjoint preserving operator is order continuous. In section 4, we aim to provide a partial solution to the open problem given in [2, Problem 7].

2. Unbounded Order Closed Ideals

In [11], Bilokopytov presents a characterization of the *uo*-convergence as follow:

Proposition 1 [11, Theorem 6.4]. *Let $(x_\alpha) \subset E$ and $x \in E$. Then $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ iff*

- (i) $\inf_{\alpha' \geq \alpha} (x \vee x_{\alpha'}) = x = \sup_{\alpha' \geq \alpha} (x \wedge x_{\alpha'})$ for every α ,
- and
- (ii) if $y \in E$ and $\inf_{\alpha' \geq \alpha} (y \vee x_{\alpha'}) = y = \sup_{\alpha' \geq \alpha} (y \wedge x_{\alpha'})$ for every α , then $y = x$ hold.

Corollary 1 [12, Lemma 3.1]. *Let E be a Riesz space and $(x_\alpha) \subset E$ such that $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$. Then $\inf |x_\alpha| = 0$.*

◁ It follows from Lemma 3.1 in [7] $|x_\alpha| \xrightarrow{uo} 0$. By Proposition 1, $\inf_{\alpha' \geq \alpha} |x_{\alpha'}| = 0$ for every α . It is easily seen that $\inf |x_\alpha| = 0$. ▷

Let E be a Riesz space and $(x_\alpha) \subset E$. It is said that (x_α) is *eventually null net* if there is α_0 such that $x_\alpha = 0$, for every $\alpha \geq \alpha_0$. Every element of c_{00} is eventually null net. From Theorem 3.2 in [1], if A is either an ideal or order dense sublattice of Riesz space E , then for a net (x_α) in A , $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ in A iff $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ in E . Thus, for a net (x_α) in E , $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ in E

iff $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ in a Dedekind complete of E [1]. Therefore, without loss of generality, we may assume that E is Dedekind complete in some uo -convergence studies.

Proposition 2. Let E be a Riesz space and $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma} \subset E$.

(i) Recall that, an element $\alpha_0 \in \Gamma$ is said to be maximal whenever $\alpha_0 \leq \alpha$ for any $\alpha \in \Gamma$, then $\alpha_0 = \alpha$. If the index set Γ has a maximal element and $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$, then (x_α) eventually null net.

(ii) If E is a Riesz space and $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ is a disjoint net in E such that the index set Γ doesn't have a maximal element then $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$.

\triangleleft (i) Suppose that the index set Γ has a maximal element and let this element be α_0 . Let $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ and $u = |x_{\alpha_0}|$. Then $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$. There is another net (z_β) in E such that $z_\beta \downarrow 0$ and that for any β , there exists α_1 such that $|x_\alpha| \wedge u \leq z_\beta$ for all $\alpha \geq \alpha_1$. Let's take an arbitrary β and consider α_1 corresponding to this β . Let's choose the index α_2 , which yields $\alpha_0 \leq \alpha_2$ and $\alpha_1 \leq \alpha_2$. For every $\alpha \geq \alpha_2$, we have $x_\alpha = x_{\alpha_0}$ and so $|x_{\alpha_0}| = |x_\alpha| \wedge u \leq z_\beta$. Thus, $|x_{\alpha_0}| \leq z_\beta$ for every β . Then we have $x_\alpha = 0$ for every $\alpha \geq \alpha_0$.

(ii) Let's assume that E is a Dedekind complete. Fix $u \in E_+$. We claim that $0 \leq \sup_{\alpha' \geq \alpha} (|x_{\alpha'}| \wedge u) \downarrow_\alpha 0$. Suppose that $\sup_{\alpha' \geq \alpha} (|x_{\alpha'}| \wedge u) \geq y \geq 0$ for all α . Since Γ doesn't have a maximal element, Γ has an element α_0 such that $\alpha < \alpha_0$ for each α . Then,

$$0 \leq y \wedge |x_\alpha| \leq \left(\sup_{\alpha' \geq \alpha_0} (|x_{\alpha'}| \wedge u) \right) \wedge |x_\alpha| = \sup_{\alpha' \geq \alpha_0} (|x_{\alpha'}| \wedge |x_\alpha| \wedge u) = 0.$$

Thus, we have $y \wedge |x_\alpha| = 0$ for all α . Let choose $\alpha_1 \in \Gamma$. It follows that

$$y = y \wedge \sup_{\alpha' \geq \alpha_1} (|x_{\alpha'}| \wedge u) = \sup_{\alpha' \geq \alpha_1} (y \wedge |x_{\alpha'}| \wedge u) = 0.$$

Now it is immediately that $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$. \triangleright

The above proposition is analogue to Corollary 3.6 in [1]. The condition in the proposition that the index set does not have a maximal element cannot be removed.

EXAMPLE 1. Let $X = [0, 1]$ and $f_\alpha \in \mathbb{R}^X$ be denoted the characteristic function of $\{\alpha\}$ for each $\alpha \in X$. It is easy to see that $(f_\alpha)_{\alpha \in X}$ is a disjoint net but not uo -converge to 0.

Let us present the routine definition of unbounded order closed sets.

DEFINITION 1. Let E be a Riesz space.

(i) A subset A of E is said to be *unbounded order closed* (uo -closed) whenever $(x_\alpha) \subset A$ and $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ imply $x \in A$,

(ii) An ideal A in E is said to be *unbounded σ -ideal* (uo -ideal) in E whenever $(x_n) \subset A$ and $x_n \xrightarrow{uo} x$ imply $x \in A$,

(iii) An ideal A in E is said to be *unbounded order band* (uo -band) in E whenever A is uo -closed.

(iv) Let A be a nonempty subset of E . Then the *uo-band generated* by A is the smallest (with respect to inclusion) uo -band that includes A . The uo -band generated by a vector $x \in E$ will be denoted U_x .

Clearly, the uo -band generated by A coincides with the band generated by the ideal generated by A . The unbounded order continuity of the lattice operations guarantees disjoint complement of any nonempty set is a uo -band. Thus, we get the following simple result.

Corollary 2. Let A be an ideal in E and $(x_\alpha) \subset A_+$, $x \in E_+$, such that $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ in E . Then $x \in A^{dd}$.

\triangleleft It follows easily that A^{dd} is the band generated by A . \triangleright

It is clear that $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ in E implies $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$, the converse is not true. Let $E = c_0$, and let (e_n) be the standard basis of E . Then (e_n) uo -converges to 0, but it is not order convergent to zero. However, the sublattice of a Riesz space is order closed if and only if it is unbounded order closed (see [1, Proposition 3.15]). We obtain a simpler proof of this result when we work with ideals instead of sublattices.

Proposition 3. *Let E be a Riesz space and A be an ideal in E . Then A is uo -closed if and only if A is o -closed. In other words, A is a band iff A is a uo -band.*

◁ The “only if” part is straightforward since order convergent nets are uo -convergent.

For the “if” part, suppose A is a o -closed. Then A is a band. If U_A is a uo -band generated by A , then $U_A \subset A^{dd}$ because A^{dd} is a uo -band. Since $A = A^{dd}$ (see [8, Theorem 1.28]), $A = U_A$ and so A is uo -closed. ▷

In the case of sequentially closeness, we will use the characterization of uo -convergence that we gave at the beginning of this section.

Proposition 4. *A is a uo -ideal in a Riesz space E if and only if A is a σ -ideal in E .*

◁ The “only if” part straightforward since order convergent sequences are uo -convergent.

For the “if” part, suppose A is a σ -ideal, and let $(x_n) \subset A$, $x \in E$ and $x_n \xrightarrow{uo} x$ in E . Then $|x_n| \xrightarrow{uo} |x|$ in E by [7, Lemma 3.1]. Thus, without loss of generality, we assume $(x_n) \subset A_+$ and $x \in E_+$. By Theorem 6.4 of [11], $\sup(x \wedge x_n) = x$. Since $x \wedge x_n \in A$ for every n , we have $x \in A$. ▷

A sublattice A of a Riesz space E is said to be *dense with respect to order convergence* (uo -convergence) if every vector in E is order limit (unbounded order limit) of a net in A . Then, A is dense with respect to order convergence iff A is dense with respect to unbounded order convergence. Indeed, it is clear that if A is dense with respect to order convergence then A is dense with respect to unbounded order convergence. On the other hand, we have $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ then $(|x_\alpha - x| + x) \wedge (|x| + x) \xrightarrow{o} x$. Thus, if A is dense with respect to unbounded order convergence then it is dense with respect to order convergence.

3. Unbounded Order Continuous Operators

In [10, 13], uo -continuous operators were introduced and investigated. Then, some properties of uo -continuous operators were studied in [2, 12]. Recall that an operator $T : E \rightarrow F$ between two Riesz spaces is said to be *unbounded order continuous* (uo -continuous), if $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ in E implies $Tx_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ in F . The definition of the strongly unbounded order continuous (suo -continuous) operator is similar.

It is well known that every order continuous operator is order bounded [5, Theorem 2.1]. It is easy to see that every uo -continuous functional is order continuous and so order bounded. It is natural to ask whether uo -continuous operators are order bounded:

QUESTION 1. Is every uo -continuous (suo -continuous) operator order bounded?

Let $T : E \rightarrow F$ be an order bounded operator between two Riesz space with F Dedekind complete. If T is a uo -continuous (suo -continuous) operator then $|T|$ is a uo -continuous (suo -continuous) (see [2, Theorem 2]). This theorem allows us to present an alternative and shorter proof of Proposition 3.2 of [12].

Proposition 5. *Let $T : E \rightarrow F$ be an order bounded operator between two Riesz spaces with F Dedekind complete.*

- (i) *If T is a uo -continuous operator, then T^+ , T^- , T and $|T|$ is an o -continuous.*
- (ii) *If T is an suo -continuous operator, then T^+ , T^- , T and $|T|$ is an o -continuous.*

◁ (i) It is enough to show that T^+ is an o -continuous operator. Let $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ in E . Then, $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ and a tail of (x_α) is order bounded. Since T^+ is a positive uo -continuous operator, $T^+x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ and a tail of (T^+x_α) is order bounded. Therefore $T^+x_\alpha \xrightarrow{o} 0$.

(ii) The proof is also valid, with minor modification, for the o -continuity of T^+ . However, let us give a shorter proof. Let $x_\alpha \downarrow 0$ in E . Then $T^+x_\alpha \xrightarrow{su0} 0$. From Corollary 1, $T^+x_\alpha \downarrow 0$. ▷

Proposition 6. Let $T : E \rightarrow F$ be a lattice homomorphism between two Riesz spaces. The following are equivalent:

- (1) T is uo -continuous;
- (2) T is o -continuous;
- (3) T is $su0$ -continuous.

◁ By [12, Theorem 3.3], (1) \Leftrightarrow (2) and by Proposition 5, (3) \Rightarrow (2) hold. It is enough to show that (2) \Rightarrow (3). Let T be a $su0$ -continuous and $x_\alpha \downarrow 0$. Then we have $T^+x_\alpha \xrightarrow{su0} 0$ and so $T^+x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$. By Corollary 1, $\inf Tx_\alpha = 0$. Therefore, we obtain that $Tx_\alpha \downarrow 0$. ▷

As a consequence of the preceding proposition, we obtain the following result.

Corollary 3. Let $T : E \rightarrow F$ be an order bounded disjoint preserving operator between two Riesz spaces. The following are equivalent:

- (1) T is uo -continuous;
- (2) T is o -continuous;
- (3) T is $su0$ -continuous.

◁ If $T : E \rightarrow F$ is an order bounded disjoint preserving operator, then its modulus exists and $|T| : E \rightarrow F$ is a lattice homomorphism [4, Theorem 2.40]. Using Proposition 6, the proof is easily obtained. ▷

The author introduced the definition of the band operator in [14]. Some properties were proved for band operators and inverse band operators, including the relations between band operators and disjointness preserving operators in [15] and [16]. Let $T : E \rightarrow F$ be an operator between two Riesz space. T is called a *band operator* if $T(B)$ is a band in F for each band B in E . T is called *principal band operator* if $B_{Tx} \subset T(B_x)$ for each $x \in E$. It is easy to see that if T is a band operator then T is a principal band operator (see [16, Corollary 5]). Let, now, we can give the next result.

Corollary 4. Let $T : E \rightarrow F$ be an order bounded injective principal band operator between two Riesz spaces. Then T is o -continuous, uo -continuous and $su0$ -continuous operator.

◁ Since T is an order bounded injective principal band operator, T is order continuous by [16, Theorem 16]. From [15, Theorem 3.1], T is a disjoint preserving operator. Therefore, T is both uo -continuous and $su0$ -continuous by Corollary 3. ▷

Corollary 5. Let $T : E \rightarrow F$ be an order bounded bijective disjoint preserving operator between two Riesz spaces. Then T and T^{-1} are o -continuous, uo -continuous and $su0$ -continuous operators.

◁ It is well known that T^{-1} is order bounded disjoint preserving operators (see [17, Theorem 1]). Then T and T^{-1} are order bounded band operators by Corollary 9 in [16]. As we mentioned before, both operators are order bounded bijective principal band operators. From Corollary 4, both operators are o -continuous, uo -continuous and $su0$ -continuous. ▷

4. On a Problem About Strongly Unbounded Order Continuous Operators

For a Riesz space E , we write E^δ for its Dedekind completion. Recall from [3, Theorem 1.41] that E^δ is the unique (up to a lattice isomorphism) Dedekind complete Riesz space that contains E as a majorizing and order dense sublattice.

Let E and F be Riesz spaces. We denote the set of all order bounded operators from E into F by $L_b(E, F)$. The space of all uo -continuous order bounded operators (resp. suo -continuous order bounded operators) is denoted by $L_{uo}(E, F)$ (resp. $L_{suo}(E, F)$). If E and F are Dedekind complete Riesz spaces, then $L_{uo}(E, F) = L_{suo}(E, F)$. If F is a Dedekind complete Riesz space, then $L_{uo}(E, F)$ is an ideal in $L_{suo}(E, F)$ (see [2]).

The space $L_{uo}(E, \mathbb{R})$ (resp. $L_{suo}(E, \mathbb{R})$) is denoted by E_{uo}^\sim (resp. E_{suo}^\sim) and it is called *unbounded order continuous* (resp. *strongly unbounded order continuous*) dual of E . Let

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i f_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, f_i \text{ coordinate or functional on } E \right\}.$$

Then we have $\mathcal{L} = E_{uo}^\sim \subseteq E_{suo}^\sim$ by Proposition 2.5 in [12]. On the other hand, it is clear that uo -convergence and suo -convergence of a sequence to an element are the same. Thus, we obtain that $E_{suo}^\sim \subset \mathcal{L}$ by repeating the proof of Proposition 2.2 in the same way in [6]. Thus, the following proposition is easily obtained.

Proposition 7. *Let E be a Riesz space. Then $E_{uo}^\sim = E_{suo}^\sim$.*

In this section, our main aim is to give a partial solution to the following open problem.

PROBLEM 1 [2, Problem 7]. Let G be an order dense majorizing sublattice of a Riesz space E , and let F be a Dedekind complete Riesz space. If $T : G \rightarrow F$ is a positive suo -continuous operator, does T have a unique positive suo -continuous extension to all of E ?

From Proposition 1 (iv) in [2], if this problem is solved positively, then $L_{uo}(E, F) = L_{suo}(E, F)$ for every Dedekind complete Riesz space F .

DEFINITION 2. A sublattice G of a Riesz space E is said to be o -convergence reducing of E if $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ in E then $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ in G for any net (x_α) in G . Similarly, uo -convergence reducing of E and suo -convergence reducing of E are defined.

Let G be an order dense majorizing sublattice of a Riesz space E . Then G is an o -convergence reducing of E and it is also a uo -convergence reducing of E [1]. However, we have illustrated below that G may not be generally suo -convergence reducing of E :

EXAMPLE 2. Let K be the one-point compactification of an uncountable discrete space, and consider the Riesz space $E = C(K)$ with point-wise order. If f_n denotes the characteristic functions of a sequence of distinct singletons in K , the sequence f_n is o -convergent to zero but not so -convergent to zero (see [5, Example 1.4]). It is clear that $f_n \xrightarrow{uo} 0$ in E implies $f_n \xrightarrow{uo} 0$ in E^δ . Since E^δ Dedekind complete, we have $f_n \xrightarrow{suo} 0$ in E . Then E doesn't suo -convergence reducing of E .

By Proposition 2, the following is easily obtained.

Lemma 1. (i) *An operator $T : E \rightarrow F$ between two Riesz spaces is a uo -continuous if and only if the index set Γ of (x_α) doesn't have a maximal element and $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$, then $Tx_\alpha \xrightarrow{uo} 0$.*

(ii) *An operator $T : E \rightarrow F$ between two Riesz spaces is a suo -continuous if and only if the index set Γ of (x_α) doesn't have a maximal element and $x_\alpha \xrightarrow{suo} 0$, then $Tx_\alpha \xrightarrow{suo} 0$.*

In the following proposition, we give the condition under which the open problem given in [2, Problem 7] has a positive answer.

Proposition 8. *Let G be an order dense majorizing sublattice of a Riesz space E , and let F be a Dedekind complete Riesz space. If G is a suo -convergence reducing of E and $T : G \rightarrow F$ is a positive suo -continuous operator, then T has a unique positive suo -continuous extension to all of E .*

\triangleleft Let $T : G \rightarrow F$ be a positive *suo*-continuous operator. Then, $T : G \rightarrow F$ is an *o*-continuous operator. From Theorem 1.65 in [4], the formula

$$S(x) = \sup\{Ty : y \in G \text{ and } 0 \leq y \leq x\}, \quad x \in E_+$$

defines a unique positive order continuous extension \hat{T} of T to all of E with $\hat{T}|_{E_+} = S$. It is enough to show that \hat{T} is *suo*-continuous. Let $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma} \subset E_+$ and $x_\alpha \xrightarrow{suo} 0$ in E . From Lemma 1, we assume that the index set Γ does not have a maximal element. Let $\Lambda_\alpha = \{(\alpha, y) : y \in G \cap [0, x_\alpha]\}$ for each α and $\Lambda = \bigcup \Lambda_\alpha$. Clearly, Λ is directed upward set with respect to the lexicographical order by defining that $(\alpha_1, y_1) \leq (\alpha_2, y_2)$ if and only if $\alpha_1 < \alpha_2$ or $(\alpha_1 = \alpha_2$ and $y_1 \leq y_2)$. Let us set $x_{(\alpha, y)} = y$. Then we have $(x_{(\alpha, y)}) \subset G$. Let's take $u \in E_+$. There is a net (y_α) in E such that $y_\alpha \downarrow 0$ and $x_\alpha \wedge u \leq y_\alpha$ for some α_0 and for all $\alpha \geq \alpha_0$. Then we have

$$x_{(\alpha, y)} \wedge u = y \wedge u \leq x_\alpha \wedge u \leq y_\alpha.$$

for every $(\alpha, y) \geq (\alpha_0, 0)$. Therefore, $x_{(\alpha, y)} \xrightarrow{suo} 0$ in E . By hypothesis, $x_{(\alpha, y)} \xrightarrow{suo} 0$ in G . Since T is *suo*-continuous on G , $Tx_{(\alpha, y)} \xrightarrow{suo} 0$ in F . Let's take $w \in F_+$. There is a net $(v_{(\alpha, y)})$ in F such that $v_{(\alpha, y)} \downarrow 0$ and $Tx_{(\alpha, y)} \wedge w \leq v_{(\alpha, y)}$ for some (α_1, y_1) and for all $(\alpha, y) \geq (\alpha_1, y_1)$. Let $w_\alpha = v_{(\alpha, 0)}$ for each α . It is not difficult to see that $0 \leq w_\alpha \downarrow 0$, since Γ doesn't have a maximal element. Let's choose $\alpha_2 > \alpha_1$. For each $\alpha \geq \alpha_2$ and for each $y \in G \cap [0, x_\alpha]$ we have $(\alpha, y) \geq (\alpha, 0) \geq (\alpha_1, y_1)$ and so,

$$Ty \wedge w = Tx_{(\alpha, y)} \wedge w \leq v_{(\alpha, y)} \leq v_{(\alpha, 0)} = w_\alpha$$

Therefore, $\hat{T}x_\alpha \wedge w = S(x_\alpha) \wedge w \leq w_\alpha$ for each $\alpha \geq \alpha_2$. Thus, we obtain that \hat{T} is *suo*-continuous. Since every *suo*-continuous operator is *o*-continuous and G is order dense in E , it is obtained that \hat{T} is unique. \triangleright

As a consequence of the preceding theorem, we obtain the following result.

Corollary 6. *If E is a *suo*-convergence reducing of E^δ , then $L_{uo}(E, F) = L_{suo}(E, F)$ for every Dedekind complete Riesz space F .*

\triangleleft It is known that $L_{uo}(E, F) \subseteq L_{suo}(E, F)$. We have to prove that $L_{suo}(E, F) \subseteq L_{uo}(E, F)$. Let $T : E \rightarrow F$ be a *suo*-continuous operator. Since $L_{suo}(E, F)$ is an ideal in $L_b(E, F)$, it is enough to show that $|T|$ is a *uo*-continuous [2]. By Proposition 8, $|T|$ has a unique positive *suo*-continuous extension to all of E^δ . Let $|\hat{T}|$ denote the extension of $|T|$ to all of E^δ . Since E^δ and F are Dedekind complete Riesz spaces, $|\hat{T}| : E^\delta \rightarrow F$ is a *uo*-continuous. Then $|T|$ is a *uo*-continuous. \triangleright

References

1. Gao, N., Troitsky, V. G. and Xantos, F. *Uo*-Convergence and Its Application to Cesàro Means in Banach Lattice, *Israel Journal of Mathematics*, 2017, vol. 220 no. 2, pp. 649–689. DOI: 10.1007/s11856-017-1530-y.
2. Turan, B. and Gürkök, H. On Unbounded Order Continuous Operators 2, *Positivity*, 2024, vol. 28, no. 5, pp. 1–9. DOI: 10.1007/s11117-023-01021-4.
3. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics: Second ed., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 105*, Providence, RI, American Mathematical Society, 2003.
4. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. *Positive Operators*, Berlin, Springer, 2006.
5. Abromovich, Y. A. and Sirotkin, G. On Order Convergence of Nets, *Positivity*, 2005, vol. 9, no. 3, pp. 287–292. DOI: 10.1007/s11117-004-7543-x.

6. Gao, N., Leung D. H. and Xanthos, F. Duality for Unbounded Order Convergence and Applications, *Positivity*, 2018, vol. 22, no. 3, pp. 711–725. DOI: 10.1007/s11117-017-0539-0.
7. Gao, N. and Xanthos, F. Unbounded Order Convergence and Application to Martingales without Probability, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2014, vol. 415, no. 2, pp. 931–947. DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.01.078.
8. Abramovich, Y. A. and Aliprantis, C. D. *An Invitation to Operator Theory, Graduate Studies in Mathematics, vol. 50*, Providence, American Mathematical Society, 2002.
9. Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C. *Riesz Space, vol. 1*, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1971.
10. Bahramnezhad, A. and Azar, K. H. Unbounded Order Continuous Operators on Riesz Spaces, *Positivity*, 2018, vol. 22, no. 3, pp. 837–843. DOI: 10.1007/s11117-017-0548-z.
11. Bilokopytov, E. Locally Solid Convergences and Order Continuity of Positive Operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2023, vol. 528, no. 1, pp. 1–23. DOI: 10.1016/j.jmaa.2023.127566.
12. Turan, B., Altın, B. and Gürkök, H. On Unbounded Order Continuous Operators, *Turkish Journal of Mathematics*, 2022, vol. 46, no. 8, pp. 3391–3399. DOI: 10.55730/1300-0098.3339.
13. Bahramnezhad, A. and Azar, K. H. Correction to: Unbounded Order Continuous Operators on Riesz Spaces, *Positivity*, 2019, vol. 23, no. 3, pp. 759–760 DOI: 10.1007/s11117-019-00677-1.
14. Uyar, A. Solutions of Two Problems in the Theory of Disjointness Preserving Operators, *Positivity*, 2007, vol. 11, no. 1, pp. 119–121. DOI: 10.1007/s11117-006-2024-z.
15. Tao-shun, H. and Zi-li, C. The Band Operators of Archimedean–Riesz Spaces, *Journal of Sichuan Normal University*, 2012, vol. 35, pp. 510–514.
16. Turan, B. and Özcan, K. On Band Operators, *Turkish Journal of Mathematics*, 2019, vol. 43, no. 2, pp. 977–984. DOI: 10.3906/mat-1811-35.
17. Huijsmans, C. B. and Wickstead, A. W. The Inverse of Band Preserving and Disjointness Preserving Operators, *Indagationes Mathematicae*, 1992, vol. 3, no. 2, pp. 179–183. DOI: 10.1016/0019-3577(92)90006-7.

Received December 6, 2024

AYŞE UYAR

Gazi University, Department of Mathematics and Science Education,
Ankara 06560, Turkey,

Emeritus Professor

E-mail: ayseuyar70@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-3051-1771>

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 4, С. 148–156

ЧТО ОСТАЕТСЯ НЕИЗМЕННЫМ В ТИПАХ ПОРЯДКОВОЙ СХОДИМОСТИ?

Уяр А.¹

¹ Университет Гази, Турция, 06560, Анкара

E-mail: ayseuyar70@gmail.com

Аннотация. В данной статье мы исследуем какие свойства не зависят от того, рассматривается ли порядковая сходимость или неограниченная порядковая сходимость, а также неограниченная порядковая непрерывность или сильно неограниченная порядковая непрерывность. В [1] Гао и др. установили, что подрешетка пространства Рисса является порядково замкнутой тогда и только тогда, когда она является неограниченной порядково замкнутой. Показано, что σ -идеалы и неограниченные σ -идеалы — это одно и то же. Кроме того, установлено, что инъективные операторы, переводящие полосы на полосы, являются неограниченными порядково непрерывными, в то время как биективные порядково ограниченные сохраняющие дизъюнктность операторы также являются порядково непрерывными. Пусть G — порядково плотное мажорирующее подпространство Рисса пространства Рисса E , а F — дедекиндово

полное пространство Рисса. В [2] ставится вопрос: если $T : G \rightarrow F$ — положительный сильно неограниченно порядково непрерывный оператор, имеет ли T единственное положительное сильно неограниченно порядково непрерывное расширение на все E ? Мы доказываем, что эта проблема имеет положительный ответ, если G наследует *suo*-сходимостью из E , а именно, если $x_\alpha \xrightarrow{su0} 0$ в E , то $x_\alpha \xrightarrow{u0} 0$ в G для любой сети (x_α) в G .

Ключевые слова: неограниченно порядково сходящийся, неограниченно порядково замкнутый идеал, неограниченно порядково непрерывный оператор, сильно неограниченно порядково непрерывный оператор.

AMS Subject Classification: 46A40, 47B65.

Образец цитирования: Uyar A. What Remains the Same in Order Convergence Types // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 4.—С. 148–156 (in English). DOI: 10.46698/x9860-3651-6483-z.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Общие положения

1. Периодическое издание «Владикавказский математический журнал» публикует оригинальные научные статьи отечественных и зарубежных авторов, содержащие новые математические результаты по функциональному и комплексному анализу, алгебре, геометрии, дифференциальным уравнениям и математической физике. По заказу редакционной коллегии журнал также публикует обзорные статьи. Журнал предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре выпуска в год. «Владикавказский математический журнал» публикует статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более 2 усл.п.л. (17 страниц формата А4). Работы, превышающие 2 усл.п.л., принимаются к публикации по специальному решению Редколлегии журнала. Срок рассмотрения статей обычно не превышает 8 месяцев. При подготовке статей для ускорения их рассмотрения и публикации следует соблюдать правила для авторов.

2. К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Результаты иных авторов, использованные в статье, следует должным образом отразить в ссылках. Направляя статью в журнал, авторы тем самым подтверждают, что для нее выполнены указанные требования.

3. Направляя статью в журнал, каждый из авторов подтверждает, что статья соответствует наивысшим стандартам публикационной этики для авторов и соавторов, разработанным COPE (Committee on Publication Ethics), см. <http://publicationethics.org/about>.

4. Все материалы, поступившие для публикации в журнале, подлежат регистрации с указанием даты поступления рукописи в редакцию журнала. Решение о публикации, отказе в публикации или направлении рукописи автору для доработки должно быть принято главным редактором и сообщено автору не позднее 4 месяцев со дня поступления рукописи в редакцию журнала. Подробнее см. в разделе Рецензирование.

5. Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего окончательный макет статьи в формате PDF направляется автору на корректуру.

6. Условием публикации статей, принятых к печати, является подписанием авторами договора о передаче авторских прав. Бланк договора можно скачать по ссылке.

7. Полнотекстовые версии статей, публикуемых в журнале, размещаются в Интернете в свободном доступе на официальном сайте журнала <http://www.vlmj.ru>, а также на сайтах Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка».

8. Статьи журнала реферируются и индексируются в Scopus (Elsevier), zbMATH (Springer), MathSciNet (AMS), Russian Science Citation Index (Web of Science), EBSCO, РЖМат (ВИНИТИ РАН), Math-Net.Ru, РИНЦ (eLibrary.Ru).

9. Публикации в журнале для авторов бесплатны.

Подготовка и представление рукописи статьи

1. Все материалы предоставляются в редакцию в электронном виде. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая рисунки, таблицы и список литературы, следует пронумеровать.

2. Работа должна быть подготовлена на компьютере в издательской системе LaTeX. Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX, не рассматриваются. Файлы статьи *.tex и *.ps (*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте rio@smath.ru.

3. В тексте статьи указывается индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся аннотации на русском и английском языках (объемом не менее 200 слов, достаточную для понимания содержания статьи), даются списки ключевых слов на русском и английском языках, а также коды согласно Mathematics Subjects Classifications (2010). Далее в файле приводятся полностью Фамилия, Имя, Отчество каждого автора, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты и ORCID.

4. Датой поступления статьи считается дата поступления электронной копии статьи на официальный e-mail журнала. Текст электронного сообщения должен быть оформлен как сопроводительное письмо, из текста которого ясно следует, что авторы направляют свою статью во Владикавказский математический журнал. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

5. В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

6. При подготовке файла статьи особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета LaTeX. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела.

7. Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков. Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова «Рис.» с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отформатированной слева надписью «Таблица» с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

8. Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы печатается в конце текста статьи, оформленные в соответствии с правилами издания, на основании требований, предусмотренных действующими ГОСТами. В нем должны быть указаны: для статей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

9. Список литературы полностью дублируется на английском языке, приводится полностью отдельным блоком в конце статьи, повторяя список литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются в списке, готовящемся в романском алфавите. Список References используется международными библиографическими базами (Scopus, WoS и др.) для учета цитирования авторов.

Примечание: более подробную информацию можно найти на официальном сайте журнала <http://www.vlmj.ru>.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 27

Выпуск 4

Главный редактор А. Г. Кусраев

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

Подписано в печать 24.12.2025. Дата выхода в свет 29.12.2025.
Формат бумаги А4. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 18,48. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный научный центр «Владикавказский научный центр
Российской академии наук» (ВНЦ РАН)

Издатель:

Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»

Адрес издателя:

362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

Индекс 57380