



# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

<http://www.vlmj.ru>

Том 27, выпуск 2

2025



# VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

<http://www.vlmj.ru>

Volume 27, Issue 2

2025

**Главный редактор**

А. Г. КУСПАЕВ

Владикавказский научный центр РАН,  
Владикавказ, Россия

**Зам. главного редактора**

Д. М. ПОЛЯКОВ

Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,  
Владикавказ, Россия

**Редакционная коллегия**

А. В. АБАНИН

Южный федеральный университет,  
Ростов-на-Дону, Россия

ДАНИЭЛЬ АНДРЕУЧЧИ

Римский университет Ла Сапиенца,  
Рим, Италия

ХОСЕ БОНЕТ

Политехнический университет,  
Валенсия, Испания

А. О. ВАТУЛЬЯН

Южный федеральный университет,  
Ростов-на-Дону, Россия

С. К. ВОДОПЬЯНОВ

Институт математики Сибирского  
отделения РАН, Новосибирск, Россия

Е. И. ГОРДОН

Университет Восточного Иллинойса,  
Чарльстон, США

А. И. КОЖАНОВ

Институт математики Сибирского  
отделения РАН, Новосибирск, Россия

В. А. КОЙБАЕВ

Северо-Осетинский государственный  
университет им. К. Л. Хетагурова,  
Владикавказ, Россия

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В. Д. МАЗУРОВ

Институт математики Сибирского  
отделения РАН, Новосибирск, Россия

В. Е. НАЗАЙКИНСКИЙ

Институт проблем механики  
им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Ю. Г. НИКОНОВ

Южный математический институт —  
филиал ВЦ РАН, Владикавказ, Россия

О. В. ПОЧИНКА

Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики», Н. Новгород, Россия

А. В. ПСХУ

Институт прикладной математики  
и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия

В. Ж. САКБАЕВ

Институт прикладной математики  
им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

С. Г. САМКО

Университет Алгарве, Фаро, Португалия

В. А. СТУКОПИН

Московский физико-технический  
институт, Москва, Россия

ФАМ ЧОНГ ТИЕН

Вьетнамский национальный  
университет, Ханой, Вьетнам

В. Г. ТРОИЦКИЙ

Альбертский университет, Эдмонтон, Канада

С. М. УМАРХАДЖИЕВ

Комплексный научно-исследовательский институт  
им. Х. И. Ибрагимова РАН, Грозный, Россия

ЛЕ ХАЙ ХОЙ

Ханойский университет науки и технологий,  
Ханой, Вьетнам

**Адрес редакции:** 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1

Телефон: (8672) 23-00-54; E-mail: [rio@smath.ru](mailto:rio@smath.ru)

**Зав. редакцией:** В. В. КИБИЗОВА

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год

Электронная версия: [www.vlmj.ru](http://www.vlmj.ru)

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций:

свид. ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.;

свид. ЭЛ № ФС77-70171 от 21 июня 2017 г.

© Владикавказский научный центр РАН, 2025

**Editor-in-Chief**

ANATOLY G. KUSRAEV  
Vladikavkaz Scientific Centre  
of the Russian Academy of Sciences,  
Vladikavkaz, Russia

**Associate Editor**

DMITRY M. POLYAKOV  
Southern Mathematical Institute of VSC RAS, Vladikavkaz, Russia

**Editorial Board**

ALEXANDER V. ABANIN  
Southern Federal University,  
Rostov-on-Don, Russia

DANIELE ANDREUCCI  
Sapienza University of Rome, Rome, Italy

JOSÉ BONET  
Universitat Politècnica de València, Valencia, Spain

EVGENY I. GORDON  
Eastern Illinois University, Charleston, USA

LE HAI KHOI  
University of Science and Technology, Hanoi, Vietnam

VLADIMIR A. KOĬBAEV  
North Ossetian State University,  
Vladikavkaz, Russia

ALEXANDER I. KOZHANOV  
Sobolev Institute of Mathematics  
of Siberian Branch of the RAS,  
Novosibirsk, Russia

GEORGIĬ G. MAGARIL-IL'YAEV  
Lomonosov Moscow State University,  
Moscow, Russia

VICTOR D. MAZUROV  
Sobolev Institute of Mathematics  
of Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

VLADIMIR E. NAZAIĬKINSKIĬ  
Ishlinsky Institute for Problems  
in Mechanics RAS, Moscow, Russia

YURIĬ NIKONOROV  
Southern Mathematical Institute —  
the Affiliate of VSC RAS, Vladikavkaz, Russia

OLGA V. POCHINKA  
National Research University Higher School  
of Economics, Nizhny Novgorod, Russia

ARSEN V. PSKHU  
Institute of Applied Mathematics  
and Automation KBSC RAS, Nalchik, Russia

VSEVOLOD ZH. SAKBAEV  
Keldysh Institute of Applied Mathematics,  
Moscow, Russia

STEFAN G. SAMKO  
Universidade do Algarve, Faro, Portugal

VLADIMIR A. STUKOPIN,  
Moscow Institute of Physics,  
and Technology, Moscow, Russia

PHAM TRONG TIEN  
Vietnam National University,  
Hanoi, Vietnam

VLADIMIR G. TROITSKY  
University of Alberta,  
Edmonton, Canada

SALAUDIN M. UMARKHADZHIEV  
Ibragimov Complex Institute of the RAS,  
Grozny, Russia

ALEXANDER O. VATULYAN  
Southern Federal University,  
Rostov-on-Don, Russia

SERGEI K. VODOPYANOV  
Sobolev Institute of Mathematics  
of Siberian Branch of the RAS,  
Novosibirsk, Russia

**Editorial Office:** 1 Williams St., Mikhailovskoe 363110,  
the Republic of North Ossetia-Alania, Russia  
Phone: (8672) 23-00-54; E-mail: [rio@smath.ru](mailto:rio@smath.ru)

**Managing Editor:** VICTORIA V. KIBIZOVA

The journal was founded in 1999. It is published four times a year.  
ELECTRONIC VERSION: [www.vlmj.ru](http://www.vlmj.ru)

Registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom,  
Information Technologies and Mass Communications:  
ПИ № ФС77-70008 dated May 31, 2017; ЭЛ № ФС77-70171 dated June 21, 2017.

© Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, 2025

# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 27, выпуск 2

апрель–июнь, 2025

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Bulyno D. A., Gladkov A. L. and Nikitin A. I.</b> Initial Boundary Value Problem for a System of Semilinear Parabolic Equations with Absorption and Nonlinear Nonlocal Boundary Conditions .....	5
<b>Гордеева О. В., Гордеев В. Е.</b> О структуре окрестности гомоклинической траектории к негрубой неподвижной точке .....	19
<b>Kovalevsky A. A.</b> Conditions for the Limit Summability of Solutions of Nonlinear Elliptic Equations with Degenerate Coercivity and $L^1$ -Data .....	35
<b>Kozhevnikova L. M.</b> Existence of a Local Renormalized Solution of an Elliptic Equation with Variable Exponents in $\mathbb{R}^n$ .....	52
<b>Krasnoschekikh G. V. and Volchkov Vit. V.</b> The One Radius Theorem for the Bessel Convolution Operator and its Applications .....	72
<b>Kusraeva Z. A.</b> Vector Lattice Powers: Continuous and Measurable Vector Functions .....	84
<b>Нурмагомедов А. А., Шихшинатова М. М.</b> Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках .....	93
<b>Panov E. Yu.</b> On Self-Similar Solutions of a Multi-Phase Stefan Problem in a Moving Ray .....	112
<b>Polyakov D. M.</b> Mixed Problem for Even-Order Differential Equations with an Involution .....	128
<b>Цветков Д. О.</b> О свойствах акустических волн в сжимаемой идеальной стратифицированной жидкости .....	136
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ	
А. Ф. Тедееву — 70 лет .....	148

# VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

---

Volume 27, issue 2

April–June, 2025

---

## CONTENT

<b>Bulyno, D. A., Gladkov, A. L. and Nikitin, A. I.</b> Initial Boundary Value Problem for a System of Semilinear Parabolic Equations with Absorption and Nonlinear Nonlocal Boundary Conditions .....	5
<b>Gordeeva, O. V. and Gordeev, V. E.</b> On the Structure of Neighborhood of Homoclinic Orbit to a Nonhyperbolic Fixet Point .....	19
<b>Kovalevsky, A. A.</b> Conditions for the Limit Summability of Solutions of Nonlinear Elliptic Equations with Degenerate Coercivity and $L^1$ -Data .....	35
<b>Kozhevnikova, L. M.</b> Existence of a Local Renormalized Solution of an Elliptic Equation with Variable Exponents in $\mathbb{R}^n$ .....	52
<b>Krasnoschekikh, G. V. and Volchkov, Vit. V.</b> The One Radius Theorem for the Bessel Convolution Operator and its Applications .....	72
<b>Kusraeva, Z. A.</b> Vector Lattice Powers: Continuous and Measurable Vector Functions .....	84
<b>Nurmagomedov, A. A. and Shikhshinatova, M. M.</b> Approximation Properties of Valle-Poussin Averages for Discrete Fourier Sums Bypolynomials Orthogonal on Arbitrary Nets .....	93
<b>Panov, E. Yu.</b> On Self-Similar Solutions of a Multi-Phase Stefan Problem in a Moving Ray .....	112
<b>Polyakov, D. M.</b> Mixed Problem for Even-Order Differential Equations with an Involution .....	128
<b>Tsvetkov, D. O.</b> On the Properties of Acoustic Waves in a Compressible Ideal Stratified Fluid .....	136
MATHEMATICAL LIFE	
Anatoliĭ Fedorovich Tedeev (on his 70's anniversary) .....	148

УДК 517.956.4  
DOI 10.46698/o2548-3794-2309-a

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF SEMILINEAR  
PARABOLIC EQUATIONS WITH ABSORPTION AND NONLINEAR NONLOCAL  
BOUNDARY CONDITIONS<sup>#</sup>

D. A. Bulyno<sup>1</sup>, A. L. Gladkov<sup>1</sup> and A. I. Nikitin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Belarusian State University,  
4 Nezavisimosti Ave., Minsk 220030, Belarus;  
<sup>2</sup>Masherov Vitebsk State University,  
33 Moskovskiy Ave., Vitebsk 210038, Belarus

E-mail: dabulyno13@gmail.com, gladkoval@bsu.by, ip.alexnikitin@gmail.com

*Dedicated to Professor A. F. Tedeev on occasion of his 70th birthday*

**Abstract.** In this paper we consider classical solutions of an initial boundary value problem for a system of semilinear parabolic equations with absorption and nonlinear nonlocal boundary conditions. Nonlinearities in equations and boundary conditions may not satisfy the Lipschitz condition. To prove the existence of a solution we regularize the original problem. Using the Schauder–Tikhonov fixed point theorem, the existence of a local solution of regularized problem is proved. It is shown that the limit of solutions of the regularized problem is a maximal solution of the original problem. Using the properties of a maximal solution, a comparison principle is proved. In this case, no additional assumptions are made when nonlinearities in absorption do not satisfy the Lipschitz condition. Conditions are found under which solutions are positive functions. The uniqueness of the solution is established. It is shown that the trivial solution  $(0, 0)$  may not be unique.

**Keywords:** system of semilinear parabolic equations, nonlocal boundary conditions, existence of a solution, comparison principle.

**AMS Subject Classification:** 35K51, 35K58, 35K61.

**For citation:** Bulyno, D. A., Gladkov, A. L. and Nikitin, A. I. Initial Boundary Value Problem for a System of Semilinear Parabolic Equations with Absorption and Nonlinear Nonlocal Boundary Conditions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 2, pp. 5–18. DOI: 10.46698/o2548-3794-2309-a.

## 1. Introduction

In this paper we consider the initial boundary value problem for a system of semilinear parabolic equations with absorption and nonlinear nonlocal boundary conditions:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + v^p - au^r, & v_t = \Delta v + u^q - bv^s, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} \phi(x, y, t) u^m(y, t) dy, & & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} \psi(x, y, t) v^n(y, t) dy, & & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

---

<sup>#</sup> This work is supported by the state program of fundamental research of Belarus (project № 1.2.02.2) and the Belarusian foundation for fundamental research within the framework of the project “Systems of semilinear parabolic equations with absorption” (state registration № 20231262).

where  $a, b, p, r, q, s, m, n$  are positive numbers,  $\Omega$  is a bounded domain in  $\mathbb{R}^N$  for  $N \geq 1$  with smooth boundary  $\partial\Omega$ ,  $\nu$  is the unit outward normal vector on  $\partial\Omega$ .

Throughout this paper we suppose the following conditions:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) &\in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0, +\infty)), & \phi(x, y, t) &\geq 0; \\ \psi(x, y, t) &\in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0, +\infty)), & \psi(x, y, t) &\geq 0; \\ u_0(x) &\in C^1(\overline{\Omega}), & v_0(x) &\in C^1(\overline{\Omega}), & u_0(x) &\geq 0, & v_0(x) &\geq 0 \text{ in } \Omega; \\ \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} &= \int_{\Omega} \phi(x, y, 0) u_0^m(y) dy, & \frac{\partial v_0(x)}{\partial \nu} &= \int_{\Omega} \psi(x, y, 0) v_0^n(y) dy & \text{ on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Let  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$ ,  $\Gamma_T = S_T \cup \overline{\Omega} \times \{0\}$ ,  $T > 0$ .

DEFINITION 1. We say that a pair of nonnegative functions  $(u(x, t), v(x, t))$  is a subsolution of (1) in  $Q_T$ , if  $u, v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$  and

$$\begin{cases} u_t \leq \Delta u + v^p - au^r, & v_t \leq \Delta v + u^q - bv^s, & (x, t) \in Q_T, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} \leq \int_{\Omega} \phi(x, y, t) u^m(y, t) dy, & & (x, t) \in S_T, \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial \nu} \leq \int_{\Omega} \psi(x, y, t) v^n(y, t) dy, & & (x, t) \in S_T, \\ u(x, 0) \leq u_0(x), & v(x, 0) \leq v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

a pair of nonnegative functions  $(u(x, t), v(x, t))$  is a supersolution of (1) in  $Q_T$ , if  $u, v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$  and it satisfies (2) in the reverse order. We say that  $(u(x, t), v(x, t))$  is a solution of problem (1) in  $Q_T$  if  $(u(x, t), v(x, t))$  is both a subsolution and a supersolution of (1) in  $Q_T$ .

DEFINITION 2. We say that a solution  $(u_{\max}(x, t), v_{\max}(x, t))$  of (1) in  $Q_T$  is a maximal solution if for any other solution  $(u(x, t), v(x, t))$  of (1) in  $Q_T$  the inequalities  $u(x, t) \leq u_{\max}(x, t)$ ,  $v(x, t) \leq v_{\max}(x, t)$  are satisfied for  $(x, t) \in Q_T$ .

A lot of articles have been devoted to the investigation of initial boundary value problems for parabolic equations and systems with nonlocal boundary conditions (see, for example, [1–22] and the references therein). In particular, the problem (1) with  $a = b = 0$  was considered in [11]. Initial boundary value problem (1) with  $a = b = 0$  and Dirichlet nonlocal boundary conditions was studied in [5]. The authors of [23] investigated the existence of global solutions for (1) with zero Dirichlet boundary condition. Blow-up problem for (1) with nonlinear local Neumann boundary conditions was investigated in [24, 25].

This paper is organized as follows. In the next section we prove the existence of a local solution. A comparison principle and the uniqueness of solutions of (1) are established in Section 3.

## 2. Local Existence

Let  $\{\varepsilon_l\}$  be decreasing to 0 sequence such that  $0 < \varepsilon_l < 1$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . For  $\varepsilon = \varepsilon_l$  let  $u_{0\varepsilon}(x)$  and  $v_{0\varepsilon}(x)$  be the functions with the following properties:

$$\begin{aligned} u_{0\varepsilon}(x), v_{0\varepsilon}(x) &\in C^1(\overline{\Omega}), & u_{0\varepsilon}(x) &\geq \varepsilon, & v_{0\varepsilon}(x) &\geq \varepsilon; \\ u_{0\varepsilon_i}(x) &\geq u_{0\varepsilon_j}, & v_{0\varepsilon_i}(x) &\geq v_{0\varepsilon_j} & \text{ for } \varepsilon_i > \varepsilon_j; \end{aligned}$$

$$0 \leq u_{0\varepsilon}(x) - u_0(x) \leq 2\varepsilon, \quad 0 \leq v_{0\varepsilon}(x) - v_0(x) \leq 2\varepsilon;$$

$$\frac{\partial u_{0\varepsilon}(x)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} \phi(x, y, 0) u_{0\varepsilon}^m(y) dy, \quad \frac{\partial v_{0\varepsilon}(x)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} \psi(x, y, 0) v_{0\varepsilon}^n(y) dy \quad \text{for } x \in \partial\Omega.$$

Since the nonlinearities in (1), the Lipschitz condition may not be satisfied, and thus we need to consider the following auxiliary problem:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + v^p - au^r + a\varepsilon^r, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ v_t = \Delta v + u^q - bv^s + b\varepsilon^s, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} \phi(x, y, t) u^m(y, t) dy, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} \psi(x, y, t) v^n(y, t) dy, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x), \quad v(x, 0) = v_{0\varepsilon}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3)$$

where  $\varepsilon = \varepsilon_l$ . The notion of a solution  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  for problem (3) in  $Q_T$  can be defined in a similar way as in Definition 1.

**Theorem 1.** *Problem (3) has a unique solution in  $Q_T$  for small values of  $T$ .*

◁ We start the proof with the construction of a subsolution and a supersolution of (3) in  $Q_T$  for some  $T$ . Let  $\sup_{\bar{\Omega}} u_{0\varepsilon}(x) \leq M$ ,  $\sup_{\bar{\Omega}} v_{0\varepsilon}(x) \leq M$ , where  $M \geq 1$ . Denote

$$K = \max \left( \sup_{\partial\Omega \times Q_T} \phi(x, y, t), \sup_{\partial\Omega \times Q_T} \psi(x, y, t) \right)$$

and introduce an auxiliary function  $\varphi(x)$  with the following properties:

$$\varphi(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad \inf_{\bar{\Omega}} \varphi(x) \geq 1, \quad \inf_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \nu} \geq \bar{K} \int_{\Omega} \max(\varphi^m(y), \varphi^n(y)) dy, \quad (4)$$

where  $\bar{K} = K \max(M^{m-1}, M^{n-1}) \max(1, \exp(m-1), \exp(n-1))$ . Let  $\alpha, \beta$  be positive constants such that  $\alpha q - \beta = \beta p - \alpha$  and

$$\alpha \geq \sup_{\bar{\Omega}} \left( \frac{\Delta \varphi(x)}{\varphi(x)} + M^{p-1} \exp(1) \varphi^{p-1}(x) + a \right), \quad (5)$$

$$\beta \geq \sup_{\bar{\Omega}} \left( \frac{\Delta \varphi(x)}{\varphi(x)} + M^{q-1} \exp(1) \varphi^{q-1}(x) + b \right).$$

It is easy to see that  $\alpha q - \beta > 0$  for  $pq > 1$  and  $\alpha q - \beta \leq 0$  for  $pq \leq 1$ . Obviously,  $(\varepsilon, \varepsilon)$  is a subsolution of (3) in  $Q_T$  for any  $T$ . Let us show that

$$f(x, t) = M \exp(\alpha t) \varphi(x), \quad g(x, t) = M \exp(\beta t) \varphi(x)$$

is a supersolution of (3) in  $Q_T$  for  $T \leq \min\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha q - \beta}\right)$  if  $pq > 1$ , and for  $T \leq \min\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)$  if  $pq \leq 1$ . Indeed, by (5) we have

$$\begin{aligned} & f_t(x, t) - \Delta f(x, t) - g^p(x, t) + a f^r(x, t) - a\varepsilon^r \\ &= \alpha M \exp(\alpha t) \varphi(x) - \Delta \varphi(x) M \exp(\alpha t) - M^p \exp(\beta p t) \varphi^p(x) + a M^r \exp(\alpha r t) \varphi^r(x) - a\varepsilon^r \\ &\geq M \exp(\alpha t) \varphi(x) \left( \alpha - \frac{\Delta \varphi(x)}{\varphi(x)} - M^{p-1} \exp((\beta p - \alpha)t) \varphi^{p-1}(x) - a \right) \geq 0 \end{aligned}$$

for  $(x, t) \in Q_T$ . Using (4), we obtain

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial \nu} = M \exp(\alpha t) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \nu} \geq M^m \exp(\alpha m t) K \int_{\Omega} \varphi^m(y) dy \geq \int_{\Omega} \phi(x, y, t) f^m(y, t) dy$$

for  $(x, t) \in S_T$ . In a similar way we show that

$$g_t(x, t) - \Delta g(x, t) - f^q(x, t) + b g^s(x, t) - b \varepsilon^s \geq 0 \quad \text{for } (x, t) \in Q_T,$$

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial \nu} \geq \int_{\Omega} \psi(x, y, t) g^n(y, t) dy \quad \text{for } (x, t) \in S_T.$$

And we have  $u_{0\varepsilon}(x) \leq f(x, 0)$ ,  $v_{0\varepsilon}(x) \leq g(x, 0)$  for  $x \in \Omega$ , which implies that  $(f(x, t), g(x, t))$  is a supersolution of (3) in  $Q_T$ .

To prove the existence of a solution of (3) in  $Q_T$  for some  $T$  let us define a set

$$B = \left\{ (h_1(x, t), h_2(x, t)) \in C(\overline{Q_T}) \times C(\overline{Q_T}) : \right.$$

$$\left. \varepsilon \leq h_1(x, t) \leq f(x, t), \varepsilon \leq h_2(x, t) \leq g(x, t), h_1(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x), h_2(x, 0) = v_{0\varepsilon}(x) \right\}.$$

Obviously,  $B$  is a nonempty convex subset of  $C(\overline{Q_T}) \times C(\overline{Q_T})$ . Now we consider the following problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + v^p - a u^r + a \varepsilon^r, & (x, t) \in Q_T, \\ v_t = \Delta v + u^q - b v^s + b \varepsilon^s, & (x, t) \in Q_T, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \int_{\Omega} \phi(x, y, t) s_1^m(y, t) dy, & (x, t) \in S_T, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \int_{\Omega} \psi(x, y, t) s_2^n(y, t) dy, & (x, t) \in S_T, \\ u(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x), \quad v(x, 0) = v_{0\varepsilon}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (6)$$

where  $(s_1, s_2) \in B$ . Problem (6) has a classical solution, which is bounded in  $\overline{Q_T}$  for some  $T$  (see, for example, [26]). Let  $A$  be a map such that  $A(s_1, s_2) = (u, v)$ . Denote the set of functions  $u$  as  $U$  and the set of functions  $v$  as  $V$ . In order to show that  $A$  has a fixed point in  $B$  we verify that  $A$  is a continuous mapping from  $B$  into itself such that  $AB$  is relatively compact. Since  $(\varepsilon, \varepsilon)$  is a subsolution of (6) in  $Q_T$  and  $(f(x, t), g(x, t))$  is a supersolution of (6) in  $Q_T$  we have that  $A$  maps  $B$  into itself thanks to a comparison principle for (6) which can be proved in a similar way as Theorem 3 below.

Let  $G(x, t; \xi, \tau)$  denote the Green function for the heat equation given by  $u_t - \Delta u = 0$  for  $x \in \Omega$ ,  $t > 0$  with homogeneous Neumann boundary condition. The Green function has the following properties (see [27, 28]):

$$G(x, t; \xi, \tau) \geq 0, \quad x, \xi \in \Omega, \quad 0 \leq \tau < t, \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} G(x, t; \xi, \tau) d\xi = 1, \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq \tau < t, \quad (8)$$

$$\sup_{\Omega} \int_s^t \int_{\partial \Omega} G(x, t; \xi, \tau) dS_{\xi} d\tau \leq \lambda \sqrt{t-s}, \quad 0 < t-s \leq \sigma, \quad (9)$$

for  $s \geq 0$ ,  $\lambda > 0$  and small  $\sigma > 0$ .

It is well known that  $(u(x, t), v(x, t))$  is a solution of (6) in  $Q_T$  if and only if

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_{\Omega} G(x, t; y, 0) u_{0\varepsilon}(y) dy + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, t; y, \tau) (v^p(y, \tau) - au^r(y, \tau) + a\varepsilon^r) dy d\tau \\ & + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, t; \xi, \tau) \left( \int_{\Omega} \phi(\xi, y, \tau) s_1^m(y, \tau) dy \right) dS_{\xi} d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \int_{\Omega} G(x, t; y, 0) v_{0\varepsilon}(y) dy + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, t; y, \tau) (u^q(y, \tau) - bv^s(y, \tau) + b\varepsilon^s) dy d\tau \\ & + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, t; \xi, \tau) \left( \int_{\Omega} \psi(\xi, y, \tau) s_2^n(y, \tau) dy \right) dS_{\xi} d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

for  $(x, t) \in Q_T$ .

We claim that  $A$  is a continuous map. In fact let  $\{(s_{1k}, s_{2k})\}$  be a sequence in  $B$  converging to  $(s_1, s_2) \in B$  in  $C(\overline{Q_T}) \times C(\overline{Q_T})$ . Denote  $(u_k, v_k) = A(s_{1k}, s_{2k})$ . Then by (7), (10), (11) we have

$$\begin{aligned} |u - u_k| + |v - v_k| \leq & \int_0^t \int_{\Omega} G(x, t; y, \tau) |v^p - v_k^p| dy d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, t; y, \tau) |u^q - u_k^q| dy d\tau \\ & + a \int_0^t \int_{\Omega} G(x, t; y, \tau) |u^r - u_k^r| dy d\tau + b \int_0^t \int_{\Omega} G(x, t; y, \tau) |v^s - v_k^s| dy d\tau \\ & + \sup_{Q_T} |s_1^m - s_{1k}^m| \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, t; \xi, \tau) \left( \int_{\Omega} \phi(\xi, y, \tau) dy \right) dS_{\xi} d\tau \\ & + \sup_{Q_T} |s_2^n - s_{2k}^n| \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, t; \xi, \tau) \left( \int_{\Omega} \psi(\xi, y, \tau) dy \right) dS_{\xi} d\tau \\ & \leq \Phi(\sup_{Q_T} |u - u_k| + \sup_{Q_T} |v - v_k|) \\ & + \sup_{Q_T} |s_1^m - s_{1k}^m| \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, t; \xi, \tau) \left( \int_{\Omega} \phi(\xi, y, \tau) dy \right) dS_{\xi} d\tau \\ & + \sup_{Q_T} |s_2^n - s_{2k}^n| \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, t; \xi, \tau) \left( \int_{\Omega} \psi(\xi, y, \tau) dy \right) dS_{\xi} d\tau, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \Phi = & \left\{ p \max \left( \varepsilon^{p-1}, \sup_{Q_T} g^{p-1}(x, t) \right) + q \max \left( \varepsilon^{q-1}, \sup_{Q_T} f^{q-1}(x, t) \right) \right. \\ & \left. + ar \max \left( \varepsilon^{r-1}, \sup_{Q_T} f^{r-1}(x, t) \right) + bs \max \left( \varepsilon^{s-1}, \sup_{Q_T} g^{s-1}(x, t) \right) \right\} \sup_{Q_T} \int_0^t \int_{\Omega} G(x, t; y, \tau) dy d\tau. \end{aligned}$$

By (8) and (9) there exists  $T$ , such that  $\Phi < 1$ . Then we obtain  $(u_k, v_k) \rightarrow (u, v)$  in  $C(\overline{Q_T}) \times C(\overline{Q_T})$  as  $k \rightarrow \infty$ .

By the definition of  $B$  the sets  $U$  and  $V$  are uniformly bounded.

Now we prove the equicontinuity of the sets  $U$  and  $V$ . We will consider the set  $U$  since the proof for the set  $V$  is similar. We show that for any  $\epsilon > 0$  there exists  $\delta > 0$ , such that

$$|u(x_2, t_2) - u(x_1, t_1)| < \epsilon \quad (12)$$

for any  $u(x, t) \in U$  and any  $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \overline{Q_T}$  with the property  $|(x_2, t_2) - (x_1, t_1)| < \delta$ . Applying (10), we obtain

$$\begin{aligned} |u(x_2, t_2) - u(x_1, t_1)| &\leq \left| \int_{\Omega} (G(x_2, t_2; y, 0) - G(x_1, t_1; y, 0)) u_{0\epsilon}(y) dy \right| \\ &+ \left| \int_0^{t_2} \int_{\Omega} G(x_2, t_2; y, \tau) (v^p(y, \tau) - au^r(y, \tau) + a\epsilon^r) dy d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} G(x_1, t_1; y, \tau) (v^p(y, \tau) - au^r(y, \tau) + a\epsilon^r) dy d\tau \right| \quad (13) \\ &+ \left| \int_0^{t_2} \int_{\partial\Omega} G(x_2, t_2; \xi, \tau) \left( \int_{\Omega} \phi(\xi, y, \tau) s_1^m(y, \tau) dy \right) dS_{\xi} d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t_1} \int_{\partial\Omega} G(x_1, t_1; \xi, \tau) \left( \int_{\Omega} \phi(\xi, y, \tau) s_1^m(y, \tau) dy \right) dS_{\xi} d\tau \right|. \end{aligned}$$

Since  $\int_{\Omega} G(x, t; y, 0) u_{0\epsilon}(y) dy$  is a continuous function in  $\overline{Q_T}$  (see [29])

$$\left| \int_{\Omega} (G(x_2, t_2; y, 0) - G(x_1, t_1; y, 0)) u_{0\epsilon}(y) dy \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad (14)$$

for small values of  $\delta$ .

Let us consider the second term in the right hand side of (13). We set  $h(y, \tau) = v^p(y, \tau) - au^r(y, \tau) + a\epsilon^r$ ,  $H = \sup_{Q_T} |h(y, \tau)|$  and suppose for the definiteness that  $t_2 \geq t_1$ . Using (7), (8) and the continuity of the Green's function for  $t > \tau \geq 0$ , we have

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{t_2} \int_{\Omega} G(x_2, t_2; y, \tau) h(y, \tau) dy d\tau - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} G(x_1, t_1; y, \tau) h(y, \tau) dy d\tau \right| \\ &\leq H \left\{ \int_{t_1-\gamma}^{t_2} \int_{\Omega} G(x_2, t_2; y, \tau) dy d\tau + \int_0^{t_1-\gamma} \int_{\Omega} |G(x_2, t_2; y, \tau) - G(x_1, t_1; y, \tau)| dy d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1-\gamma}^{t_1} \int_{\Omega} G(x_1, t_1; y, \tau) dy d\tau \right\} < \frac{\epsilon}{3} \quad (15) \end{aligned}$$

with an appropriate choice of  $\gamma$  and  $\delta$ .

Similarly, we estimate the third term in the right hand side of (13)

$$\left| \int_0^{t_2} \int_{\partial\Omega} G(x_2, t_2; \xi, \tau) \left( \int_{\Omega} \phi(\xi, y, \tau) s_1^m(y, \tau) dy \right) dS_{\xi} d\tau - \int_0^{t_1} \int_{\partial\Omega} G(x_1, t_1; \xi, \tau) \left( \int_{\Omega} \phi(\xi, y, \tau) s_1^m(y, \tau) dy \right) dS_{\xi} d\tau \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad (16)$$

for small values of  $\delta$ . From (13)–(16) we derive (12).

The Ascoli–Arzelá theorem guarantees the relative compactness of  $AB$ . Thus we are able to apply a corollary of the Schauder–Tikhonov fixed point theorem (see [30]) and conclude that  $A$  has a fixed point in  $B$  if  $T$  is small. Now if  $(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon})$  is a fixed point of  $A$  then it is a solution of (3) in  $Q_T$ . The uniqueness of the solution follows from a comparison principle for (3) which can be proved in a similar way as Theorem 3 in the next section.  $\triangleright$

Now we are ready to prove the existence of a local solution of (1).

**Theorem 2.** *For small values of  $T$  problem (1) has a maximal solution in  $Q_T$ .*

$\triangleleft$  Now, let  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ . Then it is easy to show that  $(u_{\varepsilon_2}(x, t), v_{\varepsilon_2}(x, t))$  is a supersolution of problem (3) with  $\varepsilon = \varepsilon_1$  in  $Q_T$  for some  $T$ . Applying a comparison principle to problem (3), we have  $u_{\varepsilon_2}(x, t) \geq u_{\varepsilon_1}(x, t)$  and  $v_{\varepsilon_2}(x, t) \geq v_{\varepsilon_1}(x, t)$  in  $Q_T$ . Using the last inequalities and the continuation principle of solutions we deduce that the existence time of  $(u_{\varepsilon}(x, t), v_{\varepsilon}(x, t))$  does not decrease as  $\varepsilon \searrow 0$ . Taking  $\varepsilon \rightarrow 0$ , we get

$$u_{\max}(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon}(x, t) \geq 0, \quad v_{\max}(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_{\varepsilon}(x, t) \geq 0, \quad (17)$$

and  $(u_{\max}(x, t), v_{\max}(x, t))$  exists in  $Q_T$  for some  $T$ . By dominated convergence theorem  $(u_{\max}(x, t), v_{\max}(x, t))$  satisfies the following equations:

$$\begin{aligned} u_{\max}(x, t) &= \int_{\Omega} G(x, t; y, 0) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, t; y, \tau) (v_{\max}^p(y, \tau) - a u_{\max}^r(y, \tau)) dy d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, t; \xi, \tau) \left( \int_{\Omega} \phi(\xi, y, \tau) u_{\max}^m(y, \tau) dy \right) dS_{\xi} d\tau, \\ v_{\max}(x, t) &= \int_{\Omega} G(x, t; y, 0) v_0(y) dy + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, t; y, \tau) (u_{\max}^q(y, \tau) - b v_{\max}^s(y, \tau)) dy d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x, t; \xi, \tau) \left( \int_{\Omega} \psi(\xi, y, \tau) v_{\max}^n(y, \tau) dy \right) dS_{\xi} d\tau. \end{aligned}$$

By the properties of the Green function  $(u_{\max}(x, t), v_{\max}(x, t))$  is a solution of (1) in  $Q_T$ . Let  $(u(x, t), v(x, t))$  be another solution of (1) in  $Q_T$ . Applying a comparison principle to problem (3), we have  $u_{\varepsilon}(x, t) \geq u(x, t)$ ,  $v_{\varepsilon}(x, t) \geq v(x, t)$  in  $Q_T$ . Taking  $\varepsilon \rightarrow 0$  we deduce that  $u_{\max} \geq u(x, t)$ ,  $v_{\max} \geq v(x, t)$  in  $Q_T$ . Therefore,  $(u_{\max}(x, t), v_{\max}(x, t))$  is a maximal solution of (1) in  $Q_T$ .  $\triangleright$

### 3. Comparison Principle

We start this section with a comparison principle for problem (1).

**Theorem 3.** *Let  $(\bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t))$  and  $(\underline{u}(x, t), \underline{v}(x, t))$  be a supersolution and a subsolution of problem (1) in  $Q_T$ , respectively. Suppose that  $\underline{u}(x, t) > 0$  or  $\bar{u}(x, t) > 0$  in  $Q_T \cup \Gamma_T$  and  $\underline{v}(x, t) > 0$  or  $\bar{v}(x, t) > 0$  in  $Q_T \cup \Gamma_T$  if  $\min(p, q, m, n) < 1$ . Then  $\bar{u}(x, t) \geq \underline{u}(x, t)$  and  $\bar{v}(x, t) \geq \underline{v}(x, t)$  in  $Q_T \cup \Gamma_T$ .*

◁ Suppose at first that

$$\min(p, q, m, n) \geq 1. \quad (18)$$

Let functions  $u_{0\varepsilon}(x), v_{0\varepsilon}(x)$  have the same properties as in the previous section but

$$0 \leq u_{0\varepsilon}(x) - \underline{u}(x, 0) \leq 2\varepsilon, \quad 0 \leq v_{0\varepsilon}(x) - \underline{v}(x, 0) \leq 2\varepsilon. \quad (19)$$

Then problem (1) with  $u_0(x) = \underline{u}(x, 0)$ ,  $v_0(x) = \underline{v}(x, 0)$  has a maximal solution  $(u_{\max}(x, t), v_{\max}(x, t))$ , and, moreover,

$$u_{\max}(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t), \quad v_{\max}(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon(x, t),$$

where  $(u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t))$  is a solution of (3). To establish the theorem it is enough to prove that

$$\underline{u}(x, t) \leq u_{\max}(x, t) \leq \bar{u}(x, t), \quad \underline{v}(x, t) \leq v_{\max}(x, t) \leq \bar{v}(x, t) \quad \text{in } Q_{T_0} \cup S_{T_0} \quad (20)$$

for any  $T_0 \in (0, T)$ . We show only that

$$u_{\max}(x, t) \leq \bar{u}(x, t), \quad v_{\max}(x, t) \leq \bar{v}(x, t) \quad \text{in } Q_{T_0} \cup S_{T_0} \quad (21)$$

for any  $T_0 \in (0, T)$  since the proof of other inequalities in (20) is similar. We set

$$\omega_1(x, t) = u_\varepsilon(x, t) - \bar{u}(x, t), \quad \omega_2(x, t) = v_\varepsilon(x, t) - \bar{v}(x, t). \quad (22)$$

By virtue of (3), (19), (22) and the definition of a supersolution we conclude

$$\begin{cases} \omega_{1t} \leq \Delta\omega_1 + p\theta_1^{p-1}\omega_2 - ar\theta_2^{r-1}\omega_1 + a\varepsilon^r, & (x, t) \in Q_{T_0}, \\ \omega_{2t} \leq \Delta\omega_2 + q\theta_3^{q-1}\omega_1 - bs\theta_4^{s-1}\omega_2 + b\varepsilon^s, & (x, t) \in Q_{T_0}, \\ \frac{\partial\omega_1(x, t)}{\partial\nu} \leq \int_{\Omega} \phi(x, y, t)m\theta_5^{m-1}\omega_1(y, t) dy, & (x, t) \in S_{T_0}, \\ \frac{\partial\omega_2(x, t)}{\partial\nu} \leq \int_{\Omega} \psi(x, y, t)n\theta_6^{n-1}\omega_2(y, t) dy, & (x, t) \in S_{T_0}, \\ \omega_1(x, 0) \leq 2\varepsilon, \quad \omega_2(x, 0) \leq 2\varepsilon, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (23)$$

where  $\theta_i$ ,  $i = 1, 4, 6$ , are some continuous functions in  $\overline{Q_T}$  between  $v_\varepsilon(x, t)$  and  $\bar{v}(x, t)$ , and  $\theta_i$ ,  $i = 2, 3, 5$ , are some continuous functions in  $\overline{Q_T}$  between  $u_\varepsilon(x, t)$  and  $\bar{u}(x, t)$ . Based on the assumptions made, we have

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{u}(x, t) \leq M, \quad 0 \leq \bar{v}(x, t) \leq M, \quad \varepsilon \leq u_\varepsilon(x, t) \leq M, \quad \varepsilon \leq v_\varepsilon(x, t) \leq M \quad \text{in } \overline{Q_{T_0}}, \\ 0 \leq \phi(x, y, t) \leq M \quad \text{and} \quad 0 \leq \psi(x, y, t) \leq M \quad \text{in } \partial\Omega \times \overline{Q_{T_0}}, \end{aligned} \quad (24)$$

where  $M$  is some positive constant. It follows from (24) that powers of  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  in (23) are positive bounded functions in  $Q_{T_0}$ , and, moreover,  $\theta_1^{p-1} \leq M^{p-1}$ ,  $\theta_3^{q-1} \leq M^{q-1}$ ,  $\theta_5^{m-1} \leq M^{m-1}$ ,  $\theta_6^{n-1} \leq M^{n-1}$ . Let us define the functions

$$\omega_1(x, t) = f(x, t) + \varepsilon_1 \exp(\alpha t)h(x), \quad \omega_2(x, t) = g(x, t) + \varepsilon_1 \exp(\alpha t)h(x), \quad (25)$$

where

$$h(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad h(x) > 1 \quad \text{in } \bar{\Omega}, \quad \frac{\partial h(x)}{\partial \nu} > \{mM^m + nM^n\} \int_{\Omega} h(y) dy \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (26)$$

$$\varepsilon_1 = 2\varepsilon + \varepsilon^r + \varepsilon^s, \quad \alpha > \max_{\bar{\Omega}} \frac{\Delta h(x)}{h(x)} + pM^{p-1} + qM^{q-1} + a + b. \quad (27)$$

We substitute the functions from (25) into the first inequality of (23) to derive

$$f_t(x, t) + \alpha\varepsilon_1 \exp(\alpha t)h(x) \leq \Delta f(x, t) + \varepsilon_1 \exp(\alpha t)\Delta h(x) + p\theta_1^{p-1}(x, t)g(x, t) \\ + p\theta_1^{p-1}(x, t)\varepsilon_1 \exp(\alpha t)h(x) - ar\theta_2^{r-1}(x, t)f(x, t) - ar\theta_2^{r-1}(x, t)\varepsilon_1 \exp(\alpha t)h(x) + a\varepsilon^r \quad \text{in } Q_{T_0}.$$

Hence by (26), (27) we get

$$f_t(x, t) < \Delta f(x, t) + p\theta_1^{p-1}(x, t)g(x, t) - ar\theta_2^{r-1}(x, t)f(x, t) \quad \text{in } Q_{T_0}. \quad (28)$$

In a similar way we obtain

$$g_t(x, t) < \Delta g(x, t) + q\theta_3^{q-1}(x, t)f(x, t) - bs\theta_4^{s-1}(x, t)g(x, t) \quad \text{in } Q_{T_0}.$$

Substituting the functions from (25) into the third and fourth inequalities of (23), we deduce that

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial \nu} < \int_{\Omega} \phi(x, y, t)m\theta_5^{m-1}(y, t)f(y, t) dy \quad \text{on } S_{T_0} \quad (29)$$

and

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial \nu} < \int_{\Omega} \psi(x, y, t)n\theta_6^{n-1}(y, t)g(y, t) dy \quad \text{on } S_{T_0}.$$

From (23), (25), (27) we have  $f(x, 0) < 0$ ,  $g(x, 0) < 0$  in  $\bar{\Omega}$ . We prove that

$$f(x, t) < 0, \quad g(x, t) < 0 \quad \text{in } Q_{T_0} \cup S_{T_0}. \quad (30)$$

Let (30) not be true. Then there exists  $(x_0, t_0) \in Q_{T_0} \cup S_{T_0}$  such that  $t_0 > 0$ ,  $f(x, t) < 0$ ,  $g(x, t) < 0$  for  $0 \leq t < t_0$  and  $f(x_0, t_0) = 0$  or  $g(x_0, t_0) = 0$  for some  $x_0 \in \bar{\Omega}$ . Suppose that  $f(x_0, t_0) = 0$ . If  $x_0 \in \Omega$ , then  $f_t(x_0, t_0) = 0$ ,  $\Delta f(x_0, t_0) \leq 0$  and by (28) we get

$$0 = f_t(x_0, t_0) < \Delta f(x_0, t_0) + p\theta_1^{p-1}(x_0, t_0)g(x_0, t_0) \leq 0.$$

If  $x_0 \in \partial\Omega$ , then (29) yields

$$0 \leq \frac{\partial f(x_0, t_0)}{\partial \nu} < \int_{\Omega} \phi(x_0, y, t_0)m\theta_5^{m-1}(y, t_0)f(y, t_0) dy \leq 0.$$

If  $g(x_0, t_0) = 0$  we can obtain a contradiction in a similar way.

Taking  $\varepsilon \rightarrow 0$  in (30) and using (22), (25)–(27), we deduce (21).

If (18) doesn't hold we can introduce  $\omega_1 = \underline{u}(x, t) - \bar{u}(x, t)$ ,  $\omega_2(x, t) = \underline{v}(x, t) - \bar{v}(x, t)$  and prove the theorem in a similar way using the positiveness of some functions in a subsolution and a supersolution.  $\triangleright$

REMARK. Under the condition  $\min(r, s) < 1$  we don't suppose the positiveness of a subsolution or a supersolution in Theorem 3. A comparison principle for problem (1) with zero Dirichlet boundary condition is proved in [23] for the case  $\min(r, s) < 1$  under the conditions  $\bar{u}(x, t) > 0$  and  $\bar{v}(x, t) > 0$  in  $\bar{Q}_T$ .

To prove the uniqueness of a solution of problem (1) we need the following statement.

**Lemma.** *Let  $(u, v)$  be a solution of (1) in  $Q_T$ . If  $\min(r, s) \geq 1$  and  $u_0(x) \not\equiv 0$  or  $v_0(x) \not\equiv 0$  in  $\Omega$ , then  $u(x, t) > 0$  and  $v(x, t) > 0$  in  $Q_T \cup S_T$ . If  $u_0(x) > 0$  and  $v_0(x) > 0$  in  $\overline{\Omega}$  and either  $p < r < 1$ ,  $q < s < 1$  or  $\max(r, s) \geq 1$ , then  $u(x, t) > 0$  and  $v(x, t) > 0$  in  $Q_T \cup \Gamma_T$ .*

◁ Let  $\min(r, s) \geq 1$  and  $u_0(x) \not\equiv 0$  in  $\Omega$ . Denote

$$M = \sup_{Q_{T_0}} u(x, t),$$

where  $T_0 \in (0, T)$ . We set  $h(x, t) = u(x, t) \exp(\lambda t)$  with  $\lambda > aM^{r-1}$ . Then we have in  $Q_{T_0}$

$$h_t - \Delta h = \exp(\lambda t)(\lambda u + u_t - \Delta u) \geq \exp(\lambda t)u(\lambda - au^{r-1}) \geq 0.$$

Since  $h(x, 0) = u_0(x) \geq 0$  and  $u_0(x) \not\equiv 0$  in  $\Omega$ , by the strong maximum principle  $h(x, t) > 0$  in  $Q_{T_0}$ . Let  $h(x_0, t_0) = 0$  at some point  $(x_0, t_0) \in S_{T_0}$ . Then according to Theorem 3.6 of [31] it yields  $\partial h(x_0, t_0)/\partial \nu < 0$ , which contradicts the boundary condition for  $u$  in (1). Hence  $u(x, t) > 0$  in  $Q_T \cup S_T$  since  $T_0$  may be any in  $(0, T)$ .

We show that

$$v(x, t) > 0 \quad \text{in } Q_T \cup S_T. \quad (31)$$

If either  $v_0(x) \not\equiv 0$  or  $v_0(x) \equiv 0$  and there is no  $\tau \in (0, T_0)$ , such that

$$v(x, t) \equiv 0 \quad \text{in } Q_\tau, \quad (32)$$

then we prove (31) as above. If there exists  $\tau \in (0, T_0)$ , such that (32) holds, then we have a contradiction in  $Q_\tau$  with the second equation in (1).

Suppose now that  $u_0(x) > 0$  and  $v_0(x) > 0$  in  $\overline{\Omega}$  and  $p < r < 1$ ,  $q < s < 1$ . Let

$$\varepsilon_2 = \min \left\{ \min_{\overline{\Omega}} u_0(x), \min_{\overline{\Omega}} v_0(x), \left( \frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{r-p}}, \left( \frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{s-q}} \right\}.$$

It is easy to see that  $(\varepsilon_2, \varepsilon_2)$  is a subsolution of (1) in  $Q_T$  and by Theorem 3  $u(x, t) \geq \varepsilon_2$  and  $v(x, t) \geq \varepsilon_2$  in  $Q_T \cup \Gamma_T$ .

If  $u_0(x) > 0$  and  $v_0(x) > 0$  in  $\overline{\Omega}$  and  $s \geq 1$ , then arguing as above, we obtain

$$v(x, t) \geq \varepsilon_3 \quad \text{in } Q_T \cup \Gamma_T$$

for some  $\varepsilon_3 > 0$ . Set

$$\varepsilon_4 = \min \left\{ \min_{\overline{\Omega}} u_0(x), \left( \frac{\varepsilon_3^p}{a} \right)^{\frac{1}{r}} \right\}.$$

Then  $\underline{u}(x, t) = \varepsilon_4$  is a subsolution of the following problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + v^p - au^r, & (x, t) \in Q_T, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} \phi(x, y, t) u^m(y, t) dy, & (x, t) \in S_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (33)$$

Now by the comparison principle for (33) we conclude that  $u(x, t) \geq \varepsilon_4$  in  $Q_T \cup \Gamma_T$ . The proof is similar in the remaining case. ▷

As a simple consequence of Theorem 3 and Lemma, we get the following uniqueness result for problem (1).

**Theorem 4.** *Let  $(u, v)$  be a solution of (1) in  $Q_T$ . Suppose that at least one of the following conditions holds:*

- 1)  $u(x, t) > 0$  and  $v(x, t) > 0$  in  $Q_T \cup \Gamma_T$ ;
- 2)  $\min(p, q, m, n) \geq 1$ ;
- 3)  $\min(p, q, m, n) < 1$ ,  $u_0(x) > 0$  and  $v_0(x) > 0$  in  $\overline{\Omega}$  and either  $p < r < 1$ ,  $q < s < 1$  or  $\max(r, s) \geq 1$ .

*Then a solution of problem (1) is unique in  $Q_T$ .*

Now we show that problem (1) may have a nonunique solution in  $Q_T$ .

**Theorem 5.** *Let  $u_0(x) = v_0(x) \equiv 0$  and at least one of the following conditions hold:*

- 1)  $pq < 1$ ,  $r > \lambda p$  and  $s > \frac{q}{\lambda}$  for  $\lambda \in [q, \frac{1}{p}]$ ;
- 2)  $\min(1, r) > m$  and  $\phi(x, y_1, t_1) > 0$  for any  $x \in \partial\Omega$  and some  $y_1 \in \partial\Omega$  and  $t_1 \in [0, T]$ ;
- 3)  $\min(1, s) > n$  and  $\psi(x, y_2, t_2) > 0$  for any  $x \in \partial\Omega$  and some  $y_2 \in \partial\Omega$  and  $t_2 \in [0, T]$ .

*Then problem (1) has a nonunique solution in  $Q_T$ .*

$\triangleleft$  We note that problem (1) with trivial initial datum  $u_0(x) = v_0(x) \equiv 0$  has the trivial solution  $(0, 0)$ . As we showed in Theorem 2 a maximal solution  $(u_{\max}(x, t), v_{\max}(x, t))$  satisfies (17), where  $(u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t))$  is some positive in  $\overline{Q_T}$  supersolution of (1). To prove the theorem we construct a nontrivial nonnegative subsolution  $(\underline{u}(x, t), \underline{v}(x, t))$  of (1) with trivial initial datum. By Theorem 3 then we have  $u_\varepsilon(x, t) \geq \underline{u}(x, t)$ ,  $v_\varepsilon(x, t) \geq \underline{v}(x, t)$  and therefore a maximal solution is nontrivial.

Let the conditions 1) hold. We put

$$\underline{u}(x, t) = (Ctw(x, t))^\alpha, \quad \underline{v}(x, t) = (Ctw(x, t))^\beta, \quad (34)$$

where positive constants  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  will be chosen later and  $w(x, t)$  is a solution of the following problem

$$\begin{cases} w_t = \Delta w, & (x, t) \in Q_T, \\ w(x, t) = 0, & (x, t) \in S_T, \\ w(x, 0) = w_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Here  $w_0(x)$  is a bounded nontrivial nonnegative continuous function, which satisfies the boundary condition. By the strong maximum principle

$$0 < w(x, t) < M = \sup_{x \in \Omega} w_0(x) \quad \text{for } (x, t) \in Q_T. \quad (35)$$

We note that

$$\underline{u}(x, 0) = \underline{v}(x, 0) = 0 \quad \text{for } x \in \Omega \quad \text{and} \quad \frac{\partial \underline{u}(x, t)}{\partial \nu} \leq 0, \quad \frac{\partial \underline{v}(x, t)}{\partial \nu} \leq 0 \quad \text{for } (x, t) \in S_T. \quad (36)$$

Suppose at first that

$$\beta = \alpha q + 1, \quad (37)$$

where  $\alpha \geq \frac{p+1}{1-pq}$ . Then

$$\alpha \geq \beta p + 1. \quad (38)$$

We put  $\lambda = \frac{\alpha q + 1}{\alpha}$ . It is easy to check that  $\lambda$  takes all values in  $(q, \frac{q+1}{p+1}]$  if  $\alpha$  takes all values in  $[\frac{p+1}{1-pq}, \infty)$ . Since  $r > \lambda p$  and  $s > \frac{q}{\lambda}$  for  $\lambda \in (q, \frac{q+1}{p+1}]$  we have

$$\alpha r - \beta p > 0, \quad \beta s - \alpha q > 0. \quad (39)$$

By virtue of (34)–(39), after simple calculations we obtain

$$\begin{aligned} \underline{u}_t - \Delta \underline{u} - \underline{v}^p + a\underline{u}^r &\leq \alpha t^{\alpha-1} (Cw(x, t))^\alpha - (Ctw(x, t))^{\beta p} + a(Ctw(x, t))^{\alpha r} \\ &\leq (Ctw(x, t))^{\beta p} \left\{ \alpha T^{\alpha-\beta p-1} (CM)^{\alpha-\beta p} + a(CTM)^{\alpha r-\beta p} - 1 \right\} \leq 0, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \underline{v}_t - \Delta \underline{v} - \underline{u}^q + b\underline{v}^s &\leq \beta t^{\beta-1} (Cw(x, t))^\beta - (Ctw(x, t))^{\alpha q} + b(Ctw(x, t))^{\beta s} \\ &\leq (Ctw(x, t))^{\alpha q} \left\{ \beta CM + b(CTM)^{\beta s-\alpha q} - 1 \right\} \leq 0 \end{aligned} \quad (41)$$

for  $(x, t) \in Q_T$  if  $C$  is sufficiently small. It is easy to see that (40), (41) hold for  $r > qp$  and  $s > 1$  under suitable choice of  $\alpha$  and  $C$ . Thus by (36), (40), (41) we conclude that  $(\underline{u}(x, t), \underline{v}(x, t))$  is a nontrivial subsolution of (1) with trivial initial datum and the theorem is proved for  $\lambda \in [q, \frac{q+1}{p+1}]$ . To prove the theorem for  $\lambda \in (\frac{q+1}{p+1}, \frac{1}{p}]$  we put  $\alpha = \beta p + 1$  with  $\beta \geq \frac{q+1}{1-pq}$  and argue in a similar way.

Now we suppose that the conditions 2) hold. Let us consider the following problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - au^r, & (x, t) \in Q_T, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} \phi(x, y, t) u^m(y, t) dy, & (x, t) \in S_T, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (42)$$

It is proved in [9] that (42) has a nontrivial nonnegative solution  $u_n(x, t)$ . Then a pair of functions  $(u_n(x, t), 0)$  is a nontrivial subsolution of (1) with trivial initial datum.

The remaining case can be treated similarly.  $\triangleright$

## References

1. Zheng, S. and Kong, L. Roles of Weight Functions in a Nonlinear Nonlocal Parabolic System, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2008, vol. 68, no. 8, pp. 2406–2416. DOI: 10.1016/j.na.2007.01.067.
2. Marras, M. and Vernier Piro, S. Explicit Estimates for Blow-Up Solutions to Parabolic Systems Under Nonlocal Boundary Conditions, *Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences*, 2014, vol. 67, no. 4, pp. 459–466.
3. Fang, Z. B. and Zhang, J. Global Existence and Blow-up Properties of Solutions for Porous Medium Equation with Nonlinear Memory and Weighted Nonlocal Boundary Condition, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2015, vol. 66, pp. 67–81. DOI: 10.1007/s00033-013-0382-5.
4. Gladkov, A. and Kavitova, T. Initial-Boundary-Value Problem for a Semilinear Parabolic Equation with Nonlinear Nonlocal Boundary Conditions, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2016, vol. 68, no. 2, pp. 179–192. DOI: 10.1007/s11253-016-1217-2.
5. Gladkov, A. and Nikitin, A. On the Existence of Global Solutions of a System of Semilinear Parabolic Equations with Nonlinear Nonlocal Boundary Conditions, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 467–482. DOI: 10.1134/S0012266116040078.
6. Gladkov, A. and Kavitova, T. Blow-up Problem for Semilinear Heat Equation with Nonlinear Nonlocal Boundary Condition, *Applicable Analysis*, 2016, vol. 95, no. 9, pp. 1974–1988. DOI: 10.1080/00036811.2015.1080353.
7. Gladkov, A. Blow-up Problem for Semilinear Heat Equation with Nonlinear Nonlocal Neumann Boundary Condition, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2017, vol. 16, no. 6, pp. 2053–2068. DOI: 10.3934/cpaa.2017101.
8. Kakumani, B. K. and Tumuluri, S. K. Asymptotic Behavior of the Solution of a Diffusion Equation with Nonlocal Boundary Conditions, *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B*, 2017, vol. 22, no. 2, pp. 407–419. DOI: 10.3934/dcdsb.2017019.
9. Gladkov, A. Initial Boundary Value Problem for a Semilinear Parabolic Equation with Absorption and Nonlinear Nonlocal Boundary Condition, *Lithuanian Mathematical Journal*, 2017, vol. 57, no. 4, pp. 468–478. DOI: 10.1007/s10986-017-9376-x.
10. Wang, J. and Yang, H. Properties of Solutions for a Reaction-Diffusion Equation with Nonlinear Absorption and Nonlinear Nonlocal Neumann Boundary Condition, *Boundary Value Problems*, 2018, article no. 143. DOI: 10.1186/s13661-018-1069-9.

11. Gladkov, A. and Nikitin, A. On Global Existence of Solutions of Initial Boundary Value Problem for a System of Semilinear Parabolic Equations with Nonlinear Nonlocal Neumann Boundary Conditions, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 86–105. DOI: 10.1134/S0012266118010081.
12. Liu, B., Lin, H., Li, F. and Wang, X. Blow-up Analyses in Reaction-Diffusion Equations with Nonlinear Nonlocal Boundary Flux, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2019, vol. 70, article no. 106. DOI: 10.1007/s00033-019-1155-6.
13. Liu, B., Wu, G., Sun, X. and Li, F. Blow-up Estimate in Reaction-Diffusion Equation with Nonlinear Nonlocal Flux and Source, *Computers & Mathematics with Applications*, 2019, vol. 78, no. 6, pp. 1862–1877. DOI: 10.1016/j.camwa.2019.03.026.
14. Gladkov, A. and Kavtova, T. On the Initial-Boundary Value Problem for a Nonlocal Parabolic Equation with Nonlocal Boundary Condition, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, vol. 43, no. 1, pp. 5464–5479. DOI: 10.1002/mma.6286.
15. Anderson, J. R. and Deng, K. Global Solvability for a Diffusion Model with Absorption and Memory-Driven Flux at the Boundary, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2020, vol. 71, article no. 50. DOI: 10.1007/s00033-020-1272-2.
16. Gladkov, A. and Guedda, M. Global Existence of Solutions of a Semilinear Heat Equation with Nonlinear Memory Condition, *Applicable Analysis*, 2020, vol. 99, no. 16, pp. 2823–2832. DOI: 10.1080/00036811.2019.1584291.
17. Kou, W. and Ding, J. Blow-up Phenomena for  $p$ -Laplacian Parabolic Equations Under Nonlocal Boundary Conditions, *Applicable Analysis*, 2021, vol. 100, no. 16, pp. 3350–3365. DOI: 10.1080/00036811.2020.1716972.
18. Lu, H., Hu, B. and Zhang, Z. Blowup Time Estimates for the Heat Equation with a Nonlocal Boundary Condition, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2022, vol. 73, article no. 60. DOI: 10.1007/s00033-022-01698-9.
19. Gladkov, A. Global Existence and Blow-up of Solutions of Nonlinear Nonlocal Parabolic Equation with Absorption Under Nonlinear Nonlocal Boundary Condition, *Monatshefte für Mathematik*, 2024, vol. 203, no. 2, pp. 357–372. DOI: 10.1007/s00605-023-01892-5.
20. Huo, W. and Fang, Z. B. Blow-up Analysis for Heat Equation with a Nonlocal Weighted Exponential Boundary Flux, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2023, vol. 20, article no. 131. DOI: 10.1007/s00009-023-02354-w.
21. Huo, W., Jia, C. and Fang, Z. B. On a Porous Medium Equation with Weighted Inner Source Terms and a Nonlinear Nonlocal Boundary Condition, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2024, vol. 28, no. 4, pp. 767–797. DOI: 10.11650/tjm/240304.
22. Gladkov, A. Global Existence and Blow-up of Solutions for a Parabolic Equation with Nonlinear Memory and Absorption under Nonlinear Nonlocal Boundary Condition, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2024, vol. 45, no. 4, pp. 1703–1712. DOI: 10.1134/S1995080224601449.
23. Souplet, Ph. and Bedjaoui, N. Critical Blowup Exponents for a System of Reaction-Diffusion Equations with Absorption, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2002, vol. 53, pp. 197–210. DOI: 10.1007/s00033-002-8152-9.
24. Wang, M. X. and Wang, X. L. A Reaction–Diffusion System with Nonlinear Absorption Terms and Boundary Flux, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 2008, vol. 24, no. 3, pp. 409–422. DOI: 10.1007/s10255-008-8020-2.
25. Zheng, S. and Ji, R. Multiple Absorption-Related Blow-up Rates to a Coupled Heat System, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, vol. 355, no. 2, pp. 739–749. DOI: 10.1016/j.jmaa.2009.02.027.
26. Ladyzhenskaja, O. A., Solonnikov, V. A. and Ural’ceva, N. N. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Providence, RI, Translations of Mathematical Monographs, 1968, 648 p.
27. Kahane, C. S. On the Asymptotic Behavior of Solutions of Parabolic Equations, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1983, vol. 33, no. 108, pp. 262–285.
28. Hu, B. and Yin, H. M. Critical Exponents for a System of Heat Equations Coupled in a Non-linear Boundary Condition, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1996, vol. 19, no. 14, pp. 1099–1120. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1476(19960925)19:14<1099::AID-MMA780>3.0.CO;2-J.
29. Garroni, M. G. and Menaldi, J. L. *Green Functions for Second Order Parabolic Integro-Differential Problems*, Great Britain, Longman Group UK Limited, 1992, 440 p.
30. Hartman, P. *Ordinary Differential Equations*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1964, 616 p.
31. Hu, B. *Blow-up Theories for Semilinear Parabolic Equations*, Berlin, Springer-Verlag, 2011, 127 p. DOI: 10.1007/978-3-642-18460-4.

Received February 15, 2025

DARIA A. BULYNO  
Belarusian State University,  
4 Nezavisimosti Ave., Minsk 220030, Belarus,  
Assistant of Department of Intelligent Modeling Methods  
E-mail: dabulyno13@gmail.com

ALEXANDER L. GLADKOV  
Belarusian State University,  
4 Nezavisimosti Ave., Minsk 220030, Belarus,  
Head of Department of Intelligent Modeling Methods  
E-mail: gladkoval@bsu.by  
<https://orcid.org/0000-0002-6255-1161>

ALEXANDR I. NIKITIN  
Masherov Vitebsk State University,  
33 Moskovskiy Ave., Vitebsk 210038, Belarus,  
Associate Professor of Department of Applied and System Programming  
E-mail: ip.alexnikitin@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0002-1736-1983>

Владикавказский математический журнал  
2025, Том 27, Выпуск 2, С. 5–18

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ  
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОГЛОЩЕНИЕМ И НЕЛИНЕЙНЫМИ  
НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Булыно Д. А.<sup>1</sup>, Гладков А. Л.<sup>1</sup>, Никитин А. И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Белорусский государственный университет,  
Беларусь, 220030, Минск, пр. Независимости, 4;

<sup>2</sup> Витебский государственный университет им. П. М. Машерова,  
Беларусь, 210038, Витебск, Московский проспект, 33

E-mail: dabulyno13@gmail.com, gladkoval@bsu.by, ip.alexnikitin@gmail.com

**Аннотация.** В работе мы рассматриваем классические решения начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с поглощением и нелинейными нелокальными граничными условиями. Нелинейности в уравнениях и граничных условиях могут не удовлетворять условию Липшица. Для доказательства существования решения мы регуляризуем исходную задачу. Используя теорему Шаудера — Тихонова о неподвижной точке, доказывается существование локального решения регуляризованной задачи. Показано, что предел решений регуляризованной задачи является максимальным решением исходной задачи. Используя свойства максимального решения, доказывается принцип сравнения. При этом не делается дополнительных предположений, когда нелинейности в поглощении не удовлетворяют условию Липшица. Найдены условия, при выполнении которых решения являются положительными функциями. Устанавливается единственность решения. Показано, что нулевое решение может быть неединственным.

**Ключевые слова:** система полулинейных параболических уравнений, нелокальные граничные условия, существование решения, принцип сравнения.

**AMS Subject Classification:** 35K51, 35K58, 35K61.

**Образец цитирования:** Bulyno D. A., Gladkov A. L. and Nikitin A. I. Initial Boundary Value Problem for a System of Semilinear Parabolic Equations with Absorption and Nonlinear Nonlocal Boundary Conditions // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 2.—С. 5–18 (in English). DOI: 10.46698/o2548-3794-2309-a.

УДК 517.93

DOI 10.46698/p1879-1111-4332-k

## О СТРУКТУРЕ ОКРЕСТНОСТИ ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ К НЕГРУБОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ<sup>#</sup>

О. В. Гордеева<sup>1</sup>, В. Е. Гордеев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский Нижегородский  
государственный университет им. Н. И. Лобачевского,  
Научно-образовательный математический центр  
«Математика технологий будущего»,  
Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
E-mail: olga.gordeeva@inbox.ru, vgord1103@gmail.com

**Аннотация.** В работе рассматривается однопараметрическое семейство  $f_\mu$  двумерных диффеоморфизмов такое, что при  $\mu = 0$  диффеоморфизм  $f_0$  имеет трансверсальную гомоклиническую траекторию к негрубой неподвижной точке произвольного конечного порядка вырождения  $n \geq 1$ , а при  $\mu > 0$  неподвижная точка становится грубой седловой. Цель работы — дать описание структуры множества  $N_\mu$  траекторий из достаточно малой фиксированной окрестности гомоклинической траектории. Основным результатом работы является полное описание множества  $N_\mu$  траекторий, целиком лежащих в окрестности гомоклинической структуры. Показано, что при  $\mu \geq 0$  множество  $N_\mu$  является гиперболическим (при  $\mu = 0$  — неравномерно гиперболическим), и ограничение  $f_\mu$  на  $N_\mu$ , т. е. дискретная динамическая система  $f_\mu|_{N_\mu}$ , топологически сопряжено с некоторой нетривиальной подсистемой топологической схемы Бернулли из двух символов. Тем самым мы обобщаем классический результат Лукьянова и Шильникова, полученный ими для случая, когда неподвижная точка является невырожденным седло-узлом ( $n = 1$ ). Помимо этого в работе получены новые эффективные формулы для итераций одномерных отображений (отображений в ограничении на центральное многообразие диффеоморфизма  $f_\mu$ ). Эти формулы выводятся с помощью некоторой модификации метода вложения отображения в поток и метод Шильникова перекрестных отображений.

**Ключевые слова:** одномерное отображение, седло-узел, негиперболическое седло, гомоклиническая траектория, гиперболическое множество, топологическая схема Бернулли.

**AMS Subject Classification:** 39A28.

**Образец цитирования:** Гордеева О. В., Гордеев В. Е. О структуре окрестности гомоклинической траектории к негрубой неподвижной точке // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 2.—С. 19–34. DOI: 10.46698/p1879-1111-4332-k.

### 1. Введение

В теории бифуркаций особое место занимают задачи, связанные с изучением глобальных бифуркаций многомерных систем с гомоклиническими траекториями к негиперболическим состояниям равновесия или периодическим движениям [1]. Такие системы характеризуются неравномерно гиперболическим поведением траекторий, и они являются пограничными между грубыми гиперболическими системами и системами со сложным

---

<sup>#</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 24-11-00339.  
© 2025 Гордеева О. В., Гордеев В. Е.

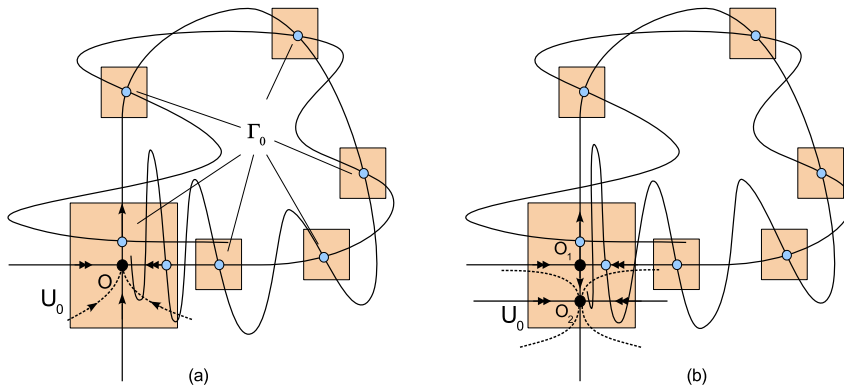
хаотическим поведением траекторий, для которых характерно существование гомоклинических касаний и всех тех непредсказуемых динамических явлений и бифуркаций, которые они приносят [2, 3].

Основные элементы теории глобальных бифуркаций систем с гомоклиническими орбитами к негиперболическим периодическим траекториям были заложены в работах В. С. Афраймовича и Л. П. Шильникова [4–6]. С точки зрения нелинейной динамики, в этих работах были заложены основы теории такого часто наблюдаемого в приложениях типа странных аттракторов, которые называются «тор-хаосом». Такой тип хаоса возникает при разрушении резонансного двумерного инвариантного тора после того, как существующие на нем устойчивое и седловое периодические движения сливаются в седло-узловое и исчезают. Подробно этот механизм возникновения тор-хаоса, который называется также переходом к хаосу через разрушение двумерного тора, представлен в работе [6], см. также [7].

Одним из основных случаев разрушения инвариантного тора, указанным еще в [4], является случай, когда в критический момент седло-узловое периодическое движение имеет еще и трансверсальную гомоклиническую траекторию. Основные результаты, связанные с исследованием возникающих здесь глобальных бифуркаций, были получены в работе Лукьянова и Шильникова [8].

Напомним, что в работе [8] рассматривалось однопараметрическое семейство  $F_\mu$   $n$ -мерных  $C^r$ -гладких диффеоморфизмов<sup>1</sup> таких, что

- при  $\mu = 0$  диффеоморфизм  $F_0$  имеет трансверсальную гомоклиническую траекторию  $\Gamma_0$  к невырожденной седло-узловой неподвижной точке  $O$ ;
- при  $\mu < 0$  неподвижная точка исчезает, а при  $\mu > 0$  она распадается на две грубые неподвижные точки — седловую  $O_{1\mu}$  и устойчивую  $O_{2\mu}$ , см. рис. 1.



**Рис. 1.** Примеры двумерных диффеоморфизмов с трансверсальной гомоклинической траекторией  $\Gamma_0$  к неподвижной точке в следующих случаях: (а) неподвижная точка  $O$  является точкой седло-узловой типа; (б) точка  $O$  распадается на две, устойчивую  $O_2$  и седловую  $O_1$ , траектория  $\Gamma_0(\mu)$  становится гомоклинической к точке  $O_1$ . В каждом из случаев показана также окрестность  $U$  гомоклинической траектории, которая состоит из окрестности  $U_0$  точки  $O$  и конечного числа малых окрестностей тех точек траектории  $\Gamma_0$ , которые не попали в  $U_0$ . В случае (б) окрестность  $U_0$  содержит обе точки  $O_1$  и  $O_2$ .

<sup>1</sup>Заметим, что исходной задачей в [8] был многомерный поток. Хорошо известно, что исследование многомерных потоков часто может быть сведено к исследованию соответствующих отображений Пуанкаре на некоторой глобальной секущей, которые являются диффеоморфизмами размерности на единицу меньше. Этот метод Пуанкаре позволяет не только сделать рассматриваемую задачу геометрически более наглядной, но и существенно упрощает многие математические конструкции. В настоящей работе мы будем рассматривать для определенности только диффеоморфизмы.

Основное внимание в работе [8], как и в цикле работ Афраймовича и Шильникова [4–6], было уделено исследованию динамических явлений, происходящих при исчезновении седло-узла (для  $\mu < 0$ ). Здесь была получена серия замечательных результатов, которые составили в совокупности основу математической теории известного в нелинейной динамике сценария перехода к хаосу через перемежаемость [9]. Однако в работе [8] был также исследован случай (при  $\mu \geq 0$ ), когда седло-узел распадается на две неподвижные точки. Тогда гомоклиническая траектория, уже к седловой неподвижной точке  $O_{1\mu}$ , сохраняется. При этом, как показано в [8], при достаточно малых  $\mu$  сохраняется и нетривиальное гиперболическое множество  $N_\mu$ , которое состоит из всех неблуждающих траекторий (за исключением точки  $O_{2\mu}$  при  $\mu > 0$ ), целиком лежащих в достаточно малой фиксированной окрестности  $U = U(O \cup \Gamma_0)$  гомоклинической траектории  $\Gamma_0$ . Такая окрестность состоит из окрестности  $U_0$  точки  $O$  и некоторого числа окрестностей тех точек траектории  $\Gamma_0$ , которые не лежат в  $U_0$ , см. рис. 1.

Для того чтобы сформулировать соответствующий результат из [8], напомним сначала некоторые факты из символической динамики.

Топологической схемой Бернулли из двух символов  $\mathcal{B}_2$  называется дискретная динамическая система  $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$ , определенная на полном метрическом пространстве  $\Omega$  бесконечных в обе стороны последовательностей вида  $\omega = (\dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots)$ , где  $\alpha_i = \{0, 1\}$ ,  $i = 0, \pm 1, \dots$ . На  $\Omega$  вводится метрика

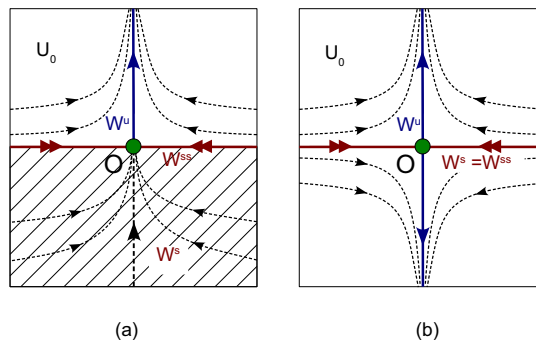
$$\rho(\omega, \omega') = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{|\alpha_k - \alpha'_k|}{2^{|k|}}$$

и оператор  $\sigma$ , гомеоморфизм на  $\Omega$ , который сдвигает каждый символ последовательности на единицу влево:  $\sigma\omega = \omega'$ ,  $\omega = \{\alpha_k\}$ ,  $\omega' = \{\beta_k\}$ ,  $\beta_{k-1} = \alpha_k$ . Рассмотрим подмножество  $\Omega_{\bar{k}} \subset \Omega$ , выделяемое следующими условиями:

- 1)  $\Omega_{\bar{k}}$  не содержит последовательностей, в которых есть два соседних символа «1»;
- 2) для любой последовательности из  $\Omega_{\bar{k}}$ , длина любого полного отрезка из символов «0» не меньше, чем  $\bar{k}$ .

**Теорема [8].** *Существуют такие  $\mu_0 > 0$  и натуральное  $\bar{k}$ , что при всех  $0 \leq \mu \leq \mu_0$  динамическая система  $F_\mu|_{N_\mu}$  топологически сопряжена с системой  $\sigma : \Omega_{\bar{k}} \rightarrow \Omega_{\bar{k}}$ .*

В настоящей работе мы обобщаем этот результат на случай двумерных диффеоморфизмов с трансверсальной гомоклинической траекторией к негрубой неподвижной точке, имеющей произвольное конечное вырождение.



**Рис. 2.** Структура окрестности неподвижных точек типа (а) седло-узел и (б) сложное седло в случае двумерных отображений.

В работе рассматривается однопараметрическое семейство  $C^r$ -гладких двумерных диффеоморфизмов  $f_\mu$ , удовлетворяющих условиям А)–С):

А) При  $\mu = 0$  диффеоморфизм  $f_0$  имеет неподвижную точку  $O$  с мультипликаторами  $\nu_1 = 1$  и  $\nu_2 = \lambda$ , где  $0 < |\lambda| < 1$ . Предполагается также, что неподвижная точка  $O$  имеет вырождение порядка  $n \geq 1$  и ее ляпуновская величина положительна, т. е. при  $n$  нечетных это точка типа седло-узел, а при  $n$  четных — типа сложное седло.

Заметим, что в этом случае локальное отображение  $T_0$ , т. е. ограничение диффеоморфизма  $f_\mu$  на достаточно малую окрестность  $U_0$  точки  $O$ , с помощью некоторой  $C^{r-1}$ -гладкой замены координат может быть приведено к виду [10]

$$T_0 : \bar{x} = \lambda x(1 + h(x, y)), \quad \bar{y} = y + y^{n+1} + P(y), \quad (1)$$

где  $h(0, 0) = 0$  и  $P(y) = O(y^{n+2})$ . Из формулы (1) вытекает, см. также [1, 7], что качественная картина поведения траекторий вблизи таких точек будет такой же, как и в невырожденном случае: как у простого седло-узла (при  $n = 1$ ) и у грубого седла соответственно, см. рис. 2. У неподвижных точек этих двух типов можно выделить два одномерных локальных инвариантных многообразия. Во-первых, это сильно устойчивое многообразие  $W^{ss}(O) : \{y = 0, |x| < \varepsilon\}$ , и, во-вторых, это неустойчивое многообразие  $W^u(O)$ , которое в случае седло-узла имеет уравнение  $\{x = 0, 0 < y < \varepsilon\}$ , а в случае сложного седла — уравнение  $\{x = 0, |y| < \varepsilon\}$ .

На рис. 2 показано как такие многообразия устроены локально. Эти локальные многообразия продолжаются до глобальных, которые, как известно, не являются подмногообразиями (например, в топологии плоскости), но мы предполагаем, что они пересекаются таким образом, что

В) Инвариантные глобальные неустойчивое  $W^u(O)$  и сильно устойчивое  $W^{ss}(O)$  многообразия неподвижной точки  $O$  диффеоморфизма  $f_0$  пересекаются трансверсально в точках некоторой гомоклинической траектории  $\Gamma_0$ , см. рис. 1а.

С) При  $\mu > 0$  точка  $O$  становится грубой седловой неподвижной точкой диффеоморфизма  $f_\mu$  и траектория  $\Gamma_0(\mu)$  является грубой (трансверсальной) гомоклинической к ней траекторией.

Основной результат работы — это следующая теорема.

**Основная теорема.** Пусть  $f_\mu$  — непрерывное однопараметрическое семейство  $C^r$ -гладких,  $r \geq n+3$ , двумерных диффеоморфизмов, удовлетворяющее условиям А)–С). Тогда существует такая достаточно малая фиксированная окрестность  $U = U(O \cup \Gamma_0)$ , такие  $\mu_1 > 0$  и натуральное  $\bar{k}$ , что при каждом фиксированном  $\mu \in [0, \mu_1]$  ограничение  $f_\mu$  на множество  $N_\mu$  неблуждающих траекторий из  $U$  топологически сопряжено с системой  $\sigma : \Omega_{\bar{k}} \rightarrow \Omega_{\bar{k}}$ . При этом  $N_\mu$  является равномерно гиперболическим множеством при  $\mu > 0$  и неравномерно гиперболическим при  $\mu = 0$ .

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству этой теоремы. Во втором параграфе мы доказываем некоторые результаты о структуре итераций одномерного отображения, которое в нашем случае, является ограничением диффеоморфизма  $f_\mu$  на его центральное многообразие. Полученные результаты имеют вполне самостоятельный интерес, они также существенно используются при доказательстве основной теоремы, которое мы даем в третьем параграфе.

## 2. О структуре итераций отображений вблизи негрубых неподвижных точек

Рассмотрим однопараметрическое семейство  $C^r$ -гладких одномерных отображений вида

$$\tau_\mu : \bar{y} = (1 + \mu)y + y^{n+1} + P(y, \mu), \quad (2)$$

где  $\mu$  — параметр,  $P(y, \mu) = O(y^{n+2})$  и  $r \geq n + 2$ . Нас интересует прежде всего поведение траекторий отображения  $\tau_\mu$  на полуинтервале  $I_0 = [0, \varepsilon)$  значений координаты  $y$  при достаточно малом фиксированном  $\varepsilon > 0$ , не зависящем от  $\mu$ .

Отметим, что одномерное отображение  $\bar{y} = (1 + \mu)y + y^{n+1} + \dots$  является весьма частным случаем общей  $n$ -параметрической нормальной формы  $\bar{y} = \mu_0 + (1 + \mu_1)y + \dots + \mu_{n-1}y^{n-1} + y^{n+1} + \dots$  для бифуркаций одномерных отображений (или многомерных отображений в ограничении на центральное многообразие), имеющих негрубую неподвижную точку с мультипликатором  $+1$ . В отличие от общей нормальной формы, в отображении (2) координата неподвижной точки  $y = 0$  при изменении параметра  $\mu$  сохраняется. Кроме того, при  $\mu > 0$  она становится грубой седловой (что согласуется с условием С)), и на интервале  $(0, \varepsilon)$  с достаточно малым  $\varepsilon > 0$  других неподвижных точек не появляется.

Таким образом, задача исследования поведения траекторий в однопараметрическом семействе (2) становится интересной с той точки зрения, что ее решение позволит разобраться в тонких вопросах перехода от неравномерно гиперболической к равномерно гиперболической динамике, в том числе при исследовании соответствующих глобальных бифуркаций. В случае коразмерности один,  $n = 1$ , такие бифуркации изучались в работе Лукьянова и Шильникова [8], для случая невырожденного седло-узла, соответствующую теорему мы сформулировали во введении. В нашей работе мы обобщаем этот результат Лукьянова и Шильникова из [8] на случай произвольного  $n$ .

Для этой цели в настоящем параграфе мы выводим формулы для итераций отображения  $\tau(\mu)$  и их производных на полуинтервале  $I_0 = [0, \varepsilon)$ , которые будут справедливы для достаточно малого фиксированного и не зависящего от  $\mu$  значения  $\varepsilon > 0$ .

Докажем сначала общий результат о вложении в поток одномерного отображения в окрестности негрубой неподвижной точки.

**Лемма 1.** Рассмотрим  $m$ -параметрическое семейство  $C^r$ -гладких ( $r \geq 2$ ) одномерных отображений вида

$$\bar{y} = y + g(y, \tilde{\mu}), \quad (3)$$

непрерывно зависящих от параметров  $\tilde{\mu}$ , область значений которых  $\Delta_m$  принадлежит шару  $\|\tilde{\mu}\| < \delta_0$  и содержит точку  $\tilde{\mu} = 0$ . Пусть существует такое  $\epsilon_0 > 0$ , что для всех  $\tilde{\mu} \in \Delta_m$  и всех  $0 < y < \epsilon_0$  выполняются условия  $g(0, \tilde{\mu}) \equiv 0$ ,  $g'_y(0, 0) = 0$  и  $g'_y(y, \tilde{\mu}) > 0$ . Тогда отображение (3) на интервале  $0 < y < \epsilon_0$  при  $\tilde{\mu} \in \Delta_m$  совпадает с отображением сдвига на единицу времени по траекториям некоторого  $C^{r-1}$ -гладкого потока

$$\dot{y} = \hat{g}(y, \tilde{\mu}), \quad (4)$$

и функция  $\hat{g}(y, \tilde{\mu})$  определяется на интервале  $0 < y < \epsilon_0$  по функции  $g(y, \tilde{\mu})$  однозначно.

◁ По определению, отображение (3) вкладывается в поток (4), если выполняется интегральное равенство

$$\int_y^{\bar{y}} \frac{ds}{\hat{g}(s, \tilde{\mu})} = 1. \quad (5)$$

Это означает, что за  $t = 1$  мы переходим вдоль траекторий такого потока из точки  $y$  в точку  $\bar{y}$  в соответствии с формулой (3). Теперь наша задача показать, что уравнение (5) имеет решение и оно единственное.

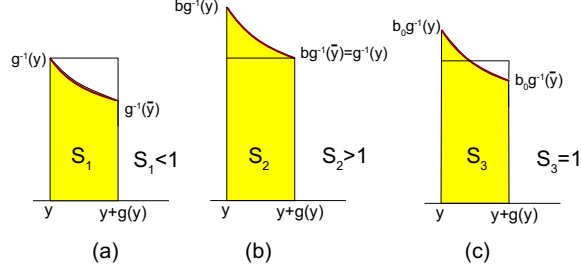


Рис. 3.

Посмотрим, что будет при  $\hat{g}(s, \tilde{\mu}) = g(s, \tilde{\mu})$ . В этом случае, поскольку  $g(y, \tilde{\mu})$  — возрастающая функция (соответственно,  $g^{-1}(y, \tilde{\mu})$  — убывающая), имеем, см. рис. 3а,

$$\int_y^{\bar{y}} \frac{ds}{g(s, \tilde{\mu})} < \int_y^{\bar{y}} \frac{ds}{g(y, \tilde{\mu})} = \frac{\bar{y} - y}{g(y, \tilde{\mu})} = 1.$$

Пусть теперь  $\hat{g}(s, \tilde{\mu}) = \beta^{-1}g(s, \tilde{\mu})$ , где мы возьмем такое  $\beta > 0$ , что  $\beta g^{-1}(\bar{y}) = g^{-1}(y)$ , см. рис. 3б. В этом случае

$$\int_y^{\bar{y}} \frac{ds}{\hat{g}(s, \tilde{\mu})} > \frac{\bar{y} - y}{g(y, \tilde{\mu})} = 1,$$

и для  $\beta$  имеет место соотношение

$$\beta = \frac{g(\bar{y}, \tilde{\mu})}{g(y, \tilde{\mu})} = \frac{g(y, \tilde{\mu})(1 + g'(\theta(y), \tilde{\mu}))}{g(y, \tilde{\mu})} = 1 + g'(\theta(y), \tilde{\mu}),$$

где  $\theta(y)$  — некоторая промежуточная точка на интервале  $(y, \bar{y})$ .

Таким образом, получаем, что существует некоторая функция  $\beta = \beta_0(y, \tilde{\mu}) > 1$  такая, что при  $\hat{g}(s, \tilde{\mu}) = \beta_0(y, \tilde{\mu})g(s, \tilde{\mu})$  выполняется соотношение (5).

Покажем теперь, что функция  $\hat{g}(y, \tilde{\mu})$  определяется по функции  $g(y, \tilde{\mu})$  однозначно. Заметим, что точка  $y = 0$  является неподвижной для отображения (3) и состоянием равновесия для потока (4). Это состояние равновесия неустойчиво на интервале  $y \in (0, \varepsilon)$  для достаточно малого  $\varepsilon > 0$ , так как  $\Delta y = \bar{y} - y = g(y, \tilde{\mu}) > 0$  в силу того, что функция  $g(y, \tilde{\mu})$  строго возрастающая при  $y > 0$ . Отсюда также вытекает, что  $\hat{g}'_y(y, \tilde{\mu}) > 0$  и  $\hat{g}(y, \tilde{\mu}) > 0$  при  $y > 0$ . Тогда для интеграла (5) на любом интервале  $[0, \varepsilon)$  применима теорема о среднем значении, которая дает следующую формулу.

$$\begin{aligned} \int_y^{\bar{y}} \frac{ds}{\hat{g}(s, \tilde{\mu})} &= \frac{\bar{y} - y}{\hat{g}(\xi, \tilde{\mu})} = \frac{\bar{y} - y}{\hat{g}(y, \tilde{\mu}) + \theta \hat{g}'_y(y, \tilde{\mu})(\bar{y} - y) + o(\bar{y} - y)} \\ &= \frac{g(y, \tilde{\mu})}{\hat{g}(y, \tilde{\mu}) + \theta \hat{g}'_y(y, \tilde{\mu})(\bar{y} - y) + o(\bar{y} - y)} = 1, \end{aligned}$$

где  $\xi \in [y, \bar{y}]$ ,  $\theta \in (0, 1)$  и  $y \in (0, \varepsilon)$ . Отсюда вытекает, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(y, \tilde{\mu})}{\hat{g}(y, \tilde{\mu})} = 1, \tag{6}$$

так как  $\bar{y} \rightarrow y$  при  $y \rightarrow 0$ .

Докажем теперь, что функция  $\hat{g}(y, \mu)$  определяется функцией  $g(y, \mu)$  однозначно. Продифференцируем соотношение (5) по  $y$ , получим

$$\frac{1 + g'(y, \tilde{\mu})}{\hat{g}(\bar{y}, \tilde{\mu})} - \frac{1}{\hat{g}(y, \tilde{\mu})} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\hat{g}(\bar{y}, \tilde{\mu})}{\hat{g}(y, \tilde{\mu})} = 1 + g'(y, \tilde{\mu}).$$

Предположим, что две функции  $\hat{g}_1(y, \tilde{\mu})$  и  $\hat{g}_2(y, \tilde{\mu})$  удовлетворяют этому равенству. Тогда получим, что

$$\frac{\hat{g}_1(\bar{y}, \tilde{\mu})}{\hat{g}_1(y, \tilde{\mu})} = \frac{\hat{g}_2(\bar{y}, \tilde{\mu})}{\hat{g}_2(y, \tilde{\mu})}.$$

Перепишем эту пропорцию в виде

$$\frac{\hat{g}_1(\bar{y}, \tilde{\mu})}{\hat{g}_2(\bar{y}, \tilde{\mu})} = \frac{\hat{g}_1(y, \tilde{\mu})}{\hat{g}_2(y, \tilde{\mu})}.$$

Заметим, что последнее соотношение выполняется во всех точках траектории отображения (3). В частности, для тех, которые при обратных итерациях сходятся к точке  $y = 0$ . Последнее можно записать в следующем образом

$$\frac{\hat{g}_1(y, \tilde{\mu})}{\hat{g}_2(y, \tilde{\mu})} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\hat{g}_1(y, \tilde{\mu})}{\hat{g}_2(y, \tilde{\mu})} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\hat{g}_1(y, \tilde{\mu})}{g(y, \tilde{\mu})} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(y, \tilde{\mu})}{\hat{g}_2(y, \tilde{\mu})} = 1.$$

Последнее равенство является следствием (6), и оно влечет что  $\tilde{g}_1(y, \tilde{\mu}) \equiv \tilde{g}_2(y, \tilde{\mu})$ , что и требовалось доказать.  $\triangleright$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Леммы о вложении в поток при  $\mu = 0$  доказывались в разных работах. В частности, в [11] был рассмотрен случай простого (невыврожденного) седло-узла, а в [12] существование гладкого вложения в поток при  $\mu = 0$  было доказано без предположения о высокой гладкости и о том, что седло-узел простой. См. также § 12.5 из книги [7], в котором представлен ряд результатов на эту тему.

Вернемся теперь к нашему отображению  $\tau(\mu)$ , представленного в виде (2). Очевидно, что оно при  $\mu \geq 0$  удовлетворяет условиям леммы 1, что позволяет установить некоторые результаты (см. леммы 2 и 3) об итерациях отображения  $\tau(\mu)$  при всех достаточно малых  $\mu \geq 0$ . В случае  $\mu = 0$  справедлива следующая лемма.

**Лемма 2.** При  $\mu = 0$  для любых  $y_0, y_k$  из  $I_0$  и любого натурального  $k$  таких, что  $\tau_0^k(y_0) = y_k$ , выполняется соотношение

$$y_0 = \frac{y_k}{\sqrt[n]{1 + n\gamma y_k^n k}}, \tag{7}$$

где  $\gamma = \gamma(y_k, k)$  — некоторый коэффициент, близкий к 1, когда  $\varepsilon$  мало:  $\gamma \rightarrow 1$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Кроме того, при фиксированном  $y_k > 0$  и больших  $k$  справедливы следующие асимптотические оценки:

$$y_0 \sim \frac{1}{\sqrt[n]{k}}, \quad \frac{dy_0}{dy_k} \sim \frac{1}{k \sqrt[n]{k}}, \tag{8}$$

◁ Рассмотрим отображение  $\bar{y} = y + y^{n+1} + P(y)$ , где  $P(y) = O(y^{n+2})$ . По лемме 1 оно локально (на интервале  $I_0 = [0, \varepsilon)$ ) вкладывается в поток  $\varphi_0 : \dot{y} = \tilde{g}(y)$  с  $\tilde{g}(y) = y^{n+1} + \tilde{P}(y)$ , где  $\tilde{P}(y) = O(y^{n+2})$ .

Рассмотрим два вспомогательных мажорирующих потока  $\varphi_1 : \dot{y} = \gamma_1 y^{n+1}$  и  $\varphi_2 : \dot{y} = \gamma_2 y^{n+1}$  таких, что

$$\gamma_1 y^{n+1} < y^{n+1} + \tilde{P}(y) < \gamma_2 y^{n+1}.$$

Очевидно, константы  $\gamma_1 < 1 < \gamma_2$  можно выбрать такими, что  $\gamma_i = \gamma_i(\varepsilon) \rightarrow 1$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и выполняются интегральные неравенства

$$\frac{1}{\gamma_2} \int_y^{\bar{y}} \frac{ds}{s^{n+1}} < \int_y^{\bar{y}} \frac{ds}{s^{n+1} + \tilde{P}(s)} < \frac{1}{\gamma_1} \int_y^{\bar{y}} \frac{ds}{s^{n+1}}.$$

Таким образом, потоки  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  при подходящих  $\gamma_1 < 1 < \gamma_2$  являются системами сравнения [13] для исходного потока  $\varphi_0$ .

Отображения  $\tilde{T}_1$  и  $\tilde{T}_2$  сдвига за единицу времени вдоль траекторий одномерных потоков  $\dot{y} = \gamma_i y^{n+1}$ ,  $i = 1, 2$ , за единицу времени можно представить в следующем интегральном виде:

$$\tilde{T}_i : \int_y^{\bar{y}} \frac{dy}{\gamma_i y^{n+1}} = 1, \quad (9)$$

или в явном виде

$$\tilde{T}_i : \bar{y} = \frac{y}{\sqrt[n]{1 - n\gamma_i y^n}} = y + \gamma_i y^{n+1} + O(y^{n+2}).$$

Рассмотрим теперь отображение  $\tau_0$ , см. формулу (2) при  $\mu = 0$ . Мы показали, что для его координаты  $\bar{y}$  справедливы оценки  $\tilde{T}_1(y) < \tau_0(y) < \tilde{T}_2(y)$  для всех  $y \in I_0$ . Отсюда следует, что  $\tilde{T}_2^{-1}(\bar{y}) < \tau_0^{-1}(\bar{y}) < \tilde{T}_1^{-1}(\bar{y})$ . Таким образом, для  $k$ -ой итерации отображения  $\tau_0$  справедливо неравенство  $\tilde{T}_2^{-k}(y_k) < \tau_0^{-k}(y_k) < \tilde{T}_1^{-k}(y_k)$ .

Пусть  $y_{0i}$  и  $y_k$  такие, что  $y_{0i} = \tilde{T}_i^{-k}(y_k)$ . Тогда

$$\int_{y_{0i}}^{y_k} \frac{dy}{\gamma_i y^{n+1}} = -\frac{1}{n\gamma_i y^n} \Big|_{y_{0i}}^{y_k} = k,$$

откуда получаем, что

$$y_{0i} = \frac{y_k}{\sqrt[n]{1 + n\gamma_i y_k^n k}},$$

и, следовательно, для координаты  $y_0$  такой, что  $y_0 = \tau_0^{-k}(y_k)$ , справедлива оценка

$$\frac{y_k}{\sqrt[n]{1 + n\gamma_2 y_k^n k}} < y_0 < \frac{y_k}{\sqrt[n]{1 + n\gamma_1 y_k^n k}},$$

из которой сразу следует формула (7). В свою очередь, из нее легко получаются асимптотики (8). ▷

Рассмотрим теперь отображение  $\tau_\mu$ , см. формулу (2), для которого мы докажем следующий результат.

**Лемма 3.** При всех достаточно малых  $\mu > 0$  для любых  $y_0, y_k \in I_0$  и любого натурального  $k$  таких, что  $\tau_\mu^k(y_0) = y_k$ , имеет место соотношение

$$y_0 = \frac{y_k e^{-\mu\gamma k}}{\sqrt[n]{1 + (1 - e^{-n\mu\gamma k})\mu^{-1}y_k^n}}, \quad (10)$$

где  $\gamma = \gamma(\mu, y_k, k)$  — коэффициент такой, что  $\gamma \rightarrow 1$  при  $\mu, \varepsilon \rightarrow 0$ .

◁ Рассмотрим отображения  $\tilde{T}_{1\mu}$  и  $\tilde{T}_{2\mu}$  сдвига вдоль траекторий одномерных потоков  $\varphi_{\mu i} : \dot{y} = \gamma_i(\mu y + y^{n+1})$ ,  $i = 1, 2$ , за единицу времени. Заметим, что по лемме 1 отображение  $\tau_\mu$  при  $\mu \geq 0$  вкладывается в некоторый поток  $\varphi_{\mu 0}$ , для которого оно является отображением за единицу времени. Мы покажем, что для подходящих констант  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  потоки  $\varphi_{\mu 1}$  и  $\varphi_{\mu 2}$  будут являться системами сравнения для потока  $\varphi_{\mu 0}$ .

Запишем отображение  $\tilde{T}_{i\mu}$  в интегральном виде

$$\int_y^{\bar{y}} \frac{dy}{\gamma_i(\mu y + y^{n+1})} = 1. \quad (11)$$

Вычислив интеграл

$$\int_y^{\bar{y}} \frac{dy}{\gamma_i(\mu y + y^{n+1})} = \int_y^{\bar{y}} \frac{dy}{\gamma_i y^{n+1}(\mu y^{-n} + 1)} = \int_y^{\bar{y}} \frac{d(\mu y^{-n})}{-n\mu\gamma_i(\mu y^{-n} + 1)} = -\frac{1}{n\mu\gamma_i} \ln\left(\frac{\mu}{y^n} + 1\right) \Big|_y^{\bar{y}} = 1,$$

получим, что

$$\bar{y} = \frac{y}{\sqrt[n]{1 + (e^{-n\mu\gamma_i} - 1)\mu^{-1}(\mu + y^n)}}.$$

Используя разложение в ряд Тейлора, получим равенство

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y \left( 1 + \frac{1 - e^{-n\mu\gamma_i}}{n\mu} (\mu + y^n) + O((\mu + y^n)^2) \right) \\ &= y(1 + \gamma_i \mu + O(\mu^2)) + \gamma_i(1 + O(\mu))y^{n+1} + O(y^{n+2}). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что наше отображение  $\bar{y} = y(1 + \mu) + y^{n+1} + O(y^{n+2})$  мажорируется отображениями  $\tilde{T}_{1\mu}$  и  $\tilde{T}_{2\mu}$  с подходящими константами  $\gamma_1 < 1$  и  $\gamma_2 > 1$  такими, что  $\gamma_i \rightarrow 1$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\mu \rightarrow 0$ . Таким образом, для координаты  $\bar{y}$  отображения  $\tau_\mu$  получаем неравенство  $\tilde{T}_{1\mu}(y) < \tau_\mu(y) < \tilde{T}_{2\mu}(y)$ . Отсюда следует, что  $\tilde{T}_{2\mu}^{-1}(\bar{y}) < \tau_\mu^{-1}(\bar{y}) < \tilde{T}_{1\mu}^{-1}(\bar{y})$ . Таким образом, для  $k$ -ой итерации отображения  $\tau_\mu$  справедливо неравенство  $\tilde{T}_{2\mu}^{-k}(y_k) < \tau_\mu^{-k}(y_k) < \tilde{T}_{1\mu}^{-k}(y_k)$ .

Найдем теперь  $y_{0i} = \tilde{T}_{i\mu}^{-k} y_k$ , вычислив интегральное равенство,

$$\int_{y_{0i}}^{y_k} \frac{dy}{\gamma_i(\mu y + y^{n+1})} \equiv -\frac{1}{n\mu\gamma_i} \ln\left(\frac{\mu}{y^n} + 1\right) \Big|_{y_{0i}}^{y_k} = k.$$

Откуда получаем

$$y_{0i} = \frac{y_k e^{-\mu\gamma_i k}}{\sqrt[n]{1 + (1 - e^{-n\mu\gamma_i k})\mu^{-1}y_k^n}}.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\frac{y_k e^{-\mu\gamma_2 k}}{\sqrt[n]{1 + (1 - e^{-n\mu\gamma_2 k})\mu^{-1}y_k^n}} < y_0 < \frac{y_k e^{-\mu\gamma_1 k}}{\sqrt[n]{1 + (1 - e^{-n\mu\gamma_1 k})\mu^{-1}y_k^n}},$$

из которой сразу получается искомая формула (10).  $\triangleright$

Сформулируем теперь следующий результат, который «соединяет» утверждения лемм 2 и 3.

**Лемма 4.** При любом фиксированном  $y_k \in I_0$  справедливы следующие асимптотики для  $y_0$  из (10) :

1) при фиксированном  $k$

$$\lim_{\mu \rightarrow +0} y_0(y_k, \mu, k) = \frac{y_k}{\sqrt[n]{1 + n\gamma y_k^n k}} \sim \frac{1}{\sqrt[n]{k}}; \quad (12)$$

2) при фиксированном  $\mu > 0$  и больших  $k$

$$y_0 \sim \sqrt[n]{\mu} e^{-\mu\gamma k}, \quad \frac{dy_0}{dy_k} \sim \mu \sqrt[n]{\mu} e^{-\mu\gamma k}. \quad (13)$$

$\triangleleft$  1) Формула (12) выводится из условия, что  $e^{-n\mu\gamma k} = 1 - n\mu\gamma k + O(\mu^2)$  при малых  $\mu$ .

2) Асимптотики (13) легко получаются из формулы (10). Действительно, для коэффициента перед  $e^{-n\mu\gamma k}$  в (10) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k}{\sqrt[n]{1 + (1 - e^{-n\mu\gamma k})\mu^{-1}y_k^n}} = \frac{y_k}{\sqrt[n]{1 + \mu^{-1}y_k^n}} = \frac{\sqrt[n]{\mu}}{\sqrt[n]{1 + \mu y_k^{-n}}}, \quad (14)$$

что дает искомую асимптотику для  $y_0$  при больших  $k$ . Дифференцируя последнее выражение из (14) по  $y_k$ , получаем асимптотику для производной  $dy_0/dy_k$  при больших  $k$ .  $\triangleright$

Из лемм 3 и 4 можно вывести тот интересный факт, что поведение траекторий отображения  $\tau_\mu$  при больших  $k$  и малых  $\mu$  может меняться от гиперболического, экспоненциального, (когда при  $\mu > 0$  траектории проходят очень близко к седлу  $O$ ), см. асимптотику (12), до полиномиального (с порядком разбегания  $k^{1/n}$  асимптотически меньшее, чем любое экспоненциальное). При этом, в определенные моменты (это будет, когда  $\mu = O(k^{-1})$ ) асимптотика должна быть промежуточной — субэкспоненциальной (которая, конечно, присутствует в общей формуле (9), но как ее «извлечь» оттуда, мы не знаем).

### 3. Доказательство основной теоремы

Рассмотрим двумерный диффеоморфизм  $f_\mu$ , удовлетворяющий условиям А)–С) из введения. Как показано в работе [10], в этом случае локальное отображение  $T_0$ , т. е. ограничение диффеоморфизма  $f_\mu$  на достаточно малую окрестность  $U_0$  точки  $O$ , с помощью некоторой  $C^{r-1}$ -гладкой замены координат может быть приведено к виду

$$T_0 : \bar{x} = \lambda x(1 + h(x, y, \mu)), \quad \bar{y} = (1 + \mu)y + y^{n+1} + P(y, \mu), \quad (15)$$

где  $\lambda = \lambda(\mu)$  и  $0 < |\lambda| < 1$ ,  $h(0, 0, \mu) \equiv 0$ , и, в силу условия С),  $P(y, \mu) = O(y^{n+2})$ . В этих координатах мы полагаем, что  $U_0\{(x, y) : |x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon\}$  для некоторого достаточно малого  $\varepsilon > 0$ , не зависящего от  $\mu$ .

Везде ниже мы рассматриваем случай, когда  $\mu \geq 0$ . Тогда точка  $O(0, 0)$ , которая при  $\mu = 0$ , в силу условия А), является негрубой неподвижной точкой (вырождения порядка  $n \geq 1$ ) либо типа седло-узлом, либо типа сложное седло, при  $\mu > 0$  становится гиперболическим седлом (с мультипликаторами  $\lambda$  и  $1 + \mu$ ). В координатах (15), многообразии  $W_{loc}^{ss}$  имеет уравнение  $y = 0$  и оно делит окрестность  $U_0$  на две части:  $U_0^+ : \{|x| < \varepsilon, 0 < y < \varepsilon\}$  и  $U_0^- : \{|x| < \varepsilon, -\varepsilon < y < 0\}$ . Заметим, что траектории в  $U_0^-$  не принадлежат  $N_\mu$ , и поэтому мы их не рассматриваем. Что касается окрестности  $U_0^+$ , то траектории, покидающие ее при итерациях  $f_\mu$ , могут возвращаться (даже бесконечное число раз) в силу существования гомоклинической траектории  $\Gamma_0(\mu)$ . Соответственно, мы будем изучать те траектории диффеоморфизма  $f_\mu$ , целиком лежащие в  $U(O \cup \Gamma_0)$ .

Что касается локальных свойств диффеоморфизма  $f_\mu$ , т. е. итераций локального отображения  $T_0 : U_0^+ \rightarrow U_0^+$ , то для них справедлива следующая лемма.

**Лемма 5.** Пусть точки  $M_0(x_0, y_0)$  и  $M_k(x_k, y_k)$  из  $U_0^+$  такие, что  $M_k = T_0^k(M_0)$ . Тогда существует такое  $\mu_1 > 0$ , что при всех  $0 \leq \mu \leq \mu_1$  выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} x_k &= \hat{\lambda}^k \psi_k(x_0, y_k, \mu), \\ y_0 = \Phi_k(y_k, \mu) &= \begin{cases} \frac{y_k e^{-n\mu\gamma k}}{\sqrt[n]{1+(1-e^{-n\mu\gamma k})\mu^{-1}y_k^n}}, & \mu > 0, \\ \frac{y_k}{\sqrt[n]{1+n\gamma y_k^n}}, & \mu = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\hat{\lambda} = |\lambda| + \delta_1$  и  $\delta_1$  достаточно малая константа ( $\delta_1 \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ),  $\psi_k(0, y_k, \mu) \equiv 0$ , и функция  $\psi_k(x_0, y_k, \mu)$  равномерно ограничена по  $k$  вместе со всеми своими производными.

Формула (16) для  $y_0$  получается объединением формул (7) и (10) из лемм 2 и 3, а для координаты  $x_k$  она получается стандартно, см., например, [14], прямым итерированием по координате  $x$  с учетом того, что последовательность итераций  $(y_0, \dots, y_k)$  по координате  $y$  уже известна.

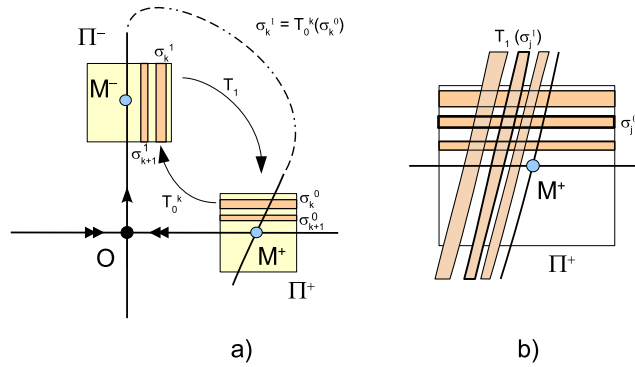
**Замечание 2.** Формула (16) есть не что иное, как представление отображения  $T_0^k : U_0^+ \rightarrow U_0^+$  в так называемом перекрестном виде или в (перекрестных) координатах Шильникова. Отметим, что стандартная задача Коши для нахождения траектории  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ , где  $(x_{i+1}, y_{i+1}) = T_0(x_i, y_i)$ , по данным начальной точке  $(x_0, y_0)$  и  $k$  не всегда имеет решение в  $U_0$  (например, при больших  $k$  траектория покидает  $U_0$ ). Поэтому здесь решается так называемая краевая задача Шильникова [15, 16]: задаются краевые условия  $x_0$  и  $y_k$  и число итераций  $k$ , по которым находятся  $x_k$  и  $y_0$ . Эта задача всегда имеет решение в случае седла. В лемме 5 этот факт устанавливается также и в случае негрубой точки произвольного порядка вырождения для соответствующих решений в окрестности  $U_0^+$ .

По условию С) локальное многообразие  $W_{loc}^{u+} : \{x = 0, 0 \leq y < \varepsilon\}$  продолжается до глобального  $W^{u+}$ , которое имеет точки трансверсального пересечения с  $W^{ss}$  — это точки траектории  $\Gamma_0$ . Для диффеоморфизма  $f_0$ , т. е. при  $\mu = 0$ , выберем в  $U_0$  две точки  $M^+(x^+, 0) \in W_{loc}^{ss}$  и  $M^-(0, y^-) \in W_{loc}^{u+}$  траектории  $\Gamma_0$ , где  $x^+ > 0, y^- > 0$ . Также выберем достаточно малые окрестности  $\Pi^+$  и  $\Pi^-$  точек  $M^+$  и  $M^-$  соответственно такие, что  $f_0(\Pi^\pm \cap \Pi^\pm) = \emptyset$ . Так как  $M^+$  and  $M^-$  принадлежат одной и той же траектории  $\Gamma_0$ , то существует такое натуральное  $q$ , что  $M^+ = f_0^q(M^-)$ . Тогда в случае диффеоморфизма  $f_\mu$  при всех достаточно малых  $\mu \geq 0$  определено отображение  $T_1(\mu) = f_\mu^q : \Pi^- \rightarrow U_0$ , которое будем называть глобальным. В координатах  $(x, y)$  на  $U_0$ , отображение  $T_1$  можем

быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned}\bar{x} - x^+ &= F(x, y - y^-, \mu) = ax + b(y - y^-) + \dots, \\ \bar{y} &= G(x, y - y^-, \mu) = cx + d(y - y^-) + \dots,\end{aligned}\quad (17)$$

где, вообще говоря, все коэффициенты зависят от  $\mu$ , в частности,  $x^+ = x^+(\mu)$  и  $y^- = y^-(\mu)$  — это соответствующие координаты двух гомоклинических точек траектории  $\Gamma_\mu$ . Также имеем, что  $ad - bc \neq 0$ , так как  $T_1$  — диффеоморфизм, и  $d \neq 0$ , так как  $\Gamma_\mu$  — трансверсальная гомоклиническая траектория. Многоточиями в (17) обозначены члены порядка  $O(x^2 + (y - y^-)^2)$ .



**Рис. 4.** Иллюстрация геометрических свойств отображений первого возвращения  $T_1 T_0^j : \Pi^+ \rightarrow \Pi^- \rightarrow \Pi^+$ , область определения которых является счетное множество полосок  $\sigma_j^0, j = \bar{k}, \bar{k} + 1, \dots$ , на  $\Pi^+$ , которые переходят в полоски  $\sigma_j^1 = T_0^j(\sigma_j^0)$  на  $\Pi^-$ , рис. (а), а затем возвращаются на  $\Pi^+$  уже в виде полосок  $T_1(\sigma_j^1)$ , рис. (б).

Заметим, что каждая траектория из множества  $N_\mu$  по определению должна иметь точки в  $\Pi^+$  и  $\Pi^-$ . Более того, точки из  $\Pi^+$ , кроме тех которые лежат на  $W^{ss}$ , попадают в  $\Pi^-$  под действием итераций локального отображения  $T_0$ , а точки из  $\Pi^-$  снова попадают в  $\Pi^+$  под действием глобального отображения  $T_1$  и т. д. Таким образом, любой не асимптотической к  $O$  траектории из  $N_\mu$  может быть поставлена в соответствие бесконечная в обе стороны последовательность отображений

$$\dots T_{k_j} T_{k_{j+1}} \dots, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \quad (18)$$

где  $T_{k_j} = T_1 T_0^{k_j} : \Pi^+ \rightarrow \Pi^- \rightarrow \Pi^+$  и  $k_j \geq \bar{k}$  для всех  $j$ .

Областью определения отображения  $T_0^k : \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$  является полоска  $\sigma_k^0 \subset \Pi^+$  такая, что  $\sigma_k^0 = T_0^{-k}(\Pi^-) \cap \Pi^+$ , см. рис. 4(а) (при этом полоски  $\sigma_k^0$  с разными  $k$  не пересекаются и накапливаются к отрезку  $W^{ss} \cap \Pi^+$  при  $k \rightarrow \infty$ ). Соответственно,  $T_0^k$  переводит  $\sigma_k^0$  в вертикальную полоску  $\sigma_k^1 \subset \Pi^-$ , т. е.  $T_0^k(\sigma_k^0) = \sigma_k^1$  (полоски  $\sigma_k^1$  не пересекаются между собой и накапливаются к отрезку  $W^u \cap \Pi^-$  при  $k \rightarrow \infty$ ). В свою очередь, глобальное отображение  $T_1$  переводит  $\sigma_k^1$  в полоску  $T_1(\sigma_k^1)$  на  $\Pi^+$ , которая лежит вблизи куска  $T_1(W_{loc}^u)$  неустойчивого многообразия точки  $O$  и пересекает все полоски  $\sigma_k^0 \subset \Pi^+$ , рис. 4(б). Такая «седловая» геометрия характерна для всех отображений из последовательности (18). Полоски  $\sigma_k^0$  при  $\mu \geq 0$ , как можно извлечь из оценок леммы 5, при итерациях локального отображения  $T_0$  сжимаются по горизонтали и растягиваются по вертикали: для  $T_0^k$  коэффициент сжатия — это величина порядка  $\lambda^k$ , а коэффициент растяжения варьируется от  $k^{1/n}$  при  $\mu = 0$  до  $\mu^{-1/n} e^{n\mu k}$  при  $\mu > 0$ . При этом глобальное отображение  $T_1$ , в силу того, что  $\Gamma_0$  — трансверсальная гомоклиническая траектория,

сохраняет этот порядок растяжений и сжатий, когда точки из  $\Pi^+$  снова возвращаются в  $\Pi^+$  при итерациях. Это «один в один» напоминает динамику отображений возвращения в случае диффеоморфизмов с подковой Смейла. Это дает возможность применения к этой последовательности леммы Шильникова [14, 15] о седловой неподвижной точке в прямом произведении пространств для того, чтобы доказать, что каждой последовательности вида (18) отвечает ровно одна траектория  $\Lambda \in N_\mu$  (седлового типа), целиком лежащая в окрестности  $U(O \cup \Gamma_0)$ .

Пусть  $M_j^0(x_j^0, y_j^0)$  и  $M_j^1(x_j^1, y_j^1)$ ,  $j = 0, \pm 1, \dots$ , — точки траектории  $\Lambda$  такие, что  $M_j^0 \in \Pi^+$  и  $M_j^1 \in \Pi^-$ . Тогда  $M_j^1 = T_0^{k_j}(M_j^0)$  и  $M_{j+1}^0 = T_1(M_j^1)$ . Эти соотношения в координатной форме можно записать в виде

$$x_{j+1}^0 - x^+ = F(x_j^1, y_j^1 - y^-, \mu), \quad y_{j+1}^0 = G(x_j^1, y_j^1 - y^-, \mu), \quad j = 0, \pm 1, \dots, \quad (19)$$

где в силу леммы 5

$$x_j^1 = \hat{\lambda}^{k_j} \psi_{k_j}(x_j^0, y_j^1, \mu), \quad y_{j+1}^0 = \Phi_{k_j}(y_{j+1}^1, \mu), \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (20)$$

Последовательность (19)–(20) можно теперь переписать в так называемом перекрестном виде. А именно, поскольку  $G_y(0) = d \neq 0$ , здесь используется условие С) трансверсальности гомоклинической траектории  $\Gamma_0$ , второе уравнение из (17) можно разрешить относительно координаты  $y_j^1 - y^-$ . В силу (17) получим  $y_j^1 - y^- = \frac{1}{d}(y_{j+1}^0 - cx_j^1 + \dots)$ . Используя формулы (20), это соотношение перепишем как

$$y_j^1 - y^- = \tilde{G}_j(x_j^0, y_{j+1}^1, \mu) = \frac{1}{d} \left( \Phi_{k_{j+1}}(y_{j+1}^1, \mu)(1 + \dots) + \hat{\lambda}^{k_j} \tilde{\psi}_{k_j}(x_j^0, y_{j+1}^1, \mu) \right).$$

Тогда последовательность (18) можно переписать в таком виде

$$x_{j+1}^0 - x^+ = \tilde{F}_j(x_j^0, y_{j+1}^1, \mu), \quad y_j^1 - y^- = \tilde{G}_j(x_j^0, y_{j+1}^1, \mu), \quad j = 0, \pm 1, \dots, \quad (21)$$

где в силу лемм 2 и 3, а также леммы 5, мы для всех  $0 \leq \mu < \mu_1$  всегда можем написать такие оценки

$$|\tilde{F}_j| + |\tilde{G}_j| < C \left( k_{j+1}^{-1/n} + \hat{\lambda}^{k_j} \right), \quad \left| \frac{\partial(\tilde{F}_j, \tilde{G}_j)}{\partial(x_j^0, y_{j+1}^1)} \right| < C \left( k_{j+1}^{-1-1/n} + \hat{\lambda}^{k_j} \right), \quad (22)$$

где  $C$  — некоторая положительная константа, оценивающая нормы производных функций  $F$  и  $G$  из (17).

Оценки (22) показывают, что бесконечная в обе стороны последовательность (18), записанная в перекрестных координатах, является последовательностью сжимающих отображений, каждое из которых определено на компакте. При этом константу сжатия  $q < 1$  можно выбрать одной и той же, именно  $q \sim \bar{k}^{-1/n}$ , где  $\bar{k}$  — минимальный номер полосок  $\sigma_k^0$  и  $\sigma_k^1$  в  $\Pi^-$  и  $\Pi^+$ .

Таким образом, мы получили следующее утверждение:

*Множество неасимптотических в  $O$  траекторий из  $N_\mu$  при  $0 \leq \mu < \mu_1$  состоит из траекторий седлового типа и находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством неасимптотических к  $(\dots, 0, \dots, 0, \dots)$  траекторий подсистемы  $\Omega_{\bar{k}}$  топологической схемы Бернулли из двух символов. По построению, это соответствие является гомеоморфизмом.*

Отсюда вытекает, что ограничение  $f_\mu$  на множество  $N_\mu$  неблуждающих траекторий из  $U$  топологически сопряжено с системой  $\sigma : \Omega_{\bar{k}} \rightarrow \Omega_{\bar{k}}$ , см. также [17].

Однако заметим, что  $N_\mu$  содержит также точку  $O$  и асимптотические к ней траектории. При  $\mu = 0$  сама точка  $O$  не является гиперболической, как и все  $\omega$ -предельные к ней траектории из  $N_\mu$ . Во всяком случае для таких траекторий, так как бесконечное

число их точек лежит на  $W^{ss} : \{y = 0, |x| < \varepsilon\}$ , константа сжатия (для обратных итераций по  $y$ ) не отделена от 1. Поэтому в целом множество  $N_0$  является здесь неравномерно гиперболическим.

Ситуация сразу резко меняется, если мы рассматриваем случай  $\mu > 0$ . Тогда константа сжатия для всех траекторий, проходящих очень близко к  $O$  (например, для асимптотических к  $O$  траекторий), можно брать равной  $q \sim \sqrt{\mu}e^{-\mu\gamma k} \ll 1$  при больших  $k$ . Это завершает доказательство основной теоремы.

## Литература

1. Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильашенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций // Итоги науки и техники ВИНТИ. Современ. проблемы мат. Фундам. направления.—1986.—Т. 5.—С. 5–218.
2. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса // Тр. междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 31 августа – 6 сентября 1998 г.). Том 6. Динамические системы, Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.—1999.—Т. 67.—С. 69–128.
3. Гонченко С. В., Шильников Л. П. Гомоклинические касания.—Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007.—525 с.
4. Афраймович В. С., Шильников Л. П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел // Докл. АН СССР.—1974.—Т. 219, № 6.—С. 1281–1284.
5. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Принцип кольца в задаче взаимодействия двух автоколебательных систем // Прикл. матем. и мех.—1977.—Т. 41, № 4.—С. 618–627.
6. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность // Межвуз. сб. «Методы КТДУ».—Горький, 1983.—С. 3–26.
7. Шильников А. Л., Шильников Л. П., Тураев Д. В., Чуа Л. О. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1.—1998; Часть 2.—2001.
8. Лукьянов В. И., Шильников Л. П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами // Докл. АН СССР.—1978.—Т. 243, № 1.—С. 26–29.
9. Pomeau Y., Manneville P. Wavelength selection in cellular flows // Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics.—1980.—Vol. 75, № 4.—P. 296–298. DOI: 10.1016/0375-9601(80)90568-x.
10. Лукьянов В. И. О существовании гладких инвариантных слоений в окрестности некоторых негрубых неподвижных точек диффеоморфизма // Межвуз. сб. Горький.—1979.—№ 3.—С. 60–66.
11. Newhouse S., Palis J., Takens F. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms // Publ. Math. IHES.—1983.—Vol. 57.—P. 5–71.
12. Shilnikov L. P., Turaev D. A new simple bifurcation of a periodic orbit of “blue sky catastrophe” type // AMS Transl. Series II. Methods of Qualitative Theory of Differential Equations and Related Topics. Vol. 200.—2000.
13. Белых В. Н. О качественном исследовании неавтономного уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения.—1975.—Т. 11, № 10.—С. 1738–1753.
14. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, I // Мат. сб.—1972.—Т. 88, № 4.—С. 475–492.
15. Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре — Биркгофа // Мат. сб.—1967.—Т. 116, № 3.—С. 378–397.
16. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Об особых множествах систем Морса-Смейла // Тр. Моск. мат. общества.—1973.—Т. 28.—С. 181–214.
17. Gonchenko S. V., Gordееva O. V. On Two-dimensional diffeomorphisms with homoclinic orbits to nonhyperbolic fixed points // Rus. J. Nonlin. Dyn.—2024.—Vol. 20, № 1.—P. 151–165. DOI: 10.20537/nd231204.

Статья поступила 5 ноября 2024 г.

ГОРДЕЕВА ОЛЬГА ВЛАДИМИРОВНА  
Национальный исследовательский Нижегородский  
государственный университет им. Н. И. Лобачевского,  
научный сотрудник  
РОССИЯ, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
E-mail: olga.gordeeva@inbox.ru  
<https://orcid.org/0009-0007-3141-3499>

ГОРДЕЕВ ВЛАДИМИР ЕВГЕНЬЕВИЧ  
Национальный исследовательский Нижегородский  
государственный университет им. Н. И. Лобачевского,  
студент  
РОССИЯ, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
E-mail: vgord1103@gmail.com  
<https://orcid.org/0009-0003-3470-1040>

*Vladikavkaz Mathematical Journal*  
2025, Volume 27, Issue 2, P. 19–34

## ON THE STRUCTURE OF NEIGHBORHOOD OF HOMOCLINIC ORBIT TO A NONHYPERBOLIC FIXED POINT

Gordeeva, O. V.<sup>1</sup> and Gordeev, V. E.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod,  
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia  
E-mail: olga.gordeeva@inbox.ru, vgord1103@gmail.com

**Abstract.** We consider a one-parameter family  $f_\mu$  of two-dimensional diffeomorphisms such that for  $\mu = 0$  the diffeomorphism  $f_0$  has a transversal homoclinic orbit to a nonhyperbolic fixed point of arbitrary finite order  $n \geq 1$  of degeneracy, and for  $\mu > 0$  the fixed point becomes a hyperbolic saddle. The goal of the paper is to give a complete description of structure of the set  $N_\mu$  of orbits from a sufficiently small fixed neighborhood of the homoclinic orbit. The main result of the work is a complete description for the set  $N_\mu$  of orbits entirely lying in a neighborhood of the homoclinic structure. It was shown that for  $\mu \geq 0$  the set  $N_\mu$  is hyperbolic (for  $\mu = 0$  it is nonuniformly hyperbolic) and the dynamical system  $f_\mu|_{N_\mu}$  (the restriction of  $f_\mu$  to  $N_\mu$ ) is topologically conjugate to some nontrivial subsystem of the topological Bernoulli scheme of two symbols. Thus, we generalize the classical result of Lukyanov and Shilnikov, obtained by them for the case when the fixed point is a nondegenerate saddle-node ( $n = 1$ ). In addition, we obtained new effective formulas for iterations of one-dimensional maps (maps in the restriction to the central manifold of the diffeomorphism  $f_\mu$ ). These formulas are derived using some modification of the well-known methods of qualitative theory, such as the methods of embedding a map to a flow and the Shilnikov cross-maps method.

**Keywords:** one-dimensional map, saddle-node, nonhyperbolic saddle, homoclinic orbit, hyperbolic set, Bernoulli topological scheme.

**AMS Subject Classification:** 39A28.

**For citation:** Gordeeva, O. V. and Gordeev, V. E. On the Structure of Neighborhood of Homoclinic Orbit to a Nonhyperbolic Fixed Point, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 2, pp. 19–34 (in Russian). DOI: 10.46698/p1879-1111-4332-k.

## References

1. Arnol'd, V. I., Afraimovich, V. S., Ilyashenko, Yu. S. and Shilnikov, L. P. Bifurcation Theory, *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremennyye Problemy Matematiki. Fundamental'nye Napravleniya"*, 1986, vol. 5, pp. 5–218 (in Russian).
2. Gonchenko, S. V., Turaev, D. M. and Shilnikov, L. P. Homoclinic Tangencies of Arbitrarily High Orders in the Newhouse Regions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2001, vol. 105, no. 1, pp. 1738–1778. DOI: 10.1023/A:1011359428672.

3. Gonchenko, S. V. and Shilnikov, L. P. *Homoclinic Tangencies*, Moscow–Izhevsk, “Regular and Chaotic Dynamics”, 522 p. (in Russian).
4. Afraimovich, V. S. and Shilnikov, L. P. On Some Global Bifurcations Connected with the Disappearance of a Fixed Point Of Saddle-Node Type, *Doklady Akademii Nauk USSR*, 1974, vol. 219, no. 6, pp. 1281–1284 (in Russian).
5. Afraimovich, V. S. and Shilnikov, L. P. The Ring Principle in Problems of Interaction Between Two Self-Oscillating Systems, *Prikladnaia Matematika i Mekhanika*, 1977, vol. 41, no. 4, pp. 618–627 (in Russian).
6. Afraimovich, V. S. and Shilnikov, L. P. Invariant Two-Dimensional Tori, Their Breakdown And Stochasticity, *American Mathematical Society Translations*, 1991, vol. 149, pp. 201–212.
7. Shilnikov, A. L., Shilnikov, L. P., Turaev, D. V. and Chua, L. O. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics*. *World Scientific*, part. 1, 1998; part 2, 2001. (in Russian).
8. Lukyanov V. I. and Shilnikov L. P. On Some Bifurcations of Dynamical Systems With Homoclinic Structures, *Doklady Akademii Nauk USSR*, 1978, vol. 243, no. 1, pp. 26–29 (in Russian).
9. Pomeau Y. and Manneville P. Wavelength Selection in Cellula Flows, *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 1980, vol. 75, no. 4, pp. 296–298. DOI: 10.1016/0375-9601(80)90568-x.
10. Lukyanov, V. I. On the Existence of Smooth Invariant Foliations in a Neighborhood of Some Nonhyperbolic Fixed Points of a Diffeomorphism, *Interuniversity Collection, Gorky*, Gorkovsky State University, 1979, pp. 60–66 (in Russian).
11. Newhouse, S., Palis, J. and Takens, F. Bifurcations and Stability of Families of Diffeomorphisms, *Publications Mathematiques de l’IHES*, 1983, vol. 57, pp. 5–71.
12. Shilnikov L. P. and Turaev. D. A New Simple Bifurcation of a Periodic Orbit of “Blue Sky Catastrophe” Type, *AMS Transl. Series II. Methods of Qualitative Theory of Differential Equations and Related Topics, Vol. 200*, 2000.
13. Belykh, V. N. On Qualitative Study of a Non-Autonomous Second Order Equation, *Differentsial’nye Uravneniya*, 1975, vol. 11, no. 10, pp. 1738–1753 (in Russian).
14. Gavrilov, N. K. and Shilnikov, L. P. On Three-Dimensional Dynamical Systems Close to Systems with a Structurally Unstable Homoclinic Curve. I, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1972, vol. 17, no. 4, pp. 467–485. DOI: 10.1070/SM1972v017n04ABEH001597.
15. Shilnikov, L. P. On a Poincaré–Birkhoff Problem, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1967, vol. 3, no. 3, pp. 353–371. DOI: 10.1070/SM1967v003n03ABEH002748.
16. Afraimovich, V. S. and Shilnikov, L. P. On Singular Sets of Morse–Smale Systems, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 1973, vol. 28, pp. 181–214 (in Russian).
17. Gonchenko, S. V. and Gordeeva, O. V. On Two-Dimensional Diffeomorphisms with Homoclinic Orbits to Nonhyperbolic Fixed Points, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2024, vol. 20, no. 1, pp. 151–165. DOI: 10.20537/nd231204.

*Received November 5, 2024*

OLGA V. GORDEEVA

National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod,  
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia,  
Researcher

E-mail: [olga.gordeeva@inbox.ru](mailto:olga.gordeeva@inbox.ru)

<https://orcid.org/0009-0007-3141-3499>

VLADIMIR E. GORDEEV

National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod,  
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia,  
Student

E-mail: [vgord1103@gmail.com](mailto:vgord1103@gmail.com)

<https://orcid.org/0009-0003-3470-1040>

УДК 517.95

DOI 10.46698/f7980-3632-9547-r

CONDITIONS FOR THE LIMIT SUMMABILITY OF SOLUTIONS  
OF NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS  
WITH DEGENERATE COERCIVITY AND  $L^1$ -DATA<sup>#</sup>

A. A. Kovalevsky<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
74 Rosa Luxemburg St., Donetsk 283048, Russia

E-mail: alexkv171@mail.ru

*To Professor Anatoli Fedorovich Tedeev  
in occasion of his 70th birthday*

**Abstract.** We study entropy and weak solutions of the Dirichlet problem for a class of second-order nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity and right-hand side  $f$  in  $L^1(\Omega)$ , where  $\Omega$  is a bounded open set in  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ). The growth condition on the coefficients of the equations admits any their growth with respect to the unknown function itself. Estimates for the distribution function of an entropy solution and its gradient are obtained using a function  $\tilde{f}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  generated by the function  $f$ . Applying these estimates, we establish integral conditions on the function  $\tilde{f}$  which guarantee the belonging of entropy solutions and their gradients to limit Lebesgue spaces. As a consequence, we obtain conditions for the belonging of entropy solutions to a limit Sobolev space  $W_0^{1,r}(\Omega)$  and, as a particular case, to the space  $W_0^{1,1}(\Omega)$ . In addition, we establish conditions for the existence of weak solutions of the considered problem belonging to the space  $W_0^{1,r}(\Omega)$ . The obtained results generalize the known ones for equations whose coefficients satisfy the usual coercivity condition.

**Keywords:** nonlinear elliptic equation, degenerate coercivity, Dirichlet problem, entropy solution, weak solution, summability of solutions.

**AMS Subject Classification:** 35B65, 35J25, 35J60, 35J70.

**For citation:** Kovalevsky, A. A. Conditions for the Limit Summability of Solutions of Nonlinear Elliptic Equations with Degenerate Coercivity and  $L^1$ -Data, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 2, pp. 35–51. DOI: 10.46698/f7980-3632-9547-r.

## 1. Introduction

At present there is an extensive literature devoted to the study of the Dirichlet problem for second-order nonlinear elliptic equations in divergence form with  $L^1$ -data or measures as data. Within the investigations on the subject, the notions of weak, entropy, and renormalized solution of the considered problem were introduced and theorems on the existence, uniqueness, and summability of such solutions were proved. In this connection, see, e.g., [1–13], where equations with leading coefficients satisfying the usual coercivity condition were considered.

---

<sup>#</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы регионального Азово-Черноморского математического центра по соглашению № 075-02-2025-1620.

© 2025 Kovalevsky, A. A.

At the same time, there are many works (see, e.g., [14–25]) concerned with the study of different types of solutions to the Dirichlet problem for equations of the form

$$-\sum_{i=1}^n D_i a_i(x, u, \nabla u) + a_0(x, u, \nabla u) = f \quad (1.1)$$

in a bounded open set  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , where  $f \in L^m(\Omega)$ ,  $m \geq 1$ , and the set of functions  $a_i: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , satisfy a degenerate coercivity condition like

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, s, \xi) \xi_i \geq \frac{c|\xi|^p}{(1+|s|)^\tau} \quad (1.2)$$

for a.e.  $x \in \Omega$  and every  $s \in \mathbb{R}$  and  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Here, the parameters  $p \in (1, n)$ ,  $\tau > 0$ , and  $c > 0$  are prescribed, and if we formally set  $\tau = 0$ , inequality (1.2) becomes the usual coercivity condition. As for the function  $a_0$  in (1.1), it can be zero or satisfies certain conditions.

In this paper, we also consider equations with degenerate coercivity. We focus on the conditions for the limit summability of entropy and weak solutions of the Dirichlet problem for equations of the form (1.1) with  $f \in L^1(\Omega)$ , the zero lower order term, and the leading coefficients satisfying the degenerate coercivity condition (1.2). In so doing, we assume that  $\tau \in [0, p-1)$ , and our growth condition on the coefficients  $a_i$  admits any their growth with respect to the second variable. However, we exploit such a generality of the growth condition only when we operate with entropy solutions. On the whole, our conditions on the coefficients  $a_i$  are the same as in [17], where the existence of an entropy solution of the considered problem was proved. Our growth condition on the coefficients  $a_i$  is also the same as in [18], where a priori properties of entropy solutions of the Dirichlet problem for equations with degenerate coercivity and  $L^1$ -data were studied. In contrast to [17, 18], in the papers [14–16, 19–25], the leading coefficients of the considered equations have a limited growth rate with respect to the unknown function itself. As for the limit summability of solutions, close papers to the present work are [20, 24]. However, our results are stronger than the corresponding results in these papers. We discuss this in more detail below.

We also note that there are a number of works concerned with the study of solutions of equations of the form (1.1) with  $f \in L^m(\Omega)$ ,  $m \geq 1$ , in different cases of a more general degenerate coercivity condition as compared to condition (1.2). In this relation, see, e.g., the papers [26–33]. However, these works do not contain results on the limit summability of solutions similar to ours.

The further content of this paper is organized as follows. In Section 2, we give initial assumptions, necessary definitions, and basic facts used in the sequel.

In Section 3, we state the definition of entropy solution of the Dirichlet problem under study and recall the corresponding existence result and the summability properties of an entropy solution established in [17]. In particular, Proposition 3.1 says that if  $u$  is an entropy solution of the considered problem, then, for every  $\lambda \in (0, r)$ , we have  $|\delta u| \in L^\lambda(\Omega)$ . Here,  $\delta u$  is the gradient of the solution  $u$  and  $r = n(p-1-\tau)/(n-1-\tau)$ . We note that this result coincides with a result obtained in [15] in the case where the leading coefficients of equation (1.1) have only a limited growth rate with respect to the unknown function itself and the lower order term is zero. We also note that Propositions 3.1 together with a result given in Section 2 implies that if  $r > 1$  and  $u$  is an entropy solution of the considered problem, then, for every  $\lambda \in [1, r)$ , we have  $u \in W_0^{1,\lambda}(\Omega)$ . In the same section, we also give a useful integral identity for an entropy solution (see Proposition 3.2). A similar result was obtained in [34] in the case of another class of elliptic equations with  $L^1$ -data.

In Section 4, for an entropy solution  $u$  of the considered problem, we give estimates of the measures of the sets  $\{|u| \geq k\}$  and  $\{|\delta u| \geq k\}$  with  $k \geq 1$  (see Propositions 4.1 and 4.2). These estimates involve the function  $\tilde{f}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  defined by the right-hand side  $f$  of equation (1.1) as follows: for every  $s \in [0, +\infty)$ ,  $\tilde{f}(s)$  is the integral of the function  $|f|$  over the set  $\{|f| \geq s\}$ . In the case of equations with usual coercivity condition, similar estimates were established in [10].

In Section 5, using results of the previous section, we prove our main theorems on the limit summability of entropy solutions of the considered problem (see Theorems 5.1 and 5.2). The statement of each of these theorems includes an integral condition involving the function  $\tilde{f}$ . In particular, by the integral condition of Theorem 5.2, if  $u$  is an entropy solution, then  $|\delta u| \in L^r(\Omega)$ . The obtained theorems generalize the main results of the paper [10]. In the same section, we give some corollaries of Theorem 5.2 which provide conditions for the belonging of entropy solutions to  $W_0^{1,r}(\Omega)$  and, in particular, to  $W_0^{1,1}(\Omega)$ .

In Section 6, we study weak solutions of the considered problem. Here, we already assume that the leading coefficients of equation (1.1) have a limited growth rate with respect to the unknown function itself. The main result of the section is Theorem 6.1 which asserts the existence of a weak solution of the considered problem belonging to  $W_0^{1,r}(\Omega)$  under the integral condition of Theorem 5.2 and an additional requirement on  $\tau$ . Some corollaries of Theorem 6.1 are also given. In particular, according to Corollary 6.3, if  $2 - 1/n \leq p \leq 2$ ,  $\tau(n-1) = n(p-2)+1$ ,  $\lambda > (n-p)/(n-1)$ , and  $f[\ln(1+|f|)]^{(n-p)/(n-1)}[\ln \ln(e+|f|)]^\lambda \in L^1(\Omega)$ , then the considered problem has a weak solution. This result is stronger than Theorem 1.2 in [20] given for the case  $p = 2$ . Moreover, in the case  $2 - 1/n \leq p \leq 2$ , Corollary 6.3 is a stronger result than Theorem 6 in [24], where it is required, as in [20, Theorem 1.2], that  $f \ln(1+|f|) \in L^1(\Omega)$ .

Finally, in Section 7, we give two examples. The first one is an example of the functions  $a_i$  satisfying the growth, degenerate coercivity, and strict monotonicity conditions stated in Section 3. In the second example, we consider a function  $f \in L^1(\Omega)$  which does not belong to  $L^{1+\varepsilon}(\Omega)$  for any  $\varepsilon > 0$  and satisfies the conditions in the statements of the results in Sections 5 and 6.

## 2. Preliminaries

Let  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , let  $\Omega$  be a nonempty bounded open set in  $\mathbb{R}^n$ , and let  $p \in (1, n)$ .

We define  $p^* = np/(n-p)$ . Recall that  $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$  and there exists a positive constant  $c_{n,p}$  depending only on  $n$  and  $p$  such that, for every function  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,

$$\left( \int_{\Omega} |v|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} \leq c_{n,p} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx \right)^{1/p}. \quad (2.1)$$

In this connection, see, e.g., [35, Chapter 7].

For every  $k > 0$ , let  $T_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be the function such that

$$T_k(s) = \begin{cases} s & \text{if } |s| \leq k, \\ k \operatorname{sign} s & \text{if } |s| > k. \end{cases}$$

As is known, if  $\lambda \geq 1$ ,  $v \in W_0^{1,\lambda}(\Omega)$ , and  $k > 0$ , then  $T_k(v) \in W_0^{1,\lambda}(\Omega)$  and, for every  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$D_i T_k(v) = D_i v \cdot 1_{\{|v| < k\}} \text{ a.e. in } \Omega. \quad (2.2)$$

We denote by  $\mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$  the set of all functions  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  such that, for every  $k > 0$ ,  $T_k(v) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Obviously,  $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ . However, the converse inclusion does not hold, which is easily verified. For every  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  and every  $x \in \Omega$ , we define  $k(v, x) = \min\{j \in \mathbb{N} : |v(x)| \leq j\}$ .

**DEFINITION 2.1.** Let  $v \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ , and let  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Then  $\delta_i v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  is the function such that, for every  $x \in \Omega$ ,  $\delta_i v(x) = D_i T_{k(v,x)}(v)(x)$ .

**DEFINITION 2.2.** If  $v \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ , then  $\delta v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  is the mapping such that, for every  $x \in \Omega$  and every  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $(\delta v(x))_i = \delta_i v(x)$ .

**Proposition 2.1.** Let  $v \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ , and let  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Then, for every  $k > 0$ , we have  $D_i T_k(v) = \delta_i v \cdot 1_{\{|v| < k\}}$  a.e. in  $\Omega$ .

This proposition and (2.2) imply that if  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , then, for every  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\delta_i v = D_i v$  a.e. in  $\Omega$ .

**Proposition 2.2.** Let  $v \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ , and let  $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . Then the following assertions hold:

- (a)  $v - w \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ ;
- (b) for every  $k > 0$  and every  $i \in \{1, \dots, n\}$ , we have  $D_i T_k(v - w) = \delta_i v - \delta_i w$  a.e. in  $\{|v - w| < k\}$ .

**Proposition 2.3.** Let  $v \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ , let  $\lambda \in [1, p]$ , and let  $|\delta v| \in L^\lambda(\Omega)$ . Then  $v \in W_0^{1,\lambda}(\Omega)$  and, for every  $i \in \{1, \dots, n\}$ , we have  $D_i v = \delta_i v$  a.e. in  $\Omega$ .

For every  $v \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$  and every  $k > 0$ , we define

$$I_k(v) = \int_{\Omega} |\nabla T_k(v)|^p dx.$$

**Proposition 2.4.** Let  $v \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ , and let  $k > 0$ . Then

$$\text{meas}\{|v| \geq k\} \leq c_{n,p}^* k^{-p^*} [I_k(v)]^{p^*/p}.$$

**Proposition 2.5.** Let  $v \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ , and let  $k, l > 0$ . Then

$$\text{meas}\{|\delta v| \geq k\} \leq c_{n,p}^* l^{-p^*} [I_l(v)]^{p^*/p} + k^{-p} I_l(v).$$

As far as the proofs of Propositions 2.1–2.5 are concerned, we refer the reader, for instance, to Sections 1.1 and 1.5 in [36].

Finally, concluding this section, we state a useful result on the summability of a function with a prescribed behaviour of its distribution function.

**Proposition 2.6.** Let  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  be a measurable function. Let  $\alpha > 0$ , let  $\varphi: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  be a nonnegative nonincreasing measurable function, and let  $k_0 \geq 1$ . Assume that

$$\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{s} ds < +\infty,$$

$$(\forall k \geq k_0) \quad \text{meas}\{|v| \geq k\} \leq k^{-\alpha} \varphi(k).$$

Then  $v \in L^\alpha(\Omega)$ .

For the proof of this result, see [10, Lemma 2.1].

### 3. Dirichlet Problem and Its Entropy Solutions

For every  $i \in \{1, \dots, n\}$ , let  $a_i: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  be a Carathéodory function. We assume that, for every  $k > 0$ , there exist a positive number  $\bar{c}_k$  and a nonnegative function  $\bar{g}_k \in L^1(\Omega)$  such that, for almost every  $x \in \Omega$ , every  $s \in \mathbb{R}$ ,  $|s| \leq k$ , and every  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\sum_{i=1}^n |a_i(x, s, \xi)|^{p/(p-1)} \leq \bar{c}_k |\xi|^p + \bar{g}_k(x). \quad (3.1)$$

In addition, we assume that there exist  $\tau \in [0, p - 1)$  and  $c > 0$  such that, for almost every  $x \in \Omega$ , every  $s \in \mathbb{R}$ , and every  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, s, \xi) \xi_i \geq \frac{c |\xi|^p}{(1 + |s|)^\tau}. \quad (3.2)$$

Finally, we assume that, for almost every  $x \in \Omega$ , every  $s \in \mathbb{R}$ , and every  $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi \neq \xi'$ ,

$$\sum_{i=1}^n [a_i(x, s, \xi) - a_i(x, s, \xi')] (\xi_i - \xi'_i) > 0. \quad (3.3)$$

REMARK 3.1. If  $v \in \mathcal{F}_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,  $k > 0$ , and  $i \in \{1, \dots, n\}$ , then  $a_i(x, v, \delta v) D_i T_k(v - w) \in L^1(\Omega)$ . This is a consequence of (3.1) and Propositions 2.1 and 2.2.

Now, let  $f \in L^1(\Omega)$ . We consider the following Dirichlet problem:

$$-\sum_{i=1}^n D_i a_i(x, u, \nabla u) = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega. \quad (3.4)$$

DEFINITION 3.1. An entropy solution of problem (3.4) is a function  $u \in \mathcal{F}_0^{1,p}(\Omega)$  such that, for every  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  and every  $k > 0$ ,

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i T_k(u - v) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx.$$

The existence of an entropy solution of problem (3.4) follows from Theorem 2 in [17]. We note that along with inequalities (3.1) and (3.2), inequality (3.3) is also important for the proof of this theorem.

We define

$$q = \frac{n(p-1-\tau)}{n-p}, \quad r = \frac{n(p-1-\tau)}{n-1-\tau}.$$

**Proposition 3.1.** *Let  $u$  be an entropy solution of problem (3.4). Then the following assertions hold:*

- (a) for every  $\lambda \in (0, q)$ , we have  $u \in L^\lambda(\Omega)$ ;
- (b) for every  $\lambda \in (0, r)$ , we have  $|\delta u| \in L^\lambda(\Omega)$ .

This result was established in [17] (see also [18, Proposition 3.2] for a more general case).

REMARK 3.2. The summability properties described in Proposition 3.1 are the same as those of entropy solutions of the Dirichlet problem for the equations considered in [15]. In the

case  $\tau = 0$ , these properties coincide with the known ones for equations with usual coercivity condition (see, e.g., [4]).

**REMARK 3.3.** From Propositions 3.1 and 2.3, it follows that if  $r > 1$  and  $u$  is an entropy solution of problem (3.4), then, for every  $\lambda \in [1, r)$ , we have  $u \in W_0^{1,\lambda}(\Omega)$ .

Further, we give an additional information on entropy solutions of problem (3.4). For this goal, for every function  $v \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ , we define

$$\mathcal{M}(v) = \left\{ w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) : a_i(x, v, \delta v) D_i w \in L^1(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}.$$

By Proposition 2.2 and Remark 3.1, we have

$$v \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega), \quad w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad k > 0 \quad \implies \quad T_k(v - w) \in \mathcal{M}(v). \quad (3.5)$$

Therefore, for every function  $v \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ , the set  $\mathcal{M}(v)$  is nonempty.

**Proposition 3.2.** *Let  $u$  be an entropy solution of problem (3.4). Then, for every function  $w \in \mathcal{M}(u)$ , we have*

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i w \right\} dx = \int_{\Omega} f w dx.$$

$\triangleleft$  Let  $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , and let  $k > 0$ . We define  $l = \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + 1$ . It is easy to find that there exists a sequence  $\{v_j\} \subset C_0^\infty(\Omega)$  such that  $v_j \rightarrow v$  strongly in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $v_j \rightarrow v$  a.e. in  $\Omega$ , and, for every  $j \in \mathbb{N}$ ,  $|v_j| \leq l$  in  $\Omega$ . Since  $u$  is an entropy solution of problem (3.4), for every  $j \in \mathbb{N}$ , we have

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i T_k(u - v_j) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v_j) dx. \quad (3.6)$$

By the properties of the sequence  $\{v_j\}$ , we have

$$T_k(u - v_j) \rightarrow T_k(u - v) \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad (3.7)$$

$$T_k(u - v_j) \rightarrow T_k(u - v) \quad \text{weakly in } W_0^{1,p}(\Omega). \quad (3.8)$$

Using (3.7), we establish that

$$\int_{\Omega} f T_k(u - v_j) dx \rightarrow \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx. \quad (3.9)$$

Next, we fix  $i \in \{1, \dots, n\}$  and define  $w_i = a_i(x, T_{k+l}(u), \nabla T_{k+l}(u))$ . In view of (3.1), we have  $w_i \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$ . Then (3.8) implies that

$$\int_{\Omega} w_i D_i T_k(u - v_j) dx \rightarrow \int_{\Omega} w_i D_i T_k(u - v) dx. \quad (3.10)$$

Using Propositions 2.1 and 2.2, we find that  $w_i D_i T_k(u - v) = a_i(x, u, \delta u) D_i T_k(u - v)$  a.e. in  $\Omega$  and, for every  $j \in \mathbb{N}$ ,  $w_i D_i T_k(u - v_j) = a_i(x, u, \delta u) D_i T_k(u - v_j)$  a.e. in  $\Omega$ . Therefore, in view of (3.10), we have

$$\int_{\Omega} a_i(x, u, \delta u) D_i T_k(u - v_j) dx \rightarrow \int_{\Omega} a_i(x, u, \delta u) D_i T_k(u - v) dx.$$

This along with (3.9) and (3.6) implies that, for every  $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  and every  $k > 0$ ,

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i T_k(u - v) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx. \quad (3.11)$$

Now, let  $w \in \mathcal{M}(u)$ . For every  $m \in \mathbb{N}$ , we define  $w_m = T_m(u) - w$ . We fix  $k > \|w\|_{L^\infty(\Omega)}$ , and let  $m \in \mathbb{N}$ . Since  $w_m \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , it follows from (3.11) that

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i T_k(u - w_m) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - w_m) dx. \quad (3.12)$$

Using Propositions 2.1 and 2.2, we find that, for every  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$D_i T_k(u - w_m) = (\delta_i u \cdot 1_{\{|u| \geq m\}} + D_i w) \cdot 1_{\{|u - w_m| < k\}} \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

This along with (3.2) and (3.12) implies that

$$\int_{\{|u - w_m| < k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i w \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - w_m) dx. \quad (3.13)$$

It is easy to see that  $\text{meas}(\Omega \setminus \{|u - w_m| < k\}) \leq \text{meas}\{|u| > m\}$ . Consequently, we have  $\text{meas}(\Omega \setminus \{|u - w_m| < k\}) \rightarrow 0$ . In addition,  $T_k(u - w_m) \rightarrow w$  a.e. in  $\Omega$ . Using these facts, we pass to the limit in both sides of inequality (3.13) and then, taking into account the arbitrariness of  $w \in \mathcal{M}(u)$ , we obtain the required result.  $\triangleright$

REMARK 3.4. In the case of a class of degenerate anisotropic elliptic equations with  $L^1$ -data, a result similar to Proposition 3.2 was proved in [34] using, as here, an idea of [4, Corollary 4.3].

From Proposition 3.2 and implication (3.5), we deduce the following result.

**Corollary 3.1.** *Let  $u$  be an entropy solution of problem (3.4). Then, for every function  $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  and every  $k > 0$ ,*

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) D_i T_k(u - v) \right\} dx = \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx. \quad (3.14)$$

REMARK 3.5. In view of Definition 3.1 and Corollary 3.1,  $u$  is an entropy solution of problem (3.4) if and only if  $u \in \mathcal{F}_0^{1,p}(\Omega)$  and, for every function  $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  and every  $k > 0$ , equality (3.14) holds.

#### 4. Estimates of Entropy Solutions

Let  $\tilde{f}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  be the function such that, for every  $s \in [0, +\infty)$ ,

$$\tilde{f}(s) = \int_{\{|f| \geq s\}} |f| dx.$$

The function  $\tilde{f}$  is nonnegative, nonincreasing, and measurable. Using this function, we obtain some estimates for an entropy solution of problem (3.4). They are important for the proof of our main theorems in Section 5.

In what follows, we denote by  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , positive constants depending only on  $n$ ,  $p$ ,  $c$ , and  $\text{meas } \Omega$ .

We define

$$\beta = \frac{p-1-\tau}{2p-1}.$$

**Proposition 4.1.** *Let  $u$  be an entropy solution of problem (3.4), and let  $k \geq 1$ . Then*

$$I_k(u) \leq c_1 k^{1+\tau} [k^{-\beta} + \tilde{f}(k^\beta)], \quad (4.1)$$

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq c_2 k^{-q} [k^{-\beta} + \tilde{f}(k^\beta)]^{n/(n-p)}. \quad (4.2)$$

◁ By Definition 3.1 and Proposition 2.1, we have

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \nabla T_k(u)) D_i T_k(u) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u) dx.$$

Hence, using (3.2), we obtain the inequality

$$c I_k(u) \leq (2k)^\tau \int_{\Omega} f T_k(u) dx. \quad (4.3)$$

We estimate from above the integral in the right-hand side of this inequality. It is clear that

$$\int_{\Omega} f T_k(u) dx = \int_{\{|f| < k^\beta\}} f T_k(u) dx + \int_{\{|f| \geq k^\beta\}} f T_k(u) dx.$$

Then, using the properties of the function  $T_k$  and the definition of the function  $\tilde{f}$ , we get

$$\int_{\Omega} f T_k(u) dx \leq k^\beta \|T_k(u)\|_{L^1(\Omega)} + k \tilde{f}(k^\beta). \quad (4.4)$$

Since  $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ , we have  $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Therefore, by (2.1),

$$\|T_k(u)\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c_{n,p} [I_k(u)]^{1/p}.$$

Then, using the Hölder and Young inequalities, we obtain

$$\|T_k(u)\|_{L^1(\Omega)} \leq c_4 \|T_k(u)\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c_5 [I_k(u)]^{1/p} \leq c_6 k^{(\beta+\tau)/(p-1)} + 2^{-1-\tau} k^{-\beta-\tau} c I_k(u).$$

This along with (4.3) and (4.4) implies the inequality

$$I_k(u) \leq c_1 \left[ k^{p(\beta+\tau)/(p-1)} + k^{1+\tau} \tilde{f}(k^\beta) \right].$$

Hence, taking into account the definition of  $\beta$ , we get inequality (4.1). In turn, Proposition 2.4 and inequality (4.1) yield inequality (4.2). ▷

We define

$$\gamma = \frac{\beta(n-p)}{\beta+n-1-\tau}.$$

**Proposition 4.2.** *Let  $u$  be an entropy solution of problem (3.4), and let  $k \geq 1$ . Then*

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq c_3 k^{-r} [k^{-\gamma} + \tilde{f}(k^\gamma - 1)]^{n/(n-1-\tau)}. \quad (4.5)$$

◁ Let  $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  be the function such that, for every  $s \in [1, +\infty)$ ,

$$h(s) = \int_{s-1}^s \tilde{f}(t) dt.$$

Obviously, the function  $h$  is continuous. In addition, for every  $s \in [1, +\infty)$ , we have

$$\tilde{f}(s) \leq h(s) \leq \tilde{f}(s-1). \quad (4.6)$$

This is due to the fact that the function  $\tilde{f}$  is nonincreasing.

Now, let  $\psi: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  be the function such that, for every  $s \in [1, +\infty)$ ,

$$\psi(s) = s^{p(n-1-\tau)/(n-p)} [s^{-\beta} + h(s^\beta)]^{-p/(n-p)}.$$

It is clear that the function  $\psi$  is continuous,  $\psi(1) \leq k^p$ , and  $\psi(s) \rightarrow +\infty$  as  $s \rightarrow +\infty$ . Therefore, there exists  $l \in [1, +\infty)$  such that  $\psi(l) = k^p$ . Hence,

$$l = k^{(n-p)/(n-1-\tau)} [l^{-\beta} + h(l^\beta)]^{1/(n-1-\tau)}, \quad (4.7)$$

$$k^{-p} l^{1+\tau} [l^{-\beta} + h(l^\beta)] = l^{-q} [l^{-\beta} + h(l^\beta)]^{n/(n-p)}. \quad (4.8)$$

In turn, by (4.7),

$$k^{-p} l^{1+\tau} [l^{-\beta} + h(l^\beta)] = k^{-r} [l^{-\beta} + h(l^\beta)]^{n/(n-1-\tau)}. \quad (4.9)$$

Next, by Proposition 2.5, we have

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq c_{n,p}^{p^*} l^{-p^*} [I_l(u)]^{p^*/p} + k^{-p} I_l(u). \quad (4.10)$$

In addition, we deduce from (4.1) and (4.6) that

$$I_l(u) \leq c_1 l^{1+\tau} [l^{-\beta} + h(l^\beta)].$$

This along with (4.8)–(4.10) implies that

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq c_3 k^{-r} [l^{-\beta} + h(l^\beta)]^{n/(n-1-\tau)}.$$

Note that, by (4.7) and the definition of  $\gamma$ , we have  $k^\gamma \leq l^\beta$ . Then, using (4.6) and the fact that the function  $\tilde{f}$  is nonincreasing, we obtain

$$h(l^\beta) \leq \tilde{f}(l^\beta - 1) \leq \tilde{f}(k^\gamma - 1).$$

This along with the previous two inequalities yields inequality (4.5). ▷

REMARK 4.1. The function  $\tilde{f}$  was introduced in [10], where estimates similar to those in Propositions 4.1 and 4.2 were established in the case  $\tau = 0$ .

### 5. Limit Summability Results for Entropy Solutions

In this section, we prove our two main theorems on the limit summability of entropy solutions of problem (3.4) and then we give some corollaries of the second one on the belonging of entropy solutions to the limit space  $W_0^{1,r}(\Omega)$  and, as a particular case, to the space  $W_0^{1,1}(\Omega)$ .

**Theorem 5.1.** *Assume that*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{s} [\tilde{f}(s)]^{n/(n-p)} ds < +\infty, \quad (5.1)$$

and let  $u$  be an entropy solution of problem (3.4). Then  $u \in L^q(\Omega)$ .

◁ Let  $\varphi: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  be the function such that, for every  $s \in [1, +\infty)$ ,

$$\varphi(s) = c_2 [s^{-1} + \tilde{f}(s)]^{n/(n-p)}.$$

The function  $\varphi$  is positive, nonincreasing, and measurable. In addition, by (5.1), we have

$$\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{s} ds < +\infty.$$

We also note that, by Proposition 4.1, for every  $k \geq 1$ ,

$$\text{meas}\{|u|^\beta \geq k\} \leq k^{-q/\beta} \varphi(k).$$

Therefore, by Proposition 2.6, we get  $|u|^\beta \in L^{q/\beta}(\Omega)$ . Hence,  $u \in L^q(\Omega)$ . ▷

**Theorem 5.2.** *Assume that*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{s} [\tilde{f}(s)]^{n/(n-1-\tau)} ds < +\infty, \quad (5.2)$$

and let  $u$  be an entropy solution of problem (3.4). Then  $|\delta u| \in L^r(\Omega)$ .

◁ Let  $\varphi: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  be the function such that, for every  $s \in [1, +\infty)$ ,

$$\varphi(s) = c_3 [s^{-1} + \tilde{f}(s)]^{n/(n-1-\tau)}.$$

The function  $\varphi$  is positive, nonincreasing, and measurable. In addition, by (5.2), we have

$$\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{s} ds < +\infty.$$

We also note that, by Proposition 4.2, for every  $k \geq 1$ ,

$$\text{meas}\left\{\frac{1}{2}|\delta u|^\gamma \geq k\right\} \leq k^{-r/\gamma} \varphi(k).$$

Therefore, by Proposition 2.6, we get  $|\delta u|^\gamma \in L^{r/\gamma}(\Omega)$ . Hence,  $|\delta u| \in L^r(\Omega)$ . ▷

We note that Theorems 5.1 and 5.2 generalize Theorems 3.1 and 3.2 in [10] related to the case  $\tau = 0$ .

From Theorem 5.2 and Proposition 2.3, we immediately obtain the following result.

**Corollary 5.1.** *Assume that  $r \geq 1$  and that inequality (5.2) holds. Let  $u$  be an entropy solution of problem (3.4). Then  $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ .*

It is easy to see that if  $\varepsilon > 0$  and  $f \in L^{1+\varepsilon}(\Omega)$ , then inequality (5.2) is satisfied. We now give a weaker condition guaranteeing that inequality (5.2) is satisfied.

**Proposition 5.1.** *Let  $\lambda > (n-1-\tau)/n$ , and let*

$$f[\ln(1+|f|)]^{(n-1-\tau)/n}[\ln \ln(e+|f|)]^\lambda \in L^1(\Omega). \quad (5.3)$$

Then inequality (5.2) holds.

◁ We define  $F = f[\ln(1+|f|)]^{(n-1-\tau)/n}[\ln \ln(e+|f|)]^\lambda$ . Let  $s > e$ . Assume that the set  $\{|f| \geq s\}$  is nonempty. Then, fixing an arbitrary  $x \in \{|f| \geq s\}$ , we find that

$$|f(x)| \leq (\ln s)^{-(n-1-\tau)/n} (\ln \ln s)^{-\lambda} |F(x)|.$$

Therefore, taking into account condition (5.3), we obtain

$$\tilde{f}(s) \leq (\ln s)^{-(n-1-\tau)/n} (\ln \ln s)^{-\lambda} \|F\|_{L^1(\Omega)}.$$

Obviously, the same inequality holds if the set  $\{|f| \geq s\}$  is empty. Then, for every  $s > e$ ,

$$[\tilde{f}(s)]^{n/(n-1-\tau)} \leq (\ln s)^{-1} (\ln \ln s)^{-\lambda n/(n-1-\tau)} \|F\|_{L^1(\Omega)}^{n/(n-1-\tau)}.$$

This along with the inequality  $\lambda > (n-1-\tau)/n$  implies that inequality (5.2) holds. ▷

As a consequence of Corollary 5.1 and Proposition 5.1, we obtain the following result.

**Corollary 5.2.** *Assume that  $r \geq 1$ . Let  $\lambda > (n-1-\tau)/n$ , and let inclusion (5.3) hold. Let  $u$  be an entropy solution of problem (3.4). Then  $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ .*

REMARK 5.1. Since  $1 < p < n$  and  $0 \leq \tau < p-1$ , we have  $n-1-\tau > 0$ . Therefore, by the definition of  $r$ , we get

$$r \geq 1 \iff \tau \leq \frac{n(p-2)+1}{n-1}.$$

This implies that if  $p < 2 - 1/n$ , then the inequality  $r \geq 1$  does not hold. We also note that if  $p \geq 2 - 1/n$ , then

$$0 \leq \frac{n(p-2)+1}{n-1} < p-1.$$

**Corollary 5.3.** *Assume that  $p \geq 2 - 1/n$  and*

$$\tau = \frac{n(p-2)+1}{n-1}. \quad (5.4)$$

In addition, assume that

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{s} [\tilde{f}(s)]^{(n-1)/(n-p)} ds < +\infty. \quad (5.5)$$

Let  $u$  be an entropy solution of problem (3.4). Then  $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ .

◁ By equality (5.4) and the definition of  $r$ , we have  $r = 1$ . Moreover, equality (5.4) yields that  $n/(n-1-\tau) = (n-1)/(n-p)$ . This and (5.5) implies that inequality (5.2) holds. Then, by Corollary 5.1, we get the required conclusion. ▷

**Corollary 5.4.** *Assume that  $p \geq 2 - 1/n$ . Assume also that equality (5.4) holds. Let  $\lambda > (n-p)/(n-1)$ , and let*

$$f[\ln(1+|f|)]^{(n-p)/(n-1)}[\ln \ln(e+|f|)]^\lambda \in L^1(\Omega). \quad (5.6)$$

Let  $u$  be an entropy solution of problem (3.4). Then  $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ .

◁ By equality (5.4), we have  $(n-1-\tau)/n = (n-p)/(n-1)$ . Then  $\lambda > (n-1-\tau)/n$  and, by (5.6),  $f[\ln(1+|f|)]^{(n-1-\tau)/n}[\ln \ln(e+|f|)]^\lambda \in L^1(\Omega)$ . In addition, equality (5.4) implies that  $r = 1$ . We now deduce from Corollary 5.2 the required conclusion. ▷

## 6. Weak Solutions and Their Summability

The main result of this section provides conditions for the existence of a weak solution of problem (3.4) belonging to the space  $W_0^{1,r}(\Omega)$ . We also give some corollaries of this result.

DEFINITION 6.1. A weak solution of problem (3.4) is a function  $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ , such that:

- (i) for every  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_i(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega)$ ;
- (ii) for every function  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \nabla u) D_i v \right\} dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

**Proposition 6.1.** *Assume that*

$$\tau < \frac{n(p-2)+1}{n-1}. \quad (6.1)$$

Let  $u$  be an entropy solution of problem (3.4), and, for every  $i \in \{1, \dots, n\}$ , let  $a_i(x, u, \delta u) \in L^1(\Omega)$ . Then  $u$  is a weak solution of problem (3.4).

◁ Inequality (6.1) implies that  $1 < r$ . Therefore, by Proposition 3.1, we have  $|\delta u| \in L^1(\Omega)$ . Then, using Proposition 2.3, we find that  $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$  and, for every  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $D_i u = \delta_i u$  a. e. in  $\Omega$ . Now, it is clear that, for every  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_i(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega)$ . In addition, we have  $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{M}(u)$ . This and Proposition 3.2 imply that, for every function  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \nabla u) D_i v \right\} dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Thus, we conclude that the function  $u$  is a weak solution of problem (3.4). ▷

REMARK 6.1. Since  $\tau \geq 0$ , inequality (6.1) can be satisfied only if  $p > 2 - 1/n$ .

We now describe a particular case where any entropy solution of problem (3.4) is its weak solution.

Let  $\bar{p} \in (0, pq/(p-1))$ , let  $\bar{c} > 0$ , and let  $\bar{g} \in L^1(\Omega)$ ,  $\bar{g} \geq 0$  in  $\Omega$ . We assume that, for almost every  $x \in \Omega$ , every  $s \in \mathbb{R}$ , and every  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\sum_{i=1}^n |a_i(x, s, \xi)|^{p/(p-1)} \leq \bar{c}(|s|^{\bar{p}} + |\xi|^p) + \bar{g}(x). \quad (6.2)$$

By this, we make a restriction on the growth of the functions  $a_i$  with respect to the variable  $s$ .

**Proposition 6.2.** *Assume that*

$$\tau < \min \left\{ \frac{n(p-2)+1}{n-1}, \frac{p-1}{n-p+1} \right\}, \quad (6.3)$$

and let  $u$  be an entropy solution of problem (3.4). Then  $u$  is a weak solution of problem (3.4).

◁ We first note that inequality (6.3) implies that inequality (6.1) holds. Next, we fix an arbitrary  $i \in \{1, \dots, n\}$ . By (6.2), we have

$$|a_i(x, u, \delta u)| \leq \bar{c}^{(p-1)/p} \left( |u|^{\bar{p}(p-1)/p} + |\delta u|^{p-1} \right) + \bar{g}^{(p-1)/p} \quad \text{a. e. in } \Omega. \quad (6.4)$$

Since  $\bar{p}(p-1)/p < q$ , by assertion (a) of Proposition 3.1, we have  $u \in L^{\bar{p}(p-1)/p}(\Omega)$ . In addition,  $|\delta u| \in L^{p-1}(\Omega)$ . Indeed, by (6.3), we have  $\tau < (p-1)/(n-p+1)$ . Hence,  $p-1 < r$ . This and assertion (b) of Proposition 3.1 lead to the claimed inclusion for  $|\delta u|$ . Now, taking into account the inclusion  $\bar{g} \in L^1(\Omega)$ , we deduce from (6.4) that  $a_i(x, u, \delta u) \in L^1(\Omega)$ . Then, applying Proposition 6.1, we get the required conclusion. ▷

We note that Proposition 6.2 is a particular case of Corollary 3.2 in [18].

The main result of this section is the following theorem.

**Theorem 6.1.** *Assume that*

$$\tau \leq \min \left\{ \frac{n(p-2)+1}{n-1}, \frac{p-1}{n-p+1} \right\}. \quad (6.5)$$

In addition, assume that inequality (5.2) holds. Then there exists a weak solution of problem (3.4) belonging to  $W_0^{1,r}(\Omega)$ .

◁ As mentioned in Section 3, there exists an entropy solution  $u$  of problem (3.4). In view of inequality (6.5) and Remark 5.1, we have  $r \geq 1$ . Then, taking into account inequality (5.2), we deduce from Corollary 5.1 that  $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ . By (6.5), we have  $\tau \leq (p-1)/(n-p+1)$ , which implies that  $p-1 \leq r$ . Therefore,  $|\nabla u| \in L^{p-1}(\Omega)$ . Moreover, in view of assertion (a) of Proposition 3.1,  $u \in L^{\bar{p}(p-1)/p}(\Omega)$ . Fixing an arbitrary  $i \in \{1, \dots, n\}$ , by (6.2), we have

$$|a_i(x, u, \nabla u)| \leq \bar{c}^{(p-1)/p} \left( |u|^{\bar{p}(p-1)/p} + |\nabla u|^{p-1} \right) + \bar{g}^{(p-1)/p} \quad \text{a. e. in } \Omega.$$

This along with the above inclusions for  $u$  and  $|\nabla u|$  implies that  $a_i(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega)$ . We also note that, by Theorem 5.2 and Proposition 2.3, we have  $\delta u = \nabla u$  a.e. in  $\Omega$ . Then we conclude that, for every  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_i(x, u, \delta u) \in L^1(\Omega)$ . Hence,  $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{M}(u)$ . Therefore, by Proposition 3.2, for every function  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \nabla u) D_i v \right\} dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Thus, we conclude that the function  $u$  is a weak solution of problem (3.4) belonging to  $W_0^{1,r}(\Omega)$ . ▷

The following result is a direct consequence of Proposition 5.1 and Theorem 6.1.

**Corollary 6.1.** *Assume that inequality (6.5) holds. Let  $\lambda > (n-1-\tau)/n$ , and let inclusion (5.3) hold. Then there exists a weak solution of problem (3.4) belonging to  $W_0^{1,r}(\Omega)$ .*

We give two other corollaries of Theorem 6.1.

**Corollary 6.2.** *Assume that  $2 - 1/n \leq p \leq 2$  and that equality (5.4) and inequality (5.5) hold. Then there exists a weak solution of problem (3.4).*

◁ Since  $p \leq 2$ , equality (5.4) implies that inequality (6.5) holds. In addition, by (5.4) and (5.5), inequality (5.2) holds. Then Theorem 6.1 leads to the required conclusion. ▷

**Corollary 6.3.** *Assume that  $2 - 1/n \leq p \leq 2$  and that equality (5.4) holds. Let  $\lambda > (n-p)/(n-1)$ , and let inclusion (5.6) hold. Then there exists a weak solution of problem (3.4).*

◁ By (5.4), we have  $(n-1-\tau)/n = (n-p)/(n-1)$ . This equality along with the inequality  $\lambda > (n-p)/(n-1)$  and inclusion (5.6) implies that  $\lambda > (n-1-\tau)/n$  and that inclusion (5.3) holds. Therefore, by Proposition 5.1, inequality (5.5) holds. Then, by Corollary 6.2, we get the required result. ▷

REMARK 6.2. The above corollary is a stronger result than Theorem 1.2 in [20] given for the case  $p = 2$ . Moreover, in the case  $2 - 1/n \leq p \leq 2$ , this corollary is a stronger result than Theorem 6 in [24], where it is required, as in [20, Theorem 1.2], that  $f \ln(1 + |f|) \in L^1(\Omega)$ .

Finally, we give two corollaries of Theorem 6.1 which provide conditions for the existence of a weak solution belonging to the space  $W_0^{1,p-1}(\Omega)$ .

**Corollary 6.4.** *Assume that  $n > 2$ ,  $p \in (2, n)$ , and*

$$\tau = \frac{p-1}{n-p+1}. \quad (6.6)$$

*In addition, assume that*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{s} [\tilde{f}(s)]^{(n-p+1)/(n-p)} ds < +\infty. \quad (6.7)$$

*Then there exists a weak solution of problem (3.4) belonging to  $W_0^{1,p-1}(\Omega)$ .*

◁ Since  $p > 2$ , equality (6.6) implies that inequality (6.5) holds. In addition, by (6.6), we have  $n/(n-1-\tau) = (n-p+1)/(n-p)$  and  $r = p-1$ . The first of these equalities along with inequality (6.7) implies inequality (5.2). Now, applying Theorem 6.1 and using the equality  $r = p-1$ , we obtain the required result. ▷

**Corollary 6.5.** *Assume that  $n > 2$  and  $p \in (2, n)$ . Assume also that equality (6.6) holds. Let  $\lambda > (n-p)/(n-p+1)$ , and let  $f[\ln(1 + |f|)]^{(n-p)/(n-p+1)} [\ln \ln(e + |f|)]^\lambda \in L^1(\Omega)$ . Then there exists a weak solution of problem (3.4) belonging to  $W_0^{1,p-1}(\Omega)$ .*

◁ By the conditions of the corollary on  $\tau$ ,  $\lambda$ , and  $f$ , we have  $\lambda > (n-1-\tau)/n$  and inclusion (5.3) holds. Therefore, by Proposition 5.1, inequality (5.2) holds. This along with the equality  $n/(n-1-\tau) = (n-p+1)/(n-p)$  implies inequality (6.7). Then, by Corollary 6.4, we get the required result. ▷

## 7. Examples

We first give an example of the functions  $a_i$  satisfying conditions stated at the beginning of Section 3.

EXAMPLE 7.1. Assume that  $p > 2$ ,  $\alpha \in (2, p)$ ,  $\tau \in [0, p-1)$ , and  $c > 0$ . Let  $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a bounded continuous function such that, for every  $s \in \mathbb{R}$ , we have  $b(s) \geq c$ . In addition, let  $b_0, b_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be nonnegative continuous functions. Finally, let  $g$  be a nonnegative function

in  $L^{p/(p-2)}(\Omega)$ . Now, for every  $i \in \{1, \dots, n\}$ , let  $a_i: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  be the function such that, for every triple  $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,

$$a_i(x, s, \xi) = \frac{b(s)|\xi|^{p-2}\xi_i}{(1+|s|)^\tau} + b_1(s)|\xi|^{\alpha-2}\xi_i + g(x)b_0(s)\xi_i.$$

Then the functions  $a_i$  satisfy the growth, degenerate coercivity, and strict monotonicity conditions stated at the beginning of Section 3.

In the next example, we consider a function  $f \in L^1(\Omega)$  satisfying inequality (5.2) and inclusion (5.3) for a suitable  $\lambda$ .

EXAMPLE 7.2. Assume that  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1/e\}$ , and let  $\alpha > 1$ . Let  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  be the function such that  $f(0) = 0$  and, for every  $x \in \Omega \setminus \{0\}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{|x|^n} \left( \ln \frac{1}{|x|} \right)^{-\alpha}.$$

Since  $\alpha > 1$ , we have  $f \in L^1(\Omega)$ . However,  $f \notin L^{1+\varepsilon}(\Omega)$  for any  $\varepsilon > 0$ . In addition, it is easy to verify that if  $s > e^n$ , then  $\tilde{f}(s) \leq \beta_{n,\alpha}(\ln s)^{1-\alpha}$ , where  $\beta_{n,\alpha}$  is a positive number depending only on  $n$  and  $\alpha$ . Then the following implication holds:

$$\lambda > \frac{1}{\alpha - 1} \implies \int_1^{+\infty} \frac{1}{s} [\tilde{f}(s)]^\lambda ds < +\infty.$$

Therefore, under the conditions  $p \in (1, n)$  and  $\tau \in [0, p-1)$ , the inequality  $\alpha > 2 - (1 + \tau)/n$  implies inequality (5.2). Furthermore, under the same conditions on  $p$  and  $\tau$ , the inequality  $\alpha > 2 - (1 + \tau)/n$  implies that, for every  $\lambda > (n-1-\tau)/n$ , inclusion (5.3) holds. However, the inclusion  $f \ln(1 + |f|) \in L^1(\Omega)$  holds if and only if  $\alpha > 2$ .

## References

1. Boccardo, L. and Gallouët, T. Non-linear Elliptic and Parabolic Equations Involving Measure Data, *Journal of Functional Analysis*, 1989, vol. 87, no. 1, pp. 149–169. DOI: 10.1016/0022-1236(89)90005-0.
2. Boccardo, L. and Gallouët, T. Nonlinear Elliptic Equations with Right Hand Side Measures, *Communications in Partial Differential Equations*, 1992, vol. 17, no. 3–4, pp. 641–655. DOI: 10.1080/03605309208820857.
3. Murat, F. *Équations Elliptiques non Linéaires Avec Second Membre  $L^1$  ou Mesure*, Actes du 26ème Congrès National d'Analyse Numérique, Les Karelis, France, 1994, pp. A12–A24.
4. Bénilan, Ph., Boccardo, L., Gallouët, T., Gariepy, R., Pierre, M. and Vazquez, J. L. An  $L^1$ -Theory of Existence and Uniqueness of Solutions of Nonlinear Elliptic Equations, *Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, Serie 4*, 1995, vol. 22, no. 2, pp. 241–273.
5. Del Vecchio, T. Nonlinear Elliptic Equations with Measure Data, *Potential Analysis*, 1995, vol. 4, no. 2, pp. 185–203. DOI: 10.1007/BF01275590.
6. Boccardo, L. and Gallouët, T. Summability of the Solutions of Nonlinear Elliptic Equations with Right Hand Side Measures, *Journal of Convex Analysis*, 1996, vol. 3, no. 2, pp. 361–365.
7. Dal Maso, G., Murat, F., Orsina, L. and Prignet, A. Renormalized Solutions of Elliptic Equations with General Measure Data, *Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, Serie 4*, 1999, vol. 28, no. 4, pp. 741–808.
8. Alvino, A., Ferone, V. and Trombetti, G. Nonlinear Elliptic Equations with Lower-Order Terms, *Differential Integral Equations*, 2001, vol. 14, no. 10, pp. 1169–1180. DOI: 10.57262/die/1356123097.
9. Porretta, A. Nonlinear Equations with Natural Growth Terms and Measure Data, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2002, Conf. 09, pp. 183–202.

10. Kovalevsky, A. A. General Conditions for Limit Summability of Solutions of Nonlinear Elliptic Equations with  $L^1$ -Data, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2006, vol. 64, no. 8, pp. 1885–1895. DOI: 10.1016/j.na.2005.08.008.
11. Cirmi, G. R. and Leonardi, S. Regularity Results for Solutions of Nonlinear Elliptic Equations with  $L^{1,\lambda}$  Data, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2008, vol. 69, no. 1, pp. 230–244. DOI: 10.1016/j.na.2007.05.014.
12. Boccardo, L. and Gallouët, T.  $W_0^{1,1}$  Solutions in Some Borderline Cases of Calderón–Zygmund Theory, *Journal of Differential Equations*, 2012, vol. 253, no. 9, pp. 2698–2714. DOI: 10.1016/j.jde.2012.07.003.
13. Kovalevsky, A. A. Summability of Solutions of Second-Order Nonlinear Elliptic Equations with Data in Classes Close to  $L^1$ , *Ricerche di Matematica*, 2024, vol. 73, no. 3, pp. 1223–1253. DOI: 10.1007/s11587-021-00666-1.
14. Boccardo, L., Dall’Aglio, A. and Orsina, L. Existence and Regularity Results for Some Elliptic Equations with Degenerate Coercivity, *Atti Del Seminario Matematico e Fisico dell’Universita Di Modena*, 1998, vol. 46, pp. 51–81.
15. Alvino, A., Boccardo, L., Ferone, V., Orsina, L. and Trombetti, G. Existence Results for Nonlinear Elliptic Equations with Degenerate Coercivity, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 2003, vol. 182, no. 1, pp. 53–79. DOI: 10.1007/s10231-002-0056-y.
16. Boccardo, L. Some Elliptic Problems with Degenerate Coercivity, *Advanced Nonlinear Studies*, 2006, vol. 6, no. 1, pp. 1–12. DOI: 10.1515/ans-2006-0101.
17. Kovalevskii, A. A. On the Convergence of Functions from a Sobolev Space Satisfying Special Integral Estimates, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2006, vol. 58, no. 2, pp. 189–205. DOI: 10.1007/s11253-006-0061-1.
18. Kovalevsky, A. A. A Priori Properties of Solutions of Nonlinear Equations with Degenerate Coercivity and  $L^1$ -Data, *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 149, no. 5, pp. 1517–1538. DOI: 10.1007/s10958-008-0080-6.
19. Chen, G. Nonlinear Elliptic Equation with Lower Order Term and Degenerate Coercivity, *Mathematical Notes*, 2013, vol. 93, no. 2, pp. 224–237. DOI: 10.1134/S0001434613010240.
20. Boccardo, L. and Croce, G.  $W_0^{1,1}$  Solutions in Some Borderline Cases of Elliptic Equations with Degenerate Coercivity, de Figueiredo, D., do Ó, J., Tomei, C. (eds), *Analysis and Topology in Nonlinear Differential Equations*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 85, Cham, Birkhäuser, 2014, pp. 135–143. DOI: 10.1007/978-3-319-04214-5\_7.
21. Boccardo, L. A Quasilinear Elliptic Equation with  $W_0^{1,1}$ -Solutions, *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana*, 2015, vol. 8, no. 1, pp. 17–29. DOI: 10.1007/s40574-015-0022-4.
22. Souilah, R. Existence and Regularity Results for Some Elliptic Equations with Degenerate Coercivity and Singular Quadratic Lower-Order Terms, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2019, vol. 16, no. 4, Article no. 87, 21 p. DOI: 10.1007/s00009-019-1360-8.
23. Gao, H., Huang, M. and Ren, W. Regularity for Entropy Solutions to Degenerate Elliptic Equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2020, vol. 491, no. 1, Article ID 124251, 18 p. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124251.
24. Xiawu, J., Huang, S., Mi, Y. and Ri, M. Existence of  $W_0^{1,1}(\Omega)$  Solutions to Non-Coercivity Quasilinear Elliptic Problem, *Journal of Function Spaces*, 2020, Article ID 5017818, 6 p. DOI: 10.1155/2020/5017818.
25. Zhang, J. and Gao, H. Gradient Estimates for Entropy Solutions to Elliptic Equations with Degenerate Coercivity, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 2023, vol. 53, no. 1, pp. 275–284. DOI: 10.1216/rmj.2023.53.275.
26. Grenon, N.  $L^r$  estimates for Degenerate Elliptic Problems, *Potential Analysis*, 2002, vol. 16, no. 4, pp. 387–392. DOI: 10.1023/A:1014895230754.
27. Benkirane, A., Meskine, D. and Youssfi, A. Bounded Solutions for Nonlinear Elliptic Equations with Degenerate Coercivity and Data in an  $L \log L$ , *Bulletin of the Belgian Mathematical Society – Simon Stevin*, 2008, vol. 15, no. 2, pp. 369–375. DOI: 10.36045/bbms/1210254830.
28. Zhang, X. and Fu, Y. Solutions for Nonlinear Elliptic Equations with Variable Growth and Degenerate Coercivity, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 2014, vol. 193, no. 1, pp. 133–161. DOI: 10.1007/s10231-012-0270-1.
29. Li, Z. and Gao, W. Existence Results to a Nonlinear  $p(x)$ -Laplace Equation with Degenerate Coercivity and Zero-Order Term: Renormalized and Entropy Solutions, *Applicable Analysis*, 2015, vol. 95, no. 2, pp. 373–389. DOI: 10.1080/00036811.2015.1004321.
30. Ayadi, H. and Mokhtari, F. Nonlinear Anisotropic Elliptic Equations with Variable Exponents and Degenerate Coercivity, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, vol. 2018, paper no. 45, 23 p.

31. Dai, L. Existence of Renormalized Solutions for a Degenerate Elliptic Equation with Degenerate Coercivity in Weighted Sobolev Spaces, *Journal of Zhejiang University, Science Edition*, 2018, vol. 45, no. 6, pp. 673–678 (in Chinese). DOI: 10.3785/j.issn.1008-9497.2018.06.005.
32. Dai, L. Existence of Entropy Solutions for an Elliptic Equation with Degenerate Coercivity, *Journal of East China Normal University, Natural Science Edition*, 2019, no. 4, pp. 52–61 (in Chinese). DOI: 10.3969/j.issn.1000-5641.2019.04.006.
33. Gao, H., Leonetti, F. and Ren, W. Regularity for Anisotropic Elliptic Equations with Degenerate Coercivity, *Nonlinear Analysis*, 2019, vol. 187, pp. 493–505. DOI: 10.1016/j.na.2019.06.017.
34. Kovalevsky, A. A. and Gorban, Yu. S. Solvability of Degenerate Anisotropic Elliptic Second-Order Equations with  $L^1$ -Data, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013, vol. 2013, paper no. 167, 17 p.
35. Gilbarg, D. and Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd ed., Berlin, Springer, 1983, 513 p.
36. Kovalevsky, A. A., Skrypnik, I. I. and Shishkov, A. E. *Singular Solutions of Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations*, Berlin, De Gruyter, 2016, 434 p. DOI: 10.1515/9783110332247.

Received February 16, 2025

ALEXANDER A. KOVALEVSKY  
 Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
 74 Rosa Luxemburg St., Donetsk 283048, Russia,  
 Leading Researcher  
 E-mail: alexkv171@mail.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-1431-2075>

Владикавказский математический журнал  
 2025, Том 27, Выпуск 2, С. 35–51

## УСЛОВИЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ СУММИРУЕМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ КОЭРЦИТИВНОСТЬЮ И $L^1$ -ДАННЫМИ

Ковалевский А. А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт прикладной математики и механики,  
 Россия, 283048, Донецк, ул. Розы Люксембург, 74  
 E-mail: alexkv171@mail.ru

**Аннотация.** Изучаются энтропийные и слабые решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с вырождающейся коэрцитивностью и правой частью  $f$  из  $L^1(\Omega)$ , где  $\Omega$  — ограниченное открытое множество в  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ). Условие роста на коэффициенты уравнений допускает любой их рост относительно самой неизвестной функции. Используя некоторую функцию  $\tilde{f}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , порожденную функцией  $f$ , получены оценки функции распределения энтропийного решения и его градиента. С помощью этих оценок установлены интегральные условия на функцию  $\tilde{f}$ , гарантирующие принадлежность энтропийных решений и их градиентов предельным пространствам Лебега. Как следствие, получены условия принадлежности энтропийных решений предельному пространству Соболева  $W_0^{1,r}(\Omega)$  и, как частный случай, пространству  $W_0^{1,1}(\Omega)$ . Кроме того, установлены условия существования слабых решений рассматриваемой задачи, принадлежащих пространству  $W_0^{1,r}(\Omega)$ . Полученные результаты обобщают известные результаты для уравнений, коэффициенты которых удовлетворяют обычному условию коэрцитивности.

**Ключевые слова:** нелинейное эллиптическое уравнение, вырождающаяся коэрцитивность, задача Дирихле, энтропийное решение, слабое решение, суммируемость решений.

**AMS Subject Classification:** 35B65, 35J25, 35J60, 35J70.

**Образец цитирования:** Kovalevsky, A. A. Conditions for the Limit Summability of Solutions of Nonlinear Elliptic Equations with Degenerate Coercivity and  $L^1$ -Data // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 2.—С. 35–51 (in English). DOI: 10.46698/f7980-3632-9547-r.

УДК 517.956.25

DOI 10.46698/j2148-7740-8991-e

EXISTENCE OF A LOCAL RENORMALIZED SOLUTION OF AN ELLIPTIC  
EQUATION WITH VARIABLE EXPONENTS IN  $\mathbb{R}^N$

L. M. Kozhevnikova<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology,  
49 Lenin Ave., Sterlitamak 453103, Russia  
E-mail: kosul@mail.ru

*The author expresses deep gratitude to A. F. Tedeev  
for his invaluable contributions to the theory  
of partial differential equations. This article  
is dedicated to his 70th anniversary*

**Abstract.** The article is devoted to the study of second-order quasilinear elliptic equations with variable nonlinearity exponents and a locally integrable right-hand side in the space  $\mathbb{R}^n$ . The author adapts the concept of a locally renormalized solution for equations with variable growth exponents, generalizing the results of M. F. Bidaut-Véron and L. Véron obtained for equations with constant exponents. The work establishes conditions on the structure of the quasilinear elliptic operator with variable growth that are sufficient for the correct definition of a locally renormalized solution. The author derives a priori local estimates characterizing the regularity of the solution and, based on these, proves the existence of a locally renormalized solution in the space  $\mathbb{R}^n$  without additional restrictions on its growth at infinity. Furthermore, the work demonstrates that for a non-negative right-hand side, the solution is also non-negative almost everywhere. The research employs methods of functional analysis, including the theory of Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. The proofs are based on compactness and monotonicity techniques, as well as the use of special test functions. The results of the work are significant for the theory of nonlinear elliptic equations and can be applied to further studies of degenerate equations and problems with measure-valued data. The study contributes to the development of analytical methods for equations with variable nonlinearity exponents and expands the applicability of the concept of locally renormalized solutions.

**Keywords:** local renormalized solution, quasilinear elliptic equation, variable exponent in nonlinearity, existence of solution.

**AMS Subject Classification:** 35A01, 35B45, 35J62.

**For citation:** Kozhevnikova, L. M. Existence of a Local Renormalized Solution of an Elliptic Equation with Variable Exponents in  $\mathbb{R}^n$ , *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 2, pp. 52–71. DOI: 10.46698/j2148-7740-8991-e.

## Introduction

In  $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ ,  $n \geq 2$ , we consider the following second-order quasilinear elliptic equation with variable growth and a locally summable function  $f$ :

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) + b(x, u, \nabla u) = f. \quad (1)$$

The concept of a renormalized solution is an important tool for studying large classes of degenerate elliptic equations with data in the form of a measure. The original definition is given in [1] for the Dirichlet problem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} a(x, \nabla u) &= \mu, \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

and it was extended by M. F. Bidaut-Veron [2] to a local form for an equation with the  $p$ -Laplacian, absorption, and a Radon measure  $\mu$ :

$$-\Delta_p u + |u|^{p_0-2} u = \mu, \quad p \in (1, n), \quad 0 < p-1 < p_0. \quad (3)$$

In particular, M. F. Bidaut-Veron proved the existence of a local renormalized solution in  $\mathbb{R}^n$  of the equation with  $\mu \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . In the monograph [3], L. Veron generalized the concept of a local renormalized solution for an equation with power type nonlinearities of the form

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) + b(x, u, \nabla u) = \mu.$$

In the present work, the concept of a local renormalized solution is adapted to the equation (1) with variable growth exponents. We prove the existence of a local renormalized solution of the equation (1) in  $\mathbb{R}^n$  and establish its sign-definiteness.

## 1. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents

In this section, we provide the necessary information from the theory of spaces with variable exponents. For  $Q \subset \mathbb{R}^n$ , denote

$$L_\infty^+(Q) = \{p \in L_\infty(Q) : 1 \leq p_- \leq p_+ < +\infty\},$$

where  $p_- = \operatorname{vrai} \inf_{x \in Q} p(x)$  and  $p_+ = \operatorname{vrai} \sup_{x \in Q} p(x)$ . Taking  $p(\cdot) \in L_\infty^+(Q)$ , we define the Lebesgue space  $L_{p(\cdot)}(Q)$  as the set of measurable real-valued functions  $v$  on  $Q$  such that

$$\rho_{p(\cdot), Q}(v) = \int_Q |v(x)|^{p(x)} dx < \infty,$$

with the Luxemburg norm  $\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q)} = \|v\|_{p(\cdot), Q} = \inf \{k > 0 : \rho_{p(\cdot)}(v/k) \leq 1\}$ . For  $v \in L_{p(\cdot)}(Q)$ , the following relations are valid:

$$\|v\|_{p(\cdot), Q}^{p_-} - 1 \leq \rho_{p(\cdot), Q}(v) \leq \|v\|_{p(\cdot), Q}^{p_+} + 1.$$

Due to convexity, the following inequality holds:

$$|y + z|^{p(x)} \leq 2^{p_+-1} \left( |y|^{p(x)} + |z|^{p(x)} \right), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad x \in Q. \quad (4)$$

For  $p_- > 1$ , we have the Young inequality

$$|zy| \leq |y|^{p(x)} + |z|^{p'(x)}, \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad p'(\cdot) = \frac{p(\cdot)}{p(\cdot) - 1}, \quad x \in Q. \quad (5)$$

Let us define the Sobolev space with variable exponent

$$W_{p(\cdot)}^1(Q) = \left\{ v \in L_{p(\cdot)}(Q) : |\nabla v| \in L_{p(\cdot)}(Q) \right\}$$

with the norm  $\|v\|_{p(\cdot),Q}^1 = \|v\|_{p(\cdot),Q} + \|\nabla v\|_{p(\cdot),Q}$ . The space  $\dot{W}_{p(\cdot)}^1(Q)$  is defined as the completion of  $C_0^\infty(Q)$  with respect to the norm  $\|\cdot\|_{W_{p(\cdot)}^1(Q)}$ . The spaces  $L_{p(\cdot)}(Q)$ ,  $W_{p(\cdot)}^1(Q)$ ,  $\dot{W}_{p(\cdot)}^1(Q)$  are separable, Banach, and reflexive for  $p_- > 1$  (see [4, Chapter 3, § 3.2, § 3.4, § 8.1]).

For two bounded functions  $q(\cdot), r(\cdot) \in C(\overline{Q})$  we write  $q(\cdot) < r(\cdot)$ , provided  $\inf_{x \in \overline{Q}}(r(x) - q(x)) > 0$ . Let  $C^+(\overline{Q}) = \{p \in C(\overline{Q}) : 1 < p_- \leq p_+ < +\infty\}$ , where  $p_- = \inf_{x \in \overline{Q}} p(x)$ ,  $p_+ = \sup_{x \in \overline{Q}} p(x)$ .

**Lemma 1** [5]. *Let  $Q$  be bounded,  $p(\cdot), q(\cdot) \in C^+(\overline{Q})$ ,  $p_+ < n$ ,  $q(\cdot) < p^*(\cdot) = \frac{np(\cdot)}{n-p(\cdot)}$ . Then the embedding  $W_{p(\cdot)}^1(Q) \hookrightarrow L_{q(\cdot)}(Q)$  is continuous and compact.*

## 2. Assumptions and Definition of the Renormalized Solution

**Assumption P.** We assume that the functions

$$a(x, s) = (a_1(x, s), \dots, a_n(x, s)) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad b(x, s_0, s) : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R},$$

from the equation (1), are Carathéodory functions. Let there exist a nonnegative function  $\Phi \in L_{p'(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  and positive numbers  $\hat{a}, \bar{a}$  such that for a. e.  $x \in \mathbb{R}^n$  and all  $s, t \in \mathbb{R}^n$  the following inequalities hold:

$$|a(x, s)| \leq \hat{a} \left( |s|^{p(x)-1} + \Phi(x) \right); \quad (6)$$

$$(a(x, s) - a(x, t)) \cdot (s - t) > 0, \quad s \neq t; \quad (7)$$

$$a(x, s) \cdot s \geq \bar{a} |s|^{p(x)}. \quad (8)$$

Here,  $s \cdot t = \sum_{i=1}^n s_i t_i$ ,  $s = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $t = (t_1, \dots, t_n)$ .

Moreover, let there exist a nonnegative function  $\Phi_0 \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , a continuous nondecreasing function  $\hat{b} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , and a positive number  $\bar{b}$  such that for a. e.  $x \in \mathbb{R}^n$  and all  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $s \in \mathbb{R}^n$  the following inequalities hold:

$$|b(x, s_0, s)| \leq \hat{b}(|s_0|) \left( \Phi_0(x) + |s|^{p(x)} \right); \quad (9)$$

$$b(x, s_0, s) s_0 \geq \bar{b} |s_0|^{p_0(x)+1}, \quad p(\cdot) - 1 < p_0(\cdot). \quad (10)$$

Here, we assume that  $p, p_0 \in C^+(\mathbb{R}^n)$  and  $p_+ < n$ .

Following [6, 7], we introduce the notation  $q_0(\cdot) = \frac{p^*(\cdot)}{p'_+}$ ,  $q_3(\cdot) = \frac{q_0(\cdot)}{p(\cdot)-1}$ ,  $q_1(\cdot) = \frac{q_0(\cdot)}{q_0(\cdot)+1} p(\cdot)$ ,  $q_2(\cdot) = \frac{q_0(\cdot)}{q_0(\cdot)+1} p'(\cdot)$ ,  $q_4(\cdot) = \frac{p_0(\cdot)}{1+p_0(\cdot)} p'(\cdot)$ , where  $p'_+ = \frac{p_-}{p_- - 1}$ . Let the following additional assumption be satisfied

$$p(\cdot) - 1 < q_0(\cdot). \quad (11)$$

Then we can define  $q'_2(\cdot) = \frac{q_0(\cdot) p(\cdot)}{q_0(\cdot)+1-p(\cdot)}$ .

Let us define the truncation  $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$ . By  $\text{Lip}_0(\mathbb{R})$  we denote the space of all Lipschitz functions on  $\mathbb{R}$  whose derivative has compact support.

**DEFINITION 1.** Let the domain  $\Omega$  be bounded. A measurable and a. e. bounded function  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  is called a renormalized solution of the problem (1), (2) with  $f \in L_1(\Omega)$  if the following conditions are satisfied:

- $T_k(u) \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega)$  for any  $k > 0$ ;
- $b(x, u, \nabla u) \in L_1(\Omega)$ ;

c)  $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot)}(\Omega)$ ,  $1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot)$ ;

d)  $|u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot)}(\Omega)$ ,  $1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot)$ ;

for any  $h \in \text{Lip}_0(\mathbb{R})$  and  $\varphi \in W_{r(\cdot)}^1(\Omega)$ ,  $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$ , such that  $\varphi h(u) \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega)$ ,  $\varphi h(u) = 0$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ , the following equality holds:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (b(\mathbf{x}, u, \nabla u) - f)h(u)\varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot (\nabla u h'(u)\varphi + \nabla \varphi h(u)) \, dx = 0. \quad (12)$$

Denote by  $L_{\infty, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $W_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$  the spaces of functions  $v$  defined in  $\mathbb{R}^n$  such that  $v \in L_{\infty}(Q)$ ,  $L_1(Q)$ ,  $W_{p(\cdot)}^1(Q)$  for any bounded  $Q \subset \mathbb{R}^n$ , respectively. For brevity of notation, we write  $(L_{p(\cdot)}(Q))^n = L_{p(\cdot)}(Q)$ ,  $(L_{p(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n))^n = L_{p(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ .

DEFINITION 1-loc. A measurable and a. e. bounded function  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  is called a local renormalized solution of the equation (1) with  $f \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  if the following conditions are satisfied:

a - loc)  $T_k(u) \in W_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$  for any  $k > 0$ ;

b - loc)  $b(\mathbf{x}, u, \nabla u) \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ;

c - loc)  $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot)$ ;

d - loc)  $|u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot)$ ;

for any  $h \in \text{Lip}_0(\mathbb{R})$  and  $\varphi \in W_{r(\cdot)}^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$ , with compact support the equality (12) holds.

Note that in [7] the definition of a renormalized solution of the Dirichlet problem for an equation with the  $p(\cdot)$ -growth in a bounded domain was formulated for the first time, and its existence was proven.

Let  $u$  be a local renormalized solution of the equation (1). For any  $k > 0$ , we have

$$\nabla T_k(u) = \chi_{\{\mathbb{R}^n: |u| \leq k\}} \nabla u \in L_{p(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n). \quad (13)$$

Using (4), we deduce from (6) that

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, s)|^{p'(x)} \leq \widehat{A}|s|^{p(x)} + \Psi(\mathbf{x}) \quad (6')$$

with a nonnegative  $\Psi \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . It follows from (13), (6') that for any  $k > 0$ ,

$$\chi_{\{\mathbb{R}^n: |u| \leq k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) = \chi_{\{\mathbb{R}^n: |u| \leq k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u)) \in L_{p'(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n). \quad (14)$$

Evidently,  $q_2(\cdot) < p'(\cdot)$ , and hence  $\Phi \in L_{q(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $q(\cdot) < q_2(\cdot)$ . Therefore, in view of c - loc), (6), we get

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \in L_{q(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot). \quad (15)$$

REMARK 1. Each integral in (12) is well defined. Let  $\text{supp } \varphi = K$ . It is easy to prove that  $q_2'(\cdot) > n$ , and hence the embeddings  $W_{r(\cdot)}^1(K) \subset W_{q_2(\cdot)}^1(K) \subset W_n^1(K) \subset C(K)$  hold. The first term in (12) is finite due to the condition b-loc),  $f \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , and  $h(u)\varphi \in L_{\infty}(K)$ . Since  $\text{supp } h' \subseteq [-M, M]$  for some  $M > 0$ , the second term can be written as

$$\begin{aligned} & \int_K \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot (\nabla u h'(u)\varphi + \nabla \varphi h(u)) \, dx \\ &= \int_K \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_M(u)) \cdot \nabla T_M(u) h'(u)\varphi \, dx + \int_K \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla \varphi h(u) \, dx. \end{aligned}$$

Thanks to (13), (14), and  $h'(u)\varphi \in L_\infty(K)$ , the first integral is defined and finite. Since  $a(x, \nabla u) \in L_{q(\cdot)}(K)$  for any  $q(\cdot) < q_2(\cdot)$  (see (15)) and  $h(u)\nabla\varphi \in L_{r(\cdot)}(K)$  for any  $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$ , the term  $a(x, \nabla u) \cdot \nabla\varphi h(u)$  is integrable on  $K$ .

The main result of the present work is the following

**Theorem 1.** *Let  $f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  and Assumption P be satisfied. Then there exists a local renormalized solution  $u$  of the equation (1). If  $f \geq 0$  for a. e.  $x \in \mathbb{R}^n$ , then  $u \geq 0$  for a. e.  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

In [8], a nonlinear anisotropic elliptic equation of the form (1) ( $b(x, s_0, s) \equiv b(x, s_0)$ ) with variable exponent nonlinearities and a locally integrable function  $f$  is considered in  $\mathbb{R}^n$ . F. Mokhtari proved the existence of a local weak solution in  $\mathbb{R}^n$ .

### 3. Preliminaries

The Lebesgue measure of a measurable set  $Q$  will be denoted by  $\text{meas}(Q)$ . All constants appearing below are positive. We denote  $B(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ . Let  $\eta_R(\varrho) = \min(1, \max(0, R + 1 - \varrho))$ ,  $\varrho \in \mathbb{R}^+$ .

**Assertion 1.** *Let  $u$  be a local renormalized solution of the equation (1). Then for any  $R > 0$  the following estimates hold:*

$$\int_{B(R)} (|u| + 1)^{p_0(x)} dx \leq D_1, \quad (16)$$

$$\int_{B(R)} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq D_2(\alpha), \quad \alpha < 0, \quad (17)$$

$$\text{meas}(\{B(R) : |u| \geq h\}) \leq D_1 h^{-p_0-}, \quad h \geq 1. \quad (18)$$

Moreover,  $|u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot),\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot)$ , and

$$\int_{B(R)} |u|^{(p(x)-1)q(x)} dx \leq D_3; \quad (19)$$

$|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot),\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot)$ , and

$$\int_{B(R)} |\nabla u|^{(p(x)-1)q(x)} dx \leq D_4, \quad (20)$$

and also  $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot),\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq q(\cdot) < q_4(\cdot)$ , and (20) holds.

Here, the constants  $D_1 - D_4$  depend on  $N$ , where  $N(R+1)$  is the collection  $\hat{a}, \bar{a}, \bar{b}, n, R, p, p_0, \|\Phi\|_{p'(\cdot), B(R+1)}, \|f\|_{1, B(R+1)}$ , which does not depend on  $u$ .

$\triangleleft$  Let  $\rho > 0$ ,  $\alpha < 0$  and  $h(\varrho) = (1 - (|\varrho| + 1)^\alpha) \text{sign } \varrho$ ,  $h_\rho(\varrho) = h(T_\rho(\varrho))$ ,  $\varrho \in \mathbb{R}$ . Then  $h'_\rho(\varrho) = |\alpha|(|T_\rho(\varrho)| + 1)^{\alpha-1} \chi_{\{|\varrho| < \rho\}}$ . Let  $h = h_\rho$  in (12). Using (6), for a nonnegative

$\varphi \in W_{r(\cdot)}^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$  with compact support we get

$$\begin{aligned} & |\alpha| \int_{\mathbb{R}^n} (|T_\rho(u)| + 1)^{\alpha-1} a(x, \nabla u) \cdot \nabla T_\rho(u) \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} b(x, u, \nabla u) \varphi h_\rho(u) \, dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi h_\rho(u) \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f h_\rho(u) \, dx \leq \widehat{a} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla T_\rho(u)|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| \, dx \\ & \quad + \widehat{a} \int_{\{\mathbb{R}^n: |u| > \rho\}} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| \, dx + \widehat{a} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi |\nabla \varphi| \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi |f| \, dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Then, using (5), we obtain

$$\begin{aligned} I &= \widehat{a} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla T_\rho(u)|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| \, dx \leq \frac{|\alpha| \bar{a}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla T_\rho(u)|^{p(x)} (|T_\rho(u)| + 1)^{\alpha-1} \varphi \, dx \\ & \quad + C_1(\alpha, \widehat{a}, \bar{a}) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^{p(x)} (|T_\rho(u)| + 1)^{(1-\alpha)(p(x)-1)} \varphi^{1-p(x)} \, dx. \end{aligned}$$

Let  $-\alpha^* = \inf_{\mathbb{R}^n} \frac{p_0(x)}{p(x)-1} - 1 > 0$ . For  $\alpha \in (\alpha^*, 0)$  and  $\tau_\alpha(x) = \frac{p_0(x)}{(p(x)-1)(1-\alpha)} > 1$ , applying (5) again, we deduce

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{|\alpha| \bar{a}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla T_\rho(u)|^{p(x)} (|T_\rho(u)| + 1)^{\alpha-1} \varphi \, dx \\ & \quad + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} (|T_\rho(u)| + 1)^{p_0(x)} \varphi \, dx + C_2(\varepsilon, \alpha, \widehat{a}, \bar{a}) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^{p(x)\tau'_\alpha(x)} \varphi^{1-p(x)\tau'_\alpha(x)} \, dx. \end{aligned} \quad (22)$$

Combining (21), (22) and using (8), (10), we get the inequality

$$\begin{aligned} & \bar{a} \frac{|\alpha|}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|T_\rho(u)| + 1)^{\alpha-1} |\nabla T_\rho(u)|^{p(x)} \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |b(x, u, \nabla u)| \varphi |h_\rho(u)| \, dx \\ & \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} (|u| + 1)^{p_0(x)} \varphi \, dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^{p(x)\tau'_\alpha(x)} \varphi^{1-p(x)\tau'_\alpha(x)} \, dx \\ & \quad + \widehat{a} \int_{\{\mathbb{R}^n: |u| > \rho\}} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| \, dx + \widehat{a} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi |\nabla \varphi| \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi |f| \, dx. \end{aligned} \quad (23)$$

In view of the condition c-loc),  $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , and hence

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\{\mathbb{R}^n: |u| > \rho\}} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| \, dx = 0. \quad (24)$$

Passing to the limit as  $\rho \rightarrow \infty$  in (23) and noting (24), we establish

$$\begin{aligned} & \bar{a} \frac{|\alpha|}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |b(x, u, \nabla u)| \varphi |h(u)| \, dx \\ & \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} (|u| + 1)^{p_0(x)} \varphi \, dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{|\nabla \varphi|}{\varphi} \right)^{p(x)\tau'_\alpha(x)} \varphi \, dx + \widehat{a} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi |\nabla \varphi| \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi |f| \, dx. \end{aligned}$$

Applying (10), we derive

$$\begin{aligned} & \bar{a} \frac{|\alpha|}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \varphi \, dx + \bar{b} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_0(x)} \varphi |h(u)| \, dx \\ & \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} (|u| + 1)^{p_0(x)} \varphi \, dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{|\nabla \varphi|}{\varphi} \right)^{p(x)\tau'_\alpha(x)} \varphi \, dx + \hat{a} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi |\nabla \varphi| \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi |f| \, dx. \end{aligned} \quad (25)$$

For  $\alpha \in (\alpha^*, 0]$ , consider the function  $\theta_\alpha(x) = p(x)\tau'_\alpha(x) = \frac{p_0(x)p(x)}{p_0(x)+1-p(x)+\alpha(p(x)-1)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Denote  $\hat{\theta}_\alpha = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \theta_\alpha(x)$ . Evidently,  $\hat{\theta}_\alpha$  is continuous, increasing for  $\alpha \in (\alpha^*, 0]$ , and bounded from below by  $\hat{\theta}_0$ . For any  $\alpha \in (\alpha^*, 0)$ , find  $\hat{\theta}_\alpha$  and fix some  $\theta > \hat{\theta}_\alpha$ .

Let  $\varphi = \eta_R^\theta(|x|)$ . Then it follows from (25) that

$$\begin{aligned} & \bar{a} \frac{|\alpha|}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \eta_R^\theta \, dx + \bar{b} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_0(x)} \eta_R^\theta |h(u)| \, dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} (|u| + 1)^{p_0(x)} \eta_R^\theta \, dx \\ & + C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \left( \eta_R^\theta + \theta^\theta |\nabla \eta_R|^\theta \right) \, dx + \hat{a} \theta \int_{\mathbb{R}^n} \Phi |\nabla \eta_R| \eta_R^{\theta-1} \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \eta_R^\theta |f| \, dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Next, applying the inequality (5) and using the obvious inequality  $\theta' < p'(x)$ , we establish

$$\theta \int_{\mathbb{R}^n} \Phi |\nabla \eta_R| \eta_R^{\theta-1} \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \theta^\theta |\nabla \eta_R|^\theta + \Phi^{\theta'} \eta_R^\theta \right) \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \theta^\theta |\nabla \eta_R|^\theta + \Phi^{p'(x)} \eta_R^\theta + \eta_R^\theta \right) \, dx. \quad (27)$$

Combining (26), (27), we get

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \eta_R^\theta \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_0(x)} \eta_R^\theta |h(u)| \, dx \\ & \leq \varepsilon C_3 \int_{\mathbb{R}^n} (|u| + 1)^{p_0(x)} \eta_R^\theta \, dx + C_4 \int_{\mathbb{R}^n} \left( |\nabla \eta_R|^\theta + \eta_R^\theta (1 + |f| + \Phi^{p'(x)}) \right) \, dx. \end{aligned} \quad (28)$$

For  $|u| \geq 1$ , we have  $|h(u)| = 1 - (|u| + 1)^\alpha \geq 1 - 2^\alpha > 0$ . Then, taking into account (4), we have the following chain of inequalities:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (|u| + 1)^{p_0(x)} \eta_R^\theta \, dx \leq 2^{p_0+} \int_{\mathbb{R}^n} (|u|^{p_0(x)} + 1) \eta_R^\theta \, dx \leq 2^{p_0+} \int_{\{\mathbb{R}^n: |u| \geq 1\}} |u|^{p_0(x)} \eta_R^\theta \, dx \\ & + 2^{p_0+} \int_{\{\mathbb{R}^n: |u| < 1\}} \eta_R^\theta \, dx \leq \frac{2^{p_0+}}{1 - 2^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_0(x)} \eta_R^\theta |h(u)| \, dx + 2^{p_0+} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_R^\theta \, dx. \end{aligned} \quad (29)$$

Combining (28), (29) and choosing a sufficiently small  $\varepsilon > 0$ , we obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \eta_R^\theta \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} (|u| + 1)^{p_0(x)} \eta_R^\theta \, dx \\ & \leq C_5 \int_{\mathbb{R}^n} \left( |\nabla \eta_R|^\theta + \eta_R^\theta (1 + |f| + \Phi^{p'(x)}) \right) \, dx. \end{aligned}$$

This yields (16) and (17) for  $\alpha \in (\alpha^*, 0)$ . For  $\alpha \leq \alpha^*$ , the inequality (17) also holds. The estimate (16) implies (18).

Let  $\alpha \in (1 - p_-, 0)$  and  $v = (1 + |u|)^\beta$ ,  $\beta = (\alpha + p_- - 1)/p_- > 0$ . In view of  $\beta p(x) < p(x) - 1 < p_0(x)$ , we use (16) to get

$$\int_{B(R)} v^{p(x)} dx \leq \int_{B(R)} (1 + |u|)^{p_0(x)} dx \leq D_1. \quad (30)$$

Then  $\nabla v = \beta(1 + |u|)^{\beta-1} \nabla u \operatorname{sign} u$  and, according to (17), the following inequalities are satisfied:

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} |\nabla v|^{p(x)} dx &\leq \beta^{p_-} \int_{B(R)} (1 + |u|)^{(\beta-1)p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \\ &\leq \int_{B(R)} (1 + |u|)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq D_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Combining (30), (31), we derive  $\|v\|_{p(\cdot), B(R)}^1 \leq C_6$ . Hence, in view of Lemma 1, we obtain

$$\|v\|_{s(\cdot)(p(\cdot)-1), B(R)} \leq C_7, \quad 1 \leq s(\cdot) < \frac{p^*(\cdot)}{p(\cdot) - 1}.$$

Therefore, we have for any  $\alpha \in (1 - p_-, 0)$  that

$$\int_{B(R)} |u|^{\beta s(x)(p(x)-1)} dx \leq \int_{B(R)} (|u| + 1)^{\beta s(x)(p(x)-1)} dx \leq D_3. \quad (32)$$

The estimate (19) follows from (32) under the assumption  $1 \leq q(x) < \frac{p^*(x)(\alpha-1+p_-)}{p_-(p(x)-1)}$ , which is satisfied for any sufficiently small  $\alpha$ .

Next, applying the inequality (5), for  $1 \leq q(x) < p'(x)$  and  $\alpha < 0$  we have:

$$\int_{B(R)} |\nabla u|^{(p(x)-1)q(x)} dx \leq \int_{B(R)} |\nabla u|^{p(x)} (|u| + 1)^{\alpha-1} dx + \int_{B(R)} (|u| + 1)^{\frac{(1-\alpha)q(x)}{p'(x)-q(x)}}. \quad (33)$$

The first integral in (33) is estimated by (17), and the second one by (19), provided that  $\frac{(1-\alpha)q(x)}{p'(x)-q(x)} < q_0(x)$ , which holds for  $1 \leq q(x) < \frac{p'(x)q_0(x)}{1-\alpha q_0(x)}$  and sufficiently small  $\alpha < 0$ . Moreover, the second integral can be estimated using (16) under the assumption  $\frac{(1-\alpha)q(x)}{p'(x)-q(x)} < p_0(x)$ , which holds for  $1 \leq q(x) < \frac{p'(x)p_0(x)}{1-\alpha p_0(x)}$  and sufficiently small  $\alpha < 0$ . Thus, the estimate (20) is established.  $\triangleright$

Notice that in the case of a bounded domain  $\Omega$ , global estimates of the form (19), (20) for the entropy solution are established in [6, Proposition 3.2, 3.6, Corollary 3.5, 3.7].

**Assertion 2.** Let  $u$  be a local renormalized solution of the equation (1). Then for all  $k, R > 0$ ,  $h \geq 0$  the following estimate holds:

$$\int_{\{B(R): |u| \geq k+h\}} |b(x, u, \nabla u)| dx + \frac{1}{k} \int_{\{B(R): h \leq |u| < k+h\}} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq D_5, \quad (34)$$

where the constant  $D_5(N(R+2))$  independent of  $u$ .

◁ Consider the function

$$T_{k,h}(\varrho) = \begin{cases} 0 & \text{for } |\varrho| < h, \\ \varrho - h \operatorname{sign} \varrho & \text{for } h \leq |\varrho| < k+h, \\ k \operatorname{sign} \varrho & \text{for } |\varrho| \geq k+h. \end{cases}$$

Taking  $h(u) = T_{k,h}(u)$ ,  $\varphi(x) = \eta_R(|x|)$  in (12), we get

$$\begin{aligned} & \int_{\{\mathbb{R}^n: h \leq |u| < k+h\}} \eta_R a(x, \nabla u) \cdot \nabla u \, dx + \int_{\{\mathbb{R}^n: h \leq |u|\}} b(x, u, \nabla u) T_{k,h}(u) \eta_R \, dx \\ & + \int_{\{\mathbb{R}^n: h \leq |u|\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \eta_R T_{k,h}(u) \, dx = \int_{\{\mathbb{R}^n: h \leq |u|\}} T_{k,h}(u) \eta_R f \, dx. \end{aligned}$$

Then, using (6), (10), we derive

$$\begin{aligned} & \int_{\{B(R): h \leq |u| < k+h\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla u \, dx + k \int_{\{B(R): |u| \geq k+h\}} |b(x, u, \nabla u)| \, dx \\ & \leq k \int_{\{B(R+1): |u| \geq h\}} |f| \, dx + k \hat{a} \int_{\{B(R+1): |u| \geq h\}} (|\nabla u|^{p(x)-1} + \Phi(x)) \, dx \\ & \leq k \|f\|_{1, B(R+1)} + k \hat{a} \int_{B(R+1)} (|\nabla u|^{p(x)-1} + \Phi(x)) \, dx. \end{aligned} \quad (35)$$

Combining the last inequality with (20) and applying (8), we obtain the estimate (34).

In particular, from (34) with  $h = 0$  we have the estimate

$$\int_{\{B(R): |u| \geq k\}} |b(x, u, \nabla u)| \, dx + \frac{1}{k} \int_{\{B(R): |u| < k\}} |\nabla u|^{p(x)} \, dx \leq D_5. \quad \triangleright \quad (36)$$

**Assertion 3.** Let  $u$  be a local renormalized solution of the equation (1). Then for any  $h \geq 1$ ,  $R > 0$  the following inequality holds:

$$\operatorname{meas}(\{B(R) : |\nabla u| \geq h\}) \leq D_6(N(R+2))h^{-\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \frac{p_0 - p_-}{p_0 - 1}. \quad (37)$$

◁ We deduce from (36) that

$$\int_{\{B(R): |u| < k\}} |\nabla u|^{p(x)} \, dx \leq D_5 k, \quad k > 0. \quad (38)$$

Let  $\Phi(k, h) = \operatorname{meas}\{B(R) : |u| \geq k, |\nabla u|^{p(x)} \geq h\}$ ,  $k, h > 0$ . It has been proved above (see (18)) that

$$\Phi(k, 0) \leq D_1 k^{-p_0-}. \quad (39)$$

Since  $h \rightarrow \Phi(k, h)$  is nonincreasing, for  $k, h > 0$  we have

$$\Phi(0, h) \leq \frac{1}{h} \int_0^h \Phi(0, \varrho) \, d\varrho \leq \Phi(k, 0) + \frac{1}{h} \int_0^h (\Phi(0, \varrho) - \Phi(k, \varrho)) \, d\varrho. \quad (40)$$

Note that

$$\Phi(0, \varrho) - \Phi(k, \varrho) = \text{meas} \left\{ B(R) : |u| < k, |\nabla u|^{p(x)} \geq \varrho \right\}.$$

Consequently, it follows from (38) that

$$\int_0^\infty \left( \Phi(0, \varrho) - \Phi(k, \varrho) \right) d\varrho \leq D_5 k. \quad (41)$$

Combining (39)–(41), we deduce

$$\Phi(0, h) \leq D_1 k^{-p_0^-} + D_5 k/h.$$

Choosing  $k = h^{\frac{1}{p_0^- + 1}}$ , we derive  $\Phi(0, h) < D_6 h^{-\frac{p_0}{p_0^- + 1}}$ . Hence, in view of the inclusion  $\{B(R) : |\nabla u|^{p(x)} \geq h\} \supset \{B(R) : |\nabla u| \geq h^{1/p^-}\}$ , we obtain the estimate

$$\text{meas} \left( \left\{ B(R) : |\nabla u| \geq h^{1/p^-} \right\} \right) \leq D_6 h^{-\gamma_0/p^-}, \quad h \geq 1,$$

which implies (37).  $\triangleright$

**Lemma 2.** *Let either  $V = L_{p(\cdot)}(Q)$  or  $V = W_{p(\cdot)}^1(Q)$ , and  $v^j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $v$  be functions from  $V$ , such that  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  is bounded in  $V$  and*

$$v^j \rightarrow v \quad \text{a. e. in } Q, \quad j \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Then

$$v^j \rightharpoonup v \quad \text{weakly in } V, \quad j \rightarrow \infty.$$

**Lemma 3.** *Let  $v^j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $v \in L_\infty(Q)$  be such that  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  is bounded in  $L_\infty(Q)$  and the convergence (42) takes place. Then*

$$v^j \xrightarrow{*} v \quad \text{weakly in } L_\infty(Q), \quad j \rightarrow \infty.$$

If, in addition,  $h \in L_{p(\cdot)}(Q)$ , then

$$v^j h \rightarrow v h \quad \text{strongly in } L_{p(\cdot)}(Q), \quad j \rightarrow \infty.$$

Below, we will use the Vitali theorem in the following form (see [9, Chapter 3, §6, Theorem 15]).

**Lemma 4.** *Let  $v^j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $v$  be measurable function in a domain  $Q$ ,  $\text{meas}(Q) < \infty$ , such that the convergence (42) takes place,  $s = 1$  or  $s = p(\cdot)$ , and the integrals*

$$\int_Q |v^j(x)|^s dx, \quad j \in \mathbb{N},$$

uniformly absolutely equicontinuous. Then

$$v^j \rightarrow v \quad \text{strongly in } L_s(Q), \quad j \rightarrow \infty.$$

**Lemma 5** [10, Lemma 4.8]. *Let the assumptions (6)–(8) hold in  $Q$ ,  $v^j \in W_{p(\cdot)}^1(Q)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,*

$$\nabla v^j \rightharpoonup \nabla v \quad \text{in } L_{p(\cdot)}(Q), \quad j \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_Q q^j(x) dx = 0, \quad q^j(x) = (a(x, \nabla v^j) - a(x, \nabla v)) \cdot \nabla(v^j - v). \quad (43)$$

Then, along a subsequence,

$$\begin{aligned} \nabla v^j &\rightarrow \nabla v \quad \text{strongly in } L_{p(\cdot)}(Q), \quad j \rightarrow \infty, \\ a(x, \nabla v^j) &\rightarrow a(x, \nabla v) \quad \text{strongly in } L_{p'(\cdot)}(Q), \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

DEFINITION 2. Let  $\Omega$  be bounded. A measurable and a. e. bounded function  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  is called a renormalized solution of the problem (1), (2) with  $f \in L_1(\Omega)$  if the assumptions a)–d) are satisfied and for any  $w \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ ,  $w = 0$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ , such that

$$\begin{aligned} &\text{there exist } k > 0, \quad w^{+\infty}, w^{-\infty} \in W_{r(\cdot)}^1(\mathbb{R}^n), \quad r(\cdot) > q_2'(\cdot), \\ &\begin{cases} w = w^{+\infty} \text{ a. e. for } u > k, \\ w = w^{-\infty} \text{ a. e. for } u < -k, \end{cases} \end{aligned} \quad (44)$$

the following equality holds:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (b(x, u, \nabla u) - f)w dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w dx = 0. \quad (45)$$

DEFINITION 2-loc. A measurable and a. e. bounded function  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  is called a local renormalized solution of the equation (1) with  $f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  if the assumptions a-loc)–d-loc) are satisfied and for any  $w \in W_{p(\cdot)}^1(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$  with compact support such that the assumptions (44) are satisfied, the equality (45) holds.

REMARK 2. Each integral in (45) is well defined. Let  $\text{supp } w = K$ . The first term on the left-hand side is finite due to the assumption  $b - \text{loc}$ ),  $f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , and  $w \in L_\infty(K)$ . The second term can be written as

$$\int_{\{K: u < -k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w dx + \int_{\{K: u > k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w dx + \int_{\{K: |u| \leq k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w dx.$$

Thanks to (15) and (44), the product  $a(x, \nabla u) \cdot \nabla w$  is integrable on  $\{K : u < -k\}$  and  $\{K : u > k\}$ . Finally, in view of (14) and  $w \in W_{p(\cdot)}^1(K)$ , the product  $a(x, \nabla u) \cdot \nabla w$  is integrable on  $\{K : |u| \leq k\}$ .

**Theorem 2.** *Definitions 1-loc and 2-loc are equivalent.*

The equivalence of Definitions 1 and 2 in the case of data in the form of a general measure is proven in [7], the equivalence of Definitions 1-loc and 2-loc is established similarly.

#### 4. Proof of Theorem 1. Beginning

For any  $m \in \mathbb{N}$  there exists a renormalized solution to the problem

$$\begin{aligned} -\text{div } a(x, \nabla u^m) + b(x, u^m, \nabla u^m) &= f, \quad x \in B(m); \\ u^m &= 0, \quad x \in \partial B(m), \end{aligned} \quad (46)$$

where  $f \in L_1(B(m))$  (see, e. g., [11]).

Let us extend  $u^m$  by zero to  $\mathbb{R}^n$ . Obviously,  $u^m$  is a local renormalized solution of the equation (1). In this section, we will obtain some a priori estimates and convergence properties of the sequence  $\{u^m\}$ .

Let  $R > 0$  be fixed and  $\varphi \in W_{r(\cdot)}^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$ , be with compact support  $\text{supp } \varphi \subset B(R)$ . By Definition of 1-loc, for any  $h \in \text{Lip}_0(\mathbb{R})$ , the solution  $u^m$  satisfies the equality

$$\langle (b(x, u^m, \nabla u^m) - f)h(u^m)\varphi + a(x, \nabla u^m)(\nabla u^m h'(u^m)\varphi + \nabla \varphi h(u^m)) \rangle = 0, \quad R \leq m. \quad (47)$$

Moreover, for any  $w \in W_{p(\cdot)}^1(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$  with compact support  $\text{supp } w \subset B(R)$  and such that (44) holds, the following equality is satisfied in view of Definition 2-loc:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (b(x, u^m, \nabla u^m) - f)w \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \nabla u^m) \cdot \nabla w \, dx = 0, \quad R \leq m. \quad (48)$$

Step 1: a priori estimates.

Using the estimates (16)–(20) from Assertion 1, for any  $\alpha < 0$  and  $m \geq R+1$  we deduce

$$\int_{B(R)} (|u^m| + 1)^{p_0(x)} \, dx \leq D_1, \quad (49)$$

$$\int_{B(R)} (|u^m| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u^m|^{p(x)} \, dx \leq D_2, \quad (50)$$

$$\text{meas}(\{B(R) : |u^m| \geq h\}) \leq D_1 h^{-p_0-}, \quad h \geq 1, \quad (51)$$

$$\int_{B(R)} |u^m|^{(p(x)-1)q(x)} \, dx \leq D_3, \quad 1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot); \quad (52)$$

$$\int_{B(R)} |\nabla u^m|^{(p(x)-1)q(x)} \, dx \leq D_4, \quad 1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot) \text{ (or } q_4(\cdot)). \quad (53)$$

Using the estimate (36) from Assertion 2, for any  $k > 0$  and  $m \geq R+2$  we get

$$\int_{\{B(R) : |u^m| \geq k\}} |b(x, u^m, \nabla u^m)| \, dx + \frac{1}{k} \int_{\{B(R) : |u^m| < k\}} |\nabla u^m|^{p(x)} \, dx \leq D_5. \quad (54)$$

Hence, using (6'), for  $m \geq R+2$  we obtain

$$\rho_{p(\cdot), B(R)}(|\nabla T_k(u^m)|) \leq D_5 k, \quad k > 0, \quad (55)$$

$$\rho_{p'(\cdot), B(R)}(|a(x, \nabla T_k(u^m))|) \leq D_7 k, \quad k \geq 1. \quad (56)$$

From the inequality (54), due to the arbitrariness of  $k > 0$ , we establish the estimate

$$\|b(x, u^m, \nabla u^m)\|_{1, B(R)} \leq D_5. \quad (57)$$

Then, according to Assertion 3, for any  $h \geq 1$  and  $m \geq R+2$  the following inequality holds (see (37)):

$$\text{meas}(\{B(R) : |\nabla u^m| \geq h\}) \leq D_6 h^{-\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \frac{p_0 - p_-}{p_0 - 1}. \quad (58)$$

Hereinafter, the constants  $D_i, C_i$  independent of  $m, k$ .

Step 2: a. e. convergence of subsequences of  $\{u^m\}, \{\nabla u^m\}$ .

It follows from (51), (58) that

$$\text{meas}(\{B(R) : |u^m| \geq h\}) \rightarrow 0 \quad \text{uniformly with respect to } m, \quad h \rightarrow \infty, \quad (59)$$

$$\text{meas}(\{B(R) : |\nabla u^m| \geq h\}) \rightarrow 0 \quad \text{uniformly with respect to } m, \quad h \rightarrow \infty.$$

Let us establish the following convergence along a subsequence:

$$u^m \rightarrow u \quad \text{a. e. in } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty. \quad (60)$$

Let  $\alpha \in (1 - p_-, 0)$ . Consider a sequence  $v^m = (1 + |u^m|)^\beta$ ,  $\beta = (\alpha + p_- - 1)/p_- > 0$ . According to (49), (50), we have the estimates (see (30), (31))

$$\int_{B(R)} |v^m|^{p(x)} dx \leq D_1, \quad \int_{B(R)} |\nabla v^m|^{p(x)} dx \leq D_2. \quad (61)$$

Let us also consider the sequences  $\tilde{v}^m = (1 + (u^m)^+)^\beta$ ,  $\tilde{\tilde{v}}^m = (1 + (u^m)^-)^\beta$ . It is clear that  $|\nabla \tilde{v}^m| \leq (1 + |u^m|)^{(\alpha-1)/p_-} |\nabla u^m|$ ,  $|\nabla \tilde{\tilde{v}}^m| \leq (1 + |u^m|)^{(\alpha-1)/p_-} |\nabla u^m|$ . The estimates (61) imply the boundedness of  $\tilde{v}^m, \tilde{\tilde{v}}^m$  in  $W_{p(\cdot)}^1(B(R))$  and, in view of the compactness of the embedding into  $L_{p(\cdot)}(B(R))$ , we have the strong convergences  $\tilde{v}^m \rightarrow \tilde{v}$ ,  $\tilde{\tilde{v}}^m \rightarrow \tilde{\tilde{v}}$  in  $L_{p(\cdot)}(B(R))$  and the a. e. convergence in  $B(R)$ . Thus, the convergence (60) is proved in  $B(R)$ . Next, taking  $R$  from  $\mathbb{N}$ , we select a diagonal subsequence  $u^m$  (we denote it by the same indices) converging a. e. to  $u$  in  $\mathbb{R}^n$ .

It follows from (60) that for any  $k > 0$ ,

$$T_k(u^m) \rightarrow T_k(u) \quad \text{a. e. in } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty.$$

The boundedness of  $\{T_k(u^m)\}$  in  $W_{p(\cdot)}^1(B(R))$  for a fixed  $k > 0$  follows from the estimate (55). Then one can select a weakly convergent subsequence  $T_k(u^m) \rightharpoonup v_k$ ,  $m \rightarrow \infty$  in  $W_{p(\cdot)}^1(B(R))$ , where  $v_k \in W_{p(\cdot)}^1(B(R))$ . The convergence (60) implies that  $v_k = T_k(u) \in W_{p(\cdot)}^1(B(R))$ . Thus, in view of the arbitrariness of  $R$ , we obtain the convergence

$$T_k(u^m) \rightharpoonup T_k(u) \quad \text{in } W_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty. \quad (62)$$

Next, the convergence of the subsequence  $\nabla u^m$  (we denote it by the same indices)

$$\nabla u^m \rightarrow \nabla u \quad \text{a. e. in } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty \quad (63)$$

can be proved in much the same way as in [12, Step 4].

Step 3: strong convergences

$$|u^m|^{p(x)-1} \rightarrow |u|^{p(x)-1} \quad \text{in } L_{q(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot), \quad m \rightarrow \infty, \quad (64)$$

$$|\nabla u^m|^{p(x)-1} \rightarrow |\nabla u|^{p(x)-1} \quad \text{in } L_{q(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot) \text{ (or } q_4(\cdot)), \quad m \rightarrow \infty, \quad (65)$$

$$a(x, \nabla u^m) \rightarrow a(x, \nabla u) \quad \text{in } L_{q(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot) \text{ (or } q_4(\cdot)), \quad m \rightarrow \infty. \quad (66)$$

Applying Fatou's lemma and the convergences (60), (63), from the estimates (52), (53) we derive  $|u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot)$ ,  $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot)$  (or  $q_4(\cdot)$ ).

Applying the inequalities (4), (6) and Young's inequality, for any measurable set  $Q \subset B(R)$  and any  $\epsilon > 0$  we establish

$$\begin{aligned} \int_Q |a(x, \nabla u^m)|^{q(x)} dx &\leq \widehat{a}^{q_+} 2^{q_+ - 1} \int_Q \left( |\nabla u^m|^{(p(x)-1)q(x)} + \Phi^{q(x)}(x) \right) dx \\ &\leq \epsilon \int_{B(R)} |\nabla u^m|^{(p(x)-1)\widehat{q}(x)} dx + C_8(\epsilon) \text{meas}(Q) + C_9 \int_Q \Phi^{q(x)}(x) dx, \end{aligned} \quad (67)$$

where  $1 \leq q(\cdot) < \widehat{q}(\cdot) < q_2(\cdot)$ .

Taking into account the absolute continuity of the second integral on the right-hand side of (67), applying the estimate (53), for any  $\epsilon > 0$  we find  $\delta(\epsilon)$  such that for any  $Q$  with  $\text{meas}(Q) < \delta(\epsilon)$  the following inequality holds:

$$\int_Q |a(x, \nabla u^m)|^{q(x)} dx \leq \epsilon \quad (\forall m \geq R + 1).$$

This implies that the sequence  $\{|\nabla u^m|^{(p(x)-1)q(x)}\}$ ,  $\{|a(x, \nabla u^m)|^{q(x)}\}$  have uniformly absolutely equicontinuous integrals over  $B(R)$ . By Lemma 4, we have the convergences (65), (66). The convergence (64) is established similarly, by using (52).

The estimate (35) for  $u^m$  and  $k = 1$ ,  $h \geq 1$  is written as

$$\begin{aligned} &\int_{\{B(R): h-1 \leq |u^m| < h\}} a(x, \nabla u^m) \cdot \nabla u^m dx + \int_{\{B(R): |u^m| \geq h\}} |b(x, u^m, \nabla u^m)| dx \\ &\leq \int_{\{B(R+1): |u^m| \geq h-1\}} |f| dx + \widehat{a} \int_{\{B(R+1): |u^m| \geq h-1\}} \left( |\nabla u^m|^{p(x)-1} + \Phi(x) \right) dx, \quad m \geq R + 2. \end{aligned}$$

Since  $|\nabla u^m|^{p(x)-1}$  converges strongly in  $L_1(B(R+1))$  and in view of the absolute continuity of the integrals on the right-hand side of the last inequality, taking into account (59), for any  $\epsilon > 0$  one can choose a sufficiently large  $\widetilde{h}(\epsilon) > 1$  such that for  $h \geq \widetilde{h}$  the following estimate holds:

$$\int_{\{B(R): h-1 \leq |u^m| < h\}} a(x, \nabla u^m) \cdot \nabla u^m dx + \int_{\{B(R): |u^m| \geq h\}} |b(x, u^m, \nabla u^m)| dx < \frac{\epsilon}{2}, \quad m \geq R + 3. \quad (68)$$

The proof of the theorem will be continued in Section 6.

#### 5. Step 4. Strong Convergence of Truncations in $W_{p(\cdot)}^1(B(R))$

In this step, the following strong convergence will be established:

$$\nabla T_k(u^m) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{in } L_{p(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty, \quad (69)$$

$$a(x, \nabla T_k(u^m)) \rightarrow a(x, \nabla T_k(u)) \quad \text{strongly in } L_{p'(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty. \quad (70)$$

It follows from (56) that for any  $k \geq 1$  we have

$$\|a(x, \nabla T_k(u^m))\|_{p'(\cdot), B(R)} \leq D_{11}(k), \quad m \geq R + 2. \quad (71)$$

For positive real numbers  $m, h$ , we denote by  $\omega(h, m)$  any value such that

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} \limsup_{m \rightarrow +\infty} |\omega(h, m)| = 0.$$

Moreover, by  $\omega_k(m)$  we denote any value such that, for a fixed  $k$ ,  $\limsup_{m \rightarrow +\infty} |\omega_k(m)| = 0$ .

Let  $h, k, h - 1 > k > 0$ ,  $\phi_k(\varrho) = \varrho \exp(\gamma^2 \varrho^2)$ ,  $\varrho \in \mathbb{R}$ , where  $\gamma = \frac{\widehat{b}(k)}{a}$ . It is evident that

$$\psi_k(\varrho) = \phi'_k(\varrho) - \gamma |\phi_k(\varrho)| \geq 7/8, \quad \varrho \in \mathbb{R}.$$

Hence, for  $z^m = T_k(u^m) - T_k(u)$  we have

$$7/8 \leq \psi_k(z^m) \leq \max_{[-2k, 2k]} \psi_k(\rho) = C_{11}(k), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (72)$$

In view of (60), we get

$$\phi_k(z^m) \rightarrow 0, \quad \psi_k(z^m) \rightarrow 1 \quad \text{a. e. in } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty, \quad (73)$$

and also

$$|\phi_k(z^m)| \leq \phi_k(2k), \quad 1 \leq \phi'_k(z^m) \leq \phi'_k(2k), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (74)$$

Applying (73), (74), by Lemma 3 we establish the convergence

$$|\phi_k(z^m)| \xrightarrow{*} 0 \quad \text{in } L_\infty(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty. \quad (75)$$

According to Lemma 3, for  $g \in L_{p(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  we have

$$g\phi_k(z^m) \rightarrow 0 \quad \text{in } L_{p(\cdot), \text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty. \quad (76)$$

Taking  $w = \phi_k(z^m)\eta_R(|x|)\eta_{h-1}(|u^m|)$ ,  $R > 0$ , as a test function in (48), we obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \nabla T_h(u^m)) \nabla (\eta_R(|x|)\phi_k(z^m)\eta_{h-1}(|u^m|)) dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} b(x, u^m, \nabla u^m) \phi_k(z^m)\eta_R(|x|)\eta_{h-1}(|u^m|) dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} f \phi_k(z^m)\eta_R(|x|)\eta_{h-1}(|u^m|) dx = I_1^{mh} + I_2^{mh} + I_3^{mh} = 0, \quad m \geq R + 1. \end{aligned} \quad (77)$$

*Estimates for the integrals  $I_2^{mh} - I_3^{mh}$ .* Thanks to (73), by Lebesgue's theorem we obtain

$$|I_3^{mh}| \leq \int_{B(R+1)} |f \phi_k(z^m)| dx = \omega(m). \quad (78)$$

Evidently,  $z^m u^m \geq 0$  for  $|u^m| \geq k$ . Therefore, in view of (10), we have

$$b(x, u^m, \nabla u^m) \phi_k(z^m) \geq 0 \quad \text{for } |u^m| \geq k.$$

Taking this into account and applying (8), (9), we estimate

$$\begin{aligned}
& -I_2^{mh} \leq \int_{\{\mathbb{R}^n: |u^m| < k\}} |b(x, u^m, \nabla u^m)| |\phi_k(z^m)| \eta_R(|x|) dx \\
& \leq \widehat{b}(k) \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla T_k(u^m)|^{p(x)} + \Phi_0(x)) |\phi_k(z^m)| \eta_R(|x|) dx \leq \widehat{b}(k) \int_{B(R+1)} \Phi_0(x) |\phi_k(z^m)| dx \quad (79) \\
& \quad + \frac{\widehat{b}(k)}{\bar{a}} \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) |\phi_k(z^m)| \eta_R(|x|) dx = I_{21}^m + I_{22}^m.
\end{aligned}$$

In view of (75), we have

$$I_{21}^m = \widehat{b}(k) \int_{B(R+1)} \Phi_0(x) |\phi_k(z^m)| dx = \omega(m). \quad (80)$$

Now, using (78), (79), (80), from (77) we derive the inequalities

$$\begin{aligned}
I_4^{mh} &= I_{11}^{mh} - I_{22}^m = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla z^m \phi_k'(z^m) \eta_R(|x|) \eta_{h-1}(|u^m|) dx \\
&\quad - \frac{\widehat{b}(k)}{\bar{a}} \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) |\phi_k(z^m)| \eta_R(|x|) dx \\
&\leq \omega(m) + \int_{\{\mathbb{R}^n: h-1 \leq |u^m| < h\}} a(x, \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla u^m \eta_R(|x|) |\phi_k(z^m)| dx \\
&+ \int_{\{\mathbb{R}^n: |u^m| < h\}} |a(x, \nabla T_h(u^m))| |\nabla \eta_R(|x|)| |\phi_k(z^m)| dx = \omega(m) + I_{12}^{mh} + I_{13}^{mh}, \quad m \geq R+1. \quad (81)
\end{aligned}$$

*Estimate of the right-hand side in (81).* Using (74), we have

$$\begin{aligned}
I_{12}^{mh} &= \int_{\{\mathbb{R}^n: h-1 \leq |u^m| < h\}} a(x, \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla u^m \eta_R(|x|) |\phi_k(z^m)| dx \\
&\leq |\phi_k(2k)| \int_{\{B(R+1): h-1 \leq |u^m| < h\}} a(x, \nabla u^m) \cdot \nabla u^m dx.
\end{aligned}$$

Thanks to (68), we get

$$I_{12}^{mh} \leq \omega(h), \quad m \geq R+4. \quad (82)$$

Next, using (71) and (76) with  $g = 1$ , we obtain

$$\begin{aligned}
I_{13}^{mh} &= \int_{\{\mathbb{R}^n: |u^m| < h\}} |a(x, \nabla T_h(u^m))| |\nabla \eta_R(|x|)| |\phi_k(z^m)| dx \\
&\leq D_{11}(h) \|\phi_k(z^m)\|_{p(\cdot), B(R+1)} = \omega_h(m). \quad (83)
\end{aligned}$$

Combining (81)–(83), we establish the inequalities

$$I_4^{mh} \leq \omega(h) + \omega_h(m), \quad m \geq R+4. \quad (84)$$

Performing elementary transformations, we derive the equalities

$$\begin{aligned}
I_4^{mh} &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \phi'_k(z^m) \eta_R(|\mathbf{x}|) \eta_{h-1}(|u^m|) \, d\mathbf{x} \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(u) \phi'_k(z^m) \eta_R(|\mathbf{x}|) \eta_{h-1}(|u^m|) \, d\mathbf{x} \\
&\quad - \frac{\widehat{b}(k)}{\bar{a}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) |\phi_k(z^m)| \eta_R(|\mathbf{x}|) \, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \psi(z^m) \eta_R(|\mathbf{x}|) \, d\mathbf{x} \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(u) \phi'_k(z^m) \eta_R(|\mathbf{x}|) \eta_{h-1}(|u^m|) \, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla z^m \psi(z^m) \eta_R(|\mathbf{x}|) \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u) \psi(z^m) \eta_R(|\mathbf{x}|) \, d\mathbf{x} \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(u) \phi'_k(z^m) \eta_R(|\mathbf{x}|) \eta_{h-1}(|u^m|) \, d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Obviously, we have

$$\begin{aligned}
I_4^{mh} &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla z^m \psi(z^m) \eta_R(|\mathbf{x}|) \, d\mathbf{x} \\
&\quad - \frac{\widehat{b}(k)}{\bar{a}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u) |\phi_k(z^m)| \eta_R(|\mathbf{x}|) \, d\mathbf{x} \tag{85} \\
&+ \int_{\{\mathbb{R}^n: |u^m| \geq k\}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}, 0) - \eta_{h-1} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_h(u^m))) \cdot \nabla T_k(u) \phi'_k(z^m) \eta_R \, d\mathbf{x} = I_{41}^m + I_{42}^m + I_{43}^{mh}.
\end{aligned}$$

Using (71), we get

$$|I_{42}^m| \leq \frac{\widehat{b}(k)}{\bar{a}} \int_{B(R+1)} |\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u^m))| |\nabla T_k(u) \phi_k(z^m)| \, d\mathbf{x} \leq D_{11}(k) \|\nabla T_k(u) \phi_k(z^m)\|_{p(\cdot), B(R+1)}.$$

In view of (76) with  $g = |\nabla T_k(u)| \in L_{p(\cdot)}(B(R+1))$ , we obtain

$$I_{42}^m = \omega(m). \tag{86}$$

Using (74), (71), we establish that

$$|I_{43}^{mh}| \leq D_{12}(h, k) \|\nabla T_k(u) \chi_{\{|u^m| \geq k\}}\|_{p(\cdot), B(R+1)}. \tag{87}$$

By (60), we get

$$\begin{aligned}
&\nabla T_k(u) \chi_{\{|u^m| \geq k\}} \rightarrow \nabla T_k(u) \chi_{\{|u| \geq k\}} = 0 \quad \text{a. e. in } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty; \\
&|\nabla T_k(u)|^{p(\mathbf{x})} \chi_{\{|u^m| \geq k\}} \leq |\nabla T_k(u)|^{p(\mathbf{x})} \in L_1(B(R+1)), \quad m \geq R+1.
\end{aligned}$$

Using Lebesgue's lemma, we deduce that  $\nabla T_k(u) \chi_{\{|u^m| \geq k\}} \rightarrow 0$  in  $L_{p(\cdot)}(B(R+1))$ ,  $m \rightarrow \infty$ .

Therefore, by (87), we obtain

$$I_{43}^{mh} = \omega(m). \tag{88}$$

Since  $I_{41}^m$  does not depend on  $h$ , it follows from (84), (85), (86), (88) that  $I_{41}^m \leq \omega_h(m) + \omega(h)$ .

From here, using the notation (43), we have

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} q^m(x) \psi_k(z^m) \eta_R(|x|) dx \\
&= I_{41}^m - \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla (T_k(u^m) - T_k(u)) \psi_k(z^m) \eta_R(|x|) dx \\
&\leq \omega_h(m) + \omega(h) - \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \nabla T_k(u)) \nabla (T_k(u^m) - T_k(u)) \psi_k(z^m) \eta_R(|x|) dx \\
&= \omega_h(m) + \omega(h) - I_{44}^m.
\end{aligned} \tag{89}$$

Thanks to (73), by Lemma 3 we establish the convergence

$$\eta_R(|x|) \psi_k(z^m) a(x, \nabla T_k(u)) \rightarrow \eta_R(|x|) a(x, \nabla T_k(u)) \quad \text{in } L_{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty.$$

From here, applying (62), we deduce

$$I_{44}^m = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(z^m) a(x, \nabla T_k(u)) \nabla (T_k(u^m) - T_k(u)) \eta_R(|x|) dx = \omega(m). \tag{90}$$

Combining (89), (90), we arrive at  $\int_{B(R)} \psi_k(z^m) q^m(x) dx \leq \omega_h(m) + \omega(h)$ . Using (72), passing to the limit in the last inequality first by  $m \rightarrow \infty$  and then by  $h \rightarrow \infty$ , we establish that

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B(R)} q^m(x) dx = 0.$$

By Lemma 5 ( $v^m = T_k(u^m)$ ), due to the arbitrariness of  $R > 0$ , we have the convergences (69) and (70).

## 6. Proof of Theorem 1. Ending

Step 5: limit function is a renormalized solution.

As in [11, Step 6], we established the convergence

$$b(x, u^m, \nabla u^m) \rightarrow b(x, u, \nabla u) \quad \text{in } L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty. \tag{91}$$

Let us prove that the limit function  $u$  satisfies Definition 2-loc. The assumptions a-loc)-d-loc) of Definition-loc are satisfied, which is proved in Steps 2, 3. Let us prove the equality (12). Let  $h \in \text{Lip}_0(\mathbb{R})$  and  $\varphi \in W_{r(\cdot)}^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$  be with compact support. Since  $h$  is bounded and continuous, due to the convergence (60), by Lemma 3 we establish

$$h(u^m) \rightarrow h(u) \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty, \tag{92}$$

$$h(u^m) \xrightarrow{*} h(u) \quad \text{weakly in } L_\infty(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty, \tag{93}$$

$$\nabla \varphi h(u^m) \rightarrow \nabla \varphi h(u) \quad \text{strongly in } L_{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \quad r(\cdot) > q_2'(\cdot), \quad m \rightarrow \infty. \tag{94}$$

If  $\text{supp } h' \subset [-M, M]$  for  $M > 0$ , then for a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$  we have

$$|h(u^m)|^{p(x)} + |\nabla h(u^m)|^{p(x)} = |h(u^m)|^{p(x)} + |\nabla u^m h'(u^m)|^{p(x)} \leq C_{12} + C_{13} |\nabla T_M(u^m)|^{p(x)}.$$

Then, applying the estimate (55), we obtain the boundedness of the sequence  $\{h(u^m)\}$  in  $W_{p(\cdot)}^1(B(R))$ . From here and (92), by Lemma 2 we establish the convergence  $h(u^m) \rightharpoonup h(u)$  weakly in  $W_{p(\cdot),\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $m \rightarrow \infty$ . Then we conclude the convergence

$$\nabla h(u^m)\varphi \rightharpoonup \nabla h(u)\varphi \quad \text{weakly in } L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty. \quad (95)$$

Applying (91), (93), we get

$$\int_{\mathbb{R}^n} (b(x, u^m, \nabla u^m) - f)h(u^m)\varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x, u, \nabla u) - f)h(u)\varphi \, dx + \omega(m). \quad (96)$$

Taking into account the convergences (70), (95), we have

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \nabla T_M(u^m)) \cdot \nabla h(u^m)\varphi \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \nabla T_M(u)) \cdot \nabla h(u)\varphi \, dx + \omega(m) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \nabla u) \cdot \nabla u h'(u)\varphi \, dx + \omega(m). \end{aligned}$$

Using the convergences (66), (94), we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x, \nabla u^m) \cdot \nabla \varphi h(u^m) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi h(u) \, dx + \omega(m). \quad (97)$$

Combining (47), (96)–(97), we get (12).

If  $f \geq 0$  a. e. in  $\mathbb{R}^n$ , then for each  $m \in \mathbb{N}$  the solution  $u^m$  of the problem (46) satisfies  $u^m \geq 0$  a. e. in  $\mathbb{R}^n$ . Applying the convergence (60), we establish that  $u \geq 0$  a. e. in  $\mathbb{R}^n$ . Theorem 1 is proved.

## References

1. Dal Maso, G. and Malusa, A. Some Properties of Reachable Solutions of Nonlinear Elliptic Equations with Measure Data, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe di Scienze, Serie 4*, 1997, vol. 25, no. 1–2, pp. 375–396.
2. Bidaut-Veron, M. F. Removable Singularities and Existence for a Quasilinear Equation with Absorption or Source Term and Measure Data, *Advanced Nonlinear Studies*, 2003, vol. 3, no. 1, p. 25–63. DOI: 10.1515/ans-2003-0102.
3. Véron, L. *Local and Global Aspects of Quasilinear Degenerate Elliptic Equations. Quasilinear Elliptic Singular Problems*, Hackensack, World Scientific Publishing, 2017, 457 p.
4. Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P. and Ruzicka, M. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Berlin, Heidelberg, Springer, 2011, 509 p.
5. Fan, X. L. and Zhao, D. On the Spaces  $L^{p(x)}(\Omega)$  and  $W^{k,p(x)}(\Omega)$ , *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, vol. 263, no. 1, pp. 424–446. DOI: 10.1006/jmaa.2000.7617.
6. Sanchón, M. and Urbano, J. M. Entropy Solutions for the  $p(x)$ -Laplace Equation, *Transactions of the American Mathematical Society*, 2009, vol. 361, no. 12, pp. 6387–6405. DOI: 10.1090/S0002-9947-09-04399-2.
7. Kozhevnikova, L. M. Renormalized Solutions of Elliptic Equations with Variable Exponents and General Measure Data, *Sbornik: Mathematics*, 2020, vol. 211, no. 12, pp. 1737–1776. DOI: 10.1070/sm9371.
8. Mokhtari, F. Nonlinear Anisotropic Elliptic Equations in  $R^N$  with Variable Exponents and Locally Integrable Data, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2016, vol. 40, no. 3, pp. 2265–2276. DOI: 10.1002/mma.4137.
9. Dunford, N. and Schwartz, J. T. *Linear Operators. I. General Theory*, New York and London, Interscience Publishers, 1958, 895 p.

10. Kozhevnikova, L. M. On Solutions of Anisotropic Elliptic Equations with Variable Exponent and Measure Data, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2019, vol. 65, no. 3, pp. 337–367. DOI: 10.1080/17476933.2019.1579206.
11. Kozhevnikova, L. M. Entropy and Renormalized Solutions of Anisotropic Elliptic Equations with Variable Nonlinearity Exponents, *Sbornik: Mathematics*, 2019, vol. 210, no. 3, pp. 417–446. DOI: 10.1070/SM9078.
12. Kozhevnikova, L. M. On Entropy Solutions of Anisotropic Elliptic Equations with Variable Nonlinearity Indices in Unbounded Domains, *Journal of Mathematical Sciences*, 2021, vol. 253, no. 5, pp. 692–709. DOI: 10.1007/s10958-021-05262-0.

Received February 15, 2025

LARISA M. KOZHEVNIKOVA

Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology,  
49 Lenin Ave., Sterlitamak 453103, Russia,

Professor

E-mail: kosul@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-6458-5998>

Владикавказский математический журнал  
2025, Том 27, Выпуск 2, С. 52–71

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОГО РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ  
В ПРОСТРАНСТВЕ  $\mathbb{R}^n$

Кожевникова Л. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологии,  
Россия, 453103, Стерлитамак, пр. Ленина, 49

E-mail: kosul@mail.ru

**Аннотация.** Статья посвящена изучению квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с переменными показателями нелинейностей и локально суммируемой правой частью в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Автор адаптирует понятие локального ренормализованного решения для уравнений с переменными показателями роста, обобщая результаты М. Ф. Бидо-Верон, Л. Верон, полученные для уравнений с постоянными показателями. В работе найдены условия на структуру квазилинейного эллиптического оператора с переменным ростом достаточные для корректного определения локального ренормализованного решения. Автором получены априорные локальные оценки, характеризующие регулярность решения, на их основе доказано существование локального ренормализованного решения в пространстве  $\mathbb{R}^n$  без дополнительных ограничений на его рост на бесконечности. Кроме того, в работе показано, что при неотрицательной правой части решение также является неотрицательным почти всюду. В работе используются методы функционального анализа, включая теорию пространств Лебега и Соболева с переменными показателями. Доказательства основаны на применении методов компактности и монотонности, а также на использовании специальных тестовых функций. Результаты работы имеют важное значение для теории нелинейных эллиптических уравнений и могут быть применены в дальнейших исследованиях вырождающихся уравнений и задач с данными в виде меры. Работа вносит вклад в развитие методов анализа уравнений с переменными показателями нелинейностей и расширяет область применимости понятия локального ренормализованного решения.

**Ключевые слова:** локальное ренормализованное решение, квазилинейное эллиптическое уравнение, переменный показатель нелинейности, существование решения.

**AMS Subject Classification:** 35A01, 35B45, 35J62.

**Образец цитирования:** Kozhevnikova L. M. Existence of a Local Renormalized Solution of an Elliptic Equation with Variable Exponents in  $\mathbb{R}^n$  // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 2.—С. 52–71 (in English). DOI: 10.46698/j2148-7740-8991-e.

УДК 517.5

DOI 10.46698/e5897-8783-0193-o

THE ONE RADIUS THEOREM FOR THE BESSEL  
CONVOLUTION OPERATOR AND ITS APPLICATIONS<sup>#</sup>

G. V. Krasnoschekikh<sup>1</sup> and Vit. V. Volchkov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Donetsk State University,  
24 Universitetskaya St., Donetsk 283001, Russia  
E-mail: wolverimred@mail.ru, volna936@gmail.com

*Dedicated to the 70th anniversary of Professor A. F. Tedeev*

**Abstract.** It is well known that any function  $f \in C(\mathbb{R}^n)$  ( $n \geq 2$ ) which has zero integrals over all balls and spheres with fixed radius  $r$  is identically zero. In this paper, we study a similar phenomenon for ball and spherical means with respect to the  $\alpha$ -convolution of Bessel. Let  $\alpha \in (-1/2, +\infty)$ , let  $L_{\natural, \alpha}^{1, \text{loc}}(-R, R)$  be the class of even locally summable functions with respect to the measure  $d\mu_\alpha(x) = |x|^{2\alpha+1} dx$  on the interval  $(-R, R)$ , and let  $f \star_\alpha g$  be the Bessel convolution of a function  $f \in L_{\natural, \alpha}^{1, \text{loc}}(-R, R)$  and an even distribution  $g$  on  $\mathbb{R}$  with support in  $(-R, R)$ . The main result of the article provides a solution to the problem of injectivity of the operator

$$f \rightarrow (f \star_\alpha \chi_r, f \star_\alpha \delta_r), \quad f \in L_{\natural, \alpha}^{1, \text{loc}}(-R, R), \quad 0 < r < R,$$

where  $\chi_r$  is the indicator of the segment  $[-r, r]$  and  $\delta_r$  is an even measure that maps an even continuous function  $\varphi$  on  $\mathbb{R}$  to the number  $\varphi(r)$ . Based on the technique associated with classical orthogonal polynomials and recent research by the authors it is shown that for  $R \geq 2r$ , the kernel of the specified operator is zero. For  $r < R < 2r$ , it consist of functions  $f \in L_{\natural, \alpha}^{1, \text{loc}}(-R, R)$  that are zero in the interval  $(2r - R, R)$  and have a zero integral (with respect to the measure  $d\mu_\alpha$ ) over the interval  $(0, 2r - R)$ . This result allowed us to obtain a new criterion of the closure for the system of generalized Bessel shifts of segment indicators in the space  $L_{\natural, \alpha}^p(-R, R)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , as well as a new uniqueness theorem for solutions of the Cauchy problem for the generalized Euler–Poisson–Darboux equation.

**Keywords:** generalized shift, mean periodicity, Gegenbauer polynomials, approximation by shifts, Euler–Poisson–Darboux equation.

**AMS Subject Classification:** 42A85, 41A30, 33C10, 35Q05.

**For citation:** Krasnoschekikh, G. V. and Volchkov, Vit. V. The One Radius Theorem for the Bessel Convolution Operator and its Applications, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 2, pp. 72–83. DOI: 10.46698/e5897-8783-0193-o.

## 1. Introduction

Let  $r$  be a fixed positive number. An obvious property of non-zero  $2r$ -periodic functions on the real axis is that they have no antiperiod equal to  $2r$ . In other words, if a function  $f$  on  $\mathbb{R}$  satisfies relations

$$f(x+r) - f(x-r) = 0, \quad f(x+r) + f(x-r) = 0$$

for  $x \in \mathbb{R}$ , then  $f \equiv 0$ . In terms of integral averages, this means that any continuous function on  $\mathbb{R}$  having zero integrals over all segments  $[x-r, x+r]$  and their boundaries  $\{x \pm r\}$

---

<sup>#</sup> The research was carried out within the framework of the state contract, project № 124012400352-6.

© 2025 Krasnoschekikh, G. V. and Volchkov, Vit. V.

is identically zero. The above fact admits nontrivial generalizations for various multidimensional spaces. For example, if a function  $f \in C(\mathbb{R}^n)$ ,  $n \geq 2$ , has zero integrals over all balls and spheres of fixed radius, then  $f \equiv 0$  (see [1], the proof of Theorem 4.4). We can also use close integral conditions to characterize analytic functions on the complex plane  $\mathbb{C}$ . Namely, a function  $f \in C(\mathbb{C})$  is entire only if, for some  $r > 0$  and all  $z \in \mathbb{C}$ , the equalities

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta = f(z), \quad \int_{|w-z|=r} f(w) dw = 0$$

hold (see [2, Corollary 2]). Statements of this type, called one radius theorems, are closely related to questions of injectivity of the Pompeiu transform and spectral analysis-synthesis problems for subspaces invariant under shifts [3–6]. For other variants of the one radius theorem related to the characterization of harmonic functions, the Liouville property and the so-called “freak”-theorems, see [7], Theorem 4.3.4, and [8–13].

It is more difficult to study such problems on domains other than the whole space. The main difficulties that arise in this case stem from the violation of the group structure of translations and, consequently, the inability to apply the Fourier transform. Here is a formulation of one local result established in [14].

Let  $n \geq 2$ ,  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ , and  $B_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : a < |x| < b\}$ . For  $0 < r < R$ , we put  $W_r(B_R) = U_r(B_R) \cap V_r(B_R)$ , where  $V_r(B_R)$  (respectively,  $U_r(B_R)$ ) is the set of functions  $f \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$  having zero integrals over all closed balls (respectively, almost all spheres) of radius  $r$  in  $B_R$ . Every function  $f \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$  has a Fourier series

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} f_{kl}(|x|) Y_l^{(k)} \left( \frac{x}{|x|} \right),$$

where  $\{Y_l^{(k)}\}$ ,  $1 \leq l \leq d_k$ , is a fixed orthonormal basis in the space of spherical harmonics of degree  $k$ , viewed as a subspace of  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$  ( $\mathbb{S}^{n-1}$  is a unit sphere in  $\mathbb{R}^n$  with center at the origin).

**Theorem A** [14, §5]. 1) If  $R > 2r$  and  $f \in W_r(B_R)$ , then  $f = 0$  in  $B_R$ .

2) If  $R \leq 2r$ , then in order that a function  $f \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$  to belong to the class  $W_r(B_R)$ , it is necessary and sufficient that

$$\int_{|x| \leq 2r-R} f(x) dx = 0 \tag{1}$$

and

$$f_{kl}(|x|) = \sum_{m=0}^{k-2} c_{m,k,l} |x|^{2m-n-k+2}, \quad c_{m,k,l} \in \mathbb{C}$$

for all integers  $k \geq 0$ ,  $1 \leq l \leq d_k$ , and almost all  $x \in B_{2r-R,R}$ , where the sum is set to be equal to zero for  $k = 0, 1$ .

If  $R = 2r$ , then the condition  $f \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$  enables one to simplify the description of  $W_r(B_R)$ . In this case, the constants  $c_{m,k,l}$  vanish for  $0 \leq m < \frac{k-1}{2}$ , and (1) holds for each  $f \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$  (see [14, §5]). In [15, Part 2, Chap. 3, §3.4], a generalization of Theorem A to Riemannian two-point homogeneous spaces is contained. These results have led, in particular, to a solution of the support problem for some classes of functions with zero

ball means, and have also found unexpected applications to overdetermined interpolation problems in the theory of entire functions (see [14] and [15, Part 2, Chap. 3, § 3.4]).

Theorem A solves the problem of describing the kernel of the operator

$$f \rightarrow (f * \chi_{B_r}, f * \delta_{S_r}), \quad f \in L^{1,\text{loc}}(B_R),$$

where  $*$  denotes the usual convolution in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\chi_{B_r}$  is the indicator of the ball  $B_r$  and  $\delta_{S_r}$  is the surface delta function centered on the sphere  $S_r = \partial B_r$ . In view of possible new applications in analysis, similar results for other types of convolution are of interest. In this paper, based on techniques related to classical orthogonal polynomials and recent research of the authors from [16], we derive an analogue of Theorem A for the Bessel convolution case, and find its applications to problems in approximation theory and the theory of partial differential equations.

## 2. Formulation of the Main Results

Everywhere below, we assume that  $\alpha \in (-1/2, +\infty)$  is a given number. Let  $L_{\natural,\alpha}^p(I_R)$  and  $L_{\natural,\alpha}^{p,\text{loc}}(I_R)$ ,  $p \in [1, +\infty)$ , be the classes of even complex-valued functions on the interval  $I_R = (-R, R)$  that are  $p$ -integrable and  $p$ -locally integrable with respect to the measure

$$d\mu_\alpha(x) = |x|^{2\alpha+1} dx,$$

respectively; let  $C_{\natural}^k(I_R)$  be the set of even  $k$  times continuously differentiable functions on  $I_R$  and  $\mathcal{D}_{\natural}(I_R)$  the family of all compactly supported functions of class  $C_{\natural}^\infty(I_R)$ . The set  $\mathcal{D}_{\natural}(I_R)$  is a topological vector space with the usual topology. Denote by  $\mathcal{D}'_{\natural}(I_R)$  the space of all even distributions on  $I_R$ , that is, linear continuous functionals on the space  $\mathcal{D}_{\natural}(I_R)$ . The entry  $\langle f, \varphi \rangle$  will mean the value of a functional  $f \in \mathcal{D}'_{\natural}(I_R)$  on a function  $\varphi \in \mathcal{D}_{\natural}(I_R)$ . The space  $L_{\natural,\alpha}^{1,\text{loc}}(I_R)$  is imbedded in  $\mathcal{D}'_{\natural}(I_R)$  by identifying of a function  $f \in L_{\natural,\alpha}^{1,\text{loc}}(I_R)$  with the distribution

$$\varphi \rightarrow \langle f, \varphi \rangle = \int_0^R f(x)\varphi(x) d\mu_\alpha(x), \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\natural}(I_R). \quad (2)$$

Let  $\mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R})$  be the set of all compactly supported distributions of the class  $\mathcal{D}'_{\natural}(\mathbb{R})$ . For  $g \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R})$ , we put

$$r(g) = \inf\{r > 0 : \text{supp } g \subset \bar{I}_r\},$$

where  $\text{supp } g$  is the support of the distribution  $g$  and  $\bar{I}_r = [-r, r]$ . If  $f \in \mathcal{D}'_{\natural}(I_R)$  and  $R > r(g)$ , then the Bessel convolution  $f \star^\alpha g$  is defined as distribution of  $\mathcal{D}'_{\natural}(I_{R-r(g)})$  acting according to the rule

$$\langle f \star^\alpha g, \varphi \rangle = \left\langle f(x), \langle g(y), T_x^\alpha \varphi(y) \rangle \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\natural}(I_{R-r(g)}), \quad (3)$$

where

$$T_x^\alpha \varphi(y) = c_\alpha \int_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta}) (\sin \theta)^{2\alpha} d\theta, \quad c_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \quad (4)$$

and  $\Gamma$  is the gamma function. The basic properties of this convolution are contained in [17, §§ 2, 3] and [18, Chap. 1].

For  $f, g \in L_{\natural, \alpha}^{1, \text{loc}}(I_R)$  and  $r(g) < R$ , we have  $f \star^\alpha g \in L_{\natural, \alpha}^{1, \text{loc}}(I_{R-r(g)})$  and

$$(f \star^\alpha g)(y) = \int_0^{r(g)} (T_y^\alpha f)(x)g(x) d\mu_\alpha(x), \quad y \in I_{R-r(g)}.$$

In particular, if  $g = \chi_r$  is the characteristic function (indicator) of the segment  $\overline{I}_r$ , then

$$(f \star^\alpha \chi_r)(y) = \int_0^r (T_y^\alpha f)(x) d\mu_\alpha(x), \quad y \in I_{R-r}. \tag{5}$$

Note also that

$$(f \star^\alpha \delta_r)(y) = T_r^\alpha f(y), \quad y \in I_{R-r}, \tag{6}$$

where  $\delta_r$  is the even part of the Dirac measure with a support at point  $r$ .

For  $0 < r < R$ , we define the classes  $\mathcal{U}_{r, \alpha}(I_R)$ ,  $V_{r, \alpha}(I_R)$  and  $W_{r, \alpha}(I_R)$  by equalities

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{r, \alpha}(I_R) &= \left\{ f \in L_{\natural, \alpha}^{1, \text{loc}}(I_R) : f \star^\alpha \delta_r = 0 \text{ on } I_{R-r} \right\}, \\ V_{r, \alpha}(I_R) &= \left\{ f \in L_{\natural, \alpha}^{1, \text{loc}}(I_R) : f \star^\alpha \chi_r = 0 \text{ on } I_{R-r} \right\}, \\ W_{r, \alpha}(I_R) &= \mathcal{U}_{r, \alpha}(I_R) \cap V_{r, \alpha}(I_R). \end{aligned}$$

The following result gives a description of the class  $W_{r, \alpha}(I_R)$  for any  $R > r$ .

**Theorem 1.** 1) If  $R \geq 2r$ , then  $W_{r, \alpha}(I_R) = \{0\}$ .

2) If  $r < R < 2r$ , then  $f \in W_{r, \alpha}(I_R)$  if and only if  $f \in L_{\natural, \alpha}^{1, \text{loc}}(I_R)$ ,  $f = 0$  on  $(2r - R, R)$  and

$$\int_0^{2r-R} f(x) d\mu_\alpha(x) = 0. \tag{7}$$

It is not difficult to establish a connection between this result and Theorem A. Indeed, let  $f(x) = f_0(|x|)$  be a radial locally summable function on  $B_R$  and  $r \in (0, R)$ . Using the formulas for the transition to spherical coordinates and (6), we find

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x + r\sigma) d\sigma = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left( f_0 \star^{\frac{n}{2}-1} \delta_r \right) (|x|), \quad x \in B_{R-r}. \tag{8}$$

Hence by equality

$$\int_{B_r} f(x + y) dy = \int_0^r \rho^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x + \rho\sigma) d\sigma d\rho$$

we obtain

$$\int_{B_r} f(x + y) dy = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left( f_0 \star^{\frac{n}{2}-1} \chi_r \right) (|x|), \quad x \in B_{R-r}. \tag{9}$$

Relations (8) and (9) show that Theorem A for radial functions is a special case of Theorem 1 when  $\alpha = \frac{n}{2} - 1$ ,  $n \in \{2, 3, \dots\}$ .

In the sequel, we will denote by the symbol  $\text{cl}_X M$  the closure of a set  $M$  in a topological vector space  $X$ . Let also  $\mathcal{L}in E$  be a linear span of a given set  $E \subset X$ .

One of the applications of Theorem 1 is the following result on approximation by generalized shifts in the space  $L_{\natural, \alpha}^p(I_R)$ .

**Theorem 2.** *Let  $1 \leq p < \infty$ ,  $0 < r < R$  and*

$$M = \mathcal{L}in \{T_t^\alpha(\chi_r), T_r^\alpha(\chi_t) : 0 < t < R - r\}.$$

Then in order that

$$cl_{L_{\natural, \alpha}^p(I_R)} M = L_{\natural, \alpha}^p(I_R), \quad (10)$$

it is necessary and sufficient that  $R \geq 2r$ .

Note that if  $p = \infty$ , then equality (10) is not satisfied for any  $R > r$ . Indeed, an arbitrary function in  $M$  has a compact support on  $I_R$ , so a non-zero constant cannot be approximated with any precision in the space  $L_{\natural, \alpha}^\infty(I_R)$  by functions of  $M$ . For other results on approximation by shifts, see [6, Part 5, Chap. 2], [19, Chap. 2], and the references therein.

Theorem 1 also allow us to establish a new uniqueness theorem for solutions of the Cauchy problem related to the generalized Euler–Poisson–Darboux equation.

**Theorem 3.** *Let  $f \in C_{\natural}^2(\mathbb{R})$ ,  $\alpha > -1/2$ , and  $U$  be a classical solution of the Cauchy problem*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{(2\alpha + 1)}{x} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{(2\alpha + 3)}{t} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad x > 0, \quad t > 0 \\ U(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

For  $R > r > 0$ , the following statements hold.

1) If  $R \geq 2r$ , then  $U = 0$  on the triangle  $T_1 = \{0 < x < R, 0 < t < R - x\}$  if and only if

$$U(x, r) = 0 \quad \text{for } x \in (0, R - r) \quad \text{and} \quad U(r, t) = 0 \quad \text{for } t \in (0, R - r). \quad (11)$$

2) If  $R < 2r$ , then in order for condition (11) to be fulfilled, it is necessary and sufficient that  $U = 0$  on the triangle  $T_2 = \{2r - R < x < R, 0 < t < \min\{R - x, x + R - 2r\}\}$  and

$$\int_0^{2r-R} U(x, 0) d\mu_\alpha(x) = 0.$$

For various applications of the usual spherical means in  $\mathbb{R}^n$  to partial differential equations, see [6, Part 5, Chap. 6], [15, Part 2, Chap. 7, §7.5 B], [20, Chap. 4–7] and [21, Chap. 6, §13]. The validity of Theorems 1–3 will be established in §4 below. In §3 the auxiliary statements necessary to prove the main results are given.

### 3. Auxiliary Statements

As usual, the symbols  $\mathbb{N}$  and  $\mathbb{Z}_+$  denote the sets of all positive integers and nonnegative integers, respectively.

For  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$ , we put  $(\lambda)_m = \lambda(\lambda + 1) \dots (\lambda + m - 1)$  if  $m \in \mathbb{N}$ , and  $(\lambda)_0 = 1$ . The classical Gegenbauer polynomials  $C_n^\alpha(x)$  can be defined on the segment  $[-1, 1]$  by the equalities

$$C_n^\alpha(x) = \sum_{m=0}^n \frac{(\alpha)_m (\alpha)_{n-m}}{m!(n-m)!} \cos((n-2m) \arccos x), \quad \text{if } \alpha > -1/2, \quad \alpha \neq 0,$$

$$C_n^0(x) = \frac{2}{n}T_n(x), \quad \text{if } n \in \mathbb{N}, \quad C_0^0(x) = T_0(x) = 1,$$

where  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  is the Chebyshev polynomial of the first kind of degree  $n$  (see [22, Chap. 10, §§ 10.9 and 10.11]).

The following two statements are well-known theorems on the expansion of a function into a Fourier series of Gegenbauer and Chebyshev polynomials (see, for example, [23, Chap. 3 and 7]).

**Lemma 1.** *Let  $\alpha > -1/2$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $f \in C^\infty[-1, 1]$  and*

$$a_{n,\alpha}(f) = \frac{n!(n+\alpha)\Gamma(\alpha)}{\sqrt{\pi}(2\alpha)_n\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 f(x)C_n^\alpha(x)(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dx, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (12)$$

Then

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_{n,\alpha}(f)C_n^\alpha(x), \quad f'(x) = 2\alpha \sum_{n=1}^\infty a_{n,\alpha}(f)C_{n-1}^{\alpha+1}(x),$$

where the series converge absolutely and uniformly on  $[-1, 1]$ .

**Lemma 2.** *Let  $f \in C^\infty[-1, 1]$  and*

$$a_{n,0}(f) = \frac{2}{\pi(2 - \text{sign } n)} \int_{-1}^1 f(x) \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (13)$$

Then

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_{n,0}(f)T_n(x), \quad f'(x) = \sum_{n=1}^\infty n a_{n,0}(f)C_{n-1}^1(x),$$

where the series converge absolutely and uniformly on  $[-1, 1]$ .

Let us now establish additional information about the coefficients of such expansions for functions of a special kind depending on a parameter.

**Lemma 3.** *Let  $1 < R < 2$ ,  $t \in I_{R-1}$ ,  $f \in C^\infty(2-R, R)$  and*

$$f_n(t) = a_{n,\alpha}(F(\cdot, t)), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (14)$$

where

$$F(x, t) = f(\sqrt{1+2xt+t^2}), \quad x \in [-1, 1].$$

Then:

1) if  $\alpha > -1/2$ ,  $\alpha \neq 0$ , then

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+\alpha}(tf'_n(t) - nf_n(t)) - 2tf_{n+1}(t) \\ &= \frac{1}{n+\alpha+2}(tf'_{n+2}(t) + (n+2\alpha+2)f_{n+2}(t)), \quad n \in \mathbb{Z}_+; \end{aligned} \quad (15)$$

2) if  $\alpha = 0$ , then

$$\begin{aligned} & (2 - \text{sign } n)tf'_n(t) - nf_n(t) - 2(n+1)tf_{n+1}(t) \\ &= tf'_{n+2}(t) + (n+2)f_{n+2}(t), \quad n \in \mathbb{Z}_+; \end{aligned} \quad (16)$$

3) if  $\alpha > -1/2$  and  $f_0 = f_1 = 0$  on  $I_{R-1}$ , then  $f = 0$  on  $(2-R, R)$ .

◁ 1) It follows from the definition of the function  $F$  that

$$t \frac{\partial F}{\partial t} = (t+x) \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (17)$$

On the other hand, by virtue of Lemma 1 we have

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(t) C_n^\alpha(x), \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) C_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (18)$$

Substituting (18) into (17), we arrive at the equality

$$\sum_{n=0}^{\infty} t f'_n(t) C_n^\alpha(x) = 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (t+x) f_n(t) C_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (19)$$

We transform the left-hand side of (19) using the formula

$$C_n^{\lambda-1}(x) = \frac{\lambda-1}{n+\lambda-1} \left( C_n^\lambda(x) - C_{n-2}^\lambda(x) \right), \quad n \geq 2, \quad \lambda > \frac{1}{2}, \quad \lambda \neq 1 \quad (20)$$

(see [22, Chap. 10, § 10.9, formula (3.6)]), and the right-hand side using the relation

$$xC_n^\lambda(x) = \frac{(n+1)C_{n+1}^\lambda(x) + (n+2\lambda-1)C_{n-1}^\lambda(x)}{2(n+\lambda)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lambda \neq 0 \quad (21)$$

(see [22, Chap. 10, § 10.9, formula (13)]). Then changing the summation indices in the sums and collecting the coefficients for the polynomials  $C_n^{\alpha+1}(x)$ , we get (15).

2) This case is treated similarly to the previous one (see Lemma 2). In this case, instead of (20) and (21) we should use the formulas

$$T_n(x) = \frac{1}{2} (C_n^1(x) - C_{n-2}^1(x)), \quad n \geq 2,$$

$$xC_n^1(x) = \frac{1}{2} (C_{n+1}^1(x) + C_{n-1}^1(x)), \quad n \in \mathbb{N}$$

(see [22, Chap. 10, § 10.11, formula (3), (6)], and equality (21) for  $\lambda = 1$ ).

3) It is easy to see that if  $f_n = f_{n+1} = 0$  on  $I_{R-1}$  for some  $n \in \mathbb{Z}_+$ , then  $f_{n+2} = 0$  on  $I_{R-1}$ . Indeed, under the above condition relations (15) and (16) imply the equalities

$$f_{n+2}(0) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt} \left( |t|^{n+2\alpha+2} f_{n+2}(t) \right) = 0, \quad t \in I_{R-1}, \quad t \neq 0.$$

Hence, taking into account the fact that  $f_{n+2}(t)$  is bounded as  $t \rightarrow 0$  (see (14), (12) and (13)), we obtain  $f_{n+2}(t) \equiv 0$ . Thus, all coefficients  $f_0, f_1, f_2, \dots$  vanish on  $I_{R-1}$  and  $f = 0$  on  $(2-R, R)$ . ▷

Let  $\beta \in (-1, +\infty)$ ,

$$\mathbf{I}_\beta(z) = \frac{J_\beta(z)}{z^\beta},$$

where  $J_\beta$  is the Bessel function of the first kind of order  $\beta$ . It is well known (see [22, Chap. 7, § 7.9]) that the function  $\mathbf{I}_\beta$  has infinitely many zeros, all its zeros are real, simple and

$$\mathbf{I}_\beta(0) = \frac{1}{2^\beta \Gamma(\beta+1)}.$$

Denote by  $\mathcal{N}_\beta$  the set of all positive zeroes of  $\mathbf{I}_\beta$  numbered in ascending order.

The following statement is a special case of the Theorem 1 established by the authors in [16].

**Lemma 4.** *Let  $R > 1$ ,  $f \in V_{1,\alpha}(I_R) \cap C^\infty(I_R)$  and*

$$c_\lambda(f) = \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\lambda^4 \mathbf{I}_{\alpha+2}^2(\lambda)} \int_0^1 f(x) \mathbf{I}_\alpha(\lambda x) d\mu_\alpha(x), \quad \lambda \in \mathcal{N}_{\alpha+1}.$$

Then

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{\alpha+1}} c_\lambda(f) \mathbf{I}_\alpha(\lambda x), \quad x \in I_R,$$

where  $c_\lambda(f) = O(\lambda^{-N})$  as  $\lambda \rightarrow +\infty$  for any fixed  $N > 0$  and the series converges in the space  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

**Corollary 1.** *Let  $R > 1$ ,  $t \in I_{R-1}$  and  $f \in V_{1,\alpha}(I_R) \cap C^\infty(I_R)$ . Then*

$$\int_{-1}^1 f\left(\sqrt{1+2xt+t^2}\right) x(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dx = 0.$$

◁ For  $\lambda > 0$ , we have (see [22, Chap. 7, § 7.6, formula (14)])

$$\int_{-1}^1 \mathbf{I}_\alpha\left(\lambda\sqrt{1+2xt+t^2}\right) x(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dx = -\sqrt{\pi}2^\alpha \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \lambda^{2t} \mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda) \mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda t).$$

Hence by Lemma 4 we obtain the required statement. ▷

Let  $f \in \mathcal{D}'_q(I_R)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . We define the distribution  $f^\lambda \in \mathcal{D}'_q(I_{R/|\lambda|})$  by equality

$$\langle f^\lambda, \varphi \rangle = \frac{1}{|\lambda|^{2\alpha+2}} \left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}_q(I_{R/|\lambda|}). \tag{22}$$

For  $f \in L^{1,\text{loc}}_{q,\alpha}(I_R)$ , the distribution  $f^\lambda$  belongs to  $L^{1,\text{loc}}_{q,\alpha}(I_{R/|\lambda|})$  and  $f^\lambda(x) = f(\lambda x)$  (see (2)). In addition,

$$T_x^\alpha(f^\lambda) = (T_{\lambda x}^\alpha f)^\lambda. \tag{23}$$

**Lemma 5.** *Let  $f \in \mathcal{D}'_q(I_R)$ ,  $g \in \mathcal{E}'_q(\mathbb{R})$  and  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . If  $R|\lambda| > r(g)$ , then*

$$(f \star^\alpha g^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{|\lambda|^{2\alpha+2}} f^{\frac{1}{\lambda}} \star^\alpha g \quad \text{on } I_{R|\lambda|-r(g)}. \tag{24}$$

◁ For any functions  $\varphi \in \mathcal{D}_q(I_{R|\lambda|-r(g)})$ ,  $\psi \in \mathcal{D}_q(I_{R-r(g)/|\lambda|})$ , from (3) and (22) we have

$$\langle f^{\frac{1}{\lambda}} \star^\alpha g, \varphi \rangle = |\lambda|^{2\alpha+2} \left\langle f(x), \langle g(y), T_{\lambda x}^\alpha \varphi(y) \rangle \right\rangle, \tag{25}$$

$$\langle f \star^\alpha g^\lambda, \psi \rangle = \frac{1}{|\lambda|^{2\alpha+2}} \left\langle f(x), \langle g(y), T_x^\alpha \psi(y/\lambda) \rangle \right\rangle. \tag{26}$$

Using (22), (23) and (26), we find

$$\left\langle (f \star^\alpha g^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}, \varphi \right\rangle = |\lambda|^{2\alpha+2} \left\langle f \star^\alpha g^\lambda, \varphi^\lambda \right\rangle = \left\langle f(x), \langle g(y), T_{\lambda x}^\alpha \varphi(y) \rangle \right\rangle.$$

Comparing this relation with (25), we arrive at equality (24). ▷

**Corollary 2.** *In order that  $f \in W_{r,\alpha}(I_R)$ , it is necessary and sufficient that  $f^r \in W_{1,\alpha}(I_{R/r})$ .*

◁ Formula (24) shows that  $(f \star \delta_r)^r = f^r \star \delta_1$ ,  $(f \star \chi_r)^r = r^{2\alpha+2} f^r \star \chi_1$ . These relations yield the required statement. ▷

#### 4. Proof of Theorems 1–3

◁ PROOF OF THEOREM 1. In view of Corollary 2, we can assume that  $r = 1$ .

Let us prove assertion 2). Let  $1 < R < 2$  and  $f \in W_{1,\alpha}(I_R)$ . We fix  $\varepsilon \in (0, R - 1)$  and consider a function  $\omega_\varepsilon \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$  with the following properties:  $\text{supp } \omega_\varepsilon \subset \bar{I}_\varepsilon$ ,  $\omega_\varepsilon \geq 0$  and

$$\int_0^\varepsilon \omega_\varepsilon(x) d\mu_\alpha(x) = 1.$$

Since  $f \star \omega_\varepsilon \in W_{1,\alpha}(I_{R-\varepsilon}) \cap C^\infty(I_{R-\varepsilon})$ , from (6), (4) and Corollary 1 we find

$$\int_{-1}^1 (f \star \omega_\varepsilon) \left( \sqrt{1 + 2xt + t^2} \right) (1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} dx = 0, \quad t \in I_{R-1-\varepsilon},$$

$$\int_{-1}^1 (f \star \omega_\varepsilon) \left( \sqrt{1 + 2xt + t^2} \right) x(1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} dx = 0, \quad t \in I_{R-1-\varepsilon}.$$

These equations and the third statement in Lemma 3 show that  $f \star \omega_\varepsilon = 0$  on the interval  $(2 - R + \varepsilon, R - \varepsilon)$ . Letting  $\varepsilon \rightarrow 0$ , we conclude that  $f = 0$  on  $(2 - R, R)$  (see, for instance, [16, Lemma 1]). Therefore (see (5)),

$$\int_0^{2-R} f(x) d\mu_\alpha(x) = \int_0^1 f(x) d\mu_\alpha(x) = (f \star \chi_1)(0) = 0.$$

Conversely, let  $1 < R < 2$ ,  $f \in L_{1,\alpha}^{1,\text{loc}}(I_R)$ ,  $f = 0$  on  $(2 - R, R)$  and equality (7) holds for  $r = 1$ . First we show that  $f \in V_{1,\alpha}(I_R)$ . Let us transform  $f \star \chi_1$  using (5) and the formula

$$\gamma_\alpha(xy)^{2\alpha} T_x^\alpha f(y) = \int_{|x-y|}^{x+y} uf(u)k_\alpha(u, x, y) du, \quad (27)$$

where  $\gamma_\alpha = 2^{2\alpha-1}/c_\alpha$ ,

$$k_\alpha(u, x, y) = (y^2 - (u - x)^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} ((u + x)^2 - y^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$$

(see (4)). For  $0 < x < R - 1$ , we have

$$\gamma_\alpha x^{2\alpha} (f \star \chi_1)(x) = \int_0^1 \int_{|x-y|}^{x+y} yuf(u)k_\alpha(u, x, y) dudy.$$

Changing the order of integration and considering that  $f = 0$  on the interval  $(1 - x, 1 + x)$ , we obtain

$$\gamma_\alpha x^{2\alpha} (f \star^\alpha \chi_1)(x) = \int_0^{1+x} u f(u) \int_{|x-u|}^{\min\{1, x+u\}} y k_\alpha(u, x, y) dy du = \int_0^{1-x} u f(u) \int_{|x-u|}^{x+u} y k_\alpha(u, x, y) dy du.$$

The internal integral is calculated using the formulas

$$\int_a^b y (y^2 - a^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} (b^2 - y^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} dy = \frac{\Gamma^2(\alpha + \frac{1}{2})}{2\Gamma(2\alpha + 1)} (b^2 - a^2)^{2\alpha},$$

$$2^{2\alpha} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2\alpha + 1)$$

(see [22, Chap. 1, § 1.5.1, formula (13), and § 1.2, formula (15)]). Then

$$(f \star^\alpha \chi_1)(x) = \int_0^{1-x} f(u) d\mu_\alpha(u) = \int_0^{2-R} f(u) d\mu_\alpha(u) = 0.$$

Thereby,  $f \in V_{1,\alpha}(I_R)$ .

Next,

$$\int_{-1}^1 f\left(\sqrt{1 + 2xy + x^2}\right) (1 - y^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} dy = 0 \quad \text{for } x \in I_{R-1},$$

since the argument of the function  $f$  in the integral lies on the segment  $[1 - |x|, 1 + |x|] \subset (2 - R, R)$ , and  $f = 0$  on  $(2 - R, R)$ . Hence from (4) and (6) we see that  $f \in \mathcal{W}_{1,\alpha}(I_R)$ . Thus,  $f \in W_{1,\alpha}(I_R)$  and the second assertion of Theorem 1 is proved.

The first assertion follows immediately from assertion 2) and Lemma 4.  $\triangleright$

$\triangleleft$  PROOF OF THEOREM 2. Let  $R \geq 2r$  and assume that  $A$  is a linear continuous functional on  $L_{b,\alpha}^p(I_R)$  equal to zero on  $M$ . Owing to the Hanh-Banach theorem, to prove (10), it must be established that  $A = 0$ . By the theorem on the general form of linear continuous functionals on spaces  $L^p$  we have

$$A(g) = \int_{I_R} g(x) f(x) d\mu_\alpha(x), \quad g \in L_{b,\alpha}^p(I_R),$$

where  $f$  is a function of the class  $L_{b,\alpha}^q(I_R)$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$ . Then the condition  $A(T_t^\alpha(\chi_r)) = 0$ ,  $0 < t < R - r$ , formula (5) and commutativity of the Bessel convolution entail the relation  $(f \star^\alpha \chi_r)(x) = 0$ ,  $x \in I_{R-r}$ . Similarly, it follows from condition  $A(T_r^\alpha(\chi_t)) = 0$ ,  $0 < t < R - r$  and (6) that  $f \star^\alpha \delta_r = 0$  on  $I_{R-r}$ . Using the first assertion of Theorem 1 we obtain  $f = 0$ , whence  $A = 0$ .

If  $R < 2r$ , then there exists a non-zero function  $f \in W_{r,\alpha}(I_R) \cap C^\infty(\bar{I}_R)$  (see the second assertion of Theorem 1). Therefore, reasoning as above we conclude that equality (10) is not satisfied.  $\triangleright$

◁ PROOF OF THEOREM 3. It is well known (see [24, Chap. 4, §§ 4.4 and 4.5]) that

$$U(x, t) = 2(\alpha + 1) \int_0^1 T_x^\alpha f(ty) d\mu_\alpha(y) = \frac{2(\alpha + 1)}{t^{2(\alpha+1)}} \int_0^t (T_x^\alpha f)(y) d\mu_\alpha(y) = \frac{2(\alpha + 1)}{t^{2(\alpha+1)}} (f \star_\alpha \chi_t)(x).$$

This representation and formulas (5) and (6) show that condition (11) is satisfied if and only if  $f \in W_{r,\alpha}(I_R)$ . Hence, using Theorem 1 and (27) we obtain the required statement. ▷

## References

1. Brown, L., Schreiber, B. M. and Taylor, B. A. Spectral Synthesis and the Pompeiu problem, *Annales de l'Institut Fourier*, 1973, vol. 23, no. 3, pp. 125–154. DOI: 10.5802/aif.474.
2. Ramsey, T. and Weit, Y. Mean Values and Classes of Harmonic Functions, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1984, vol. 96, no. 3, pp. 501–505. DOI: 10.1017/S0305004100062435.
3. Berenstein, C. A. and Struppa, D. C. Complex Analysis and Convolution Equations, *Several Complex Variables, V. Encyclopedia of Mathematical Sciences*, New York, Springer-Verlag, 1993, vol. 54, pp. 1–108. DOI: 10.1007/978-3-642-58011-6\_1.
4. Bagchi, S. C. and Sitaram, A. The Pompeiu Problem Revisited, *L'Enseignement Mathématique*, 1990, vol. 36, no. 1–2, pp. 67–91.
5. Zalcman, L. Supplementary Bibliography to “A Bibliographic Survey of the Pompeiu Problem”, *Contemporary Mathematics. Radon Transform and Tomography*, 2001, vol. 278, pp. 69–74. DOI: 10.1090/conm/278/04595.
6. Volchkov, V. V. *Integral Geometry and Convolution Equations*, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2003, 454 p. DOI: 10.1007/978-94-010-0023-9.
7. Rudin, W. *Function Theory in the Unit Ball of  $\mathbb{C}^n$* , Berlin, Springer-Verlag, 1980, 449 p. DOI: 10.1007/978-3-540-68276-9.
8. Flatto, L. The Converse of Gauss Theorem for Harmonic Functions, *Journal of Differential Equations*, 1965, vol. 1, pp. 483–490.
9. Hansen, W. A Liouville Property for Spherical Averages in the Plane, *Mathematische Annalen*, 2001, vol. 319, pp. 539–551. DOI: 10.1007/PL00004448.
10. Smith, J. D. Harmonic Analysis of Scalar and Vector Fields in  $\mathbb{R}^n$ , *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1972, vol. 72, no. 3, pp. 403–416. DOI: 10.1017/S0305004100047241.
11. Ungar, P. Freak Theorem about Functions on a Sphere, *Journal of the London Mathematical Society* (2), 1954, vol. 29, pp. 100–103.
12. Zalcman, L. Offbeat Integral Geometry, *The American Mathematical Monthly*, 1980, vol. 87, no. 3, pp. 161–175. DOI: 10.2307/2321600.
13. Berenstein, C. A. and Zalcman, L. Pompeiu's Problem on Symmetric Spaces, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 1980, vol. 55, pp. 593–621. DOI: 10.1007/BF02566709.
14. Volchkov, V. V. Solution of the Support Problem for Several Function Classes, *Sbornik: Mathematics*, 1997, vol. 188, no. 9, pp. 1279–1294. DOI: 10.1070/sm1997v188n09ABEH000255.
15. Volchkov, V. V. and Volchkov, Vit. V. *Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*, Basel, Birkhäuser, 2013, 592 p. DOI: 10.1007/978-3-0348-0572-8.
16. Volchkov, Vit. V. and Krasnoschekikh, G. V. A Refinement of the Two-Radius Theorem on the Bessel–Kingman Hypergroup, *Mathematical Notes*, 2024, vol. 116, no. 2, pp. 223–237. DOI: 10.1134/S0001434624070174.
17. Selmi, B. and Nessibi, M. M. A Local Two Radii Theorem on the Chébli–Trimèche Hypergroup, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, vol. 329, no. 1, pp. 163–190. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.06.061.
18. Trimèche, K. *Generalized Wavelets and Hypergroups*, New York, CRC Press, 1997, 354 p.
19. Edwards, R. E. *Fourier Series. A Modern Introduction, Vol. II*, New York, Springer-Verlag, 1982, 370 p. DOI: 10.1007/978-1-4613-8156-3.
20. John, F. *Plane Waves and Spherical Means: Applied to Partial Differential Equations*, New York, Interscience Publishers, 1955, 190 p. DOI: 10.1007/978-1-4613-9453-2.
21. Courant, R. *Partial Differential Equations*, Berlin, Wiley-VCH Verlag GmbH, 1962, 830 p.
22. Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F. G. *Higher Transcendental Functions (Bateman Manuscript Project)*, Vol. I, II, New York, McGraw-Hill, 1953, 302 p.

23. Suetin, P. K. *Classical Orthogonal Polynomials*, Moscow, Nauka, 1979, 416 p. (in Russian).  
 24. Sitnik, S. and Shishkina, E. L. *The Method of Transformation Operators for Differential Equations with the Bessel Operator*, Moscow, Fizmatlit, 2019, 222 p. (in Russian).

Received August 13, 2024

GLEB V. KRASNOSCHEKIKH  
 Donetsk State University,  
 24 Universitetskaya St., Donetsk 283001, Russia,  
 Postgraduate Student of the Department of Mathematical Analysis  
 and Differential Equations  
 E-mail: wolverimred@mail.ru  
<https://orcid.org/0009-0005-2783-4333>

VITALIY V. VOLCHKOV  
 Donetsk State University,  
 24 Universitetskaya St., Donetsk 283001, Russia,  
 Head of the Department of Mathematical Analysis  
 and Differential Equations  
 E-mail: volna936@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0003-4274-0034>

Владикавказский математический журнал  
 2025, Том 27, Выпуск 2, С. 72–83

## ТЕОРЕМА ОБ ОДНОМ РАДИУСЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ БЕССЕЛЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Краснощеких Г. В.<sup>1</sup>, Волчков Вит. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Донецкий государственный университет,  
 Россия, 283001, Донецк, ул. Университетская, 24  
 E-mail: wolverimred@mail.ru, volna936@gmail.com

**Аннотация.** Хорошо известно, что всякая функция  $f \in C(\mathbb{R}^n)$ ,  $n \geq 2$ , имеющая нулевые интегралы по всем шарам и сферам фиксированного радиуса  $r$ , является тождественным нулем. В данной работе изучается подобное явление для шаровых и сферических средних относительно  $\alpha$ -свертки Бесселя. Пусть  $\alpha \in (-1/2, +\infty)$ ,  $L_{b,\alpha}^{1,loc}(-R, R)$  — класс четных локально суммируемых по мере  $d\mu_\alpha(x) = |x|^{2\alpha+1} dx$  функций на интервале  $(-R, R)$ ,  $f \star_\alpha g$  — свертка Бесселя функции  $f \in L_{b,\alpha}^{1,loc}(-R, R)$  и четного распределения  $g$  на  $\mathbb{R}$  с носителем на  $(-R, R)$ . Основной результат статьи дает решение задачи об инъективности оператора

$$f \rightarrow (f \star_\alpha \chi_r, f \star_\alpha \delta_r), \quad f \in L_{b,\alpha}^{1,loc}(-R, R), \quad 0 < r < R,$$

где  $\chi_r$  — индикатор отрезка  $[-r, r]$ ,  $\delta_r$  — четная мера, сопоставляющая четной непрерывной функции  $\varphi$  на  $\mathbb{R}$  число  $\varphi(r)$ . На основе техники, связанной с классическими ортогональными многочленами и недавними исследованиями авторов, показано, что при  $R \geq 2r$  ядро указанного оператора является нулевым, а при  $r < R < 2r$  состоит из функций  $f \in L_{b,\alpha}^{1,loc}(-R, R)$ , равных нулю на  $(2r - R, R)$  и имеющих нулевой интеграл (относительно меры  $d\mu_\alpha$ ) по промежутку  $(0, 2r - R)$ . Этот результат позволил получить новый критерий замкнутости системы обобщенных сдвигов Бесселя индикаторов отрезков в пространстве  $L_{b,\alpha}^p(-R, R)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , а также новую теорему единственности для решений задачи Коши обобщенного уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу.

**Ключевые слова:** обобщенный сдвиг, периодичность в среднем, многочлены Гегенбауэра, аппроксимация сдвигами, уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу.

**AMS Subject Classification:** 42A85, 41A30, 33C10, 35Q05.

**Образец цитирования:** *Krasnoschekikh G. V. and Volchkov Vit. V.* The one Radius Theorem for the Bessel Convolution Operator and its Applications // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 2.—С. 72–83 (in English). DOI: 10.46698/e5897-8783-0193-0.

УДК 517.98

DOI 10.46698/z3076-9333-9133-1

VECTOR LATTICE POWERS: CONTINUOUS AND  
MEASURABLE VECTOR FUNCTIONS<sup>#</sup>

Z. A. Kusraeva<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Vladikavkaz Scientific Centre of the RAS,  
1 Williams St., Village of Mikhailovskoye 363110, Russia  
E-mail: zali13@mail.ru

*To professor Anatoly F. Tedeev in case of his 70-th birthday*

**Abstract.** In the study of order properties of homogeneous polynomials in vector lattices two constructions are of fundamental importance: the symmetric positive tensor product and the vector lattice power. Both associate a canonical  $n$ -homogeneous polynomial with each Archimedean vector lattice, such that any other homogeneous polynomial of an appropriate class defined on the same vector lattice is the composition of the canonical polynomial with a linear operator. With this so called “linearization” in hand, various tools of the theory of positive linear operators can be used to study homogeneous polynomials. Thus, the problem of description of the Fremlin symmetric tensor products and the vector lattice powers for special vector lattices arises. The former enables one to study a large class of order bounded homogeneous polynomials, but has a very complicated structure; the latter has a much more transparent structure, but handles a narrower class of homogeneous polynomials, namely orthogonally additive ones. The purpose of this note is to describe the power of the vector lattice of continuous or Bochner measurable vector functions with values in a Banach lattice and to apply this result to the representation of homogeneous orthogonally additive polynomials.

**Keywords:** Banach lattice power, homogeneous polynomial, orthogonal additivity, Banach lattice, Bochner measurable function, continuous vector function.

**AMS Subject Classification:** 46A16, 46B42, 46G25, 47H60, 47L22.

**For citation:** Kusraeva, Z. A. Vector Lattice Powers: Continuous and Measurable Vector Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 2, pp. 84–92. DOI: 10.46698/z3076-9333-9133-1.

## 1. Introduction

Of fundamental importance in the study of order properties of homogeneous polynomials in vector lattices are two constructions: the *symmetric positive tensor product*, coming from Fremlin [1], and the *vector lattice power*, introduced by Boulabiar and Buskes [2]; see also the survey paper by Bu and Buskes [3]. Both associate a canonical  $n$ -homogeneous polynomial with each Archimedean vector lattice, such that any other homogeneous polynomial of an appropriate class defined on the same vector lattice is the composition of the canonical polynomial with a linear operator. Thanks to this “linearization” various tools of the theory of positive linear operators can be used to study homogeneous polynomials. Thus, the problem of describing the Fremlin symmetric tensor products and the vector lattice powers for

---

<sup>#</sup> The research was supported by Russian Science Foundation, project № 24-71-10094, <https://rscf.ru/en/project/24-71-10094/>.

special vector lattices arises. The former enables one to study a large class of order bounded homogeneous polynomials, but has a very complicated structure; the latter has a much more transparent structure, but handles a narrower class of orthogonally additive homogeneous polynomials, see [4–6].

The purpose of this note is to describe the power of the vector lattice of continuous or Bochner measurable vector functions with values in a Banach lattice and to apply this result to the representation of homogeneous orthogonally additive polynomials. We use the standard notation and terminology of Aliprantis and Burkinshaw [7] for the Banach lattice theory, Fremlin [8] for measure theory, Pei-Kee Lin [9] for spaces of measurable vector functions, and the survey paper by Bu and Buskes [3] for order properties of homogeneous polynomials. In the sequel all vector spaces are defined over the field of reals and all vector lattices are assumed to be Archimedean.

## 2. Vector Lattice Powers

Let  $X$  be a relatively uniformly complete vector lattice. Then for every positive homogeneous continuous function  $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  and any finite sequence  $x_1, \dots, x_N \in X$  the member  $\varphi(x_1, \dots, x_N) \in X$  can be correctly defined by using homogeneous functional calculus, see Definition 3.1 and Theorem 3.7 in [10]. In view of this, we can introduce new vector operations in  $X$  by putting  $x \oplus y = (x^p + y^p)^{1/p}$  and  $\lambda \otimes x = \lambda^{1/p}x$  with fixed  $0 < p \in \mathbb{R}$ , where  $x, y \in X$  and  $\lambda \in \mathbb{R}$ . In more details,  $x \oplus y = \varphi_p(x, y)$ , where  $\varphi_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  is defined by  $\varphi_p(r, t) = |u|^{1/p} \text{sign } u$  and  $u = |r|^p \text{sign } r + |t|^p \text{sign } t$ . Endowed with these new operations, the original order and lattice structure,  $X$  becomes a new vector lattice  $(X, \oplus, \otimes, \leq)$  denoted by  $X_{(p)}$ . For a positive integer  $p = n \in \mathbb{N}$  the vector lattice  $X_{(n)}$  is known as an  $n$ -power of  $X$  [2].

Assume now that  $(X, \|\cdot\|)$  is a quasi-Banach lattice (see [5, Definition 2.2]) and define the function  $\|\cdot\|_{(p)} : X_{(p)} \rightarrow \mathbb{R}$  by  $\|\iota_p(x)\|_{(p)} := \|x\|^p$  ( $x \in X$ ). If  $C$  is the quasi-triangle constant of the quasi-norm  $\|\cdot\|$ , then  $\|x \oplus y\|_{(p)} \leq 2^{|1-1/p|} C^p (\|x\|_{(p)} + \|y\|_{(p)})$  and hence  $\|\cdot\|_{(p)}$  is also a quasi-norm; moreover  $(X_{(p)}, \|\cdot\|_{(p)})$  is a quasi-Banach lattice. More details on quasi-Banach space see in [11].

DEFINITION 1. The pair  $(X_{(p)}, \|\cdot\|_{(p)})$  is called the  $p$ -concovification of  $X$ , see [12] and [4]. Define the canonical order isomorphism  $\iota_p : X \rightarrow X_{(p)}$  as the identity mapping of the ordered set  $(X, \leq)$ . If  $p := n \in \mathbb{N}$ , then the mapping  $j_p : X \rightarrow X_{(p)}$  defined as  $j_n(x) := \iota_n(x^+) + (-1)^n \iota_n(x^-)$  ( $x \in X$ ) is called the canonical polynomial of  $X$ .

**Lemma 1.** (1) The mapping  $\iota_p$  is an odd order isomorphism of  $X$  onto  $X_{(p)}$  such that for all  $x, y \in X$  and  $\lambda \in \mathbb{R}$  the relations hold:

$$\iota_p((x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}) = \iota_p(x) \oplus \iota_p(y), \quad \iota_p(\lambda^{\frac{1}{p}}x) = \lambda \otimes \iota_p(x).$$

(2) If  $X$  is a (quasi-)Banach lattice then  $X_{(p)}$  is a quasi-Banach lattice and  $\iota_p$  is a homeomorphism from  $X$  onto  $X_{(p)}$ .

(3) If  $n \in \mathbb{N}$  then the mapping  $j_n : X \rightarrow X_{(n)}$  is an orthogonally additive  $n$ -homogeneous polynomial.

◁ See [5, Proposition 3.6]. ▷

**Lemma 2.** Let  $X$  and  $Y$  be uniformly complete vector lattices with respective canonical order isomorphism  $\iota_X : X \rightarrow X_{(n)}$  and  $\iota_Y : Y \rightarrow Y_{(n)}$ . Given a lattice homomorphism  $S : X \rightarrow Y$ , the mapping  $\hat{S} := \iota_Y \circ S \circ \iota_X^{-1}$  is a lattice homomorphism from  $X_{(n)}$  to  $Y_{(n)}$ .

◁ Functional calculus in uniformly complete vector lattices commutes with any lattice homomorphism, see [5, Propositions 3.4 and 3.8]. ▷

It may happen that  $X_{(p)}$  is not a Banach lattice, even if  $X$  is. To avoid this pathology, the additional requirement of  $p$ -convexity of  $X$  is needed.

DEFINITION 2. A quasi-Banach lattice  $X$  is said to be  $p$ -convex with  $0 < p < \infty$  if there exists a constant  $C$  such that

$$\left\| \left( \sum_{k=1}^m |x_k|^p \right)^{1/p} \right\| \leq C \left( \sum_{k=1}^m \|x_k\|^p \right)^{1/p},$$

for every finite collection  $\{x_1, \dots, x_m\}$  in  $X$ .

**Lemma 3.** Let  $X$  be a (quasi-)Banach lattice and  $0 < p, q < \infty$ . If  $X$  is  $p$ -convex and  $p \geq q$  then  $X_{(q)}$  is a Banach lattice with respect to some equivalent norm.

◁ According to [5, Corollary 3.12],  $X$  is  $p$ -convex if and only if  $X_{(q)}$  is  $p/q$ -convex and if  $\alpha := p/q \geq 1$  then  $\alpha$ -convexity implies 1-convexity. By [5, Proposition 2.12] there exists a equivalent Banach lattice norm. ▷

DEFINITION 3. A mapping  $P : X \rightarrow Y$  between vector spaces is called a *homogeneous polynomial of degree  $n$*  (or  *$n$ -homogeneous polynomial*) if there exists a symmetric  $n$ -linear operator  $\check{P} : X^n \rightarrow Y$  such that  $P(x) = \check{P}(x, \dots, x)$  for all  $x \in X$ . (An  $n$ -linear operator  $\varphi : X^n \rightarrow Y$  is symmetric if  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$  for any permutation  $\sigma$  of  $\{1, \dots, n\}$ .)

DEFINITION 4. Assume that  $X$  is a vector lattice. An  $n$ -homogeneous polynomial  $P : X \rightarrow Y$  is called *orthogonally additive* whenever  $P(x + y) = P(x) + P(y)$  for any pair of disjoint (i. e.  $|x| \wedge |y| = 0$ ) members  $x, y$  of  $X$ .

DEFINITION 5. Recall that a *bornology* on a set is a cover of the set that is closed under finite unions and taking subsets. Members of a bornology are called *bounded sets*. A mapping between bornological spaces is labeled as *bounded* if it sends bounded sets into bounded sets. A bornology on a vector space is *convex* if it is stable under the formation of convex hulls. A *convex bornological vector space* is a vector space equipped with a convex bornology such that addition and scalar multiplication are both bounded.

Denote by  $\mathcal{P}_o^b(nX, Y)$  the space of bounded  $n$ -homogeneous orthogonally additive polynomials from  $X$  to  $Y$  and put  $\mathcal{L}^b(X, Y) = \mathcal{P}_o^b(1X, Y)$ . A vector lattice  $X$  is always considered with a bornology containing the totality  $\{[a, b] : a, b \in X\}$  of order bounded sets.

**Theorem 1.** Let  $X$  be a uniformly complete vector lattice and  $Y$  be a separated bornological vector space. Then for any bounded orthogonally additive  $n$ -homogeneous polynomial  $P : E \rightarrow Y$  there exists a unique bounded linear operator  $S : X_{(n)} \rightarrow Y$  such that  $P = T \circ j_n$ . Moreover,  $\mathcal{P}_o^b(nX, Y)$  and  $L^b(X_{(n)}, Y)$  are linearly isomorphic under the mapping  $T \mapsto T \circ j_n$ .

REMARK 1. The result was proved in the author's paper [13, Theorem 7] for the case of convex bornology; Ben Amor [14, Theorem 26] improved this result showing that the convexity assumption may be omitted. Some special cases of this result were obtained in [3, Theorems 4.3 and 5.4], [15, Theorem 2.4], [16, Theorem 3.3].

### 3. Spaces of Vector Functions

In this section we present the necessary information about spaces of strongly measurable and continuous vector functions.

In what follows,  $Q$  is an *extremally disconnected* compactum (i. e. compact Hausdorff topological space) and  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  is a measure space that is assumed to be *complete* and *strictly localizable* [8, Definition 211E], or, what is the same, to have the *direct sum property* [17, Section 0.6.4].

Denote by  $C_\infty(Q, X)$  the set of equivalence classes of continuous functions  $u$  that act from comeager subsets  $\text{dom}(u) \subset Q$  into  $X$ . Recall that a subset of  $Q$  is called *meager* if it is a countable union of nowhere dense subsets of  $Q$  and *comeager* if its complement is meager. Two vector-valued functions  $u$  and  $v$  are *equivalent* if  $u(q) = v(q)$  whenever  $q \in \text{dom}(u) \cap \text{dom}(v)$ . The set  $C_\infty(Q, X)$  is naturally endowed with the structure of a lattice ordered module over the  $f$ -algebra  $C_\infty(Q)$ . Observe that  $C_\infty(Q, X)$  can be represented also as the set of all extended continuous  $X$ -valued functions, see [18, 2.5.1].

**Lemma 4.** *Let  $Q$  be an extremally disconnected compact space and let  $X$  be a Banach lattice. For every finite collection  $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N \in C_\infty(Q, X)$  we have*

$$\varphi(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N) = \varphi(u_1(\cdot), \dots, u_N(\cdot))^\sim,$$

*i.e. there exists a comeager subset  $Q_0 \subset Q$  such that  $Q_0 \subset \text{dom}(u_i)$  for all  $i := 1, \dots, N$ , and  $\varphi(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N)$  is the equivalence class of the continuous function  $q \mapsto \varphi(u_1(q), \dots, u_N(q))$  ( $q \in Q_0$ ).*

◁ See [19, Proposition 4.3]. ▷

Let  $X$  be a Banach lattice and let  $\mathcal{L}^0(\Omega, X) := \mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu, X)$  stand for the set of all Bochner measurable functions defined almost everywhere on  $\Omega$  with values in  $X$ . Denote by  $L^0(\Omega, X) := \mathcal{L}^0(\Omega, X) / \sim$  the space of all equivalence classes (of almost everywhere equal) functions from  $\mathcal{L}^0(\Omega, X)$ . The equivalence class of a measurable vector function  $u \in \mathcal{L}^0(\Omega, X)$  will be denoted by  $\tilde{u}$ . Define in addition, a scalar multiplication and ordering in  $\mathcal{L}^0(\Omega, X)$  pointwise, thereby making  $L^0(\Omega, X)$  into a vector lattice. A cone of positive vector functions  $L^0(\Omega, X)_+$  consists of  $\tilde{u} \in L^0(\Omega, X)$  such that  $u(\omega) \in X_+$  for almost all  $\omega \in \Omega$ .

If  $\tilde{u} \in L^0(\Omega, X)$ , then  $\omega \mapsto \|u(\omega)\|$  ( $\omega \in \Omega$ ) is a scalar measurable function whose equivalence class is denoted by  $|\tilde{u}| \in L^0(\Omega)$ .

DEFINITION 6. For an order ideal  $E$  in  $C_\infty(Q)$  (resp., in  $L^0(\Omega)$ ), assign by definition

$$E(X) := \{u \in C_\infty(Q, X) \text{ (resp., } u \in L^0(\Omega, X)) : |u| \in E\}.$$

If, in addition,  $(E, \|\cdot\|_E)$  is a Banach lattice, then  $E(X)$  is endowed with the *mixed norm* defined as  $\|u\| := \||u|\|_E$ .

If  $E = L^p(\Omega)$ , then we write  $L^p(\Omega, X)$  instead of  $E(X)$ .

**Lemma 5.** *The vector lattice of continuous or measurable vector functions  $E(X)$  is relatively uniformly complete. If, in addition,  $E$  is a Banach lattice, then  $E(X)$  is also a Banach lattices.*

◁ Clearly, if  $\tilde{u} \in L^0(\Omega, E)$  then the modulus  $|\tilde{u}|$  of  $\tilde{u}$  coincides with the equivalence class of the vector function  $\omega \mapsto |u(\omega)|$  ( $\omega \in \Omega$ ). ▷

A complete measure space  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  is strictly localizable if and only if there exists a linear lifting of  $L^\infty(\mu)$ , see [8, Sections 341K and 363X(e)]. In this event the quotient algebra  $B(\Omega) := \Sigma / \mu^{-1}$  is complete and its Stone space  $Q$  (whose clopen algebra  $\text{Clop}(Q)$  is isomorphic to  $B(\Omega)$ ) is extremally disconnected. For a fixed lifting  $\rho$  of  $L^\infty(\mu)$  there exists a Borel measurable mapping  $\tau : \Omega \rightarrow Q$ , called the *canonical embedding*, such that  $\rho = \tau^{-1} \circ \sigma$ , where  $\sigma : B(\Omega) \rightarrow \text{Clop}(Q)$  is the *Stone representation*, see [17, § 0.6.6 and 0.7.5].

The preimage  $\tau^{-1}(V)$  of any meager set  $V \subset Q$  is measurable and  $\mu$ -negligible. Denote by  $\tau^*$  the mapping which sends each function  $v \in C_\infty(Q, X)$  to the equivalence class of the measurable function  $v \circ \tau$ . The mapping  $\tau^*$  is a linear and order isomorphism of  $C_\infty(Q, X)$  onto  $L^0(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ .

**Lemma 6.** *There exists a linear and order isomorphism  $\mathbb{S}$  from  $L^0(\Omega, X)$  onto  $C_\infty(Q, X)$ , the Stonian transform of  $L^0(\Omega, X)$ . Moreover,  $[\tilde{u}] = (\mathbb{S}(\tilde{u}) \circ \tau)^\sim$  for every  $\tilde{u} \in L^0(\Omega, X)$ .*

$\triangleleft$  Denote by  $\hat{\tau}$  the mapping which sends each  $\tilde{v} \in C_\infty(Q, X)$  to the equivalence class  $(v \circ \tau)^\sim \in L^0(\Omega, X)$ . Then  $\mathbb{S} = \hat{\tau}^{-1}$  and  $\tilde{u} = (\mathbb{S}(\tilde{u}) \circ \tau)^\sim$  for all  $\tilde{u} \in L^0(\Omega, X)$ . Details can be found in [17, Theorem 4.2.2].  $\triangleright$

#### 4. Main Results

Since both the continuous and measurable versions of the vector lattice  $E(X)$  are uniformly complete, the expression  $\varphi(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N)$  is well defined for any finite sequence  $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N \in E(X)$  and every positively homogeneous continuous function  $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ . If  $E$  is a Banach lattice then  $E(X)$  and  $E_{(n)}(X_{(n)})$  are equipped with respective mixed norms  $\|\cdot\|$  and  $\|\cdot\|'$  (Definition 6), while  $E(X)_{(n)}$  is considered with the power norm  $\|\cdot\|_{(n)}$  (Definition 1).

**Theorem 2.** *Let  $E$  be an order dense ideal of  $C_\infty(Q)$  and let  $X$  be a  $p$ -convex Banach lattice with  $p \geq n$ . Denote by  $\iota_E$ ,  $\iota_X$ , and  $\hat{\iota}_n$  the canonical order isomorphisms of  $E$ ,  $X$  and  $E(X)$  onto their respective  $n$ -powers. Then there exists a  $|\cdot|$ -preserving lattice isomorphism  $\varkappa$  from  $E(X)_{(n)}$  onto  $E_{(n)}(X_{(n)})$  such that  $\varkappa(\hat{\iota}_n(\tilde{u})) = (\iota_X \circ u)^\sim$  for all  $\tilde{u} \in E(X)$ . If, in addition,  $E$  is a  $q$ -convex Banach lattice with  $q \geq n$ , then  $\varkappa$  is an isometric lattice isomorphism of Banach lattices  $E(X)_{(n)}$  onto  $E_{(n)}(X_{(n)})$ .*

$\triangleleft$  Assume first that  $E$  is an order dense ideal of  $C_\infty(Q)$ . Define a mapping  $\varkappa$  from  $E(X)_{(n)}$  onto  $E_{(n)}(X_{(n)})$  by letting  $\varkappa(v)$  be the equivalence class of the vector-function  $\iota_X \circ u$  whenever  $v = \hat{\iota}_n(\tilde{u})$  and  $\tilde{u} \in E(X)$ . Observe that the vector-function  $u : \text{dom}(u) \rightarrow X$  is continuous if and only if so is the vector-function  $\iota_X \circ u : \text{dom}(u) \rightarrow X_{(n)}$  as  $\iota_X$  is a homeomorphism from  $X$  onto  $X_{(n)}$ , see Lemma 1. For the same reason,  $u_1(q) \leq u_2(q)$  for all  $q \in Q_0 := \text{dom}(u_1) \cap \text{dom}(u_2)$  if and only if  $\iota_X \circ u_1(q) \leq \iota_X \circ u_2(q)$  for all  $q \in Q_0$  and hence  $u_1$  and  $u_2$  are equivalent if and only if so are  $\iota_X \circ u_1$  and  $\iota_X \circ u_2$ . It follows that  $\varkappa$  is a correctly defined order preserving bijection from  $C_\infty(Q, X)_{(n)}$  into  $C_\infty(Q, X_{(n)})$ . In fact,  $\varkappa$  is surjective, since if  $\tilde{v} \in C_\infty(Q, X_{(n)})$  for some continuous  $v : \text{dom}(v) \rightarrow X_{(n)}$  and  $u := \iota_X^{-1} \circ v$ , then by definition  $\tilde{u} \in C_\infty(Q, X)$  coincides with the equivalence class of  $\iota_X \circ u = v$ , i. e.  $\varkappa(\hat{\iota}_n \tilde{u}) = \tilde{v}$ .

Prove that  $\varkappa$  is linear. Let  $v_1 = \hat{\iota}_n(\tilde{u}_1)$  and  $v_2 = \hat{\iota}_n(\tilde{u}_2)$  for some  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in C_\infty(Q, X)$ . By definition,  $\varkappa(v_1 \oplus v_2)$  is the equivalence class of the vector-function  $\iota_X \circ u$  with  $\tilde{u} = \hat{\iota}_n^{-1}(v_1 \oplus v_2)$ , so that

$$\hat{\iota}_n(\tilde{u}) = v_1 \oplus v_2 = \hat{\iota}_n(\tilde{u}_1) \oplus \hat{\iota}_n(\tilde{u}_2) = \hat{\iota}_n((\tilde{u}_1^n + \tilde{u}_2^n)^{1/p}).$$

The last equality is ensured by Lemma 1. It follows that  $\tilde{u} = (\tilde{u}_1^n + \tilde{u}_2^n)^{1/n}$  and hence, by Lemma 4,  $\tilde{u}$  is the equivalence class of the vector-function  $q \mapsto (\iota_X \circ u_1)(q) \oplus (\iota_X \circ u_2)(q)$ . The latter coincides with  $\varkappa(v_1) \oplus \varkappa(v_2)$ , since the sum in  $C_\infty(Q, X_{(n)})$  is defined pointwise, i. e.  $\varkappa(v_1) \oplus \varkappa(v_2)$  is the equivalence class of the vector-function  $q \mapsto \iota_X(u_1(q)) \oplus \iota_X(u_2(q))$  ( $q \in Q$ ); so  $\varkappa(v_1 \oplus v_2) = \varkappa(v_1) \oplus \varkappa(v_2)$ .

Now, if  $\lambda \in \mathbb{R}$  and  $v = \hat{\iota}_n(\tilde{u})$  for some  $\tilde{u} \in C_\infty(Q, X)$  and denote by  $\otimes$  the scalar multiplication in  $X_{(n)}$ ,  $C_\infty(Q, X)_{(n)}$ , and  $C_\infty(Q, X_{(n)})$ . Using again Lemma 1, we see that  $\lambda \otimes \varkappa(v)$  is the equivalence class of the vector function  $q \mapsto \lambda \otimes \iota_X(u(q)) = \iota_X(\lambda^{1/n} u(q))$ . At the same time,  $\lambda \otimes v = \lambda \otimes \hat{\iota}_n(\tilde{u}) = \hat{\iota}_n(\lambda^{1/n} \tilde{u})$  and  $\varkappa(\lambda \otimes v)$  is the equivalence class of the same vector-function by definition, so that  $\varkappa(\lambda \otimes v) = \lambda \otimes \varkappa(v)$ .

It remains to verify that  $\varkappa$  sends  $E(X)_{(n)}$  onto  $E_{(n)}(X_{(n)})$ . Taking the definition of the  $E$ -valued norm into account, we see that for  $\tilde{u} \in E(X)$  the following relations hold for all  $q$

in some comeager subset of  $Q$ :

$$\|\varkappa(\hat{i}_n(\tilde{u}))\|_{(n)}(q) = \|\iota_X u(q)\|_{(n)} = \|u(q)\|^n = \|\tilde{u}\|^n(q).$$

Hence  $\|\tilde{u}\| \in E$  if and only if  $\|\tilde{u}\|^n \in E_{(n)}$  which amounts to saying that  $\tilde{u} \in E(X)$  if and only if  $\tilde{u}^n \in E_{(n)}(X_{(n)})$ . Therefore,  $\varkappa$  is a norm preserving lattice isomorphism from  $E(X)_{(n)}$  onto  $E_{(n)}(X_{(n)})$  as claimed. If  $E$  is a  $q$ -convex Banach lattice and  $q \geq n$ , then for  $\tilde{u} \in E(X)$  and  $v = \hat{i}_n(\tilde{u})$  we have

$$\|\varkappa(v)\|'_{(n)} = \|\|\varkappa(v)\|\|_{E_{(n)}} = \|\|\tilde{u}\|^n\|_{E_{(n)}} = \|\iota_E(\|\tilde{u}\|)\|_E = \|\tilde{u}\| = \|\|\hat{i}_n(\tilde{u})\|\| = \|v\|_{(n)}.$$

Thus, we have proved that  $\varkappa$  is an isometric lattice isomorphism of Banach lattices  $E(X)_{(n)}$  and  $E_{(n)}(X_{(n)})$ .  $\triangleright$

**Theorem 3.** *Let  $\hat{E}$  be an order dense ideal of  $L^0(\Omega)$  and  $\hat{i}_n$  the canonical order isomorphisms of  $\hat{E}(X)$  onto  $\hat{E}(X)_{(n)}$ , whilst  $X$  and  $\iota_X$  be the same as in Theorem 2. Then there exists a  $\|\cdot\|$ -preserving lattice isomorphism  $\hat{\varkappa}$  from  $\hat{E}(X)_{(n)}$  onto  $\hat{E}_{(n)}(X_{(n)})$  such that  $\hat{\varkappa}(\hat{i}_n(\tilde{u})) = (\iota_X \circ u)^\sim$  for all  $\tilde{u} \in \hat{E}(X)$ . If, in addition,  $\hat{E}$  is a  $q$ -convex Banach lattice with  $q \geq n$ , then  $\hat{\varkappa}$  is an isometric lattice isomorphism of  $\hat{E}(X)_{(n)}$  onto  $\hat{E}_{(n)}(X_{(n)})$ .*

$\triangleleft$  Suppose that  $\hat{E}$  is an order dense ideal of the vector lattice of measurable functions  $L^0(\Omega)$ . Observe first that the vector-function  $u : \Omega \rightarrow X$  is measurable if and only if so is the vector-function  $\iota_X \circ u : \Omega \rightarrow X_{(n)}$  and two measurable functions  $u_1, u_2 : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$  are equivalent if and only if so are  $\iota_X \circ u_1$  and  $\iota_X \circ u_2$ , as  $\iota_X$  is a homeomorphism from  $X$  onto  $X_{(n)}$ , see Lemma 1. It follows that we can define correctly an order preserving bijection  $\hat{\varkappa}$  from  $L^0(\Omega, X)_{(n)}$  onto  $L^0(\Omega, X_{(n)})$  by setting  $\hat{\varkappa}(v)$  equal to the equivalence class of the vector-function  $\iota_X \circ u$  whenever  $v = \hat{i}_n(\tilde{u})$  with  $\tilde{u} \in L^0(\Omega, X)$ .

To verify that  $\hat{\varkappa}$  has the required properties, we use Lemma 6, according to which there are lattice isomorphisms  $S : L^0(\Omega) \rightarrow C_\infty(Q)$ ,  $\mathbb{S} : L^0(\Omega, X) \rightarrow C_\infty(Q, X)$  and  $\mathbb{S}_n : L^0(\Omega, X_{(n)}) \rightarrow C_\infty(Q, X_{(n)})$  such that  $\|\mathbb{S}\tilde{u}\| = S(\|\tilde{u}\|)$  and  $\|\mathbb{S}_n\tilde{v}\| = S(\|\tilde{v}\|)$  for all  $\tilde{u} \in L^0(\Omega, X)$  and  $\tilde{v} \in L^0(\Omega, X_{(n)})$ . Clearly,  $E := S(\hat{E})$  is an order dense ideal in  $C_\infty(Q)$  and  $S(\hat{E}_{(n)}) = E_{(n)}$ . Moreover,  $\|\tilde{u}\| \in \hat{E}$  if and only if  $\|\mathbb{S}\tilde{u}\| \in E$  and  $\|\tilde{u}\| \in \hat{E}_{(n)}$  if and only if  $\|\mathbb{S}(\tilde{u})\| \in E_{(n)}$ . It follows that  $\mathbb{S}$  is a lattice isomorphism from  $\hat{E}(X)$  onto  $E(X)$  and  $\mathbb{S}_n$  is a lattice isomorphism from  $\hat{E}_{(n)}(X_{(n)})$  onto  $E_{(n)}(X_{(n)})$ . By Lemma 2,  $\hat{\mathbb{S}}$  is a lattice homomorphism from  $\hat{E}(X)_{(n)}$  onto  $E(X)_{(n)}$ .

Let  $\varkappa$  be a lattice isomorphism from  $E(X)_{(n)}$  onto  $E_{(n)}(X_{(n)})$ , whose existence is guaranteed by Theorem 2. To complete the proof, it suffices to show that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccccc} E(X) & \xrightarrow{\hat{i}_n} & E(X)_{(n)} & \xrightarrow{\varkappa} & E_{(n)}(X_{(n)}) \\ \mathbb{S} \uparrow & & \hat{\mathbb{S}} \uparrow & & \mathbb{S}_n \uparrow \\ \hat{E}(X) & \xrightarrow{\hat{i}_n} & \hat{E}(X)_{(n)} & \xrightarrow{\hat{\varkappa}} & \hat{E}_{(n)}(X_{(n)}) \end{array}$$

The left square is commutative due to Lemma 2. To prove the commutativity of the right square, take  $\tilde{u} \in \hat{E}(X)$  and  $\tilde{v} \in E(X)$  with  $\tilde{v} = \mathbb{S}(\tilde{u})$  or, what is the same,  $\tilde{u} = (v \circ \tau)^\sim$ .

By sequence using of Lemma 2, Definition of  $\mathbb{S}$ ,  $\varkappa$ ,  $\mathbb{S}_n^{-1}$ , and  $\hat{\varkappa}$  we deduce

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_n^{-1} \circ \varkappa \circ \hat{\mathbb{S}}(\hat{i}_n(\tilde{u})) &= \mathbb{S}_n^{-1} \circ \varkappa \circ \hat{i}_n \circ \mathbb{S}(\tilde{u}) = \mathbb{S}_n^{-1} \circ \varkappa \circ \hat{i}_n(\tilde{v}) \\ &= \mathbb{S}_n^{-1}((\iota_X \circ v)^\sim) = (\iota_X \circ v \circ \tau)^\sim = (\iota_X \circ u)^\sim = \hat{\varkappa}(\hat{i}_n(\tilde{u})). \end{aligned}$$

It follows that  $\hat{\varkappa} = \mathbb{S}_n^{-1} \circ \varkappa \circ \hat{\mathbb{S}}$ , whence the required properties of  $\hat{\varkappa}$ .  $\triangleright$

**DEFINITION 7.** Let  $X$  be a Banach lattice with the canonical polynomial  $J_n : X \rightarrow X_{(n)}$ . Given a vector-function  $\tilde{u} \in L^0(\Omega, X)$  or  $\tilde{u} \in C_\infty(Q, X)$ , define  $\tilde{u}^n \in L^0(\Omega, X_{(n)})$  or  $\tilde{u}^n \in C_\infty(Q, X_{(n)})$  as  $\tilde{u}^n := (u^n)^\sim$  with  $u^n := J_n \circ u : \Omega \rightarrow X_{(n)}$ . The definition is correct, as  $J_n \circ u$  is Bochner measurable or continuous whenever so is  $u$ , see Lemma 1 and Definition 1.

**Theorem 4.** Assume that  $E$  is an order dense ideal of  $L^0(\Omega)$  or  $C_\infty(Q)$ . Let  $X$  be a uniformly complete vector lattice and let  $Y$  be a separated bornological space. Then for any bounded orthogonally additive  $n$ -homogeneous polynomial  $P : E(X) \rightarrow Y$  there exists a unique bounded linear operator  $T : E_{(n)}(X_{(n)}) \rightarrow Y$  such that the representation  $P(\tilde{u}) = T(\tilde{u}^n)$  for all  $\tilde{u} \in E(X)$ . Moreover,  $\mathcal{P}_o^b(nE(X), Y)$  and  $\mathcal{L}^b(E_{(n)}(X_{(n)}), Y)$  are linearly isomorphic under the mapping  $T \mapsto T((\cdot)^n)$ .

$\triangleleft$  We restrict ourselves to the continuous case  $E \subset C_\infty(Q)$ , since the measurable case  $E \subset L^0(\Omega)$  is considered in quite a similar way. Assume that  $\varkappa$  and  $\hat{i}_n$  are the same as in Theorem 2. By Theorem 1, there exist a bounded linear operator  $S : E(X)_{(n)} \rightarrow Y$  such that  $P(\tilde{u}) = S \circ \hat{j}_n(\tilde{u})$  for all  $\tilde{u} \in E(X)_n$ , where  $\hat{j}_n$  is a canonical polynomial of the vector lattice  $E(X)$ , i. e.  $\hat{j}_n(f) := \hat{i}_n(f^+) + (-1)^n \hat{i}_n(f^-)$ . If  $J_n : X \rightarrow X_{(n)}$  stand for the canonical polynomial of  $X$ , then for every  $\tilde{u} \in E(X)$  we have

$$\begin{aligned} \varkappa(\hat{j}_n(\tilde{u})) &= \varkappa(\hat{i}_n(\tilde{u}^+)) + (-1)^n \varkappa(\hat{i}_n(\tilde{u}^-)) = (\iota_X \circ u^+(\cdot))^\sim + (-1)^n (\iota_X \circ u^-(\cdot))^\sim \\ &= (J_n(u^+(\cdot)))^\sim + J_n((( -1)^n u^-(\cdot)))^\sim = (J_n \circ u)^\sim = \tilde{u}^n. \end{aligned}$$

It remains to put  $T := S \circ \varkappa^{-1}$  and observe that  $P(\tilde{u}) = S \circ \hat{j}_n(\tilde{u}) = T \circ \varkappa \hat{j}_n(\tilde{u}) = T(\tilde{u}^n)$ , as required.  $\triangleright$

## References

1. Fremlin, D. H. Tensor Products of Banach Lattices, *Mathematische Annalen*, 1974, vol. 211, pp. 87–106. DOI: 10.1007/BF01344164.
2. Boulabiar, K. and Buskes, G. Vector Lattice Powers:  $f$ -Algebras and Functional Calculus, *Communications in Algebra*, 2006, vol. 34, no. 4, pp. 1435–1442. DOI: 10.1080/00927870500454885.
3. Bu, Q. and Buskes, G. Polynomials on Banach Lattices and Positive Tensor Products, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, vol. 388, no. 2, pp. 845–862. DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.10.001.
4. Troitsky, V. G. and Zabeti, O. Fremlin Tensor Products of Concavifications of Banach Lattices, *Positivity*, 2014, vol. 18, no. 1, pp. 191–200. DOI: 10.1007/s11117-013-0239-3.
5. Kusraeva, Z. A. Powers of Quasi-Banach Lattices and Orthogonally Additive Polynomials, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2018, vol. 458, no. 1, pp. 767–780. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.09.019.
6. Kusraeva, Z. A. Order Properties of Homogeneous Orthogonally Additive Polynomials, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2021, vol. 23, no. 3, pp. 91–112 (in Russian). DOI: 10.46698/10779-9998-4272-b.
7. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. *Positive Operators* New York, Academic Press, 1985.
8. Fremlin, D. H. *Measure Algebras, Broad Foundations. Vol. 2*, Colchester, Torres Fremlin, 2001.
9. Lin, P.-K. *Köthe-Bochner Function Spaces*, Springer, 2004.
10. Buskes, G., de Pagter, B. and van Rooij, A. Functional Calculus on Riesz Spaces, *Indagationes Mathematicae, N. S.*, 1991, vol. 2, no. 4, pp. 423–436. DOI: 10.1016/0019-3577(91)90028-6.

11. Maligranda, L. Type, Cotype and Convexity Properties of Quasi-Banach Spaces, *Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces*, Yokohama, Yokohama Publ., 2004, pp. 83–120.
12. Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces*, Springer-Verlag, Berlin etc, 1979, 243 p.
13. Kusraeva, Z. A. Representation of Orthogonally Additive Polynomials, *Siberian Mathematical Journal*, 2011, vol. 52, no. 2, pp. 248–255. DOI: 10.1134/S003744661102008X.
14. Ben Amor, F. Orthogonally Additive Homogenous Polynomials on Vector Lattices, *Communications in Algebra*, 2015, vol. 43, no. 3, pp. 1118–1134. DOI: 10.1080/00927872.2013.865038.
15. Benyamini, Y., Lassalle, S. and Llavona, J. G. Homogeneous Orthogonally Additive Polynomials on Banach Lattices, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 2006, vol. 38, no. 3, pp. 459–469. DOI: 10.1112/S0024609306018364.
16. Ibort, A., Linares, P. and Llavona, J. G. A Representation Theorem for Orthogonally Additive Polynomials on Riesz Spaces, *Revista Matemática Complutense*, 2012, vol. 25, pp. 21–30. DOI: 10.1007/s13163-010-0053-4.
17. Gutman, A. E. Banach Bundles in the Theory of Lattice-Normed Spaces. II. Measurable Banach Bundles, *Siberian Advances in Mathematics*, 1993, vol. 3, no. 4, pp. 8–40.
18. Gutman, A. E. Banach Bundles in the Theory of Lattice-Normed Spaces. I. Continuous Banach Bundles, *Siberian Advances in Mathematics*, 1993, vol. 3, no. 3, p. 1–55.
19. Kusraev, A. G. Functional Calculus and Minkowski Duality on Vector Lattices, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2009, vol. 11, no. 2, pp. 31–42.

Received May 5, 2025

ZALINA A. KUSRAEVA  
Vladikavkaz Scientific Centre of the RAS,  
1 Williams St., Village of Mikhailovskoye 363110, Russia,  
Leading Researcher  
E-mail: zali13@mail.ru  
<https://orcid.org/0000-0002-8817-1888>

Владикавказский математический журнал  
2025, Том 27, Выпуск 2, С. 84–92

## СТЕПЕНЬ ВЕКТОРНОЙ РЕШЕТКИ: НЕПРЕРЫВНЫЕ И ИЗМЕРИМЫЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Кусраева З. А. <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Владикавказский научный центр РАН,  
Россия, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1  
E-mail: zali13@mail.ru

**Аннотация.** В исследовании порядковых свойств однородных полиномов, действующих в векторных решетках, две конструкции имеют основополагающее значение: симметричное положительное тензорное произведение и степень векторной решетки. Обе эти конструкции связывают с архимедовой векторной решеткой канонический  $n$ -однородный полином, так что любой другой однородный полином соответствующего класса, определенный на той же векторной решетке, является композицией этого канонического полинома с линейным оператором. Благодаря этой «линеаризации» можно использовать различные инструменты теории положительных линейных операторов для изучения однородных полиномов. Таким образом, возникает задача описания симметричных тензорных произведений Фремлина и степеней векторной решетки для специальных векторных решеток. Первое позволяет исследовать широкий класс порядково ограниченных однородных полиномов, но имеет очень сложную структуру; второе обладает гораздо более прозрачной структурой, но охватывает при этом более узкий класс однородных

полиномов, а именно: ортогонально аддитивных однородных полиномов. Целью настоящей заметки является описание степени векторной решетки непрерывных или измеримых по Бохнеру вектор-функций со значениями в банаховой решетке и применение этого результата к представлению однородных ортогонально аддитивных полиномов.

**Ключевые слова:** степень банаховой решетки, однородный полином, ортогональная аддитивность, банахова решетка, измеримость по Бохнеру, непрерывная вектор-функция.

**AMS Subject Classification:** 46A16, 46B42, 46G25, 47H60, 47L22.

**Образец цитирования:** Kusraeva Z. A. Vector Lattice Powers: Continuous and Measurable Vector Functions // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 2.—С. 84–92 (in English). DOI: 10.46698/z3076-9333-9133-1.

УДК 517.98

DOI 10.46698/q4030-9541-4914-r

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДНИХ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА  
ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ,  
ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ

А. А. Нурмагомедов<sup>1</sup>, М. М. Шихшинатова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Дагестанский государственный аграрный университет,  
Россия, 367032, Махачкала, пр. М. Гаджиева, 180;

<sup>2</sup> Национальный исследовательский Московский государственный  
строительный университет, Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26

E-mail: alimn@mail.ru, shichmum\_2006@mail.ru

**Аннотация.** Пусть  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  и  $T_N = \{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}$ , где  $x_j = (t_j + t_{j+1})/2$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$  — произвольные системы различных точек отрезка  $[-1, 1]$ . В данной работе для произвольной непрерывной на отрезке  $[-1, 1]$  функции  $f(x)$  построены средние типа Валле-Пуссена  $V_{n,m,N}(f, x)$  для дискретных сумм Фурье  $S_{n,N}(f, x)$  по системе многочленов, образующих ортонормированную систему на неравномерных сетках  $T_N$  с весом  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ . Исследуются аппроксимативные свойства построенных  $V_{n,m,N}(f, x)$  порядка  $n + m \leq N - 1$  в пространстве непрерывных функций  $C[-1, 1]$ . А именно доказано, что средние Валле-Пуссена  $V_{n,m,N}(f, x)$  при  $\frac{n}{m} \asymp 1$ ,  $n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}$  ( $\lambda > 0$ ),  $\delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} \Delta t_j$ , равномерно ограничены, как семейство линейных операторов, действующих в пространстве  $C[-1, 1]$ . Кроме того, как следствие полученного результата установлен порядок приближения непрерывной функции  $f(x)$  средними Валле-Пуссена  $V_{n,m,N}(f, x)$  в пространстве  $C[-1, 1]$ .

**Ключевые слова:** многочлен, ортогональная система, сетка, весовая оценка, асимптотическая формула, дискретные суммы Фурье, средние Валле-Пуссена.

**AMS Subject Classification:** 33C45, 42C05.

**Образец цитирования:** Нурмагомедов А. А., Шихшинатова М. М. Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 2.—С. 93–111. DOI: 10.46698/q4030-9541-4914-r.

## 1. Введение

Пусть  $T = \{t_j\}_{j=0}^N$  — дискретное множество (сетка), состоящее из конечного числа различных точек отрезка  $[-1, 1]$ :  $-1 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$ . Рассмотрим также еще одну сетку  $T_N = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ , состоящую из  $N$  точек  $x_j$ , где  $x_j = (t_j + t_{j+1})/2$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$ .

Через

$$\hat{p}_{k,N}(x) = \hat{p}_k(x; T_N) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (1.1)$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке  $T_N$  в следующем смысле ( $0 \leq n, m \leq N-1$ ):

$$(\hat{p}_{n,N}, \hat{p}_{m,N}) = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{n,N}(x_j) \hat{p}_{m,N}(x_j) \Delta t_j = \delta_{nm}, \quad (1.2)$$

где  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$ .

Далее, пусть

$$\delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} \Delta t_j, \quad (1.3)$$

$\varkappa_2$  — наименьшая константа в неравенстве типа В. А. Маркова для оценки производных алгебраических многочленов в метрике пространства  $L_1[-1, 1]$  (см. [1–3]):

$$\int_{-1}^1 |q_n''(x)| dx \leq \varkappa_2 n^4 \int_{-1}^1 |q_n(x)| dx,$$

$\widehat{P}_n^{\alpha, \beta}(x)$  — ортонормированный многочлен Якоби,  $\widehat{P}_n(x)$  — ортонормированный многочлен Лежандра,  $C[-1, 1]$  — пространство непрерывных на отрезке  $[-1, 1]$  функций  $f(x)$  с нормой  $\|f\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$ ,  $\mathcal{P}_n$  — пространство алгебраических многочленов степени не выше  $n$ ,  $E_n(f)$  — наилучшее приближение функции  $f$  алгебраическими многочленами степени не выше  $n$ .

Далее, через  $S_{n,N}(f) = S_{n,N}(f, x)$  обозначим частную сумму  $n$ -ого порядка ряда Фурье функции  $f(x)$  по системе  $\{\widehat{p}_{k,N}(x)\}_{k=0}^{N-1}$ , т. е.

$$S_{n,N}(f) = \sum_{k=0}^n \widehat{f}_k \widehat{p}_{k,N}(x), \quad (1.4)$$

где  $\widehat{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \widehat{p}_{k,N}(x_j) \Delta t_j$ .

В работе [4] нами найден порядок роста функции Лебега рассматриваемых дискретных сумм Фурье  $S_{n,N}(f)$  при  $n = O(\delta_N^{-2/7})$ . Отсюда, как следствие полученного результата, можно говорить об оценке отклонения частной суммы  $S_{n,N}(f)$  порядка  $n \leq N - 1$  от функции  $f \in C[-1, 1]$ . Аналогичные исследования были проведены также и в работах [5, 6].

Стремление обеспечить как можно лучшее приближение заданной функции влечет выбор того или иного аппарата приближения. Зачастую, вместо частной суммы Фурье по выбранной ортонормированной системе в качестве аппарата приближения используются средние Валле-Пуссена по этой же ортонормированной системе (см., например, [7–10]). И по аналогии с этими работами мы также исследовали аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена для сумм Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках отрезка  $[-1, 1]$ .

Составим средние Валле-Пуссена для сумм  $S_{n,N}(f)$  функции  $f(x) \in C[-1, 1]$ :

$$V_{n,m,N}(f) = V_{n,m,N}(f, x) = \frac{1}{m+1} [S_{n,N}(f, x) + S_{n+1,N}(f, x) + \dots + S_{n+m,N}(f, x)], \quad (1.5)$$

где  $n+m \leq N - 1$ . Будем рассматривать  $V_{n,m,N}(f)$  как линейный оператор, действующий в  $C[-1, 1]$ , норму которого мы обозначим через  $\|V_{n,m,N}\|$ :

$$\|V_{n,m,N}\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} \sup_{|f| \leq 1} |V_{n,m,N}(f, x)|.$$

В данной работе доказано, что если  $0 < b < 1$ ,  $0 < a \leq \left\{ \frac{1-b}{2\varkappa_2} \right\}^{\frac{1}{4}}$ ,  $0 < \mu \leq \frac{n}{m} \leq \nu$ ,  $n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}$ ,  $\lambda > 0$ , то найдется такая константа  $c(a, b, \lambda, \mu, \nu)$ , для которой

$$\|V_{n,m,N}\| \leq c(a, b, \lambda, \mu, \nu).$$

Здесь и далее через  $c$ ,  $c(a, b)$ ,  $c(a, b, \dots, \nu)$  обозначаются положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, разные в разных местах.

## 2. Некоторые вспомогательные утверждения

Здесь мы, в первую очередь, приведем ранее полученные нами результаты [11], которые необходимы нам для дальнейшего исследования.

**Теорема 2.1.** Пусть  $0 < b < 1$ ,  $0 < a \leq \left\{ \frac{1-b}{2a^2} \right\}^{\frac{1}{4}}$  и  $1 \leq n \leq a\delta_N^{-\frac{1}{2}}$ . Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\hat{p}_{n,N}(x) = \hat{P}_n(x) + v_{n,N}(x), \quad (2.1)$$

для остаточного члена  $v_{n,N}(x)$  которой справедлива оценка

$$|v_{n,N}(x)| \leq c(a, b)\delta_N n^{\frac{5}{2}} \left[ \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

**Теорема 2.2.** Пусть  $0 < b < 1$ ,  $0 < a \leq \left\{ \frac{1-b}{2a^2} \right\}^{\frac{1}{4}}$ ,  $1 \leq n \leq a\delta_N^{-\frac{1}{2}}$ . Тогда существует постоянная  $c(a, b) > 0$  такая, что

$$|\hat{p}_{n,N}(x)| \leq c(a, b) \left( \delta_N n^{\frac{5}{2}} + 1 \right) \left[ \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (2.3)$$

Далее, в качестве следствия теоремы 2.2 отметим следующее утверждение.

**Следствие 2.1.** Пусть  $0 < b < 1$ ,  $0 < a \leq \left\{ \frac{1-b}{2a^2} \right\}^{\frac{1}{4}}$ ,  $n = O(\delta_N^{-\frac{2}{5}})$ . Тогда имеют место следующие оценки:

$$|\hat{p}_{n,N}(x)| \leq c(a, b)n^{\frac{1}{2}}, \quad -1 \leq x \leq -1 + cn^{-2}, \quad 1 - cn^{-2} \leq x \leq 1, \quad (2.4)$$

$$|\hat{p}_{n,N}(x)| \leq c(a, b)(1-x)^{-\frac{1}{4}}, \quad 0 \leq x \leq 1 - cn^{-2}, \quad (2.5)$$

$$|\hat{p}_{n,N}(x)| \leq c(a, b)(1+x)^{-\frac{1}{4}}, \quad -1 + cn^{-2} \leq x \leq 0, \quad (2.6)$$

В дальнейшем нам также понадобится и следующее утверждение [10, § 2, лемма 1].

**Лемма 2.1.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна и неотрицательна на промежутке  $[a_1, b_1]$  и  $\{t_j\}_{j=0}^m$  — сетка такая, что  $a_1 < t_0 < t_1 < \dots < t_m < b_1$ . Пусть  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$  и  $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ . Тогда, если:

1)  $f(x)$  монотонно возрастает на  $[a_2, b_2]$ , то

$$\sum_{a_2 \leq t_j \leq b_2} f(t_j)\Delta t_j \leq \int_{a_2}^{b_2} f(x) dx + f(b_2)\Delta^*, \quad (2.7)$$

2)  $f(x)$  монотонно убывает на  $[a_2, b_2]$ , то

$$\sum_{a_2 \leq t_j \leq b_2} f(t_j)\Delta t_j \leq \int_{a_2}^{b_2} f(x) dx + f(a_2)\Delta^*, \quad (2.8)$$

где  $\Delta^* = \max_j \Delta t_j$ .

## 3. Некоторые свойства многочленов Якоби

Мы здесь приведем некоторые сведения о многочленах Якоби и Лежандра [12–14]. Определим многочлены Якоби  $P_n^{\alpha, \beta}(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) с помощью формулы Родрига:

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n \right\},$$

где  $\alpha, \beta$  — произвольные действительные числа. Если  $\alpha, \beta > -1$ , то многочлены Якоби образуют ортогональную систему с весом  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ , т. е.

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta}(x) dx = h_n^{\alpha,\beta} \delta_{nm},$$

где  $h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! (2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$ , и, следовательно,  $h_n^{\alpha,\beta} \asymp n^{-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Как известно, в частности, при  $\alpha = \beta$  мы получаем так называемые ультрасферические многочлены, обозначаемые  $P_n^{\alpha,\alpha}(x)$ .

Ниже нам понадобятся ряд свойств многочленов Якоби. Для удобства ссылок мы приведем их в этом пункте:

а) весовая оценка:

$$\sqrt{n} |P_n^{\alpha,\beta}(x)| \leq c(\alpha, \beta) \left( \sqrt{1-x} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left( \sqrt{1+x} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-\frac{1}{2}}; \quad (3.1)$$

б) равенство  $-1 \leq x, t \leq 1$ ,  $x \neq t$  [9, лемма 3.2]:

$$\begin{aligned} K_k^{\alpha,\alpha}(x, t) &= \sum_{i=0}^k \left\{ h_i^{\alpha,\beta} \right\}^{-1} P_i^{\alpha,\alpha}(x) P_i^{\alpha,\alpha}(t) \\ &= -\frac{(k+\alpha+1)(1-x)(1+t)}{2^{2\alpha+1}(x-t)} P_k^{\alpha+1,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) \\ &\quad + H_k^1 \frac{P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha}(t)}{x-t} + H_k^2 \frac{P_k^{\alpha,\alpha}(x) P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t)}{x-t} + H_k^3 \frac{P_k^{\alpha,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha}(t)}{x-t} \\ &\quad + H_k^4 \frac{P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x) P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t)}{x-t} - \frac{(k+2+\alpha) P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x) P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t) - (k+1+\alpha) P_k^{\alpha,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha}(t)}{2^{2\alpha+1}(x-t)} \\ &\quad + \delta_k \frac{(1-x)(1+t)}{x-t} P_k^{\alpha+1,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $H_k^l = O(1)$  ( $l = 1, 2, 3, 4$ ),  $\delta_k = O(1)$ ,  $k \rightarrow \infty$ ;

в) [9, лемма 3.4]

$$-\frac{(1-x)(1+t)}{2^{2\alpha+1}(x-t)(m+1)} \sum_{k=n}^{n+m} (k+\alpha+1) P_k^{\alpha+1,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) = \sum_{i=1}^5 S_i(x, t), \quad (3.3)$$

где

$$S_1(x, t) = \frac{(1-x)^2(1+t)}{2^{2\alpha+1}(x-t)^2(m+1)} \left[ (n+m+2\alpha+2) P_{n+m}^{\alpha+2,\alpha}(x) P_{n+m}^{\alpha,\alpha+1}(t) - (n+2\alpha+1) P_{n-1}^{\alpha+2,\alpha}(x) P_{n-1}^{\alpha,\alpha+1}(t) \right],$$

$$S_2(x, t) = -\frac{(1-x)(1-t)(1+t)}{2^{2\alpha+1}(x-t)^2(m+1)} \left[ (n+m+2\alpha+2) P_{n+m}^{\alpha+1,\alpha+1}(t) P_{n+m}^{\alpha+1,\alpha}(x) - (n+2\alpha+1) P_{n-1}^{\alpha+1,\alpha+1}(t) P_{n-1}^{\alpha+1,\alpha}(x) \right],$$

$$S_3(x, t) = -\frac{(1-x)(1+t)}{2^{2\alpha+1}(x-t)^2(m+1)} \left[ \frac{n+m+2\alpha+2}{2(n+m+1)+2\alpha+1} P_{n+m}^{\alpha+1,\alpha}(x) P_{n+m}^{\alpha,\alpha+1}(t) \right. \\ \left. - \frac{n+2\alpha+1}{2n+2\alpha+1} P_{n-1}^{\alpha+1,\alpha}(x) P_{n-1}^{\alpha,\alpha+1}(t) \right],$$

$$S_4(x, t) = \frac{(1-x)(1+t)}{2^{2\alpha}(x-t)^2(m+1)} \sum_{k=n}^{n+m} \frac{(2\alpha+1)(k+\alpha+1)}{(2k+2\alpha+3)(2k+2\alpha+1)} P_k^{\alpha+1,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t),$$

$$S_5(x, t) = \frac{(1-x)(1+t)}{2^{2\alpha+1}(x-t)^2(m+1)} \sum_{k=n}^{n+m} \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k+2\alpha+1} \left[ P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) \right. \\ \left. - P_k^{\alpha+1,\alpha}(x) P_{k-1}^{\alpha,\alpha+1}(t) \right].$$

Кроме ультрасферических многочленов, как известно, одним из частных случаев многочленов Якоби при  $\alpha = \beta = 0$  являются многочлены Лежандра  $P_n(x) = P_n^{0,0}(x)$ , образующие ортогональную систему с весом  $k(x) \equiv 1$  на отрезке  $[-1, 1]$  :

$$\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \delta_{nm},$$

для которых, в частности, неравенство (3.1) имеет вид

$$\sqrt{n} |P_n(x)| \leq c \left( \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

#### 4. Оценка средних Валле-Пуссена для сумм Фурье по многочленам $\hat{p}_{n,N}(x)$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.1.** Пусть  $0 < b < 1$ ,  $0 < a \leq \left\{ \frac{1-b}{2ae^2} \right\}^{\frac{1}{4}}$ ,  $\mu, \nu$  — положительные числа ( $\mu \leq \nu$ ). Тогда средние Валле-Пуссена  $V_{n,m,N}(f)$  равномерно относительно  $\mu \leq \frac{n}{m} \leq \nu$ ,  $n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}$ ,  $\lambda > 0$ , ограничены, как линейные операторы, действующие в пространстве  $C[-1, 1]$ .

◁ Обозначив

$$F_{k,N}(x, x_j) = \sum_{i=0}^k \hat{p}_{i,N}(x) \hat{p}_{i,N}(x_j), \quad (4.1)$$

в силу (1.4)–(1.5) получаем

$$V_{n,m,N}(f, x) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} F_{k,N}(x, x_j) \Delta t_j.$$

Отсюда,

$$\|V_{n,m,N}(x)\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |V_{n,m,N}(f, x)| = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{m+1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} F_{k,N}(x, x_j) \right| \Delta t_j. \quad (4.2)$$

Оценим  $V_{n,m,N}(x)$  для  $0 \leq x \leq 1$ . Для этого, по аналогии с работами [7–10], мы рассмотрим два случая: 1)  $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$ ; 2)  $1 - 4n^{-2} \leq x \leq 1$ .

Чтобы оценить  $V_{n,m,N}(x)$  при  $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$ , преобразуем сумму в правой части равенства (4.2) и, соответственно, обозначим слагаемые:

$$\begin{aligned} V_{n,m,N}(x) &\leq \frac{1}{m+1} \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} F_{k,N}(x, x_j) \right| \Delta t_j \\ &+ \frac{1}{m+1} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j < y_1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} F_{k,N}(x, x_j) \right| \Delta t_j + \frac{1}{m+1} \sum_{y_1 \leq x_j \leq y_2} \left| \sum_{k=n}^{n+m} F_{k,N}(x, x_j) \right| \Delta t_j \\ &+ \frac{1}{m+1} \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} F_{k,N}(x, x_j) \right| \Delta t_j = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $y_1 = x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}$ ,  $y_2 = x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}$ .

Перейдем к оценке  $\sigma_1$ . В силу (2.1) мы получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \frac{1}{m+1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} F_{k,N}(x, x_j) \right| \Delta t_j \\ &\leq \frac{1}{m+1} \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \widehat{P}_i(x) \widehat{P}_i(x_j) \right| \Delta t_j \\ &+ \frac{1}{m+1} \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \left| \widehat{P}_i(x) v_{i,N}(x_j) \right| \Delta t_j \\ &+ \frac{1}{m+1} \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \left| \widehat{P}_i(x_j) v_{i,N}(x) \right| \Delta t_j \\ &+ \frac{1}{m+1} \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k |v_{i,N}(x) v_{i,N}(x_j)| \Delta t_j = \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{14}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Оценим  $\sigma_{11}$ . В силу (3.2) при  $\alpha = 0$  мы получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &\leq \frac{1}{2(m+1)} \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} \frac{(k+1)(1-x)(1+x_j)}{x-x_j} P_k^{1,0}(x) P_k^{0,1}(x_j) \right| \Delta t_j \\ &+ \frac{1}{m+1} \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \sum_{k=n}^{n+m} H_k^1 \left| \frac{P_{k+1}(x) P_k(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j \\ &+ \frac{1}{m+1} \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \sum_{k=n}^{n+m} H_k^2 \left| \frac{P_k(x) P_{k+1}(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j \\ &+ \frac{1}{m+1} \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \sum_{k=n}^{n+m} H_k^3 \left| \frac{P_k(x) P_k(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j \\ &+ \frac{1}{m+1} \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \sum_{k=n}^{n+m} H_k^4 \left| \frac{P_{k+1}(x) P_{k+1}(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{m+1} \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \sum_{k=n}^{n+m} \delta_k \left| \frac{(1-x)(1+x_j)}{x-x_j} P_k^{1,0}(x) P_k^{0,1}(x_j) \right| \Delta t_j + \frac{1}{2(m+1)} \\
 \times \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} & \left| \frac{(n+m+2)P_{n+m+1}(x)P_{n+m+1}(x_j) - (n+1)P_n(x)P_n(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j = \sum_{l=0}^6 \sigma_{11}^{(l)}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Оценим  $\sigma_{11}^{(0)}$ . Заметим, что если  $-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}$  и  $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$ , то  $x - x_j \geq \frac{1}{2}$ . Далее, в силу (3.1) мы получаем

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^{(0)} & \leq \frac{c}{m+1} (1-x)^{\frac{1}{4}} \sum_{k=n}^{n+m} \left[ k^{-\frac{1}{2}} \sum_{-1 < x_j \leq -1+4k^{-2}} \Delta t_j + \sum_{-1+4k^{-2} \leq x_j \leq -\frac{1}{2}} (1+x_j)^{\frac{1}{4}} \Delta t_j \right] \\
 & \leq \frac{c}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} \left[ k^{-\frac{5}{2}} + 1 \right] \leq c.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Теперь рассмотрим  $\sigma_{11}^{(1)}$ . В силу (3.4), учитывая, что  $H_k^1 = O(1)$ ,  $n \leq k \leq n+m$ , мы получаем

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^{(1)} & \leq \frac{c}{m+1} \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k} (1-x)^{-\frac{1}{4}} \left( \sqrt{1-x_j^2} + \frac{1}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} \Delta t_j \\
 & \leq \frac{c(1-x)^{-\frac{1}{4}}}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} \left[ k^{-\frac{1}{2}} \sum_{-1 < x_j \leq -1+4k^{-2}} \Delta t_j + \sum_{-1+4k^{-2} \leq x_j \leq -\frac{1}{2}} (1+x_j)^{-\frac{1}{4}} \Delta t_j \right] \\
 & \leq \frac{c}{\sqrt{m+1}} \sum_{k=n}^{n+m} \left[ k^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}} \right] \Delta t_j \leq \frac{c(1-x)^{-\frac{1}{4}}}{m+1} n^{-\frac{1}{2}} (m+1) \leq c(\mu, \nu).
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Посредством аналогичных рассуждений можно также показать, что

$$\sigma_{11}^{(l)} \leq c, \quad l = 2, 3, 4, 5. \tag{4.8}$$

Теперь рассмотрим  $\sigma_{11}^{(6)}$ . В силу (3.1) находим

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^{(6)} & \leq \frac{c}{m+1} (1-x)^{-\frac{1}{4}} \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \left( \sqrt{1+x_j} + \frac{1}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} \Delta t_j \\
 & \leq \frac{c(1-x)^{-\frac{1}{4}}}{m+1} \left[ n^{-\frac{3}{2}} + \sum_{-1+4n^{-2} \leq x_j \leq -\frac{1}{2}} (1+x_j)^{-\frac{1}{4}} \Delta t_j \right] \\
 & \leq \frac{c}{m+1} (1-x)^{-\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{2}} \leq c(\mu, \nu).
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Сопоставляя (4.5)–(4.9), мы имеем

$$\sigma_{11} \leq c(\mu, \nu). \tag{4.10}$$

Перейдем к оценке  $\sigma_{12}$ . С учетом (2.2), (2.8) и (3.4) при  $n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}$  мы получаем ( $0 \leq i \leq k$ ,  $n \leq k \leq n+m$ )

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= \frac{1}{m+1} \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \left| \widehat{P}_i(x) v_{i,N}(x_j) \right| \Delta t_j \\
&\leq \frac{c(a,b)}{m+1} (1-x)^{-\frac{1}{4}} \delta_N \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} i^{\frac{5}{2}} \left( \sqrt{1-x_j^2} + \frac{1}{i} \right)^{-\frac{1}{2}} \Delta t_j \\
&\leq \frac{c(a,b)}{m+1} (1-x)^{-\frac{1}{4}} \delta_N \\
&\times \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \left[ i^3 \sum_{-1 < x_j \leq -1+4i^{-2}} \Delta t_j + i^{\frac{5}{2}} \sum_{-1+4i^{-2} \leq x_j \leq -\frac{1}{2}} (1+x_j)^{-\frac{1}{4}} \Delta t_j \right] \quad (4.11) \\
&\leq \frac{c(a,b)(1-x)^{-\frac{1}{4}}}{m+1} \delta_N \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \left( i + i^{\frac{5}{2}} \int_{-1+4i^{-2}}^{-\frac{1}{2}} (1+\xi)^{-\frac{1}{4}} d\xi + \frac{\sqrt{2}}{2} i^3 \delta_N \right) \\
&\leq \frac{c(a,b)(1-x)^{-\frac{1}{4}}}{m+1} \delta_N \left[ (m+n)^2 + (m+n)^{\frac{7}{2}} + (m+n)^4 \delta_N \right] (m+1) \\
&\leq c(a,b,\mu,\nu) n^4 \delta_N \leq c(a,b,\lambda,\mu,\nu).
\end{aligned}$$

Аналогичное неравенство допускает и  $\sigma_{13}$ :

$$\sigma_{13} \leq c(a,b,\lambda,\mu,\nu). \quad (4.12)$$

Оценим  $\sigma_{14}$ . В силу (2.2) при  $n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}$  выводим

$$\begin{aligned}
\sigma_{14} &\leq \frac{c(a,b)}{m+1} (1-x)^{-\frac{1}{4}} \delta_N^2 \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k i^5 \sum_{-1 < x_j \leq -\frac{1}{2}} \left( \sqrt{1-x_j^2} + \frac{1}{i} \right)^{-\frac{1}{2}} \Delta t_j \\
&\leq \frac{c(a,b)}{m+1} (1-x)^{-\frac{1}{4}} \delta_N^2 \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \left( i^{\frac{7}{2}} + i^5 \int_{-1+4i^{-2}}^{-\frac{1}{2}} (1+\xi)^{-\frac{1}{4}} d\xi + \frac{\sqrt{2}}{2} i^3 \delta_N \right) \quad (4.13) \\
&\leq \frac{c(a,b)}{m+1} (1-x)^{-\frac{1}{4}} \delta_N^2 (m+n)^{\frac{9}{2}} (m+1) \leq c(a,b,\lambda,\mu,\nu) n^{-3}.
\end{aligned}$$

Сопоставляя (4.4) и (4.10)–(4.13), мы получаем

$$\sigma_1 \leq c(a,b,\lambda,\mu,\nu). \quad (4.14)$$

Рассмотрим слагаемое  $\sigma_2$ . В силу (2.1) мы заключаем

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \frac{1}{m+1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} F_k(x, x_j) \right| \Delta t_j \\
&\leq \frac{1}{m+1} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \widehat{P}_i(x) \widehat{P}_i(x_j) \right| \Delta t_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{m+1} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \left| \widehat{P}_i(x) v_{i,N}(x_j) \right| \Delta t_j \\
 & + \frac{1}{m+1} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \left| \widehat{P}_i(x_j) v_{i,N}(x) \right| \Delta t_j \\
 & + \frac{1}{m+1} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k |v_{i,N}(x) v_{i,N}(x_j)| \Delta t_j = \sigma_{21} + \sigma_{22} + \sigma_{23} + \sigma_{24}.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Вначале оценим  $\sigma_{22}$ . В силу (2.2) и (3.4) при  $0 \leq i \leq k$ ,  $n \leq k \leq n+m$ ,  $n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}$  мы находим

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22} & = \frac{1}{m+1} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \left| \widehat{P}_i(x) v_{i,N}(x_j) \right| \Delta t_j \\
 & \leq \frac{c(a,b)}{m+1} \delta_N (1-x)^{-\frac{1}{4}} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k i^{\frac{5}{2}} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} (1-x_j)^{-\frac{1}{4}} \Delta t_j \\
 & \leq \frac{c(a,b)}{m+1} \delta_N (1-x)^{-\frac{1}{4}} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k i^{\frac{5}{2}} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{y_1} (1-\xi)^{-\frac{1}{4}} d\xi + \delta_N n^4 \right] \\
 & \leq \frac{c(a,b,\lambda) \delta_N}{m+1} n^{\frac{1}{2}} (n+m)^{\frac{7}{2}} (m+1) \leq c(a,b,\lambda,\mu,\nu) n^4 \delta_N \leq c(a,b,\lambda,\mu,\nu).
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\sigma_{23} \leq c(a,b,\lambda,\mu,\nu), \tag{4.17}$$

$$\sigma_{24} \leq \frac{c(a,b)}{m+1} \delta_N^2 (1-x)^{-\frac{1}{4}} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k i^5 \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} (1-x_j)^{-\frac{1}{4}} \Delta t_j \leq c(a,b,\lambda,\mu,\nu) n^{-\frac{3}{2}}. \tag{4.18}$$

Теперь рассмотрим  $\sigma_{21}$ . В силу равенства (3.2) при  $\alpha = 0$  мы получаем

$$\begin{aligned}
 \sigma_{21} & \leq \frac{1}{2(m+1)} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} \frac{(k+1)(1-x)(1+x_j)}{x-x_j} P_k^{1,0}(x) P_k^{0,1}(x_j) \right| \Delta t_j \\
 & + \frac{1}{m+1} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \sum_{k=n}^{n+m} H_k^1 \left| \frac{P_{k+1}(x) P_k(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j \\
 & + \frac{1}{m+1} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \sum_{k=n}^{n+m} H_k^2 \left| \frac{P_k(x) P_{k+1}(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j \\
 & + \frac{1}{m+1} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \sum_{k=n}^{n+m} H_k^3 \left| \frac{P_k(x) P_k(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{m+1} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \sum_{k=n}^{n+m} H_k^4 \left| \frac{P_{k+1}(x)P_{k+1}(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j \\
& + \frac{1}{m+1} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \sum_{k=n}^{n+m} \delta_k \left| \frac{(1-x)(1+x_j)}{x-x_j} P_k^{1,0}(x)P_k^{0,1}(x_j) \right| \Delta t_j + \frac{1}{2(m+1)} \\
& \times \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \left| \frac{(n+m+2)P_{n+m+1}(x)P_{n+m+1}(x_j) - (n+1)P_n(x)P_n(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j = \sum_{l=0}^6 \sigma_{21}^{(l)}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Так как для  $-\frac{1}{2} \leq x_j \leq x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}$ , в силу (2.7) и (3.4) при  $\mu \leq \frac{n}{m} \leq \nu$ ,  $n \leq k \leq n+m$ ,  $n \leq \delta_N^{-\frac{1}{4}}$ ,  $H_k^1 = O(1)$

$$\begin{aligned}
& \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \left| \frac{P_k(x)P_k(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j \leq ck^{-1}(1-x)^{-\frac{1}{4}} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \frac{(1-x_j)^{-\frac{1}{4}}}{x-x_j} \Delta t_j \\
& \leq ck^{-1}(1-x)^{-\frac{1}{4}} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{(x-x_j)^{\frac{5}{4}}} \leq ck^{-1}(1-x)^{-\frac{1}{4}} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{y_1} \frac{d\xi}{(x-\xi)^{\frac{5}{4}}} + \delta_N n^{\frac{5}{2}} \right] \\
& \leq ck^{-1}(1-x)^{-\frac{1}{4}} \left[ n^{\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{8}} + \delta_N n^{\frac{5}{2}} \right] \leq c(\lambda),
\end{aligned}$$

то получаем

$$\sigma_{21}^{(1)} \leq c(\lambda, \mu, \nu), \tag{4.20}$$

$$\sigma_{21}^{(6)} \leq \frac{c}{m+1}(1-x)^{-\frac{1}{4}} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \frac{(1-x_j)^{-\frac{1}{4}}}{x-x_j} \Delta t_j \leq c(\lambda, \mu, \nu). \tag{4.21}$$

Посредством аналогичных рассуждений также можно показать, что

$$\sigma_{21}^{(l)} \leq c(\lambda, \mu, \nu), \quad l = 2, 3, 4, 5. \tag{4.22}$$

Перейдем к оценке  $\sigma_{21}^{(0)}$ . Воспользовавшись равенством (3.3) при  $\alpha = 0$ , мы имеем

$$\sigma_{21}^{(0)} \leq \sum_{i=1}^4 |f_i(x, x_j)|, \tag{4.23}$$

где

$$\begin{aligned}
f_1(x, x_j) = \frac{(1-x)^2(1+x_j)}{2(x-x_j)^2(m+1)} & \left[ (n+m+2)P_{n+m}^{2,0}(x)P_{n+m}^{0,1}(x_j) \right. \\
& \left. - (n+1)P_{n-1}^{2,0}(x)P_{n-1}^{0,1}(x_j) \right], \tag{4.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(x, x_j) = -\frac{(1-x)(1-x_j)(1+x_j)}{2(x-x_j)^2(m+1)} & \left[ (n+m+2)P_{n+m}^{1,1}(x_j)P_{n+m}^{1,0}(x) \right. \\
& \left. - (n+1)P_{n-1}^{1,1}(x_j)P_{n-1}^{1,0}(x) \right], \tag{4.25}
\end{aligned}$$

$$f_3(x, x_j) = -\frac{(1-x)(1+x_j)}{2(x-x_j)^2(m+1)} \left[ \frac{n+m+2}{2(n+m+1)+1} P_{n+m}^{1,0}(x) P_{n+m}^{0,1}(x_j) - \frac{n+1}{2n+1} P_{n-1}^{1,0}(x) P_{n-1}^{0,1}(x_j) \right], \quad (4.26)$$

$$f_4(x, x_j) = \frac{(1-x)(1+x)}{2(x-x_j)^2(m+1)} \sum_{k=n}^{n+m} \frac{(k+1)}{(2k+3)(2k+1)} P_k^{1,0}(x) P_k^{0,1}(x_j). \quad (4.27)$$

В силу (2.7), (3.1) и (4.24) при  $n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}$ ,  $x_j < x$  мы находим

$$\begin{aligned} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} |f_1(x, x_j)| \Delta t_j &\leq \frac{c}{m+1} (1-x)^{\frac{3}{4}} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \frac{(1-x_j)^{-\frac{1}{4}}}{(x-x_j)^2} \Delta t_j \\ &\leq \frac{c}{m+1} (1-x)^{\frac{1}{2}} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{(x-x_j)^2} \leq \frac{c}{m+1} (1-x)^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{y_1} \frac{d\xi}{(x-\xi)^2} + \delta_N n^4 \right] \\ &\leq \frac{c(\lambda)}{m+1} (1-x)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} n \leq c(\lambda, \mu, \nu). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Далее, посредством аналогичных рассуждений, с учетом (4.25) и неравенства

$$(1-x_j)^{\frac{1}{2}} \leq (1-x)^{\frac{1}{2}} + (x-x_j)^{\frac{1}{2}}$$

также находим:

$$\begin{aligned} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} |f_2(x, x_j)| \Delta t_j &\leq \frac{c}{m+1} (1-x)^{\frac{1}{4}} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \frac{(1-x_j)^{\frac{1}{4}}}{(x-x_j)^2} \Delta t_j \\ &\leq \frac{c}{m+1} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \frac{(1-x_j)^{\frac{1}{2}}}{(x-x_j)^2} \Delta t_j \\ &\leq \frac{c}{m+1} (1-x)^{\frac{1}{2}} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{(x-x_j)^2} + \frac{c}{m+1} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{(x-x_j)^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq \frac{c}{m+1} (1-x)^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{y_1} \frac{d\xi}{(x-\xi)^2} + \delta_N n^4 \right] + \frac{c}{m+1} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{y_1} \frac{d\xi}{(x-\xi)^{\frac{3}{2}}} + \delta_N n^3 \right] \\ &\leq \frac{c(\lambda)}{m+1} (1-x)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} n + \frac{c(\lambda)}{m+1} (1-x)^{-\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{2}} \leq c(\lambda, \mu, \nu). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Кроме того, с учетом равенств (4.26) и (4.27), соответственно, также получаем

$$\begin{aligned} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} |f_3(x, x_j)| \Delta t_j &\leq \frac{c}{(m+1)(m+n)} (1-x)^{\frac{1}{4}} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \frac{(1-x_j)^{-\frac{1}{4}}}{(x-x_j)^2} \Delta t_j \\ &\leq \frac{c}{m+1} (1-x)^{\frac{1}{2}} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{(x-x_j)^2} \leq c(\lambda, \mu, \nu), \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} |f_4(x, x_j)| \Delta t_j \\
\leq & \frac{c}{m+1} (1-x)^{\frac{1}{4}} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \frac{(1-x_j)^{-\frac{1}{4}}}{(x-x_j)^2} \Delta t_j \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{(2k+3)(2k+1)} \\
& \leq \frac{c}{n^2} \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{(x-x_j)^2} \leq c(\lambda, \mu, \nu).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Сопоставляя (4.23), (4.28)–(4.31), находим  $\sigma_{21}^{(0)} \leq c(\lambda, \mu, \nu)$ . Отсюда и из (4.19)–(4.22) выводим

$$\sigma_{21} \leq c(\lambda, \mu, \nu). \tag{4.32}$$

Далее, сопоставляя (4.15)–(4.18) и (4.32), находим ( $n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}$ )

$$\sigma_2 \leq c(a, b, \lambda, \mu, \nu). \tag{4.33}$$

Теперь оценим  $\sigma_3$ . В силу (2.3) и (4.1) при  $n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}$  получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &= \frac{1}{m+1} \sum_{y_1 \leq x_j \leq y_2} \left| \sum_{k=n}^{n+m} F_{k,N}(x, x_j) \right| \Delta t_j \\
&\leq \frac{c(a, b, \lambda)}{m+1} (1-x)^{-\frac{1}{4}} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \sum_{y_1 \leq x_j \leq y_2} (1-x_j)^{-\frac{1}{4}} \Delta t_j \\
&\leq \frac{c(a, b, \lambda)}{m+1} \frac{y_2 - y_1}{(1-y_2)^{\frac{1}{4}}} (m+n)(m+1)(1-x)^{-\frac{1}{4}} \\
&\leq c(a, b, \lambda, \mu, \nu) n (1-x)^{-\frac{1}{4}} \left( 1-x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^{-\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \\
&\leq c(a, b, \lambda, \mu, \nu) (1-x)^{-\frac{1}{4}} (1-x)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{4}} \leq c(a, b, \lambda, \mu, \nu).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Рассмотрим слагаемое  $\sigma_4$ . В силу (2.1) и (4.1) имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_4 &= \frac{1}{m+1} \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} F_{k,N}(x, x_j) \right| \Delta t_j \\
&\leq \frac{1}{m+1} \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \widehat{P}_i(x) \widehat{P}_i(x_j) \right| \Delta t_j \\
&+ \frac{1}{m+1} \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \left| \widehat{P}_i(x) v_{i,N}(x_j) \right| \Delta t_j \\
&+ \frac{1}{m+1} \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \left| \widehat{P}_i(x_j) v_{i,N}(x) \right| \Delta t_j \\
&+ \frac{1}{m+1} \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=0}^k |v_{i,N}(x) v_{i,N}(x_j)| \Delta t_j = \sigma_{41} + \sigma_{42} + \sigma_{43} + \sigma_{44}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

В силу (2.2), (2.7) и (3.4) мы выводим

$$\begin{aligned} & \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \left| \widehat{P}_i(x) v_{i,N}(x_j) \right| \Delta t_j \\ & \leq c(a, b) \delta_N i^{\frac{5}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{4}} \left[ \sum_{y_2 \leq x_j \leq 1-i^{-2}} (1-x_j)^{-\frac{1}{4}} \Delta t_j + i^{\frac{1}{2}} \sum_{1-i^{-2} \leq x_j < 1} \Delta t_j \right] \\ & \leq c(a, b) \delta_N i^{\frac{5}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{4}} \left[ \int_{y_2}^{1-i^{-2}} (1-\xi)^{-\frac{1}{4}} d\xi + \delta_N i^{\frac{1}{2}} + i^{-\frac{3}{2}} \right] \\ & \leq c(a, b) \delta_N (1-x)^{-\frac{1}{4}} \left[ i^{\frac{5}{2}} + \delta_N i^3 + i \right]. \end{aligned}$$

Отсюда при  $n \leq \delta_N^{-\frac{1}{4}}$ ,  $0 \leq i \leq k$ ,  $n \leq k \leq n+m$ , получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{42} & \leq \frac{c(a, b)}{m+1} \delta_N (1-x)^{-\frac{1}{4}} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \left[ i^{\frac{5}{2}} + \delta_N i^3 + i \right] \\ & \leq \frac{c(a, b)}{m+1} n^{\frac{1}{2}} \left[ \delta_N (m+n)^{\frac{7}{2}} + \delta_N^2 (m+n)^4 + \delta_N (n+m)^2 \right] (m+1) \leq c(a, b, \lambda, \mu, \nu). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Очевидно, что такую оценку допускает и

$$\sigma_{43} \leq c(a, b, \lambda, \mu, \nu). \tag{4.37}$$

Рассмотрим слагаемое  $\sigma_{44}$ . В силу (2.2) при  $n \leq \delta_N^{-\frac{1}{4}}$  получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{44} & \leq \frac{c(a, b)}{m+1} \delta_N^2 (1-x)^{-\frac{1}{4}} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k \left[ i^5 + \delta_N i^{\frac{11}{2}} + i^{\frac{7}{2}} \right] \\ & \leq \frac{c(a, b)}{m+1} n^{\frac{1}{2}} \left[ \delta_N^2 (n+m)^6 + \delta_N^3 (n+m)^{\frac{13}{2}} + \delta_N^2 (n+m)^{\frac{7}{2}} \right] (m+1) \leq c(a, b, \lambda, \mu, \nu). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Теперь оценим  $\sigma_{41}$ . С учетом равенства (3.2) при  $\alpha = 0$  выводим

$$\begin{aligned} \sigma_{41} & \leq \frac{1}{m+1} \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} \frac{k(1-x)(1+x_j)}{x-x_j} P_k^{1,0}(x) P_k^{0,1}(x_j) \right| \Delta t_j \\ & \quad + \frac{1}{m+1} \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \sum_{k=n}^{n+m} H_k^1 \left| \frac{P_{k+1}(x) P_k(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j \\ & \quad + \frac{1}{m+1} \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \sum_{k=n}^{n+m} H_k^2 \left| \frac{P_k(x) P_{k+1}(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j \\ & \quad + \frac{1}{m+1} \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \sum_{k=n}^{n+m} H_k^3 \left| \frac{P_k(x) P_k(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{m+1} \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \sum_{k=n}^{n+m} H_k^4 \left| \frac{P_{k+1}(x)P_{k+1}(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j \\
& + \frac{1}{m+1} \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \sum_{k=n}^{n+m} \delta_k \left| \frac{(1-x)(1+x_j)}{x-x_j} P_k^{1,0}(x)P_k^{0,1}(x_j) \right| \Delta t_j + \frac{1}{2(m+1)} \quad (4.39) \\
& \times \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \left| \frac{(n+m+2)P_{n+m+1}(x)P_{n+m+1}(x_j) - (n+1)P_n(x)P_n(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j = \sum_{l=0}^6 \sigma_{41}^{(l)}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим  $\sigma_{41}^{(1)}$ . В силу (2.7), (2.8), (3.4) и, воспользовавшись тем, что  $n \leq k \leq n+m$ ,  $m = O(n)$ ,  $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$ ,  $n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}$ , находим

$$\begin{aligned}
& \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \left| \frac{P_{k+1}(x)P_k(x_j)}{x-x_j} \right| \Delta t_j \leq \frac{c}{k} (1-x)^{-\frac{1}{4}} \\
& \times \left[ \sum_{y_2 < x_j \leq \frac{1+x}{2}} \frac{(1-x_j)^{-\frac{1}{4}}}{x_j-x} \Delta t_j + \sum_{\frac{1+x}{2} \leq x_j \leq 1-k^{-2}} \frac{(1-x_j)^{-\frac{1}{4}}}{x_j-x} \Delta t_j + k^{\frac{1}{2}} \sum_{1-k^{-2} < x_j < 1} \frac{\Delta t_j}{x_j-x} \right] \\
& \leq \frac{c}{k} (1-x)^{-\frac{1}{4}} \left[ \sum_{y_2 \leq x_j \leq \frac{1+x}{2}} \frac{\Delta t_j}{(x_j-x)^{\frac{5}{4}}} + \sum_{\frac{1+x}{2} \leq x_j \leq 1-k^{-2}} \frac{\Delta t_j}{(1-x_j)^{\frac{5}{4}}} + k^{\frac{1}{2}} \right] \\
& \leq \frac{c(\lambda)}{k} (1-x)^{-\frac{1}{4}} \left[ \int_{y_2}^{\frac{1+x}{2}} \frac{d\tau}{(\tau-x)^{\frac{5}{4}}} + \int_{\frac{1+x}{2}}^{1-k^{-2}} \frac{d\xi}{(1-\xi)^{\frac{5}{4}}} + \delta_N n^{\frac{5}{2}} + k^{\frac{1}{2}} \right] \\
& \leq \frac{c(\lambda)}{k} (1-x)^{-\frac{1}{4}} \left[ n^{\frac{1}{2}} + \delta_N n^{\frac{5}{2}} + k^{\frac{1}{2}} \right] \leq c(\mu, \nu, \lambda).
\end{aligned}$$

Отсюда, с учетом того, что  $H_k^1 = O(1)$ , получаем

$$\sigma_{41}^{(1)} = \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} H_k^1 \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \left| \frac{P_{k+1}(x)P_k(x_j)}{x_j-x} \right| \Delta t_j \leq c(\mu, \nu, \lambda). \quad (4.40)$$

По аналогии также можно показать, что

$$\sigma_{41}^{(l)} \leq c(\mu, \nu, \lambda), \quad l = 2, 3, 4, 5, 6. \quad (4.41)$$

Теперь займемся оценкой  $\sigma_{41}^{(0)}$ . Воспользовавшись (3.3) при  $\alpha = 0$  и равенствами (4.24)–(4.27), покажем, что

$$\sigma_{41}^{(0)} \leq c(\lambda, \mu, \nu). \quad (4.42)$$

Вначале, по аналогии с работами [7–9], введем обозначения. Пусть  $\theta = \arccos \tau$ ,  $\varphi = \arccos x$ ,  $\varphi_0 = \arccos \left(1 - \frac{4}{n^2}\right)$ ,  $x^* = x \cos \frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2} \sin \frac{1}{n} = \cos \left(\varphi - \frac{1}{n}\right)$ . Далее, заметим, что для  $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$ ,  $x^* \leq y_2$  и  $2 \leq n\varphi_0 \leq n\varphi$ .

Тогда, учитывая (2.8), (4.24) и (3.1), при  $n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}$ , получаем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{y_2 \leq x_j < 1} |f_1(x, x_j)| \Delta t_j \leq \frac{c}{m+1} (1-x)^{\frac{3}{4}} \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \frac{(1-x_j)^{-\frac{1}{4}}}{(x-x_j)^2} \Delta t_j \\
 & \leq \frac{c}{m+1} (1-x)^{\frac{3}{4}} \left[ \int_{y_2}^1 \frac{(1-\tau)^{-\frac{1}{4}}}{(\tau-x)^2} d\tau + \delta_N n^4 \right] \leq \frac{c(\lambda)}{m+1} (1-x^2)^{\frac{3}{4}} \int_{y_2}^1 \frac{(1-\tau^2)^{-\frac{1}{4}}}{(\tau-x)^2} d\tau \\
 & \leq \frac{c(\lambda)}{m+1} (1-x^2)^{\frac{3}{4}} \int_{x^*}^1 \frac{(1-\tau^2)^{-\frac{1}{4}}}{(\tau-x)^2} d\tau \leq \frac{c(\lambda)}{m+1} (\sin \varphi)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\varphi - \frac{1}{n}} \frac{(\sin \theta)^{\frac{1}{2}}}{(\cos \theta - \cos \varphi)^2} d\theta \\
 & \leq \frac{c(\lambda)}{m+1} \varphi^{\frac{3}{2}} \left( \varphi - \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\varphi - \frac{1}{n}} \frac{d\theta}{((\theta - \varphi)(\theta + \varphi))^2} \leq \frac{c(\lambda)}{m+1} n \leq c(\lambda, \mu, \nu).
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Воспользовавшись (4.25), (3.1), при  $n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}$ , также выводим

$$\begin{aligned}
 & \sum_{y_2 \leq x_j < 1} |f_2(x, x_j)| \Delta t_j \leq \frac{c}{m+1} (1-x)^{\frac{1}{4}} \left[ \sum_{y_2 \leq x_j < 1} \frac{\left( \sqrt{1-x_j^2} + \frac{1}{n+m} \right)^{-\frac{3}{2}} (1-x_j)}{(x_j-x)^2} \Delta t_j \right] \\
 & \leq \frac{c(\mu, \nu)}{m+1} (1-x)^{\frac{1}{4}} \left[ \sum_{y_2 \leq x_j \leq 1-4n^{-2}} \frac{(1-x_j)^{\frac{1}{4}}}{(x_j-x)^2} \Delta t_j + n^{\frac{3}{2}} \sum_{1-4n^{-2} \leq x_j < 1} \frac{1-x_j}{(x_j-x)^2} \Delta t_j \right] \\
 & \leq \frac{c(\mu, \nu)}{m+1} (1-x^2)^{\frac{1}{4}} \left[ \sum_{y_2 \leq x_j \leq 1-4n^{-2}} \frac{(1-x_j^2)^{\frac{1}{4}}}{(x_j-x)^2} \Delta t_j + n^{\frac{3}{2}} \left( \frac{n}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \sum_{1-4n^{-2} \leq x_j < 1} (1-x_j) \Delta t_j \right] \\
 & \leq \frac{c(\mu, \nu)}{m+1} (1-x^2)^{\frac{1}{4}} \left[ \int_{y_2}^{1-4n^{-2}} \frac{(1-\tau)^{\frac{1}{4}}}{(\tau-x)^2} d\tau + \delta_N n^4 \right] \\
 & \quad + \frac{c(\mu, \nu)}{m+1} n^{\frac{7}{2}} (1-x^2)^{-\frac{3}{4}} \left[ \int_{1-4n^{-2}}^1 (1-\xi) d\xi + \delta_N n^{-2} \right] \\
 & \leq \frac{c(\lambda, \mu, \nu)}{m+1} (1-x^2)^{\frac{1}{4}} \int_{x^*}^{1-4n^{-2}} \frac{(1-\tau^2)^{\frac{1}{4}}}{(\tau-x)^2} d\tau + c(\lambda, \mu, \nu) n^{-\frac{3}{2}} (1-x^2)^{-\frac{3}{4}} \\
 & \leq \frac{c(\lambda, \mu, \nu)}{m+1} (1-x^2)^{\frac{1}{4}} \int_{x^*}^{1-4n^{-2}} \frac{(1-\tau^2)^{\frac{1}{4}}}{(\tau-x)^2} d\tau \leq \frac{c(\lambda, \mu, \nu)}{m+1} \sin^{\frac{1}{2}} \varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi - \frac{1}{n}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} \theta}{(\cos \theta - \cos \varphi)^2} d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{c(\lambda, \mu, \nu)}{m+1} \varphi^{\frac{1}{2}} \int_{\varphi_0}^{\varphi^{-\frac{1}{n}}} \frac{\theta^{\frac{3}{2}}}{(\varphi^2 - \theta^2)^2} d\theta \leq \frac{c(\lambda, \mu, \nu)}{m+1} \varphi^{-1} \int_{\varphi_0}^{\varphi^{-\frac{1}{n}}} \frac{d\left(\frac{\theta}{\varphi}\right)}{\left(1 - \frac{\theta}{\varphi}\right)^2} \\
&\leq \frac{c(\lambda, \mu, \nu)}{m+1} \varphi^{-1} \int_{\frac{2}{n\varphi}}^{1-\frac{1}{n\varphi}} \frac{dz}{(1-z)^2} \leq \frac{c(\lambda, \mu, \nu)}{m+1} \varphi^{-1} n\varphi \leq c(\lambda, \mu, \nu).
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Аналогично можно показать, что  $\sum_{y_2 \leq x_j < 1} |f_i(x, x_j)| \Delta t_j \leq c(\lambda, \mu, \nu)$ ,  $i = 3, 4$ .

Отсюда и из (4.43)–(4.44) следует оценка (4.42). Теперь, сопоставляя (4.3), (4.14), (4.33), (4.34) и (4.42), получаем

$$V_{n,m,N}(x) \leq c(a, b, \lambda, \mu, \nu), \tag{4.45}$$

$$0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}, \quad \mu \leq \frac{n}{m} \leq \nu, \quad n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}.$$

Пусть теперь  $1 - 4n^{-2} \leq x \leq 1$ . В этом случае сумму (4.2) мы разобьем по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
V_{n,m,N}(x) &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{m+1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} F_{k,N}(x, x_j) \right| \Delta t_j \\
&= \sum_{-1 < x_j < -\frac{1}{2}} \frac{1}{m+1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} F_{k,N}(x, x_j) \right| \Delta t_j \\
&\quad + \sum_{-\frac{1}{2} \leq x_j \leq 1-8n^{-2}} \frac{1}{m+1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} F_{k,N}(x, x_j) \right| \Delta t_j \\
&\quad + \sum_{1-8n^{-2} < x_j < 1} \frac{1}{m+1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} F_{k,N}(x, x_j) \right| \Delta t_j = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Суммы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  оцениваются совершенно аналогично тому, как это было сделано для  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , и  $\sigma_3$ . А именно, при  $\mu \leq \frac{n}{m} \leq \nu$ ,  $n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}$ ,  $n \leq k \leq n+m$  мы также получим:

$$\gamma_1 \leq c(a, b, \lambda, \mu, \nu), \quad \gamma_2 \leq c(a, b, \lambda, \mu, \nu). \tag{4.47}$$

Что касается  $\gamma_3$ , то воспользовавшись оценкой (2.4) при  $n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}$ , мы получаем

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &\leq \frac{1}{m+1} \sum_{1-8n^{-2} < x_j < 1} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k |\hat{p}_{i,N}(x) \hat{p}_{i,N}(x_j)| \Delta t_j \\
&\leq \frac{c(a, b)}{m+1} \sum_{1-8n^{-2} < x_j < 1} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{i=0}^k (i+1) \Delta t_j \\
&\leq \frac{c(a, b)}{m+1} (n+m)^2 (m+1) \sum_{1-8n^{-2} < x_j < 1} \Delta t_j \leq c(a, b, \mu, \nu).
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Из (4.46)–(4.48) получаем

$$V_{n,m,N}(x) \leq c(a, b, \mu, \nu), \tag{4.49}$$

$$1 - 4n^{-2} \leq x \leq 1, \quad \mu \leq \frac{n}{m} \leq \nu, \quad n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}.$$

Сопоставляя (4.45) и (4.49), убеждаемся в справедливости теоремы в случае, когда  $0 \leq x \leq 1$ . Далее, посредством аналогичных рассуждений, такую же оценку можно получить и для случая, когда  $-1 \leq x \leq 0$ . Тем самым теорема доказана полностью.  $\triangleright$

В качестве следствия теоремы 4.1 приведем следующее утверждение.

**Следствие 4.1.** Пусть  $f \in C[-1, 1]$ ,  $E_n(f)$  — наилучшее приближение  $f$  алгебраическими полиномами степени не выше  $n$  в пространстве  $C[-1, 1]$ . Тогда при соблюдении условий теоремы 4.1 имеет место оценка  $\|f - V_{n,m,N}(f)\| \leq c(a, b, \lambda, \mu, \nu)E_n(f)$ .

## Литература

1. Даугавет И. К., Рафальсон С. З. О некоторых неравенствах для алгебраических многочленов // Вестник Ленингр. ун-та.—1974.—№ 19.—С. 18–24.
2. Колягин С. В. О неравенстве В. А. Маркова для многочленов в метрике  $L$  // Тр. Мат. ин-та АН СССР.—1980.—Т. 145.—С. 117–125.
3. Симонов И. Е. Точное неравенство типа братьев Марковых в пространствах  $L_p$ ,  $L_1$  на отрезке // Тр. Ин-та. матем. и механ. УрО РАН.—2011.—Т. 17, № 3.—С. 282–290.
4. Нурмагомедов А. А., Расулов Н. К. Двусторонняя оценка функции Лебега сумм Фурье по многочленам, ортогональным на неравномерных сетках // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия.—2018.—Т. 5, № 63, вып. 3.—С. 417–431.
5. Нурмагомедов А. А. Приближение функций частными суммами ряда Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках // Изв. вузов. Математика.—2020.—№ 4.—С. 64–73. DOI: 10.26907/0021-3446-2020-4-64-73.
6. Нурмагомедов А. А. Аппроксимативные свойства дискретных сумм Фурье по многочленам, ортогональным на неравномерных сетках // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 2.—С. 34–47. DOI: 10.46698/k4355-6603-4655-y.
7. Шарпудинов И. И., Вагабов И. А. О сходимости средних Валле-Пуссена для сумм Фурье — Якоби // Матем. заметки.—1996.—Т. 60, вып. 4.—С. 569–586. DOI: 10.4213/mzm1863.
8. Шарпудинов И. И. Об ограниченности в  $C[-1, 1]$  средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье — Чебышёва // Матем. сб.—1996.—Т. 187, № 1.—С. 143–160. DOI: 10.4213/sm105.
9. Шарпудинов И. И. Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лежандра // Матем. заметки.—2008.—Т. 84, вып. 3.—С. 452–471. DOI: 10.4213/mzm5541.
10. Коркмасов Ф. М. Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье — Якоби // Сиб. мат. журн.—2004.—Т. 45, № 2.—С. 334–355.
11. Нурмагомедов А. А. Об асимптотике многочленов, ортогональных на произвольных сетках // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2008.—Т. 8, вып. 1.—С. 25–31. DOI: 10.18500/1816-9791-2008-8-1-25-31.
12. Сеге Г. Ортогональные многочлены.—М.: Физматгиз, 1962.—500 с.
13. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены.—М.: Наука, 1979.
14. Шарпудинов И. И. Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения.—Махачкала: ДГПУ, 1997.—255 с.

Статья поступила 1 августа 2024 г.

Нурмагомедов Алим Алаутдинович  
Дагестанский государственный аграрный университет,  
доцент кафедры информатики и цифровых технологий,  
РОССИЯ, 367032, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 180  
E-mail: [alimn@mail.ru](mailto:alimn@mail.ru)  
<https://orcid.org/0000-0002-0033-8699>

Шихшинатова Муминат Магомедрасуловна  
Национальный исследовательский Московский государственный  
строительный университет,  
доцент кафедры высшей математики  
РОССИЯ, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26  
E-mail: [shichmum\\_2006@mail.ru](mailto:shichmum_2006@mail.ru)  
<https://orcid.org/0009-0005-1617-5547>

APPROXIMATION PROPERTIES OF VALLE-POUSSIN AVERAGES  
FOR DISCRETE FOURIER SUMS BY POLYNOMIALS  
ORTHOGONAL ON ARBITRARY NETSNurmagomedov, A. A.<sup>1</sup> and Shikhshinatova, M. M.<sup>2</sup><sup>1</sup> Dagestan State Agrarian University,  
180 M. Gadzhiev St., Makhachkala 367032, Russia;<sup>2</sup> Moscow State University of Civil Engineering,  
26 Yaroslavskoye shosse, Moscow 129337, RussiaE-mail: [alimn@mail.ru](mailto:alimn@mail.ru), [shichmum\\_2006@mail.ru](mailto:shichmum_2006@mail.ru)

**Abstract.** Let  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  and  $T_N = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ , where  $x_j = (t_j + t_{j+1})/2$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$ , are any system of different points from  $[-1, 1]$ . For arbitrary continuous function  $f(x)$  on the segment  $[-1, 1]$  we construct Vallee-Poussin type averages  $V_{n,m,N}(f, x)$  for discrete Fourier sums  $S_{n,N}(f, x)$  on system of polynomials  $\{\hat{p}_{k,N}(x)\}_{k=0}^{N-1}$  forming an orthonormal system on any finite non-uniform grids  $T_N = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$  with weight  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ . Approximation properties of the constructed averages  $V_{n,m,N}(f, x)$  of order  $n+m \leq N-1$  in the space of continuous functions  $C[-1, 1]$  are investigated. Namely, it is proved that the Vallee-Poussin averages  $V_{m,n,N}(f, x)$  for  $\frac{n}{m} \asymp 1$ ,  $n \leq \lambda \delta_N^{-\frac{1}{4}}$  ( $\lambda > 0$ ),  $\delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} \Delta t_j$ , are uniformly bounded as a family of linear operators acting in the space  $C[-1, 1]$ . In addition, as a consequence of the obtained result the order of approximation of the continuous function  $f(x)$  by the Vallee-Poussin  $V_{n,m,N}(f, x)$  averages in space  $C[-1, 1]$  is established.

**Keywords:** polynomial, orthogonal system, grid, asymptotic formula, Fourier sums, Vallee-Poussin averages.

**AMS Subject Classification:** 33C45, 42C05.

**For citation:** Nurmagomedov, A. A. and Shikhshinatova, M. M. Approximation Properties of Vallee-Poussin Averages for Discrete Fourier Sums Bypolynomials Orthogonal on Arbitrary Nets, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 2, pp. 93–111 (in Russian). DOI: 10.46698/q4030-9541-4914-r.

## References

1. Daugavet, I. K. and Rafalson, S. Z. About of Some Inequalities for Algebraic Polynomial, *Vestnik Leningradskogo universiteta* [Bulletin of Leningrad University], 1974, vol. 19, pp. 18–24 (in Russian).
2. Konyagin, S. V. Markov's Inequality for Polynomials in the Metric of  $L$ , *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1981, vol. 145, pp. 129–138.
3. Simonov, I. E. Sharp Markov Brothers Type Inequality in the Spaces  $L_p, L_1$  on the a Closed Interval, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences], 2011, vol. 17, no. 3 pp. 282–290 (in Russian).
4. Nurmagomedov, A. A. and Rasulov, N. K. Two-Sided Estimates of Fourier Sums Lebesgue Functions with Respect to Polynomials Orthogonal on Nonuniform Grids, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2018, vol. 51, no. 3, pp. 249–259. DOI: 10.3103/S1063454118030068.
5. Nurmagomedov, A. A. The Approximation of Functions by Partial Sums of the Fourier Series in Polynomials Orthogonal on Arbitrary Grid, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2020, vol. 64, no. 4, pp. 54–63. DOI: 10.3103/S1066369X20040064.
6. Nurmagomedov, A. A. Approximation Properties of Discrete Fourier Sums in Polynomials Orthogonal on Non-Uniform Grids, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 34–47 (in Russian). DOI: 10.46698/k4355-6603-4655-y.
7. Sharapudinov, I. I. and Vagabov, I. A. Convergence of the Vallee-Poussin Means for Fourier–Jacobi Sums, *Mathematical Notes*, 1996, vol. 60, iss. 4, pp. 425–437. DOI: 10.1007/BF02305425.

8. Sharapudinov, I. I. Boundedness in  $C[-1, 1]$  of the de la Vallée-Poussin Means for the Discrete Fourier–Jacobi Sums, *Sbornik: Mathematics*, 1996, vol. 187, no. 1, pp. 141–158. DOI: 10.1070/SM1996v187n01ABEH000105.
9. Sharapudinov, I. I. Approximation Properties of the Vallée–Poussin Means of Partial Sums of a Mixed Series of Legendre Polynomials, *Mathematical Notes*, 2008, vol. 84, no. 3, pp. 417–434. DOI: 10.1134/S0001434608090125.
10. Korkmasov, F. M. Approximation Properties of the de la Vallée-Poussin Means for Discrete Fourier–Jacobi Sums, *Siberian Mathematical Journal*, 2004, vol. 45, no. 2, pp. 273–293. DOI: 10.1023/B:SIMJ.0000021284.60159.bd.
11. Nurmagomedov, A. A. Asymptotic Properties of Polynomials which are Orthogonal on Arbitrary Grids, *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2008, vol. 8, no. 1, pp. 25–31 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2008-8-1-25-31.
12. Szegő, G. *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, 1939, 432 p.
13. Suetin, P. K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classical Orthogonal Polynomials], Moscow, Nauka, 1979 (in Russian).
14. Sharapudinov, I. I. *Mnogochleny, ortogonal'nye na setkah. Teoriya i prilozheniya* [Mixed Series of Orthogonal Polynomials. Theory and Applications], Makhachkala, Dagestan State Pedagogical University, 1997, 255 p. (in Russian).

*Received August 1, 2024*

ALIM A. NURMAGOMEDOV  
Dagestan State Agrarian University,  
180 M. Gadzhiev St., Makhachkala 367032, Russia,  
Associate Professor of the Department of Computer Science  
and Digital Technologies  
E-mail: [alimn@mail.ru](mailto:alimn@mail.ru)  
<https://orcid.org/0000-0002-0033-8699>

MUMINAT M. SHIKHSHINATOVA  
Moscow State University of Civil Engineering,  
26 Yaroslavskoye shosse, Moscow 129337, Russia,  
Associate Professor of the Department of Higher Mathematics  
E-mail: [shichmum\\_2006@mail.ru](mailto:shichmum_2006@mail.ru)  
<https://orcid.org/0009-0005-1617-5547>

УДК 517.95

DOI 10.46698/p6735-7356-6252-u

ON SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF A MULTI-PHASE  
STEFAN PROBLEM IN A MOVING RAY<sup>#</sup>

E. Yu. Panov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> St. Petersburg Department of V. A. Steklov Institute  
of Mathematics of the Russian Academy of Sciences,  
27 Fontanka, St. Petersburg 191023, Russia;

<sup>2</sup> Yaroslav-the-Wise Novgorod State University,  
41 Bolshaya St. Peterburgskaya St., Veliky Novgorod 173003, Russia

E-mail: [evpanov@yandex.ru](mailto:evpanov@yandex.ru)

*To Professor Anatoli Fedorovich Tedeev  
in occasion of his 70th birthday*

**Abstract.** We study self-similar solutions of a multi-phase Stefan problem for a heat equation on the moving ray  $x > \alpha\sqrt{t}$  with Dirichlet or Neumann boundary conditions at the boundary  $x = \alpha\sqrt{t}$ . In the case of Dirichlet condition we prove that an algebraic system for determination of the free boundaries is gradient one and the corresponding potential is an explicitly written strictly convex and coercive function. Therefore, there exists a unique minimum point of the potential, which determines free boundaries and provides the solution. In the case of Neumann condition solutions with different numbers (called types) of phase transitions appear. For each fixed type the system for determination of the free boundaries is again gradient with a strictly convex potential. This allows to find precise conditions for existence and uniqueness of a solution. In the last section we study Stefan–Dirichlet problem on the half-line  $x > 0$  with infinitely many phase transitions. Using again a variational approach, we find sufficient conditions of existence and uniqueness of a solution to the problem under consideration.

**Keywords:** heat equation, Stefan problem, free boundaries, Dirichlet and Neumann boundary conditions, self-similar solutions, variational formulation.

**AMS Subject Classification:** 35K58, 35K20, 35C06, 35R35, 80A22.

**For citation:** Panov, E. Yu. On Self-Similar Solutions of a Multi-Phase Stefan Problem in a Moving Ray, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 2, pp. 112–127. DOI: 10.46698/p6735-7356-6252-u.

## 1. Stefan Problem with Dirichlet Boundary Condition

In a domain  $\Pi_\alpha = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, x > \alpha\sqrt{t}\}$  we consider the multi-phase Stefan problem for the heat equation

$$u_t = a_i^2 u_{xx}, \quad u_i < u < u_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m, \quad (1.1)$$

---

<sup>#</sup>Supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the State task.

© 2025 Panov, E. Yu.

where  $u_0 < u_1 < \dots < u_m < u_{m+1} = u_D$ ,  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , being the temperatures of phase transitions,  $a_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, m$ , are the diffusivity constants. We will study continuous piecewise smooth solutions  $u = u(t, x)$  in  $\Pi_\alpha$  satisfying (1.1) in the classical sense in the domains  $u_i < u(t, x) < u_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, m$ , filled with the phases. On the unknown lines  $x = x_i(t)$  of phase transitions where  $u = u_i$  the following Stefan condition

$$d_i x_i'(t) + k_i u_x(t, x_i(t)+) - k_{i-1} u_x(t, x_i(t)-) = 0 \quad (1.2)$$

is postulated, where  $k_i > 0$  is the thermal conductivity of the  $i$ -th phase, while  $d_i \geq 0$  is the Stefan number (the latent specific heat) for the  $i$ -th phase transition. In (1.2) the unilateral limits  $u_x(t, x_i(t)+)$ ,  $u_x(t, x_i(t)-)$  on the line  $x = x_i(t)$  are taken from the domain corresponding to the warmer/colder phase, respectively. For physical reasons, the Stefan numbers  $d_i$  should be positive. We will study an even more general case  $d_i \geq 0$ .

In this case the problem (1.1), (1.2) is well-posed for  $u_0 \leq u \leq u_D$  and reduces to a degenerate nonlinear diffusion equation (see [1], [2, Chapter 5])

$$g(u)_t - K(u)_{xx} = 0, \quad (1.3)$$

where  $g(u)$ ,  $K(u)$  are strictly increasing functions on  $[u_0, u_D]$  linear on each interval  $(u_i, u_{i+1})$ ,  $i = 0, \dots, m$ , with slopes  $K'(u) = k_i$ ,  $g'(u) = k_i/a_i^2$ , and such that

$$K(u_i+) - K(u_i-) = 0, \quad g(u_i+) - g(u_i-) = d_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

We will study the initial-boundary value problem with constant initial and Dirichlet boundary data

$$u(0, x) = u_0, \quad x > 0; \quad u(t, \alpha\sqrt{t}) = u_D, \quad t > 0. \quad (1.4)$$

By the invariance of our problem under the transformation group  $(t, x) \rightarrow (\lambda^2 t, \lambda x)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ , it is natural to seek a self-similar solution of problem (1.1), (1.2), (1.4), which has the form  $u(t, x) = u(\xi)$ ,  $\xi = x/\sqrt{t}$ . In view of (1.4),

$$u(\alpha) = u_D, \quad u(+\infty) \doteq \lim_{\xi \rightarrow +\infty} u(\xi) = u_0 < u_D.$$

Thus, it is natural to suppose that the function  $u(\xi)$  decreases. The case when  $u_D \leq u_0$  can be treated similarly. Certainly, in this case the function  $u(\xi)$  should be increasing.

For the heat equation  $u_t = a^2 u_{xx}$  a self-similar solution must satisfy the linear ODE  $a^2 u'' = -\xi u'/2$ , the general solution of which is

$$u = C_1 F\left(\frac{\xi}{a}\right) + C_2, \quad C_1, C_2 = \text{const}, \quad \text{where } F(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{s^2}{4}} ds.$$

This allows to write our solution in the form

$$u(\xi) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{F\left(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right)} \left( F\left(\frac{\xi}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) \right), \quad \xi_{i+1} < \xi < \xi_i, \quad i = 0, \dots, m, \quad (1.5)$$

where  $+\infty = \xi_0 > \xi_1 > \dots > \xi_m > \xi_{m+1} = \alpha$  and we agree that

$$F(+\infty) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4}} ds = 1.$$

The parabolas  $\xi = \xi_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , where  $u = u_i$ , are free boundaries, which must be determined by conditions (1.2). In the variable  $\xi$  these conditions have the form (cf. [3, Chapter XI])

$$\frac{d_i \xi_i}{2} + \frac{k_i(u_{i+1} - u_i)F'(\frac{\xi_i}{a_i})}{a_i(F(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}) - F(\frac{\xi_i}{a_i}))} - \frac{k_{i-1}(u_i - u_{i-1})F'(\frac{\xi_i}{a_{i-1}})}{a_{i-1}(F(\frac{\xi_i}{a_{i-1}}) - F(\frac{\xi_{i-1}}{a_{i-1}}))} = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.6)$$

In the case  $m = 1$  system (2.1) reduces to a single equation, which can be easily analysed. As a result, we obtain the classical Neumann solution of the Stefan problem. To investigate the nonlinear system (2.1) in general case of arbitrary number  $m$  of phase transitions, we notice that this system is a gradient one and coincides with the equality  $\nabla E(\bar{\xi}) = 0$ , where the function

$$E(\bar{\xi}) = -\sum_{i=0}^m k_i(u_{i+1} - u_i) \ln \left( F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}\right) \right) + \sum_{i=1}^m \frac{d_i \xi_i^2}{4}, \quad \bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Omega, \quad (1.7)$$

the open convex domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  is given by the inequalities  $\xi_1 > \dots > \xi_m > \alpha$ . Observe that  $E(\bar{\xi}) \in C^\infty(\Omega)$ . Since the function  $F(\xi)$  takes values in the interval  $(0, 1)$ , all the terms in the first sum of expression (1.7) are positive. Therefore,  $E(\bar{\xi}) > 0$ .

**1.1. Coercivity of the function  $E$  and existence of a solution.** We will call a function (or a functional)  $\varphi$  coercive if it tends to  $+\infty$  when the argument approaches the extremes of the domain on which it is defined. This may be exactly formulated as compactness of the sub-level sets  $\{\varphi \leq c\}$ . Let us introduce the sub-level sets of the function  $E(\bar{\xi})$

$$\Omega(c) = \{\bar{\xi} \in \Omega : E(\bar{\xi}) \leq c\}, \quad c > 0.$$

**Proposition 1** (coercivity). *The sets  $\Omega(c)$  are compact for each  $c > 0$ . In particular, the function  $E(\bar{\xi})$  reaches its minimal value.*

$\triangleleft$  If  $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Omega(c)$  then

$$-k_i(u_{i+1} - u_i) \ln \left( F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}\right) \right) \leq E(\bar{\xi}) \leq c, \quad i = 0, \dots, m. \quad (1.8)$$

It follows from (1.8) with  $i = m$  that  $F(\xi_m/a_m) - F(\alpha/a_m) \geq e^{-c/(k_m(u_{m+1}-u_m))}$ , which implies the low bound

$$\xi_m \geq r_1 = a_m F^{-1} \left( F\left(\frac{\alpha}{a_m}\right) + e^{-\frac{c}{k_m(u_{m+1}-u_m)}} \right) > \alpha.$$

Similarly, we derive from (1.8) with  $i = 0$  that

$$1 - F\left(\frac{\xi_1}{a_0}\right) \geq e^{-\frac{c}{k_0(u_1-u_0)}}$$

(notice that  $F(\xi_0/a_0) = F(+\infty) = 1$ ). Therefore,  $F(\xi_1/a_0) \leq 1 - e^{-c/(k_0(u_1-u_0))}$ . This implies the upper bound  $\xi_1 \leq r_2 = a_0 F^{-1}(1 - e^{-c/(k_0(u_1-u_0))})$ .

Further, it follows from (1.8) that for all  $i = 1, \dots, m-1$

$$F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}\right) \geq \delta_i \doteq e^{-\frac{c}{k_i(u_{i+1}-u_i)}} > 0. \quad (1.9)$$

Since  $F'(\xi) = 1/(2\sqrt{\pi})e^{-\xi^2/4} < 1$ , the function  $F(\xi)$  is Lipschitz with constant 1, and it follows from (1.9) that

$$\frac{\xi_i - \xi_{i+1}}{a_i} \geq F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}\right) \geq \delta_i, \quad i = 1, \dots, m - 1,$$

and we obtain the estimates  $\xi_i - \xi_{i+1} \geq a_i \delta_i$ . Thus, the set  $\Omega(c)$  is contained in a compact

$$K = \{\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m : r_2 \geq \xi_1 \geq \dots \geq \xi_m \geq r_1, \xi_i - \xi_{i+1} \geq a_i \delta_i (\forall i = 1, \dots, m - 1)\}.$$

Obviously,  $K \subset \Omega$ . Since  $E(\bar{\xi})$  is continuous on  $K$ , the set  $\Omega(c)$  is a closed subset of  $K$  and therefore is compact. For  $c > N \doteq \inf E(\bar{\xi})$ , this set is not empty and the function  $E(\bar{\xi})$  reaches on it a minimal value, which is evidently equal to  $N$ .  $\triangleright$

We have established the existence of minimal value  $E(\bar{\xi}_0) = \min E(\bar{\xi})$ . At the point  $\bar{\xi}_0$  the required condition  $\nabla E(\bar{\xi}_0) = 0$  is satisfied, and  $\bar{\xi}_0$  is a solution of the system (2.1). The coordinates of  $\bar{\xi}_0$  determine the solution (1.5) of our Stefan problem. Thus, we have established the following existence result.

**Theorem 1.** *There exists a self-similar solution (1.5) of the problem (1.1), (1.2), (1.4).*

**1.2. Convexity of the function  $E$  and uniqueness of a solution.** In this section we prove that the function  $E(\bar{\xi})$  is strictly convex. Since a strictly convex function can have at most one critical point (and it is necessarily a global minimum), the system (2.1) has at most one solution, that is, a self-similar solution (1.5) of the problem (1.1), (1.2), (1.4) is unique. We will need the following simple lemma proven in [4] (see also [5, 6]). For the sake of completeness we provide it with the proof.

**Lemma 1.** *The function  $P(x, y) = -\ln(F(x) - F(y))$  is strictly convex in the half-plane  $x > y$ .*

$\triangleleft$  The function  $P(x, y)$  is infinitely differentiable in the domain  $x > y$ . To prove the lemma, we need to establish that the Hessian  $D^2P$  is positive definite at every point. By the direct computation we find

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, y) &= \frac{(F'(x))^2 - F''(x)(F(x) - F(y))}{(F(x) - F(y))^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(x, y) &= \frac{(F'(y))^2 - F''(y)(F(y) - F(x))}{(F(x) - F(y))^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P(x, y) = -\frac{F'(x)F'(y)}{(F(x) - F(y))^2}. \end{aligned}$$

We have to prove positive definiteness of the matrix  $Q = (F(x) - F(y))^2 D^2P(x, y)$  with the components

$$\begin{aligned} Q_{11} &= (F'(x))^2 - F''(x)(F(x) - F(y)), \\ Q_{22} &= (F'(y))^2 - F''(y)(F(y) - F(x)), \quad Q_{12} = Q_{21} = -F'(x)F'(y). \end{aligned}$$

Since  $F'(x) = 1/(2\sqrt{\pi})e^{-x^2/4}$ , then  $F''(x) = -(x/2)F'(x)$  and the diagonal elements of this matrix can be written in the form

$$\begin{aligned} Q_{11} &= F'(x) \left( \frac{x}{2} (F(x) - F(y)) + F'(x) \right) = F'(x) \left( \frac{x}{2} (F(x) - F(y)) + (F'(x) - F'(y)) \right) + F'(x)F'(y), \\ Q_{22} &= F'(y) \left( \frac{y}{2} (F(y) - F(x)) + (F'(y) - F'(x)) \right) + F'(x)F'(y). \end{aligned}$$

By Cauchy mean value theorem there exists such a value  $z \in (y, x)$  that

$$\frac{F'(x) - F'(y)}{F(x) - F(y)} = \frac{F''(z)}{F'(z)} = -\frac{z}{2}.$$

Therefore,

$$Q_{11} = F'(x) \frac{(F(x) - F(y))(x - z)}{2} + F'(x)F'(y),$$

$$Q_{22} = F'(y) \frac{(F(x) - F(y))(z - y)}{2} + F'(x)F'(y),$$

and it follows that  $Q = R_1 + F'(x)F'(y)R_2$ , where  $R_1$  is a diagonal matrix with the positive diagonal elements

$$\frac{F'(x)(F(x) - F(y))(x - z)}{2}, \quad \frac{F'(y)(F(x) - F(y))(z - y)}{2} \quad \text{while } R_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Since  $R_1 > 0$ ,  $R_2 \geq 0$ , then the matrix  $Q > 0$ , as was to be proved.  $\triangleright$

REMARK 1. In addition to Lemma 1 we observe that the functions  $P(x, -\infty) = -\ln F(x)$ ,  $P(+\infty, x) = -\ln(1 - F(x))$  of single variable  $x$  are strictly convex on  $\mathbb{R}$ . In fact, it follows from Lemma 1 in the limit as  $x > y \rightarrow -\infty$  that the function  $P(x, -\infty) = \lim_{y \rightarrow -\infty} P(x, y)$  is convex on  $\mathbb{R}$ . This implies that

$$(F(x))^2 \frac{d^2}{dx^2} P(x, -\infty) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left[ F'(x) \left( \frac{x}{2} (F(x) - F(y)) + (F'(x) - F'(y)) \right) + F'(x)F'(y) \right]$$

$$= F'(x) \left( \frac{x}{2} F(x) + F'(x) \right) \geq 0.$$

If  $(d^2/dx^2)P(x, -\infty) = 0$  at some point  $x = x_0 \in \mathbb{R}$  then  $(x_0/2)F(x_0) + F'(x_0) = 0$  and therefore,  $x_0$  is a minimum point of the nonnegative function  $(x/2)F(x) + F'(x)$ . Hence,

$$0 = \left( \frac{x}{2} F(x) + F'(x) \right)'(x_0) = \frac{F(x_0)}{2} + F''(x_0) + \frac{F'(x_0)x_0}{2} = \frac{F(x_0)}{2} > 0,$$

which is impossible. Hence,  $(d^2/dx^2)P(x, -\infty) > 0$  for all  $x \in \mathbb{R}$  and the function  $P(x, -\infty)$  is strictly convex. The proof of the strict convexity of  $P(+\infty, x)$  is similar. In the limit as  $x < y \rightarrow +\infty$  we derive from Lemma 1 that the function  $P(+\infty, x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} P(y, x)$  is convex on  $\mathbb{R}$  and in particular

$$(1 - F(x))^2 \frac{d^2}{dx^2} P(+\infty, x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[ F'(x) \left( \frac{x}{2} (F(x) - F(y)) + (F'(x) - F'(y)) \right) + F'(y)F'(x) \right]$$

$$= F'(x) \left( \frac{x}{2} (F(x) - 1) + F'(x) \right) \geq 0.$$

Assuming that  $(d^2/dx^2)P(+\infty, x) = 0$  at some point  $x = x_0 \in \mathbb{R}$ , we find that  $(x_0/2)(F(x_0) - 1) + F'(x_0) = 0$ , which implies that  $x_0$  is a minimum point of the nonnegative function  $(x/2)(F(x) - 1) + F'(x)$ . Therefore,

$$0 = \left( \frac{x}{2} (F(x) - 1) + F'(x) \right)'(x_0) = \frac{F(x_0) - 1}{2} + F''(x_0) + \frac{F'(x_0)x_0}{2} = \frac{F(x_0) - 1}{2} < 0.$$

This contradiction implies that  $(d^2/dx^2)P(+\infty, x) > 0$  for all  $x \in \mathbb{R}$  and, therefore, the function  $P(+\infty, x)$  is strictly convex.

Now we are ready to prove the expected convexity of  $E(\bar{\xi})$ .

**Proposition 2.** *The function  $E(\bar{\xi})$  is strictly convex on  $\Omega$ .*

$\triangleleft$  We introduce the functions

$$E_i(\bar{\xi}) = -k_i(u_{i+1} - u_i) \ln \left( F \left( \frac{\xi_i}{a_i} \right) - F \left( \frac{\xi_{i+1}}{a_i} \right) \right), \quad i = 0, \dots, m.$$

By Lemma 1 and Remark 1 all these functions are convex. Since

$$E(\bar{\xi}) = \sum_{i=1}^m E_i(\bar{\xi}) + E_0(\bar{\xi}) + \sum_{i=1}^m \frac{d_i \xi_i^2}{4}$$

and all functions in this sum are convex, it is sufficient to prove strong convexity of the sum

$$\tilde{E}(\bar{\xi}) = \sum_{i=1}^m E_i(\bar{\xi}).$$

By Lemma 1 and Remark 1 all terms in this sum are convex functions. Therefore, the function  $\tilde{E}$  is convex as well. To prove the strict convexity, we assume that for some vector  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{R}^m$ .

$$D^2 \tilde{E}(\bar{\xi}) \zeta \cdot \zeta = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 \tilde{E}(\bar{\xi})}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \zeta_i \zeta_j = 0. \quad (1.10)$$

Since

$$0 = D^2 \tilde{E}(\bar{\xi}) \zeta \cdot \zeta = \sum_{i=1}^m D^2 E_i(\bar{\xi}) \zeta \cdot \zeta$$

while all the terms are nonnegative, we conclude that

$$D^2 E_i(\bar{\xi}) \zeta \cdot \zeta = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.11)$$

By Lemma 1 for  $i = 1, \dots, m - 1$  the function  $E_i(\bar{\xi})$  is strictly convex as a function of two variables  $\xi_i, \xi_{i+1}$  and it follows from (1.11) that  $\zeta_i = \zeta_{i+1} = 0, i = 1, \dots, m - 1$ . Observe that in the case  $m = 1$  there are no such  $i$ . In this case we apply (1.11) for  $i = m$ . Taking into account Remark 1, we find that  $E_m(\bar{\xi})$  is a strictly convex function of the single variable  $\xi_m$ , and it follows from (1.11) that  $\zeta_m = 0$ . In any case we obtain that the vector  $\zeta = 0$ . Thus, relation (1.10) can hold only for zero  $\zeta$ , that is, the matrix  $D^2 \tilde{E}(\bar{\xi})$  is (strictly) positive definite, and the function  $\tilde{E}(\bar{\xi})$  is strictly convex. This completes the proof.  $\triangleright$

Propositions 1, 2 imply the main result of this section.

**Theorem 2.** *There exists a unique self-similar solution (1.5) of problem (1.1), (1.2), (1.4), and it corresponds to the minimum of strictly convex and coercive function (1.7).*

**Corollary 1.** *The phase transition parameters  $\xi_i, i = 1, \dots, m$ , corresponding to a solution (1.5) of problem (1.1), (1.2), (1.4) depend continuously on the Dirichlet data  $u_D$ .*

$\triangleleft$  Since the function  $E(\bar{\xi})$  is strictly convex and continuous with respect to the parameter  $u_{m+1} = u_D$ , its minimum point  $\bar{\xi} = \bar{\xi}(u_D)$  is a continuous function of this parameter.  $\triangleright$

As follows from Corollary 1, the unique solution (1.5) depends continuously (in the uniform norm) on the Dirichlet data. Let us demonstrate that this dependence is also monotone.

**Corollary 2.** *Let  $u_r = u_r(\xi)$  be solutions (1.5) of problem (1.1), (1.2), (1.4) with Dirichlet data  $u_{Dr}, r = 1, 2$ . If  $u_{D1} \geq u_{D2}$  then  $u_1(\xi) \geq u_2(\xi)$  for all  $\xi > \alpha$ .*

$\triangleleft$  Assuming the contrary, we find a point  $\beta > \alpha$ , where  $u_1(\beta) < u_2(\beta)$ . Since  $u_1(\alpha) = u_{D1} \geq u_{D2} = u_2(\alpha)$  and the functions  $u_1, u_2$  are continuous on the segment  $[\alpha, \beta]$ , there exists such  $\alpha' \in [\alpha, \beta]$  that  $u_1(\alpha') = u_2(\alpha')$ . Then  $u_r(\xi), \xi > \alpha', r = 1, 2$ , are different solutions (1.5) of the same problem (1.1), (1.2), (1.4) in the domain  $\Pi_{\alpha'}$ , which contradicts to the uniqueness statement of Theorem 2.  $\triangleright$

REMARK 2. In paper [5] Stefan problem (1.1), (1.2) was studied in the half-plane  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  with Riemann initial condition

$$u(0, x) = \begin{cases} u_+, & x > 0, \\ u_-, & x < 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Actually, this problem coincides with the problem (1.1), (1.2), (1.4), if we take  $\alpha = -\infty$ . Solutions of problem (1.1), (1.2), (1.12) have the same structure as in (1.5) and correspond to a unique minimum point of the function similar to (1.7) with only the difference that the parameters  $\xi_i$  can take arbitrary real values. In this section we mainly follow the scheme of paper [5], see also the paper [6], devoted to the case  $\alpha = 0$  of the fixed ray.

In paper [4] the Stefan–Riemann problem (1.1), (1.2), (1.12) was studied in the case of arbitrary (possibly negative) latent specific heats  $d_i$ . We found a necessary and sufficient condition for coercivity of  $E(\tilde{\xi})$ , as well as a stronger sufficient condition of its strict convexity. The similar results can be obtained for the Stefan–Dirichlet problem (1.1), (1.2), (1.4).

Also remark that in recent paper [7] a variational description was given for self-similar entropy solutions of nonlinear convection–diffusion equations (with the Dafermos diffusion). It is shown that the corresponding variational functional (i. e., the potential) can now take its minimal value at boundary points, that leads to inequalities in the criterion of minimality. We demonstrate in [7] that these inequalities coincide with the known Oleinik–Carrillo entropy conditions.

## 2. Stefan Problem with Neumann Boundary Condition

Now we consider the Stefan problem (1.1), (1.2) in  $\Pi_\alpha$ , where we suppose now that  $\alpha \geq 0$ , with the constant initial data  $u_0$  and with Neumann boundary condition:

$$u(0, x) = u_0, \quad x > 0; \quad K(u)_x(t, \alpha\sqrt{t}) = t^{-\frac{1}{2}} b_N, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

where  $K(u)$  is the diffusion function in equation (1.3), now defined on infinite interval  $[u_0, +\infty)$  (we take  $u_{m+1} = +\infty$ ), and  $b_N < 0$  is a constant. The specific form of Neumann boundary data is connected with the requirement of invariance of our problem under the scaling transformations  $(t, x) \rightarrow (\lambda^2 t, \lambda x)$ ,  $\lambda > 0$ . This allows to concentrate on the study of self-similar solutions  $u = u(x/\sqrt{t})$  of the problem (1.1), (1.2), (2.1). For such solutions conditions (2.1) reduce to the requirements

$$K(u)'(\alpha) = b_N, \quad u(+\infty) = u_0. \quad (2.2)$$

Since  $K(u)$  is a strictly increasing function and  $b_N < 0$ , we will assume that the function  $u(\xi)$  decreases. The case  $b_N > 0$  corresponds to an increasing  $u(\xi)$  and can be treated similarly. For homogeneous Neumann problem  $b_N = 0$  there is only the constant solution  $u \equiv u_0$ . Let  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , be all phase transition temperatures in the interval  $(u_0, +\infty)$  so that  $u_0 < u_1 < \dots < u_m < u_{m+1} = +\infty$ . Assume that  $u = u(\xi)$  is a decreasing self-similar solution of (1.1), (1.2), (2.1). Then  $u(\alpha) > u_0$  and there is an integer  $n$ ,  $0 \leq n \leq m$ , such that  $u_n < u(\alpha) \leq u_{n+1}$ . We call this number  $n$  (i. e., the number of phase transitions) a type of solution  $u$ . The Neumann condition for a solution of type  $n$  reads  $k_n u'(\alpha) = b_N$  (notice that  $k_n u_x$  is exactly the heat flow through the boundary point). A solution of type 0 does not contain free boundaries and can be found from the formula

$$u(\xi) = u_0 + \frac{a_0 b_N}{k_0 F'(\frac{\alpha}{a_0})} \left( F\left(\frac{\xi}{a_0}\right) - 1 \right). \quad (2.3)$$

As is easy to verify,  $k_0 u'(\alpha) = b_N$ ,  $u(+\infty) = u_0$  and requirement (2.2) is satisfied. By easy computation we find

$$u(\alpha) = u_0 + \frac{a_0 b_N}{k_0 F'(\frac{\alpha}{a_0})} \left( F\left(\frac{\alpha}{a_0}\right) - 1 \right),$$

therefore, the necessary and sufficient condition for existence of a solution (2.3) is the inequality

$$u_0 + \frac{a_0 b_N}{k_0 F'(\frac{\alpha}{a_0})} \left( F\left(\frac{\alpha}{a_0}\right) - 1 \right) \leq u_1,$$

which can be written in the form

$$-b_N \leq \gamma_1 \doteq \frac{k_0(u_1 - u_0)F'(\frac{\alpha}{a_0})}{a_0(1 - F(\frac{\alpha}{a_0}))}. \quad (2.4)$$

A solution of type  $n > 0$  has structure similar to (1.5) (with  $m = n$ )

$$u(\xi) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{F(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}) - F(\frac{\xi_i}{a_i})} \left( F\left(\frac{\xi}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) \right), \quad \xi_{i+1} < \xi < \xi_i, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (2.5)$$

$$u(\xi) = u_n + \frac{a_n b_N}{k_n F'(\frac{\alpha}{a_n})} \left( F\left(\frac{\xi}{a_n}\right) - F\left(\frac{\xi_n}{a_n}\right) \right), \quad \alpha < \xi < \xi_n. \quad (2.6)$$

The necessary (but not sufficient, as we will soon realize) condition  $u(\alpha) \leq u_{n+1}$  of existence of such a solution has the form

$$u(\alpha) = \Phi_n^{ND}(-b_N) \doteq u_n - \frac{a_n b_N}{k_n F'(\frac{\alpha}{a_n})} \left( F\left(\frac{\xi_n}{a_n}\right) - F\left(\frac{\alpha}{a_n}\right) \right) \leq u_{n+1} \quad (2.7)$$

(if  $n = m$  then it is always fulfilled since  $u_{m+1} = +\infty$ ). In (2.7) we introduce the Neumann-to-Dirichlet mapping, which maps a Neumann data  $-b_N$  to the Dirichlet data  $u(\alpha)$ . We underline that the value  $\xi_n$  depends on  $-b_N$ .

Assume that  $u(\xi)$  is a solution (2.5), (2.6) of type  $n$ . On a phase transition lines  $\xi = \xi_i$ , the Stefan condition reads

$$\frac{d_i \xi_i}{2} + k_i \frac{(u_{i+1} - u_i) F'(\frac{\xi_i}{a_i})}{a_i \left( F(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}) - F(\frac{\xi_i}{a_i}) \right)} - k_{i-1} \frac{(u_i - u_{i-1}) F'(\frac{\xi_i}{a_{i-1}})}{a_{i-1} \left( F(\frac{\xi_i}{a_{i-1}}) - F(\frac{\xi_{i-1}}{a_{i-1}}) \right)} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (2.8)$$

$$\frac{d_n \xi_n}{2} + \frac{b_N F'(\frac{\xi_n}{a_n})}{F'(\frac{\alpha}{a_n})} - k_{n-1} \frac{(u_n - u_{n-1}) F'(\frac{\xi_n}{a_{n-1}})}{a_{n-1} \left( F(\frac{\xi_n}{a_{n-1}}) - F(\frac{\xi_{n-1}}{a_{n-1}}) \right)} = 0, \quad i = n. \quad (2.9)$$

Like in the case of Dirichlet boundary condition, this system turns out to be gradient one, it coincides with the equality  $\nabla E_n = 0$ , where the function

$$E_n(\bar{\xi}) = - \sum_{i=0}^{n-1} k_i (u_{i+1} - u_i) \ln \left( F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}\right) \right) + \frac{a_n b_N}{F'(\frac{\alpha}{a_n})} F\left(\frac{\xi_n}{a_n}\right) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n d_i \xi_i^2, \quad \bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Omega_n, \quad (2.10)$$

$\Omega_n$  is an open convex set in  $\mathbb{R}^n$  consisting of vectors with strictly decreasing coordinates lying in the interval  $(\alpha, +\infty)$ . Remark that  $F''(s) = -s/2F'(s) < 0$  for all  $s > 0$ . Since  $b_N < 0$ , this implies that the term  $\frac{a_n b_N}{F'(\alpha/a_n)} F(\xi_n/a_n)$  is a strictly convex function of the single variable  $\xi_n$  on the interval  $[\alpha, +\infty)$ . In the same way as in the proof of Proposition 2 we find that the function

$$\tilde{E}_n(\bar{\xi}) = -\sum_{i=0}^{n-1} k_i(u_{i+1} - u_i) \ln \left( F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}\right) \right) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n d_i \xi_i^2$$

is strictly convex on a domain  $\bar{\Omega}_n = \{\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \xi_1 > \dots > \xi_n \geq \alpha\} \supset \Omega_n$ . Since  $E_n(\bar{\xi}) = \tilde{E}_n(\bar{\xi}) + \frac{a_n b_N}{F'(\alpha/a_n)} F(\frac{\xi_n}{a_n})$ , the function  $E_n(\bar{\xi})$  is strictly convex on  $\bar{\Omega}_n$  as well. Let us demonstrate that this function is coercive on  $\bar{\Omega}_n$ .

**Proposition 3.** *For all  $c \in \mathbb{R}$  the set  $\bar{\Omega}_n(c) = \{\bar{\xi} \in \bar{\Omega}_n : E_n(\bar{\xi}) \leq c\}$  is compact.*

$\triangleleft$  Suppose that  $\bar{\xi} \in \bar{\Omega}_n$ ,  $E_n(\bar{\xi}) \leq c$ . Then

$$\begin{aligned} \tilde{E}_n(\bar{\xi}) &\doteq -\sum_{i=0}^{n-1} k_i(u_{i+1} - u_i) \ln \left( F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}\right) \right) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n d_i \xi_i^2 = E(\bar{\xi}) - \frac{a_n b_N}{F'(\alpha/a_n)} F\left(\frac{\xi_n}{a_n}\right) \leq c_1 \doteq c - \frac{a_n b_N}{F'(\alpha/a_n)}. \end{aligned}$$

Since all the terms of the left-hand side of this inequality are positive, we obtain the relations

$$-k_i(u_{i+1} - u_i) \ln \left( F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}\right) \right) \leq c_1, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (2.11)$$

the same as inequalities (1.8). As follows from (2.11), the set  $\bar{\Omega}_n(c) = \emptyset$  if  $c_1 \leq 0$ . Therefore, we may (and will) suppose that  $c_1 > 0$ . Arguing as in the proof of Proposition 1, we derive from (2.11) the bounds

$$\xi_1 \leq r_2 = a_0 F^{-1} \left( 1 - e^{-\frac{c_1}{k_0(u_1 - u_0)}} \right), \quad \frac{\xi_i - \xi_{i+1}}{a_i} \geq \delta_i = e^{-\frac{c_1}{k_i(u_{i+1} - u_i)}} > 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Thus, the set  $\bar{\Omega}_n(c)$  is contained in a compact

$$K = \left\{ \bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : r_2 \geq \xi_1 \geq \dots \geq \xi_n \geq \alpha, \xi_i - \xi_{i+1} \geq a_i \delta_i (\forall i = 1, \dots, n-1) \right\}$$

(notice that this set is empty if  $r_2 \leq \alpha$ ). Since  $E_n(\bar{\xi})$  is continuous on  $K \subset \bar{\Omega}_n$ , the set  $\bar{\Omega}_n(c)$  is a closed subset of  $K$  and therefore is compact. This completes the proof.  $\triangleright$

It follows from Proposition 3 and the strict convexity of function  $E_n$  that there exists a point  $\bar{\xi}^n = (\xi_1^n, \dots, \xi_n^n) \in \bar{\Omega}_n$  of global minimum of  $E_n$ , and it is a unique local minimum of this function. There are two possible cases:

A)  $\bar{\xi}^n \in \Omega_n$ , i. e.  $\xi_n^n > \alpha$ . If, in addition, condition (2.7) is satisfied then there exists a unique solution (2.5), (2.6) of type  $n$  with  $\xi_i = \xi_i^n$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;

B)  $\bar{\xi}^n \notin \Omega_n$ , i. e.  $\xi_n^n = \alpha$ . Then  $E_n$  has no critical points in  $\Omega_n$ , and a solution of type  $n$  does not exist. Let us investigate this case more precisely. The necessary and sufficient conditions for the point  $\bar{\xi}^n = (\xi_1^n, \dots, \xi_{n-1}^n, \alpha)$  to be a minimum point of  $E_n(\bar{\xi})$  are the following

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} E_n(\bar{\xi}^n) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n} E_n(\bar{\xi}^n) \geq 0, \quad (2.13)$$

where condition (2.12) appears only if  $n > 1$ . Notice that for such  $n$

$$E_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \alpha) = - \sum_{i=0}^{n-1} k_i(u_{i+1} - u_i) \ln \left( F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}\right) \right) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} d_i \xi_i^2 \\ + \frac{a_n b_N}{F'\left(\frac{\alpha}{a_n}\right)} F\left(\frac{\alpha}{a_n}\right) + \frac{d_n \alpha^2}{4}, \quad \xi_n = \alpha, \quad (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \Omega_{n-1}.$$

We see that  $E(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \doteq E_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \alpha)$  coincides (up to an additive constant) with function (1.7) corresponding to Stefan–Dirichlet problem (1.1), (1.2), (1.4), where  $m = n - 1$  and  $u_D = u_n$ . Relation (2.12) means that  $\nabla E(\xi_1^n, \dots, \xi_{n-1}^n) = 0$ , that is,  $(\xi_1^n, \dots, \xi_{n-1}^n) \in \Omega_{n-1}$  is a unique minimal point of  $E(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ . According to Theorem 2, the coordinates  $\xi_i^n$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , coincide with the phase transition parameters  $\xi_i$  of the unique solution (1.5) of problem (1.1), (1.2), (1.4) with  $u_D = u_n$  (in particular, they do not depend on the Neumann data  $b_N$  and on parameters  $a_i, k_i, d_i$  with  $i \geq n$ ). As is easy to calculate, condition (2.13) reads

$$-b_N \leq \gamma_n + \frac{d_n \alpha}{2}, \quad \text{where } \gamma_n \doteq \frac{k_{n-1}(u_n - u_{n-1})F'\left(\frac{\alpha}{a_{n-1}}\right)}{a_{n-1}\left(F\left(\frac{\xi_{n-1}^n}{a_{n-1}}\right) - F\left(\frac{\alpha}{a_{n-1}}\right)\right)}. \quad (2.14)$$

In the case  $n = 1$ , we find that  $\xi_{n-1}^n = \xi_0^1 = +\infty$ , so that  $F(\xi_{n-1}^n/a_{n-1}) = F(+\infty) = 1$ , and the constant  $\gamma_1$  coincides with the value introduced in (2.4). Under requirement (2.14) the case B) is realised so that a solution of type  $n$  does not exist.

We introduce the Dirichlet-to-Neumann mapping  $\Phi_n^{DN}$ , which maps a value  $r \in (u_n, u_{n+1}]$  to a value  $-k_n u'(\alpha)$ , where  $u = u^r(\xi)$  is a solution of the Stefan–Dirichlet problem (1.1), (1.2), (1.4) with  $m = n$  and  $u_D = r$ . This mapping is inverse to the Neumann-to-Dirichlet mapping  $\Phi_n^{ND}$  introduced in (2.7) above. Notice that  $u_{m+1} = +\infty$  and in the case  $n = m$  the interval  $(u_n, u_{n+1}]$  is replaced by the unbounded interval  $(u_m, +\infty)$ . It follows from (1.5) that

$$\Phi_n^{DN}(r) = \frac{k_n F'\left(\frac{\alpha}{a_n}\right)(r - u_n)}{a_n \left(F\left(\frac{\xi_n}{a_n}\right) - F\left(\frac{\alpha}{a_n}\right)\right)}, \quad (2.15)$$

where  $\xi_n = \xi_n(r)$  depends on the Dirichlet data  $r = u(\alpha)$ . Notice that  $F(\xi_0/a_0) = F(+\infty) = 1$  and

$$\Phi_0^{DN}(r) = \frac{k_0 F'\left(\frac{\alpha}{a_0}\right)(r - u_0)}{a_0 \left(1 - F\left(\frac{\alpha}{a_0}\right)\right)}, \quad u_0 < r \leq u_1, \quad (2.16)$$

is a linear function. By the construction  $u^r(\xi)$  is a solution of type  $n$  to the Stefan–Neumann problem (1.1), (1.2), (2.1) with Neumann data  $b_N = -\Phi_n^{DN}(r)$ . Therefore, condition (2.14) cannot hold, and we claim that  $\Phi_n^{DN}(r) > \gamma_n + d_n \alpha/2$  for all  $r \in (u_n, u_{n+1}]$ .

**Lemma 2.** *The function  $\Phi_n^{DN}(r)$  is strictly increasing continuous function on  $(u_n, u_{n+1}]$ , such that*

$$\Phi_n^{DN}(u_n+) = \lim_{r \rightarrow u_n+} \Phi_n^{DN}(r) = \gamma_n + \frac{d_n \alpha}{2}, \quad \Phi_n^{DN}(u_{n+1}) = \gamma_{n+1}. \quad (2.17)$$

*In particular,  $\gamma_{n+1} > \gamma_n + d_n \alpha/2$  for all  $n = 0, \dots, m$ . Here we agree that  $\gamma_0 = 0$ ,  $\gamma_{m+1} = +\infty$ ,  $d_0 = 0$ .*

◁ By Corollary 1 the function  $\xi_n = \xi_n(r)$  is continuous. In view of (2.15) we see that  $\Phi_n^{DN}(r)$  is a continuous function on  $(u_n, u_{n+1}]$ . If this function is not strictly monotone then we can find values  $r_1, r_2$  such that  $u_n < r_1 < r_2 < u_{n+1}$  and that  $\Phi_n^{DN}(r_1) = \Phi_n^{DN}(r_2)$ . Then the functions  $u^{r_1}(\xi)$ ,  $u^{r_2}(\xi)$  are different self-similar solutions of type  $n$  to Stefan–Neumann

problem (1.1), (1.2), (2.1) with the same Neumann data  $b_N = -\Phi_n^{DN}(r_1) = -\Phi_n^{DN}(r_2)$ , which contradicts to the uniqueness of this solution. Thus,  $\Phi_n^{DN}(r)$  is a strictly monotone function. If  $n < m$ , then

$$\Phi_n^{DN}(u_{n+1}) = \frac{k_n F'(\frac{\alpha}{a_n})(u_{n+1} - u_n)}{a_n (F(\frac{\xi_n^{n+1}}{a_n}) - F(\frac{\alpha}{a_n}))} = \gamma_{n+1}.$$

In the case  $n = m$

$$\Phi_n^{DN}(r) = \frac{k_m F'(\frac{\alpha}{a_m})(r - u_m)}{a_m (F(\frac{\xi_m}{a_m}) - F(\frac{\alpha}{a_m}))} \geq \frac{k_m F'(\frac{\alpha}{a_m})}{a_m} (r - u_m) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} +\infty$$

and we claim that

$$\Phi_m^{DN}(u_{m+1}) = \lim_{r \rightarrow u_{m+1} = +\infty} \Phi_m^{DN}(r) = \gamma_{m+1} = +\infty.$$

We notice that by the strict convexity of function (2.10) its minimum point  $\bar{\xi}^n$  depends continuously on the parameter  $s = -b_N$ . In particular, the last coordinate  $\xi_n^n = \xi_n^n(s)$  is a continuous function of  $s$ , and the introduced in (2.7) Neumann-to-Dirichlet map  $\Phi_n^{ND}$  is a continuous function. As follows from (2.14),  $\xi_n^n(\gamma_n + d_n \alpha / 2) = \alpha$  while  $\xi_n^n(s) > \alpha$  for  $s > \gamma_n + d_n \alpha / 2$ . Therefore, for sufficiently small  $h > 0$  the value

$$r_h = \Phi_n^{ND}\left(\gamma_n + \frac{d_n \alpha}{2} + h\right) \in (u_n, u_{n+1}]$$

and  $r_h \rightarrow u_n$  as  $h \rightarrow 0$ . Since  $\Phi_n^{DN}(r_h) = \gamma_n + d_n \alpha / 2 + h$  and the function  $\Phi_n^{DN}(r)$  is monotone, we conclude that  $\Phi_n^{DN}(u_{n+1}) = \gamma_n + d_n \alpha / 2$ . In the case  $n = 0$  the equality  $\Phi_0^{DN}(u_0) = \gamma_0 = 0$  directly follows from expression (2.16). Remind that  $\Phi_n^{DN}(r) > \gamma_n + d_n \alpha / 2$  for  $r > u_n$ . In particular,

$$\gamma_{n+1} = \Phi_n^{DN}(u_{n+1}) > \gamma_n + \frac{d_n \alpha}{2}.$$

Therefore, the function  $\Phi_n^{DN}(r)$  strictly increases.  $\triangleright$

It follows from Lemma 2 that the Dirichlet-to-Neumann map

$$\Phi^{DN}(r) = \Phi_n^{DN}(r) \quad \text{if } u_n < r \leq u_{n+1}, \quad n = 0, \dots, m$$

is a strictly increasing function on  $(u_0, +\infty)$  with the image

$$Im_\alpha = \bigcup_{n=0}^m \left( \gamma_n + \frac{d_n \alpha}{2}, \gamma_{n+1} \right].$$

This function is continuous, except the points  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , where it has the jumps  $\Phi^{DN}(u_i+) - \Phi^{DN}(u_i-) = d_i \alpha / 2$ . In particular,  $Im_\alpha = (0, +\infty)$  and  $\Phi^{DN}(r)$  is a homeomorphism of  $(u_0, +\infty)$  onto  $(0, +\infty)$  if either  $\alpha = 0$  or all  $d_i = 0$ . In general case, Theorem 2 implies the following results on correctness of problem (1.1), (1.2), (2.1).

**Theorem 3.** *A solution of the Stefan–Neumann problem (1.1), (1.2), (2.1) is unique and exists if and only if  $-b_N \in Im_\alpha$ . The type  $n$  of this solution is determined by the condition  $\gamma_n + d_n \alpha / 2 < -b_N \leq \gamma_{n+1}$ .*

In the case  $m = 1$  the parameter  $\gamma_1 = \frac{k_0(u_1 - u_0)F'(\alpha/a_0)}{a_0(1 - F(\alpha/a_0))}$ . Hence, for  $0 < -b_N \leq \gamma_1$  a unique solution  $u = u(\xi)$  of (1.1), (1.2), (2.1) has type 0 while for  $-b_N > \gamma_1 + d_1 \alpha / 2$  it has type 1. In the remaining case  $\gamma_1 < -b_N \leq \gamma_1 + d_1 \alpha / 2$  solutions are absent.

REMARK 3. In the case  $\alpha = 0$  we obtain the standard Stefan–Neumann problem (1.1), (1.2), (2.1) in a half-line  $x > 0$ . As follows from Theorem 3, this problem has a unique solution (2.5), (2.6), where the type  $n$  is determined from the relation  $\gamma_n < -b_N \leq \gamma_{n+1}$ .

### 3. The Case of Infinitely Many Phase Transitions

In this section we consider the exotic case when the number  $m$  of phase transitions is infinite. More precisely, we suppose that the phase transitions temperatures  $u_i > u_0$  form a strictly increasing sequence,  $u_{i+1} > u_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . In (1.1) there are infinitely many phases, the  $i$ -th phase corresponds to the temperature  $u \in (u_i, u_{i+1})$ ,  $i = \{0\} \cup \mathbb{N}$ . The parameters  $a_i, k_i > 0$  are, respectively, the diffusivity constant and the thermal conductivity of the  $i$ -th phase,  $i = 0, 1, \dots$ ;  $d_i \geq 0$  is the latent specific heat of the  $i$ -th phase transition,  $i = 1, 2, \dots$ . We will study the problem (1.1), (1.2), (1.4) in the quarter-plane  $\Pi_0$  with possibly infinite Dirichlet data  $u_D = \lim_{i \rightarrow \infty} u_i \leq +\infty$ . A self-similar solution  $u = u(\xi)$ ,  $\xi = x/\sqrt{t}$ , of this problem is given by expression (1.5), where now  $i$  runs over all nonnegative integers. The Stefan conditions (1.2) reduce again to (now infinite) system (2.1), which can be written in the form  $(\partial/\partial\xi_i)E(\bar{\xi}) = 0$ , where the functional

$$E(\bar{\xi}) = - \sum_{i=0}^{\infty} k_i(u_{i+1} - u_i) \ln \left( F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}\right) \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i \xi_i^2}{4}, \quad (3.1)$$

$$\bar{\xi} = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega = \{ \bar{\xi} = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_{\infty} : \xi_i > \xi_{i+1} > 0 \ (\forall i \in \mathbb{N}) \}.$$

Here, as usual,  $l_{\infty}$  is the space of bounded sequences equipped with the norm  $\|\bar{\xi}\|_{\infty} = \sup |\xi_i|$ . As is well-known, this space is dual to the space of summable sequences  $l_1$ . Observe also that there is only finite number of terms in (3.1) depending on a fixed variable  $\xi_i$ . Therefore, the partial derivatives  $(\partial/\partial\xi_i)E(\bar{\xi})$  are well defined whenever the value  $E(\bar{\xi})$  is finite.

We do not include the natural requirement  $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = 0$  in the definition of  $\Omega$  because this requirement spoils coercivity of the functional  $E$  in the weak-\* topology. Observe that the functional  $E$  may take the value  $+\infty$ , moreover, it can happen that  $E \equiv +\infty$ . Assuming that the latter does not however happen, i. e. the functional  $E$  is proper,  $E \not\equiv +\infty$ , we will show that this functional admits a unique global minimum point. For that we need some nice properties of  $E$  collected below.

- Proposition 4.** (i) *The functional  $E(\bar{\xi})$  is low semi-continuous in weak-\* topology;*  
(ii) *It is coercive, that is, the sets  $\Omega(c) = \{ \bar{\xi} \in \Omega \mid E(\bar{\xi}) \leq c \}$  are weakly-\* compact;*  
(iii) *The functional  $E(\bar{\xi})$  is strictly convex on  $\Omega$ .*

◁ It is known that weak-\* convergence  $\bar{\xi}_n \rightharpoonup \bar{\xi}$  of a sequence  $\bar{\xi}_n = (\xi_i^n)_{i \in \mathbb{N}} \in l_{\infty}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , is equivalent to uniform boundedness  $|\xi_i^n| \leq \text{const}$  and elementwise convergence  $\xi_i^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \xi_i$  of this sequence. Assume that  $\bar{\xi}_n \in \Omega$ ,  $\bar{\xi} \in \Omega$ , and  $\bar{\xi}_n \rightharpoonup \bar{\xi}$  weakly-\* in  $l_{\infty}$ . Then  $\xi_i^n \rightarrow \xi_i$  as  $n \rightarrow \infty$  for each  $i \in \mathbb{N}$ . Since all terms in formula (3.1) are nonnegative, we can apply Fatou's lemma for sums and conclude that

$$E(\bar{\xi}) = \sum_{i=0}^{\infty} -k_i(u_{i+1} - u_i) \ln \left( F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}\right) \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i \xi_i^2}{4}$$

$$\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} -k_i(u_{i+1} - u_i) \ln \left( F\left(\frac{\xi_i^n}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}^n}{a_i}\right) \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i (\xi_i^n)^2}{4} \right\} = \liminf_{n \rightarrow \infty} E(\bar{\xi}_n).$$

Hence, the functional  $E$  is weakly-\* low semi-continuous, and (i) is proven.

To prove (ii) we first notice that  $\Omega(c) = \emptyset$  if  $c \leq 0$  and we can suppose that  $c > 0$ . If  $\bar{\xi} = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega(c)$  then relations (1.8) hold for all  $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . As in the proof of Proposition 1, we derive from these relations that

$$\xi_1 \leq r_2 = a_0 F^{-1} \left( 1 - e^{-\frac{c}{k_0(u_1 - u_0)}} \right).$$

Further, it follows from (1.8) that for every  $i \in \mathbb{N}$

$$F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}\right) \geq \delta_i \doteq \exp\left(-\frac{c}{k_i(u_{i+1} - u_i)}\right).$$

Since  $F(\xi)$  is Lipschitz with constant 1, this implies the inequalities

$$\xi_i - \xi_{i+1} \geq a_i \delta_i > 0, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Hence,  $\Omega(c)$  is contained in the set

$$K = \{\bar{\xi} \in l_\infty : 0 \leq \xi_i \leq r_2, \xi_i - \xi_{i+1} \geq a_i \delta_i \ (\forall i \in \mathbb{N})\}.$$

Obviously, this set is bounded and weakly-\* closed in  $l_\infty$ . By the Banach–Alaoglu theorem the set  $K$  is weakly-\* compact. We notice that sequences  $\bar{\xi} \in K$  strictly decrease,  $\xi_i > \xi_{i+1} \geq 0$  for all  $i \in \mathbb{N}$ , and  $K \subset \Omega$ . Since  $E$  is weakly-\* semi-continuous, the set  $\Omega(c)$  is a closed subset of  $K$  and, therefore, is compact. Coercivity of  $E$  is proved.

To prove (iii), we observe that the functional  $E(\bar{\xi})$  is convex as a sum of the convex functionals  $-k_i(u_{i+1} - u_i) \ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i))$  and  $d_i \xi_i^2/4$ . By the same reason for each  $m \in \mathbb{N}$  the functional

$$R_m(\bar{\xi}) = -\sum_{i=m}^{\infty} k_i(u_{i+1} - u_i) \ln\left(F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}\right)\right) + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{d_i \xi_i^2}{4}$$

is convex while the function

$$E_m(\bar{\xi}_m) = -\sum_{i=0}^{m-1} k_i(u_{i+1} - u_i) \ln\left(F\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}}{a_i}\right)\right) + \sum_{i=1}^m \frac{d_i \xi_i^2}{4}, \quad \bar{\xi}_m = (\xi_1, \dots, \xi_m)$$

is strictly convex on  $\mathbb{R}^m$ , this can be established on the base of Lemma 1 in the same way as in the proof of Proposition 2. It is clear that  $E(\bar{\xi}) = E_m(\bar{\xi}) + R_m(\bar{\xi}_m)$ . Now we take different points  $\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2 \in \Omega$  and  $\alpha \in (0, 1)$ . Since  $\bar{\xi}^1 \neq \bar{\xi}^2$  then we can find such  $m \in \mathbb{N}$  that  $\bar{\xi}_m^1 \neq \bar{\xi}_m^2$ , where  $\bar{\xi}_m^n$ ,  $n = 1, 2$ , are the vectors in  $\mathbb{R}^m$  formed by the first  $m$  elements of  $\bar{\xi}^n$ . Since the function  $E_m$  is strictly convex then

$$E_m((1 - \alpha)\bar{\xi}_m^1 + \alpha\bar{\xi}_m^2) < (1 - \alpha)E_m(\bar{\xi}_m^1) + \alpha E_m(\bar{\xi}_m^2)$$

while

$$R_m((1 - \alpha)\bar{\xi}^1 + \alpha\bar{\xi}^2) \leq (1 - \alpha)R_m(\bar{\xi}^1) + \alpha R_m(\bar{\xi}^2)$$

by the convexity of  $R_m$ . Therefore,

$$E((1 - \alpha)\bar{\xi}^1 + \alpha\bar{\xi}^2) < (1 - \alpha)E(\bar{\xi}^1) + \alpha E(\bar{\xi}^2).$$

This proves the strict convexity of  $E(\bar{\xi})$ .  $\triangleright$

In the case  $E(\bar{\xi}) \neq +\infty$  Proposition 4 allows to establish existence of a solution to the problem (1.1), (1.2), (1.4) with infinite number of phase transitions. More precisely, the following statement holds.

**Theorem 4.** *Assume that the potential  $E(\bar{\xi})$  is a proper functional, i.e.  $N = \inf E(\bar{\xi}) < +\infty$ . Then there exists a unique minimum point  $\bar{\xi}^0 = (\xi_i^0)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega$  of  $E(\bar{\xi})$ , i.e.,  $E(\bar{\xi}^0) = N$ . Moreover,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i^0 = 0$ , and function (1.5)*

$$u(\xi) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{F\left(\frac{\xi_{i+1}^0}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_i^0}{a_i}\right)} \left( F\left(\frac{\xi}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_i^0}{a_i}\right) \right), \quad \xi_{i+1}^0 < \xi < \xi_i^0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

is a solution of (1.1), (1.2), (1.4).

◁ We define for  $n \in \mathbb{N}$  the sub-level sets  $K_n = \Omega(N + 1/n)$ , where  $E \leq N + 1/n$ . Then these sets are nonempty. By Proposition 4 they are weakly-\* compact. Obviously,  $K_{n+1} \subset K_n$  for all  $n \in \mathbb{N}$ . By Cantor's intersection theorem there exists a point  $\bar{\xi}^0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ . Then,  $N \leq E(\bar{\xi}^0) \leq N + 1/n$  for all  $n \in \mathbb{N}$ , which implies that  $E(\bar{\xi}^0) = N$ , and  $\bar{\xi}^0$  is a point of global minimum of  $E$ . Uniqueness of this point directly follows from the strict convexity of  $E$  stated in Proposition 4 (iii). It only remains to prove that the sequence  $\bar{\xi}^0 = (\xi_i^0)_{i \in \mathbb{N}}$  vanishes. Assuming the contrary, we will have  $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i^0 = \inf_{i \in \mathbb{N}} \xi_i^0 = r > 0$ . Then the sequence  $\bar{\xi}^r = \bar{\xi}^0 - r$  with components  $\xi_i^0 - r$  lies in  $\Omega$ . Since  $1 - F((\xi_1^0 - r)/a_0) > 1 - F(\xi_1^0)/a_0$  and for all  $i \in \mathbb{N}$   $(\xi_i^0 - r)^2 < (\xi_i^0)^2$ ,

$$F\left(\frac{\xi_i^0 - r}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}^0 - r}{a_i}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{(\xi_{i+1}^0 - r)/a_i}^{(\xi_i^0 - r)/a_i} e^{-\frac{s^2}{4}} ds > \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi_{i+1}^0/a_i}^{\xi_i^0/a_i} e^{-\frac{s^2}{4}} ds = F\left(\frac{\xi_i^0}{a_i}\right) - F\left(\frac{\xi_{i+1}^0}{a_i}\right),$$

all the terms in expression (3.1) became smaller if we replace  $\bar{\xi}^0$  by  $\bar{\xi}^r$ . Therefore,  $E(\bar{\xi}^r) < E(\bar{\xi}^0) = N$ , which is impossible. Hence,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i^0 = 0$ . Since  $\bar{\xi}^0$  is a minimum point of  $E$  then  $(\partial/\partial \xi_i)E(\bar{\xi}^0) = 0$  for all  $i \in \mathbb{N}$  and Stefan conditions (1.2) are satisfied. We conclude that (3.2) is a solution of our problem (1.1), (1.2), (1.4). ▷

EXAMPLE. Assume that  $k_i = a_i^2 = 1, i \geq 0; d_i = 0, i > 0$ . Then Stefan conditions (1.2) simply means that  $u(\xi)$  is a self-similar solution of the heat equation  $u_t = u_{xx}$ . Therefore,  $u(\xi) = C_1 F(\xi) + C_2, C_1, C_2 = \text{const}$ , and  $u(\xi)$  is a bounded function. In particular, a solution of (1.1), (1.2), (1.4) with  $u_D = \lim_{i \rightarrow \infty} u_i = +\infty$  does not exist. As is easy to verify, in this case  $E(\bar{\xi}) \equiv +\infty$ , so that the assumption of Theorem 4 is violated. On the other hand, if  $u_D < +\infty$  then a unique solution of (1.1), (1.2), (1.4) has the form  $u(\xi) = 2u_D - u_0 - 2(u_D - u_0)F(\xi)$ . Solving the equations  $u(\xi) = u_i$ , we find  $\xi_i = F^{-1}((2u_D - u_0 - u_i)/(2u_D - 2u_0))$ . Hence,

$$\begin{aligned} E(\bar{\xi}) &= -\sum_{i=0}^{\infty} (u_{i+1} - u_i) \ln(F(\xi_i) - F(\xi_{i+1})) = \sum_{i=0}^{\infty} (u_{i+1} - u_i) (\ln(2(u_D - u_0)) - \ln(u_{i+1} - u_i)) \\ &= (u_D - u_0) \ln(2(u_D - u_0)) - \sum_{i=0}^{\infty} (u_{i+1} - u_i) \ln(u_{i+1} - u_i). \end{aligned}$$

As follows from Theorem 4 and the uniqueness of our solution, this value is the minimum value of  $E$  whenever the functional  $E(\bar{\xi})$  is proper. In particular,  $E(\bar{\xi}) \equiv +\infty$  if (and only if) the series  $\sum_{i=0}^{\infty} (u_{i+1} - u_i) \ln(u_{i+1} - u_i)$  is divergent. Choosing  $u_i$  in such a way that

$$\sum_{i=0}^{\infty} (u_{i+1} - u_i) = u_D - u_0 < +\infty, \quad -\sum_{i=0}^{\infty} (u_{i+1} - u_i) \ln(u_{i+1} - u_i) = +\infty,$$

we find that the condition  $E(\bar{\xi}) \neq +\infty$  is not necessary for existence of a solution to the problem (1.1), (1.2), (1.4).

Concerning the uniqueness, the following result holds.

**Theorem 5.** *Suppose that*

$$\sum_{i=0}^{\infty} k_i(u_{i+1} - u_i) < +\infty. \quad (3.3)$$

Then a solution (3.2) of problem (1.1), (1.2), (1.4) is unique.

◁ Let  $u^1(\xi)$ ,  $u^2(\xi)$  be two solutions (3.2) of problem (1.1), (1.2), (1.4). Suppose that  $u^1(\xi_*) \neq u^2(\xi_*)$  at some point  $\xi_* > 0$ . Changing the places  $u^1$ ,  $u^2$  if necessary, we may assume that  $u^1(\xi_*) > u^2(\xi_*)$ . We notice that  $K(u^r(\xi))$ ,  $r = 1, 2$ , are absolutely continuous decreasing functions,

$$K(u^r)(0+) - K(u^r)(+\infty) = K(u_D-) - K(u_0) = \sum_{i=0}^{\infty} (K(u_{i+1}) - K(u_i)) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i(u_{i+1} - u_i) < +\infty.$$

Since

$$\int_0^{\xi_*} (K(u^1)'(\xi) - K(u^2)'(\xi)) d\xi = K(u^1)(\xi_*) - K(u^2)(\xi_*) > 0,$$

$K(u^1)'(\xi) - K(u^2)'(\xi) > 0$  on a set  $A \subset (0, \xi_*)$  of positive Lebesgue measure. Let  $\alpha \in A$  be a common Lebesgue point of the functions  $K(u^1)'(\xi), K(u^2)'(\xi) \in L^1((0, +\infty))$ . Then the functions  $K(u^r)$ ,  $r = 1, 2$ , have classic derivatives  $K(u^r)'(\alpha)$  and  $K(u^1)'(\alpha) > K(u^2)'(\alpha)$ . By the construction the functions  $u^r(\xi)$  are solutions of Stefan–Neumann problem (1.1), (1.2), (2.2) in the domain  $\Pi_\alpha$  with Neumann data  $b_N = K(u^r)'(\alpha)$  and with finite number of phase transitions. The latter follows from the fact that the number of  $u_i$  that less than  $\max(u^1(\alpha), u^2(\alpha)) < u_D$  is finite. By Lemma 2 the Dirichlet-to-Neumann map  $-K(u)'(\alpha) \rightarrow u(\alpha)$  is strictly increasing. Since  $-K(u^1)'(\alpha) < -K(u^2)'(\alpha)$ , we find that  $u^1(\alpha) < u^2(\alpha)$ . By Corollary 2 this implies that  $u^1(\xi_*) \leq u^2(\xi_*)$ , which contradicts to our assumption. We conclude that  $u^1 \equiv u^2$  and a solution of problem (1.1), (1.2), (1.4) is unique. ▷

Remark that  $F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i) < F(+\infty) - F(0) = 1/2$  and therefore  $-\ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)) > \ln 2$ . This implies that

$$\ln 2 \sum_{i=0}^{\infty} k_i(u_{i+1} - u_i) < \inf E(\bar{\xi}),$$

and, in particular, condition (3.3) is always satisfied whenever  $E(\bar{\xi})$  is a proper functional.

## References

1. Kamenomostskaya, S. L. On Stefan's Problem, *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*, 1961, vol. 53 (95), no. 4, pp. 489–514 (in Russian).
2. Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A. and Ural'tseva, N. N. *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 23, Providence, RI, American Mathematical Society, 1968, 648 p.
3. Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C. *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford, Oxford University Press, 1959, 510 p.
4. Panov, E. Yu. Solutions of an Ill-Posed Stefan Problem, *Journal of Mathematical Sciences*, 2023, vol. 274, no. 4, pp. 534–543. DOI: 10.1007/s10958-023-06618-4.

5. Panov, E. Yu. On the Structure of Weak Solutions of the Riemann Problem for a Degenerate Nonlinear Diffusion Equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2024, vol. 285, no. 6, pp. 846–854. DOI: 10.1007/s10958-024-07479-1.
6. Panov, E. Yu. On Self-Similar Solutions of a Multi-Phase Stefan Problem in the Half-Line, *Journal of Mathematical Sciences*, 2025, vol. 287, no. 4, pp. 620–629. DOI: 10.1007/s10958-025-07627-1.
7. Panov, E. Yu. On the Structure of Entropy Solutions to the Riemann Problem for a Degenerate Nonlinear Parabolic Equation, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 06 April 2024, DOI: 10.1007/s10884-024-10361-y.

Received February 24, 2025

EVGENY YU. PANOV

St. Petersburg Department of V. A. Steklov Institute of Mathematics  
of the Russian Academy of Sciences,

27 Fontanka, St. Petersburg 191023, Russia,

Leading Researcher;

Yaroslav-the-Wise Novgorod State University,

41 Bolshaya St. Peterburgskaya St., Veliky Novgorod 173003, Russia,

Head of Laboratory

E-mail: [evpanov@yandex.ru](mailto:evpanov@yandex.ru)

<https://orcid.org/0000-0002-0615-1083>

Владикавказский математический журнал  
2025, Том 27, Выпуск 2, С. 112–127

## ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ МНОГОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА НА ДВИЖУЩЕМСЯ ЛУЧЕ

Панов Е. Ю.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургское отделение Математического  
института им. В. А. Стеклова Российской академии наук,  
Россия, 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27;

<sup>2</sup> Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,  
Россия, 173003, Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, 41

E-mail: [evpanov@yandex.ru](mailto:evpanov@yandex.ru)

**Аннотация.** Изучаются автомодельные решения многофазной задачи Стефана для уравнения теплопроводности на движущемся луче  $x > \alpha\sqrt{t}$  с краевыми условиями Дирихле или Неймана на границе  $x = \alpha\sqrt{t}$ . В случае условия Дирихле установлено, что алгебраическая система для определения свободных границ является градиентной, а соответствующий потенциал — явно выписываемая строго выпуклая и коэрцитивная функция. Поэтому, существует единственная точка минимума потенциала, которая определяет свободные границы и задает решение. В случае условия Неймана возможны решения с различными числами фазовых переходов (называемыми типами). Для любого фиксированного типа система для определения свободных границ снова оказывается градиентной со строго выпуклым потенциалом. Это позволяет найти точные условия существования и единственности решения. В последнем параграфе мы изучаем задачу Стефана — Дирихле на полупрямой  $x > 0$  с бесконечным числом фазовых переходов. Используя вариационный подход, мы находим достаточные условия существования и единственности решения рассматриваемой задачи.

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, задача Стефана, свободные границы, краевые условия Дирихле и Неймана, автомодельные решения, вариационная формулировка.

**AMS Subject Classification:** 35K58, 35K20, 35C06, 35R35, 80A22.

**Образец цитирования:** Panov E. Yu. On Self-Similar Solutions of a Multi-Phase Stefan Problem in a Moving Ray // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 2.—С. 112–127 (in English). DOI: 10.46698/p6735-7356-6252-u.

УДК 517.984

DOI 10.46698/r2424-9096-4930-w

MIXED PROBLEM FOR EVEN-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS  
WITH AN INVOLUTION<sup>#</sup>

D. M. Polyakov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Southern Mathematical Institute VSC RAS,  
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia;

<sup>2</sup> Institute of Mathematics with Computing Centre  
of the Ufa Federal Research Center of the RAS,  
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia

E-mail: dmitrypolyakov@mail.ru

*Dedicated to Professor Anatoli Tedeev on occasion of his 70th birthday*

**Abstract.** In this manuscript we consider a mixed problem for even-order differential equations with an involution. In order to study this problem we use the corresponding differential operator with an involution, acting in the space of square integrable on a finite interval functions. Applying the method of similar operators, we transform this operator to the operator representable as orthogonal direct sum of a finite rank operator and an operators of rank 1. Moreover, it has exactly the same spectral properties as the original operator. Theorem on similarity is a basis for the construction of a group of operators, whose generator is the even-order differential operator with an involution. Using the previously obtained asymptotic formulas for the eigenvalues, we establish the main result dealing with the asymptotic representation for this group of operators. The group of operators allows us to introduce the notion of a weak solution for the corresponding mixed problem for the even-order differential operator with an involution and also to justify the Fourier method. In addition, using the representation of a group of operators, we obtain a explicit formula for a weak solution of the mixed problem and estimates for this group.

**Keywords:** spectrum, even-order differential operator, involution, mixed problem, group of operators.

**AMS Subject Classification:** 34B09, 34L15, 47E05.

**For citation:** Polyakov, D. M. Mixed Problem for Even-Order Differential Equations with an Involution, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 2, pp. 128–135. DOI: 10.46698/r2424-9096-4930-w.

## 1. Introduction

We consider a homogeneous mixed problem for a parabolic equation

$$\frac{\partial u(t, s)}{\partial t} = (-1)^k i \frac{\partial^{2k} u(t, -s)}{\partial s^{2k}} - ip(s) u(t, s) - iq(s) u(t, -s), \quad (1.1)$$
$$u(0, s) = \varphi(s), \quad t \in \mathcal{J}, \quad s \in [-1, 1],$$

with  $k > 1$  and one of the following boundary conditions

$$(a) \quad u^{(j)}(t, -1) = u^{(j)}(t, 1), \quad j = 0, 1, \dots, 2k - 1, \quad t \in \mathcal{J}, \quad (1.2)$$

$$(b) \quad u^{(j)}(t, -1) = -u^{(j)}(t, 1), \quad j = 0, 1, \dots, 2k - 1, \quad t \in \mathcal{J}, \quad (1.3)$$

---

<sup>#</sup> The research is supported by the Russian Science Foundation, grant no. 23-11-00009, <https://rscf.ru/project/23-11-00009/>.

where by the symbol  $\mathcal{J}$  we denote the intervals  $(-\infty, \infty)$ ,  $(-\infty, \beta]$ ,  $(\alpha, \beta)$ ,  $[\alpha, \infty)$ . Assume that these intervals contain zero. All derivative in conditions (a) and (b) are taken with respect to the variable  $s$ . Moreover, the functions  $p$  and  $q$  belong to space  $L^2(-1, 1)$ .

The differential equation (1.1) contains a transformation of an involution. We recall that an involution on a set  $X$  is a function  $\psi$  such that  $\psi(\psi(x)) = x$  on  $X$ . Usually the simplest version of involution  $\psi(x) = -x$  is used. This type is called a reflection. But in the last time the case of differential equations with involution of general type is also studied (see, for example, [1]). In this paper we consider only the involution of the reflection. The terms with a reflection in (1.1) have the following sense. We first differentiate the function  $u$  and then we apply to it the operator of a reflection.

The mixed problems for the differential equations with an involution are studied in [2–5] (see also the references therein). Note that these papers are devoted to the differential equations and the corresponding operators of the first and second order. However, recently there are manuscripts concerning higher order equations. The solvability of direct and inverse problems for the higher-order differential equations with an involution is investigated in [6–9]. The spectral properties for the higher-order operators with an involution are considered in [10–16].

The main goal of this manuscript is to describe the solutions of the mixed problems (1.1), (1.2) and (1.1), (1.3) with the corresponding group of operators. We obtain explicit form of mild solutions and classical solutions for these mixed problems for the even-order differential operator with an involution. We develop the ideas and methods from the manuscript [4], where mixed problems for the first-order differential operators were studied.

We denote a linear space of functions  $u : \mathcal{J} \times [-1, 1] \rightarrow L^2(-1, 1)$  by  $C(\mathcal{J}, L^2(-1, 1))$ . These functions  $s \mapsto u(t, s)$  belong to  $L^2(-1, 1)$  for any fixed  $t \in \mathcal{J}$ . Moreover, a function  $\tilde{u} : \mathcal{J} \rightarrow L^2(-1, 1)$ ,  $\tilde{u}(t)(s) = u(t, s)$ ,  $t \in \mathcal{J}$ ,  $s \in [-1, 1]$ , is a continuous function. The function  $\tilde{u}$  is called associated with the function  $u$  and they will be identified.

Now we rewrite the problems (1.1), (1.2) and (1.1), (1.3) in the following form

$$\tilde{u}'_t = iL_\theta \tilde{u}, \quad \tilde{u}(0) = \varphi. \quad (1.4)$$

The non-self-adjoint even-order differential operator with involution  $L_\theta$  acting on the Hilbert space  $L^2(-1, 1)$  given by

$$(L_\theta y)(s) = (-1)^k y^{(2k)}(-s) - p(s)y(s) - q(s)y(-s), \quad \theta \in \{0, 1\},$$

where  $p$  and  $q$  are complex-valued coefficients and  $p, q \in L^2(-1, 1)$ . The operator  $L_\theta$  is determined on the domain

$$D(L_\theta) = \left\{ y \in W_2^{2k}(-1, 1) : y \text{ satisfies conditions (a) or (b)} \right\},$$

where

- (a) periodic  $\theta = 0$ :  $y^{(j)}(-1) = y^{(j)}(1)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2k - 1$ ,
- (b) antiperiodic  $\theta = 1$ :  $y^{(j)}(-1) = -y^{(j)}(1)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2k - 1$ .

Obviously, the operators  $L_\theta$ ,  $\theta \in \{0, 1\}$ , correspond to one of the mixed problems (1.1), (1.2) or (1.1), (1.3). Therefore, the study of these mixed problems is reduced to the investigations of the operator equation (1.4).

Now we formulate definitions related to the notion of a solution to the Cauchy problem (1.4). Note that the following two definitions are equivalent.

DEFINITION 1. A classical solution to problem (1.4) is a function  $u : \mathcal{J} \times [-1, 1] \rightarrow L^2(-1, 1)$  belonging to the space  $C(\mathcal{J}, L^2(-1, 1))$  such that the associated function  $\tilde{u} : \mathcal{J} \rightarrow L^2(-1, 1)$  is continuously differentiable and satisfies the problem (1.4). Moreover,  $\varphi \in W_2^1(-1, 1)$  and  $\tilde{u}(0) = \varphi$ .

DEFINITION 2. A function  $u : \mathcal{J} \rightarrow L^2(-1, 1)$  is called a mild solution of the problem (1.4) if the function  $\tilde{u}$  is uniform limit on each bounded interval in  $\mathcal{J}$  of classical solutions  $(\tilde{u}_n)$ ,  $n \geq 1$ , with  $\tilde{u}_n(0) = \varphi_n \in W_2^1(-1, 1)$ ,  $n \geq 1$ , where  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ .

Our first main result is devoted to the representation of a solution for mixed problems (1.1), (1.2) and (1.1), (1.3). In this case the theory of semigroups of operators plays a key role in justification of the Fourier method. Note that the notions of the theory of semigroups of operators can be found in [17]. The symbol  $B(L^2(-1, 1))$  stands for the space of bounded linear operators acting in  $L^2(-1, 1)$ .

**Theorem 1.** *The differential operator  $iL_\theta$  is a generator of some strongly continuous group of operators  $T_\theta : \mathbb{R} \rightarrow B(L^2(-1, 1))$ . Each classical solution  $u \in C(\mathcal{J}, L^2(-1, 1))$  of the problem (1.4) is defined by*

$$u(t, s) = (T_\theta(t)\varphi)(s), \quad s \in [-1, 1], \quad t \in \mathcal{J}, \quad (1.5)$$

where  $\varphi \in W_2^1(-1, 1)$ . Moreover, the mild solution has the form (1.5) for any function  $\varphi \in L^2(-1, 1)$ .

The second main result is devoted to the asymptotic representation of the group of operators described in Theorem 1. It will be formulated in the next section after introducing the necessary notations.

## 2. Proof of the Main Results

In order to obtain the form of mild solution of the problem (1.4) and the asymptotic representation of the corresponding group of operators, we study the spectral properties of the operator  $L_\theta$ . This operator is represented as  $L_\theta = L_\theta^0 - \tilde{B}$ , where

$$(L_\theta^0 y)(s) = (-1)^k y^{(2k)}(-s), \quad (\tilde{B}y)(s) = p(s)y(s) + q(s)y(-s).$$

The operator  $L_\theta^0$  with boundary conditions (a) and (b) and the domain  $D(L_\theta^0) = D(L_\theta)$  is the self-adjoint operator with compact resolvent. The eigenvalues  $\mu_{n,\theta}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , of the operator  $L_\theta^0$  are simple and have the form

$$\mu_{n,\theta} = \begin{cases} -\left(\frac{\pi}{2}\theta + \pi n\right)^{2k}, & n < 0, \\ \left(\frac{\pi}{2}\theta + \pi n\right)^{2k}, & n \geq 0, \end{cases} \quad \theta \in \{0, 1\}.$$

We enumerate these eigenvalues in the following way:

$$\cdots < \mu_{-n-1,\theta} < \mu_{-n,\theta} < \cdots < \mu_{-1,\theta} < \mu_{0,\theta} < \mu_{1,\theta} < \cdots < \mu_{n,\theta} < \mu_{n+1,\theta} < \cdots$$

We associate the eigenfunctions  $e_{n,\theta}(s) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\theta + \pi n\right)s$ ,  $n < 0$ , with the eigenvalues  $\mu_{n,\theta}$ ,  $n < 0$ , and the eigenfunctions  $e_{n,\theta}(s) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\theta + \pi n\right)s$ ,  $n \geq 0$ , with the eigenvalues  $\mu_{n,\theta}$ ,  $n \geq 0$ . These eigenfunctions form an orthonormal basis for the space  $L^2(-1, 1)$ . The Riesz projections  $P_{n,\theta}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , constructed from the set  $\{\mu_{n,\theta}\}$  are given by

$$P_{n,\theta}x = (x, e_{n,\theta})e_{n,\theta}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

for  $x \in L^2(-1, 1)$ . The symbol  $P_{(m),\theta}$  stands for the following projection  $P_{(m),\theta} = \sum_{j=-m}^m P_{j,\theta}$  for every  $m \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Now we formulate auxiliary results about orthogonal direct sum of operators. Let  $\mathcal{H}$  be an abstract complex Hilbert space. Recall that  $B(\mathcal{H})$  is the space of bounded linear operators acting in  $\mathcal{H}$ . Introduce a two-sided ideal of the Hilbert-Schmidt operators  $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$  in  $B(\mathcal{H})$  with the norm  $\|X\|_2$  for  $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ . Assume that the space  $\mathcal{H}$  can be represent as a direct sum of nontrivial closed subspaces  $\mathcal{H}_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Then

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_n, \quad (2.1)$$

where  $\mathcal{H}_i$  and  $\mathcal{H}_j$  are orthogonal as  $i \neq j$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}$ , and  $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n$ ,  $x_n \in \mathcal{H}_n$ ,  $\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|^2$ , for any vector  $x \in \mathcal{H}$ . Therefore, there exists a resolution of identity by a system of orthogonal projections  $P_{n,\theta}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Moreover, these projections  $P_{n,\theta}$  with  $\text{Im } P_{n,\theta} = \mathcal{H}_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , have the following properties

- 1)  $P_{n,\theta}^* = P_{n,\theta}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;
- 2)  $P_{i,\theta} P_{j,\theta} = 0$  and  $P_{i,\theta}^2 = P_{i,\theta}$ , as  $i \neq j$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}$ ;
- 3) the series  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} P_{n,\theta} x$  unconditionally converges to  $x \in \mathcal{H}$  and  $\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|P_{n,\theta} x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|^2$ , where  $x_n = P_{n,\theta} x$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**DEFINITION 3.** A linear closed operator  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  is called the orthogonal direct sum of bounded operators  $\mathcal{A}_n \in B(\mathcal{H}_n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , with respect to the decomposition (2.1) and  $\mathcal{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_n$ , if the following conditions hold:

- 1)  $\mathcal{H}_n \subset D(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{H} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\mathcal{A}_n x_n\|^2 < \infty, x_n = P_{n,\theta} x, n \in \mathbb{Z}\}$ ;
- 2)  $\mathcal{A} x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_n x_n$ ,  $x \in D(\mathcal{A})$ ;
- 3) each subspace  $\mathcal{H}_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , is invariant with respect to operators  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{A}_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Moreover,  $\mathcal{A}_n$  is the restriction of operator  $\mathcal{A}$  to  $\mathcal{H}_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Now we formulate some preliminary results. The first theorem is devoted to similarity of the operator  $L_\theta$ . We denote the image of projections  $\text{Im } P_{(m),\theta}$  and  $\text{Im } P_{j,\theta}$ ,  $|j| \geq m+1$ , by  $\mathcal{H}_{(m)}$  and  $\mathcal{H}_j$ ,  $|j| \geq m+1$ , respectively.

**Theorem 2.** *There exists  $m \in \mathbb{Z}_+$  such that  $L_\theta$  is similar to the operator  $L_\theta^0 - B$ , where  $B \in \mathfrak{S}_2(L^2(-1, 1))$ . Moreover, the subspaces  $\mathcal{H}_{(m)}$  and  $\mathcal{H}_j$ ,  $|j| \geq m+1$ , are invariant with respect to the operator  $L_\theta^0 - B$  and*

$$L_\theta = U \left( \left( \bigoplus_{j=-\infty}^{-m-1} ((L_\theta^0)_j - B_j) \right) \oplus ((L_\theta^0)_{(m)} - B_{(m)}) \oplus \left( \bigoplus_{j=m+1}^{\infty} ((L_\theta^0)_j - B_j) \right) \right) U^{-1},$$

where  $(L_\theta^0)_{(m)} - B_{(m)}$  and  $(L_\theta^0)_j - B_j$  are the restrictions of the operator  $L_\theta^0 - B$  to the subspaces  $\mathcal{H}_{(m)}$  and  $\mathcal{H}_j$ ,  $|j| \geq m+1$ , respectively. This formula is considered with respect to the orthogonal decomposition of space  $L^2(-1, 1)$  in the following form

$$L^2(-1, 1) = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \left( \bigoplus_{|j| \geq m+1} \mathcal{H}_j \right). \quad (2.2)$$

The operator  $U \in B(L^2(-1, 1))$  is invertible and  $U = I + W$ , where  $W \in \mathfrak{S}_2(L^2(-1, 1))$ .

The proof of this theorem can be found in [14, Theorem 2.1] and [15, Theorem 3.1].

It follows from Theorem 2 that the spectrum  $\sigma(L_\theta)$  of the operator  $L_\theta$  coincides with the union of its parts. The second preliminary result is devoted to eigenvalue asymptotics of the operator  $L_\theta$ . Using it, we describe the parts of spectrum  $\sigma(L_\theta)$ . In order to formulate this result we introduce the Fourier coefficients of a function  $f \in L^2(-1, 1)$  in the following form

$$\widehat{f}_n = \int_{-1}^1 f(x)e^{-i2\pi nx} dx, \quad \widehat{f}_{cn,n} = \int_{-1}^1 f(x) \cos \pi nx dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Theorem 3.** *There exists  $m \in \mathbb{Z}_+$  such that the spectrum of the operators  $L_\theta$ ,  $\theta \in \{0, 1\}$ , can be represented as*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \cup \left( \bigcup_{|n| \geq m+1} \sigma_n \right),$$

where  $\sigma_{(m)}$  is finite set with number of points not exceeding  $2m+1$  and  $\sigma_n = \{\lambda_{n,\theta}\}$ . Moreover, the eigenvalues  $\lambda_{n,\theta}$  satisfy the asymptotics

$$\begin{aligned} \lambda_{n,\theta} &= \left(\frac{\pi}{2}\theta + \pi n\right)^{2k} - \frac{1}{2}(\widehat{p}_0 + \widehat{q}_0 + \widehat{p}_{cn,2n+\theta} + \widehat{q}_{cn,2n+\theta}) + b_n, \quad n \rightarrow +\infty, \\ \lambda_{n,\theta} &= -\left(\frac{\pi}{2}\theta + \pi n\right)^{2k} - \frac{1}{2}(\widehat{p}_0 - \widehat{q}_0 - \widehat{p}_{cn,2n+\theta} + \widehat{q}_{cn,2n+\theta}) + b_n, \quad n \rightarrow -\infty, \end{aligned} \tag{2.3}$$

where  $b_n = \mathcal{O}(n^{-2k+1})$ .

The proof of this theorem can be found in [14, Theorem 1.1].

Based on Theorems 2 and 3, we construct a group of operators  $T_\theta : \mathbb{R} \rightarrow B(L^2(-1, 1))$ . These theorems imply that the operator  $L_\theta$  is similar to the operator  $L_\theta^0 - B$ , where  $B \in \mathfrak{S}_2(L^2(-1, 1))$ , and the eigenvalues of this operator has the asymptotics (2.3). The Stone theorem [18] shows that the operator  $iL_\theta$  is a generator of group of operators  $\widetilde{T}_\theta : \mathbb{R} \rightarrow B(L^2(-1, 1))$  and the operator  $i(L_\theta^0 - B)$  is a generator of group of operators  $\widetilde{T}_\theta : \mathbb{R} \rightarrow B(L^2(-1, 1))$ . Moreover,  $T_\theta(t) = U\widetilde{T}_\theta(t)U^{-1}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , where  $U$  is defined by Theorem 2.

Let  $m \in \mathbb{Z}_+$  be large enough. Using again Theorem 2, we obtain the following representation

$$T_\theta(t) = U\widetilde{T}_\theta(t)U^{-1} = U \left( \bigoplus_{j=-\infty}^{-m-1} e^{i\lambda_{j,\theta}t} \oplus \bigoplus e^{i((L_\theta^0)_{(m)} - B_{(m)})t} \bigoplus_{j=m+1}^{\infty} e^{i\lambda_{j,\theta}t} \right) U^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

with respect to the  $U$ -orthogonal decomposition (2.2). The restriction  $(L_\theta^0)_{(m)} - B_{(m)}$  and the asymptotics of eigenvalues  $\lambda_{n,\theta}$  are given by Theorem 2 and 3, respectively.

Therefore, we get the following result.

**Theorem 4.** *The operator  $iL_\theta$  is a generator of a strongly continuous group of operators  $T_\theta : \mathbb{R} \rightarrow B(L^2(-1, 1))$ . There exists  $m \in \mathbb{Z}_+$  such that the group  $T_\theta : \mathbb{R} \rightarrow B(L^2(-1, 1))$  is similar to the group  $\widetilde{T}_\theta : \mathbb{R} \rightarrow B(L^2(-1, 1))$ . Moreover, this group satisfies the representation (2.4), where the operator of transformation  $U \in B(L^2(-1, 1))$  is defined by in Theorem 2.*

◁ PROOF OF THEOREM 1. The statement of this theorem on representation of classical and mild solutions to problem (1.4) follows from the general theory of semigroups of operators and Theorems 2 and 4. ▷

REMARK 1. The formula (2.4) gives immediately the following representation

$$T_\theta(t)x = e^{i((L_\theta^0)_{(m)} - B_{(m)})t} P_{(m),\theta} x + \sum_{|j| \geq m+1} e^{i\lambda_j \theta t} P_{j,\theta} x, \quad x \in L^2(-1, 1). \quad (2.5)$$

Finally, we prove the second main result about the estimates for corresponding group of operators  $T_\theta$ . We introduce sequences  $\zeta_l = \|UP_{l,\theta}\|_2$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , and  $\alpha_m = \sup_{|j| \geq m} |b_j|$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$ . Note that the sequence  $(b_m)$  is square summable and  $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0$ .

**Theorem 5.** Let a number  $m \in \mathbb{Z}_+$  and the operator  $U$  be defined as in Theorem 2 and  $\psi = U^{-1}\varphi$ . Then the following estimate holds:

$$\left\| T_\theta(t)\varphi - Ue^{i((L_\theta^0)_{(m)} - B_{(m)})t} P_{(m),\theta}\psi - \sum_{m+1 \leq |j| \leq N} Ue^{i\lambda_j \theta t} P_{j,\theta}\psi \right\|_2 \leq e^{\alpha_{N+1}|t|} \left( \sum_{|j| \geq N+1} \zeta_j^2 \|\psi\|^2 \right)^{1/2}$$

for  $N > m$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , and any function  $\varphi \in L^2(-1, 1)$ .

◁ Let  $N > 0$  be large enough and  $\varphi \in L^2(-1, 1)$ . The formula (2.5) gives

$$T_\theta(t)\varphi = Ue^{i((L_\theta^0)_{(m)} - B_{(m)})t} P_{(m),\theta}\psi + U \sum_{|j| \geq m+1} e^{i\lambda_j \theta t} P_{j,\theta}\psi, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Using the formulas (2.3) and the Hölder inequality, we obtain

$$\begin{aligned} & \left\| T_\theta(t)\varphi - Ue^{i((L_\theta^0)_{(m)} - B_{(m)})t} P_{(m),\theta}\psi - \sum_{m+1 \leq |j| \leq N} Ue^{i\lambda_j \theta t} P_{j,\theta}\psi \right\|_2 \\ & \leq \left( \sum_{|j| \geq N+1} |e^{2i\lambda_j \theta t - 2b_j t}| \right)^{1/2} \left( \sum_{|j| \geq N+1} \zeta_j^2 \|\psi\|^2 \right)^{1/2} \leq e^{\alpha_{N+1}|t|} \left( \sum_{|j| \geq N+1} \zeta_j^2 \|\psi\|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

for  $N > m$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . The proof is complete. ▷

## References

1. Kozhanov, A. I. and Bzheumikhova, O. I. Elliptic and Parabolic Equations with Involution and Degeneration at Higher Derivatives, *Mathematics*, 2022, vol. 10 (18), 3325. DOI: 10.3390/math10183325.
2. Burlutskaya, M. S. and Khromov, A. P. Fourier Method in an Initial-Boundary Value Problem for a First-Order Partial Differential Equation with Involution, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, no. 12, pp. 2102–2114. DOI: 10.1134/S0965542511120086.
3. Kornev, V. V. and Khromov, A. P. A Mixed Problem for an Inhomogeneous Wave Equation with a Summable Potential, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 10, pp. 1666–1681. DOI: 10.1134/S0965542517100104.
4. Baskakov, A. G. and Uskova, N. B. Fourier Method for First Order Differential Equations with Involution and Groups of Operators, *Ufa Mathematical Journal*, 2018, vol. 10, no. 3, pp. 11–34. DOI: 10.13108/2018-10-3-11.
5. Baskakov, A. G. and Polyakov, D. M. Fourier Method for a Mixed Problem with the Hill Operator. *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 679–684. DOI: 10.1134/S0012266120060014.
6. Mussirepova E., Sarsenbi, A. A. and Sarsenbi, A. M. Solvability of Mixed Problems for the Wave Equation with Reflection of the Argument, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2022, vol. 45, pp. 11262–11271. DOI: 10.1002/mma.8448.
7. Ashyralyev, A. and Sarsenbi, A. M. Well-Posedness of a Parabolic Equation with Involution, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2017, vol. 38, pp. 1295–1304. DOI: 10.1080/01630563.2017.1316997.
8. Ilyas, A., Malik, S. A. and Saif, S. Inverse Problems for a Multi-Term Time Fractional Evolution Equation with an Involution, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2021, vol. 29, pp. 3377–3405. DOI: 10.1080/17415977.2021.2000606.

9. Kirane, M. and Sarsenbi, A. A. Solvability of Mixed Problems for a Fourth-Order Equation with Involution and Fractional Derivative, *Fractal and Fractional*, 2023, vol. 7, no. 2, 131. DOI: 10.3390/fractalfract7020131.
10. Bondarenko, N. P. Inverse Spectral Problems for Functional-Differential Operators with Involution, *Journal of Differential Equations*, 2022, vol. 318, pp. 169–186. DOI: 10.1016/j.jde.2022.02.027.
11. Kritskov, L. V., Sadybekov, M. A. and Sarsenbi, A. M. Properties in  $L_p$  of Root Functions for a Nonlocal Problem with Involution, *Turkish Journal of Mathematics*, 2019, vol. 43, pp. 393–401. DOI: 10.3906/mat-1809-12.
12. Polyakov, D. M. Formula for Regularized Trace of a Second Order Differential Operator with Involution, *Journal of Mathematical Sciences*, 2020, vol. 251, no. 5, pp. 748–759. DOI: 10.1007/s10958-020-05126-z.
13. Baranetskiy, Y. O., Kalenyuk, P. I., Kolyasa, L. I. and Kopach, M. I. A Nonlocal Problem for a Differential Operator of Even Order with Involution, *Carpathian Mathematical Publications*, 2017, vol. 9, no. 2, pp. 109–119. DOI:10.15330/cmp.9.2.109-119
14. Polyakov, D. M. Spectral Asymptotics of Two-Term Even Order Operators with Involution, *Journal of Mathematical Sciences*, 2022, vol. 260, no. 6, pp. 806–819. DOI: 10.1007/s10958-022-05729-8.
15. Polyakov, D. M. On the Bari Basis Property for Even-Order Differential Operators with Involution, *Tamkang Journal of Mathematics*, 2023, vol. 54, no. 4, pp. 339–351. DOI: 10.5556/j.tkjm.54.2023.4899.
16. Vladykina, V. E. and Shkalikov, A. A. Spectral Properties of Ordinary Differential Operators with Involution, *Doklady Mathematics*, 2019, vol. 99, no. 1, pp. 5–10. DOI: 10.1134/S1064562419010046.
17. Engel, K.-J., and Nagel, R. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equation*, New-York, Springer-Verlag, 2000, 586 p.
18. Dunford, N. and Schwartz, J. T. *Linear Operators. Pt. III. Spectral operators, Pure Appl. Math.* vol. 7, New York, Intersci. Publ., 1971.

Received December 27, 2024

DMITRY M. POLYAKOV

Southern Mathematical Institute VSC RAS,  
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,  
Senior Researcher;

Institute of Mathematics with Computing Centre  
of the Ufa Federal Research Center of the RAS,  
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,  
Senior Researcher

<https://orcid.org/0000-0003-0263-056X>

E-mail: dmitrypolyakov@mail.ru

Владикавказский математический журнал  
2025, Том 27, Выпуск 2, С. 128–135

## СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Поляков Д. М.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Южный математический институт — филиал ВНИЦ РАН,  
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;

<sup>2</sup> Институт математики с вычислительным центром  
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,  
Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112

E-mail: dmitrypolyakov@mail.ru

**Аннотация.** В настоящей работе изучается смешанная задача для дифференциального уравнения четного порядка с инволюцией. Данная задача записывается с помощью соответствующего дифференциального оператора с инволюцией, действующего в пространстве интегрируемых с квадратом

модуля функций на отрезке. Используя метод, основанный на подобии операторов, мы преобразуем рассматриваемый оператор в оператор, который является ортогональной прямой суммой оператора конечного ранга и операторов ранга 1. При этом он обладает точно такими же спектральными свойствами, что и исходный оператор. Теорема о подобии служит основанием для построения группы операторов, генератором которой является исходный оператор. Кроме того, используя ранее полученные асимптотические формулы для собственных значений, мы установим основной результат, связанный с асимптотическими формулами для построенной группы операторов. Соответствующая группа операторов позволяет ввести понятие слабого решения для смешанной задачи с дифференциальным оператором четного порядка с инволюцией, а также обосновать метод Фурье. Кроме того, с помощью представления группы операторов будет выписана конкретная формула для слабого решения рассматриваемой смешанной задачи и получены соответствующие оценки на эту группу.

**Ключевые слова:** спектр, дифференциальный оператор четного порядка, инволюция, смешанная задача, группа операторов.

**AMS Subject Classification:** 34B09, 34L15, 47E05.

**Образец цитирования:** Polyakov D. M. Mixed Problem for Even-Order Differential Equations with an Involution // Владикавказ. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 2.—С. 128–135 (in English). DOI: 10.46698/r2424-9096-4930-w.

УДК 517.98

DOI 10.46698/i0037-3667-8880-p

## О СВОЙСТВАХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СЖИМАЕМОЙ ИДЕАЛЬНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Д. О. Цветков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Россия, 295000, Симферополь, пр-т Вернадского, 4

E-mail: tsvetdo@gmail.com

**Аннотация.** В связи с развивающимися потребностями океанологии и прикладной геофизики возрастает интерес к задачам о распространении волн в стратифицированных жидкостях. Однако большинство исследований по динамике волн в данном классе жидкостей, как правило, опираются на модель идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости. Эффекты сжимаемости обычно исключаются из рассмотрения. Ранее автором изучалась начально-краевая задача о малых движениях сжимаемой идеальной стратифицированной жидкости, целиком заполняющей неподвижный контейнер. Данная задача сводилась к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка в ортогональной сумме некоторых гильбертовых пространств. С полученным уравнением ассоциировалось уравнение с замкнутым оператором. Применение метода операторных блок-матриц, а также теории абстрактных дифференциальных уравнений позволило найти достаточные условия существования решения соответствующей задачи. В представленной работе исследуется соответствующая задача о собственных колебаниях данной гидросистемы. Предполагается, что квадрат частоты колебаний данной гидросистемы превосходит квадрат частоты Вейсяля — Брента. Данный случай в классификация из монографии С. А. Габова, А. Г. Свешникова носит название «случай акустических волн». Задача исследуется на основе подхода, связанного с применением так называемой спектральной теории операторных пучков (оператор-функций). Используя факторизацию операторного пучка (к которому сводится исходная задача) относительно окружности, с помощью теоремы М. В. Келдыша получено утверждение о полноте и минимальности системы корневых элементов. Далее доказано, что соответствующая система образует так называемый базис Рисса в гильбертовом пространстве. Изучаются свойства полученных акустических волн. Для мод колебаний этих волн составляющая  $x$  решения  $(x, z)$  принадлежит вихревому подпространству (асимптотически стремится к нулю), а составляющая  $z$  асимптотически удовлетворяет определенному уравнению акустических волн.

**Ключевые слова:** эффект стратификации в идеальных жидкостях, сжимаемая жидкость, спектральная задача.

**AMS Subject Classification:** 34G10, 35P05.

**Образец цитирования:** Цветков Д. О. О свойствах акустических волн в сжимаемой идеальной стратифицированной жидкости // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 2.—С. 136–147. DOI: 10.46698/i0037-3667-8880-p.

### 1. Введение

Исследование многих задач гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости проводится методами функционального анализа. Общие идеи применяемых методов можно найти, например, в [1]. Не обошлись без внимания и линейные задачи о колебаниях идеальной сжимаемой жидкости. В монографии С. А. Габова, А. Г. Свешникова [2] приводится система уравнений [2, с. 271], которая описывает малые движения идеальной сжимаемой стратифицированной жидкости (см. подробнее (2), (3)).

Полученная система уравнений изучается при ряде предположений. Квадрат частоты плаучести  $N^2(x_3)$  удовлетворяет условиям

$$0 < N_{\min}^2 \leq N^2(x_3) \leq N_{\max}^2 < \infty, \\ N^2(x_3) := N_0^2 - \left(\frac{g}{c}\right)^2, \quad N_0^2 := -\frac{g\rho'(x_3)}{\rho_0(x_3)}. \quad (1)$$

Это условие означает устойчивость рассматриваемого распределения плотности  $\rho_0(x_3)$  в жидкости и отсутствие конвективных движений [3, с. 94]. Величина  $c$ , равная по своему смыслу скорости звука, является постоянной величиной. В [3, с. 277, пример 12.10] отмечается, что такое предположение допустимо для некоторых видов стратифицированных сред. Отметим работы [4–6], а также диссертацию на соискание степени доктора физико-математических наук С. Е. Холодовой [7, гл. 6], где рассматривалась аналогичная модель.

Сформулированная система уравнений с краевыми и начальными условиями в [2] была сведена к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка и последующему его изучению. На основе полученных результатов были установлены характерные свойства процесса распространения волн в сжимаемой стратифицированной жидкости. В частности, была проведена классификация типов установившихся волновых движений. Эта классификация основана на сравнении типов уравнений для амплитудных функций установившихся волн и характера фундаментальных решений, отвечающих этим уравнениям [2, с. 279–284]. В данной работе изучается задача о собственных колебаниях сжимаемой идеальной стратифицированной жидкости, целиком заполняющей неподвижный контейнер. Предполагается, что величина частоты  $\omega^2$  установившихся колебаний превосходит  $N^2(x_3)$ , данный случай в классификации [2] получил название «случай акустических волн». Кроме того, считаем, что плотность в невозмущенном стационарном состоянии является функцией лишь  $x_3$  (в отличие от [2], где функция плотности является экспоненциальной).

Даже в рамках такой постановки возникает непростая математическая задача, что определяет самостоятельный интерес к ее изучению. Отметим также, что представленная работа является продолжением работы [8], в которой исследовалась задача о малых движениях соответствующей гидросистемы. Исследование проводилось на основе подхода, отличного от упомянутого в [2]. А именно, исходная начально-краевая задача сводилась к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка в ортогональной сумме некоторых гильбертовых пространств. С полученным уравнением ассоциировалось уравнение с замкнутым оператором. Используя теорию полугрупп, были найдены достаточные условия существования решения соответствующей задачи.

Изложение в работе проведено по следующей схеме. После введения во втором параграфе формулируется постановка как исходной начально-краевой задачи, так и ее операторная формулировка. В третьем параграфе непосредственно изучается задача о собственных колебаниях исходной гидросистемы.

## 2. Постановка начально-краевой задачи, операторная формулировка задачи

Пусть неподвижный контейнер целиком заполнен идеальной сжимаемой жидкостью. Жидкость предполагается стратифицированной, т. е. ее плотность в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси  $Ox_3$  по закону  $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ . Область, занятую

жидкостью, обозначим через  $\Omega$ , а ее границу (твердую стенку) — через  $\partial\Omega$ . Считаем, что система находится под действием силы тяжести с ускорением  $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ , где  $\vec{e}_3$  — орт оси  $Ox_3$ .

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности (1), а также предполагать, что величина  $c$  является постоянной величиной.

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через  $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$  поле скорости в жидкости,  $p = p(t, x)$  — отклонение поля давлений от равновесного давления,  $\rho = \rho(t, x)$  — отклонения поля плотности от исходного поля  $\rho_0(x_3)$ , а через  $\vec{f}(t, x)$  — малое поле внешних массовых сил. Тогда малые движения исходной системы описываются в следующей начально-краевой задачей [2, с. 271]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3) + \vec{f}(t, x), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho'_0(x_3)u_3 + \rho_0(x_3) \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad (2)$$

$$u_3 := \vec{u} \cdot \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = c^{-2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0(x_3) \frac{N^2(x_3)}{g} u_3 \quad (\text{в } \Omega), \quad (3)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} =: u_n = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \quad \vec{u}(0, x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0, x) = \rho^0(x), \quad p(0, x) = p^0(x).$$

Для перехода к операторной формулировке задачи введем основные пространства. Свяжем с функцией  $\rho_0 = \rho_0(x_3)$  пространство  $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$  с нормой следующего вида:

$$\|\vec{v}\|_{\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 = \int_{\Omega} \rho_0 |\vec{v}(x)|^2 d\Omega.$$

В силу свойств функции  $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ , нормы в пространствах  $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$  и  $\vec{L}_2(\Omega)$  эквивалентны, а значит  $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$  — гильбертово. Можно проверить, что имеет место разложение (аналог разложения Г. Вейля пространства векторных полей  $\vec{L}_2(\Omega)$  [1, с. 118]):

$$\vec{L}_2(\Omega, \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}(\Omega, \rho_0), \quad \vec{G}(\Omega, \rho_0) = \left\{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{v} = \rho_0^{-1} \nabla \Phi, \int_{\Omega} \Phi d\Omega = 0 \right\},$$

$$\vec{J}_0(\Omega, \rho_0) = \{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega), v_n = 0 \text{ (на } \partial\Omega) \}.$$

Откуда следует, что  $\vec{v}(t, x) \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$  можно представить в виде

$$\vec{v} = \vec{w} + \rho_0^{-1} \nabla \Phi, \quad \vec{w} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad \rho_0^{-1} \Phi \in \vec{G}(\Omega, \rho_0).$$

Отметим важное обстоятельство, что в полученной начально-краевой задаче можно исключить две искомые функции — поле плотности  $\rho(t, x)$  и поле давления  $p(t, x)$ , если ввести взамен поля скорости  $\vec{u}(t, x)$  поле малых смещений частиц жидкости  $\vec{v}(t, x)$ , связанных с  $\vec{u}(t, x)$  соотношениями  $\partial \vec{v} / \partial t = \vec{u}$ . Далее, путем проектирования уравнений полученной начальной-краевой задачи на введенные функциональные пространства можно перейти к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка (см. подробнее [8]):

$$\mathcal{X}''(t) + \mathcal{B}_{\mathcal{A}} \mathcal{X}(t) = \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{X}(0) = \mathcal{X}^0, \quad \mathcal{X}'(0) = \mathcal{X}^1. \quad (4)$$

Здесь  $\mathcal{X} = \mathcal{X}(t) = (\vec{w}; \rho_0^{-1} \nabla \Phi)^{\tau}$  — искомая функция переменной  $t$  со значениями в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H} := \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}(\Omega, \rho_0)$  (индекс  $(\dots)^{\tau}$  означает операцию транспонирования матрицы),  $\mathcal{F}(t)$  выражается через  $\vec{f}(t, x)$ , оператор  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$  представим в виде:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & Q \\ Q^* & M + I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}_{\mathcal{A}}) = \left\{ (\vec{w}, \rho_0^{-1} \nabla \Phi)^t : A^{-\frac{1}{2}} Q^* \vec{w} + \rho_0^{-1} \nabla \Phi \in \mathcal{D}(A) \right\},$$

$$Q \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega, \rho_0), \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)), \quad M \in \mathfrak{S}_{\infty}(\vec{G}(\Omega, \rho_0)), \quad B_{11} \in \mathcal{L}(\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)),$$

оператор  $A$  является самосопряженным и положительно определенным в  $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$ , при этом  $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\vec{G}(\Omega, \rho_0))$ ,  $p > 3/2$ ; через  $\mathcal{L}$  и  $\mathfrak{S}$  обозначены пространства ограниченных и компактных операторов соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [8] установлено, что если выполнены следующие условия

$$\mathcal{X}^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_{\mathcal{A}}), \quad \mathcal{X}^1 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_{\mathcal{A}}^{1/2}), \quad \mathcal{F}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}),$$

тогда задача Коши (4) имеет сильное решение. Иначе, такую функцию  $\mathcal{X}(t)$ , для которой выполнены условия  $\mathcal{X}(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{B}_{\mathcal{A}}))$ ; выполнено уравнение и начальные условия из (4).

### 3. О свойствах акустических волн

Рассмотрим проблему собственных колебаний идеальной стратифицированной сжимаемой жидкости, полностью заполняющей контейнер произвольной формы. Такими колебаниями называют решения однородного уравнения (4), зависящее от времени  $t$  по закону

$$\mathcal{X}(t) = e^{i\omega t} \mathcal{X}, \quad \mathcal{X} \in \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}(\Omega, \rho_0),$$

где  $\omega$  — неизвестная частота колебаний гидросистемы, а  $\mathcal{X} \neq 0$  — амплитудный элемент или мода колебаний.

Для амплитудных элементов  $\mathcal{X}$  из (4) получаем спектральную задачу

$$\lambda \mathcal{X} = \mathcal{B}_{\mathcal{A}} \mathcal{X}, \quad \lambda := \omega^2, \quad \mathcal{X} = (\vec{w}; \rho_0^{-1} \nabla \Phi)^{\tau}. \quad (5)$$

Отметим, что поскольку самосопряженный оператор  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} \geq 0$ , то спектр этого оператора вещественный и неотрицательный.

Будем считать, что в (5) выполнено условие  $\lambda > N_0^2$ . Тогда, записав (5) в компонентах, сделав замену  $A^{-1/2} z = \rho_0^{-1} \nabla \Phi$  и применив ко второму уравнению оператор  $A^{-1/2}$ , придем к системе уравнений

$$(I - \lambda^{-1} B_{11}) \vec{w} = \lambda^{-1} Q z, \quad Q^* \vec{w} + (M + I) z = \lambda A^{-1} z. \quad (6)$$

В силу предположения  $\lambda > N_0^2$  и оценки  $\|B_{11}\| \leq N_0^2$  (см. [8]), можно в (6) исключить  $\vec{w}$ , так как  $I - \lambda^{-1} B_{11}$  обратим, и получить уравнение для  $z$ :

$$L(\lambda) z := (I + M - \lambda A^{-1} + \lambda^{-1} F_0(\lambda)) z = 0, \quad \lambda > N_0^2, \quad (7)$$

$$F_0(\lambda) := Q^* R(\lambda) Q, \quad R(\lambda) := (I - \lambda^{-1} B_{11})^{-1}.$$

Осуществим в (7) замену  $\lambda = \mu^{-1}$  и умножим обе части на  $\mu$ :

$$M(\mu) z := \mu L(\mu^{-1}) z = (\mu I - A^{-1} - B(\mu)) z = 0, \quad B(\mu) = -\mu M - \mu^2 F_0(\mu^{-1}). \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотрим оператор-функцию вида

$$L(\lambda) := \lambda I - A - B(\lambda), \quad B(\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} B_k \lambda^k, \quad |\lambda| < r, \quad (9)$$

$$A = A^* \in \mathcal{L}(E), \quad B_k = B_k^* \in \mathcal{L}(E), \quad k = 1, 2, \dots$$

Приведем условия факторизации оператор-функции указанного вида относительно окружности (см. [1, с. 70]). Пусть для некоторого  $t \in (0, r)$  выполнено условие

$$\|A\| t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\| t^{k-1} < 1.$$

Тогда оператор-функция  $L(\lambda)$  допускает спектральную факторизацию (частичную линейаризацию) вида  $L(\lambda) = A_+(\lambda)(\lambda I - Z)$ , где спектр  $\sigma(Z) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < t\}$ , а  $A_+(\lambda)$  — голоморфная и голоморфно обратимая оператор-функция в замкнутом круге  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq t\}$ .

С учетом сказанного, для операторного пучка (8) возникла задача вида (9), так как  $F_0(\mu^{-1})$  является голоморфной функцией относительно  $\mu$ :

$$F_0(\mu^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k F_k, \quad F_k = Q^* B_{11}^k Q = F_k^*.$$

**Лемма 1.** При  $|\mu| = t < N_0^{-2}$  для  $M(\mu)$  имеет место оценка

$$\|A^{-1}\| t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\| t^{k-1} \leq \|A^{-1}\| t^{-1} + J N_0^{-2} (1 - t N_0^2)^{-1},$$

$$J := \left( \|A^{-1}\|^{1/2} N_0^2 + \frac{g}{c} K \right)^2,$$

где  $B_k$  — операторные коэффициенты голоморфной функции  $B(\mu)$ ,  $K$  — константа из оценки нормы оператора  $M$ .

◁ Для доказательства данного утверждения воспользуемся следующими результатами (следующими из [8], см. подробнее доказательство леммы 4):

$$M = A^{-\frac{1}{2}}(B_{22} + A_{22})A^{-\frac{1}{2}}, \quad \|B_{22}\| \leq N_0^2,$$

$$\|A_{22}A^{-\frac{1}{2}}\| \leq \frac{g}{c} K \|A^{-1}\|^{1/2}, \quad \|Q\| \leq \|A^{-1}\|^{1/2} N_0^2 + \frac{g}{c}.$$

С учетом представления (8) имеем

$$\begin{aligned} B(\mu) &= -\mu M - \mu^2 F_0(\mu^{-1}) = -\mu(A^{-\frac{1}{2}}B_{22}A^{-\frac{1}{2}} + A^{-\frac{1}{2}}A_{22}A^{-\frac{1}{2}}) - \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k F_k \\ &= -\mu(A^{-\frac{1}{2}}B_{22}A^{-\frac{1}{2}} + A^{-\frac{1}{2}}A_{22}A^{-\frac{1}{2}}) - \mu^2(F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots) \\ &=: -\mu B_1 - \mu^2 B_2 - \mu^3 B_3 - \dots \end{aligned}$$

Для операторных коэффициентов функции  $B(\mu)$  выполнены следующие оценки:

$$\|B_1\| \leq \|A^{-\frac{1}{2}}B_{22}A^{-\frac{1}{2}}\| + \|A^{-\frac{1}{2}}A_{22}A^{-\frac{1}{2}}\| \leq N_0^2 \|A^{-1}\| + \frac{2g}{c} K \|A^{-1}\|^{1/2} \leq J N_0^{-2},$$

$$J := \left( \|A^{-1}\|^{1/2} N_0^2 + \frac{g}{c} K \right)^2, \quad \|B_k\| = \|Q^* B_{11}^{k-2} Q\| \leq (N_0^2)^{k-2} J, \quad k = 2, 3, \dots$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\| t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\| t^{k-1} &\leq \|A^{-1}\| t^{-1} + JN_0^{-2}(1 + N_0^2 t + (N_0^2)^2 t^2 + \dots) \\ &= \frac{\|A^{-1}\|}{t} + \frac{J}{N_0^2} \frac{1}{1 - N_0^2 \cdot t}. \triangleright \end{aligned}$$

Следствием этой леммы и замечания 2 является такой факт.

**Лемма 2.** Пусть выполнено условие

$$D := 4\left(\left(\frac{g}{c}\right)^2 K - N_0^2\right) \|A^{-1}\| + 4\frac{g}{c} K \|A^{-1}\|^{\frac{1}{2}} m + m^2 \geq 0, \quad m := N_0^{-2} \left(\frac{g}{c}\right)^2 - 1,$$

для выполнения которого достаточно потребовать

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{(N_0 - \frac{g}{c} K)^2}{4N_0^4} \iff \lambda_1(A) > \frac{4N_0^4}{(N_0 - \frac{g}{c} K)^2}. \quad (10)$$

Тогда операторный пучок  $L(\lambda)$  из (7) допускает спектральную факторизацию

$$L(\lambda) = L_+(\lambda)(I - \lambda Z); \quad (11)$$

при этом  $L_+(\lambda)$  голоморфна и голоморфна обратима при  $|\lambda| \geq t^{-1}$  для любого  $t \in (0, t_+)$ ,

$$t_+ := \frac{1 - 2\frac{g}{c} K \|A^{-1}\|^{\frac{1}{2}} - N_0^{-2} \left(\frac{g}{c}\right)^2 K^2 + \sqrt{D}}{2N_0^2}, \quad (12)$$

а спектр пучка  $I - \lambda Z$  обладает свойством  $\sigma \subset (t^{-1}, +\infty)$ .

◁ Пусть для пучка  $M(\mu)$  из (8) выполнено условие

$$\|A^{-1}\| t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\| t^{k-1} \leq \|A^{-1}\| t^{-1} + JN_0^{-2} (1 - N_0^2 t)^{-1} < 1,$$

которое равносильно неравенству

$$N_0^2 t^2 + (N_0^{-2} J - N_0^2 \|A^{-1}\| - 1) t + \|A^{-1}\| < 0.$$

Непосредственно проверяется, что при выполнении условия (10), появляется возможность для спектральной факторизации:

$$M(\mu) = M_+(\mu)(\mu I - Z), \quad |\mu| \leq t \in (0, t_+), \quad (13)$$

где  $t_+$  определяется из (12). После деления на  $\mu$  и обратной замены  $\mu = \lambda^{-1}$  приходим к разложению (11), где  $L_+(\lambda) := M_+(\lambda^{-1})$ . Согласно замечанию 2 оператор-функция  $M_+(\mu)$  голоморфна и голоморфна обратима при  $|\mu| \leq t$ , откуда получаем, что  $L_+(\lambda)$  голоморфна и голоморфна обратима при  $|\lambda| \geq t^{-1} > N_0^2$ . Из того же предложения и доказанного факта, что спектр задачи вещественный и неотрицательный, имеем последнее утверждение леммы. ▷

**Лемма 3.** Оператор  $Z$  из (11) имеет структуру

$$Z = (I + S)A^{-1}, \quad S \in \mathfrak{G}_{\infty}(\vec{G}(\Omega, \rho_0)), \quad (I + S)^{-1} \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega, \rho_0)). \quad (14)$$

◁ Пусть голоморфная оператор-функция  $M_+(\mu)$ , отвечающая разложению (13), имеет вид

$$M_+(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} M_j^+ \mu^j, \quad M_j^+ \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega, \rho_0)), \quad j = 0, 1, \dots$$

Тогда тождество (13) с учетом (8) будет выглядеть следующим образом:

$$\mu I - A^{-1} + \mu M + \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k F_k = \left( \sum_{j=0}^{\infty} M_j^+ \mu^j \right) (\mu I - Z).$$

Приравнивание коэффициентов при  $\mu^0$  и  $\mu^1$  приводит к соотношениям

$$A^{-1} = M_0^+ Z, \quad I + M = M_0^+ - M_1^+ Z. \quad (15)$$

Так как функция  $M_+(\mu)$  голоморфно обратима при  $|\mu| \leq t$ , то оператор  $M_0^+ = M_+(0)$  имеет ограниченный обратный:  $(M_0^+)^{-1}$ . Поэтому из первого соотношения (15) устанавливаем, что  $Z = (M_0^+)^{-1} A^{-1} \in \mathfrak{S}(\vec{G}(\Omega, \rho_0))$ . Далее, второе соотношение (15) показывает, что

$$M_0^+ = I + (M + M_1^+ Z) =: I + T_0, \quad T_0 \in \mathfrak{S}_{\infty}(\vec{G}(\Omega, \rho_0)).$$

Отсюда по теореме Фредгольма получаем, что

$$(M_0^+)^{-1} = I + S, \quad S \in \mathfrak{S}_{\infty}(\vec{G}(\Omega, \rho_0)). \triangleright$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3 (Теорема М. В. Келдыша [9, с. 314; 10, с. 20]). Пусть выполнены условия

$$Z = A(I + S), \quad A = A^* \in \mathfrak{S}_p(E), \quad 0 < p < +\infty, \quad S \in \mathfrak{S}_{\infty}(E).$$

Тогда справедливо следующее утверждение. Если  $\text{Ker } Z = \{0\}$ , то система корневых элементов оператора  $Z$  полна в гильбертовом пространстве  $E$ .

Доказательство теоремы М. В. Келдыша, а также более общих теорем о кратной полноте системы корневых элементов полиномиальных операторных пучков можно найти в монографиях И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [9], А. С. Маркуса [10].

Отметим, что условие  $\text{Ker } Z = \{0\}$  равносильно тому, что оператор  $I + S$  обратим (и тогда обратный ограничен), а также тому, что  $\text{Ker } A = \{0\}$ . Более того, при выполнении условий теоремы М. В. Келдыша можно также утверждать, что система корневых элементов сопряженного оператора  $Z^* = (I + S^*)A$  тоже полна в  $E$ .

Лемма 3 и замечание 3 позволяют доказать следующую теорему.

**Теорема 1.** Если выполнено условие (10), тогда задача (7) имеет дискретный спектр  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda_k = (\lambda_k(Z))^{-1}$ , состоящий из конечнократных собственных значений с предельной точкой  $\lambda = +\infty$ . Собственные элементы  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $z_k = z_k(Z)$ , отвечающие собственным значениям  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [(t_+)^{-1}, +\infty)$  (см. (12)), образуют систему векторов, полную и минимальную в пространстве  $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$ .

◁ При выполнении условия (10), согласно лемме 2, имеет место спектральная факторизация (11), причем по лемме 3 фактор  $Z$  имеет структуру (14). Так как в (11) первый сомножитель  $L_+(\lambda)$  при  $\lambda \geq t^{-1} > (t_+)^{-1}$  обратим, то в этой области спектры операторов  $L(\lambda)$  и  $I - \lambda Z$  совпадают. Таким образом, приходим к спектральной задаче

$$Zz = \mu z, \quad Z = (I + S)A^{-1}, \quad 0 \leq \mu = \lambda^{-1} < t. \quad (16)$$

Задача (16) есть задача на собственные значения для слабовозмущенного самосопряженного оператора  $Z$  (см. лемму 3), к которой применима теорема М. В. Келдыша (замечание 3).

Действительно, оператор  $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\vec{G}(\Omega, \rho_0))$ , а оператор  $I + S$ , как доказано выше, обратим и  $S \in \mathfrak{S}_\infty(\vec{G}(\Omega, \rho_0))$ . Поэтому из теоремы М. В. Келдыша следует, что система корневых элементов задачи (16), а потому и задачи (13), отвечающая собственным значениям из открытого круга  $|\mu| < t$ , полна в  $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$ . Кроме того, эта система обладает свойством минимальности в  $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$ , поскольку (16) — задача на собственные значения для линейного пучка, когда свойство переполнения (не минимальности) корневых элементов не имеет места.

Так как задачи (7), (16) не имеют присоединенных векторов (проверяется непосредственно), то отсюда следует, что система собственных векторов  $\{z_k\}_{k=1}^\infty$  операторного пучка  $L(\lambda)$ , отвечающая дискретному спектру

$$\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \subset [(t_+)^{-1}, +\infty), \quad \lambda_k = (\lambda_k(Z))^{-1} \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow \infty),$$

полна и минимальна в пространстве  $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$ .  $\triangleright$

Так как операторные пучки (7) и (8) обладают свойством самосопряженности, т. е. например,  $(M(\bar{\mu}))^* = M(\mu)$ ,  $|\mu| < t$ , то можно использовать построения, которые связаны с наличием у таких пучков симметризатора  $F$  для фактора  $Z$  из (11), (14).

Введем оператор (интегрирование ведется против часовой стрелки)

$$F := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu|=t} M^{-1}(\mu) d\mu. \quad (17)$$

**Лемма 4.** Оператор  $F$  из (17) является положительно определенным и ограниченным в  $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$ , симметризует справа фактор  $Z$  из (11), (14), т. е.  $(ZF)^* = ZF$ .

$\triangleleft$  Доказательства проводятся по аналогии с соответствующими утверждениями для операторного пучка общего вида (9) (см., например, [11, с. 87–89]). Для целостности рассуждений приведем ее.

I этап. Заметим сначала, что  $F \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega, \rho_0))$  как интеграл от непрерывной функции  $M^{-1}(\mu)$ , заданной на кривой  $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = t\}$  конечной длины.

Проверим свойство  $F^* = F$ . Действительно, из (17) имеем

$$F^* := -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\bar{\mu}=t} (M^{-1}(\bar{\mu}))^* d\bar{\mu} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\bar{\mu}=t} M^{-1}(\bar{\mu}) d\bar{\mu}.$$

Осуществляя здесь замену  $\bar{\mu} \mapsto \mu$ , т. е. переходя от интегрирования по часовой стрелке к интегрированию против часовой стрелки, получим по свойствам криволинейных интегралов

$$F^* := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu|=t} M^{-1}(\mu) d\mu = F.$$

Убедимся, что  $F$  симметризует оператор  $Z$  справа. Имеем

$$\begin{aligned} ZF &= Z \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu|=t} M^{-1}(\mu) d\mu \right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu|=t} (Z - \mu I) M^{-1}(\mu) d\mu + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu|=t} \mu M^{-1}(\mu) d\mu \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|\mu|=t} M^{-1}(\mu) d\mu + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu|=t} \mu M^{-1}(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu|=t} \mu M^{-1}(\mu) d\mu := F_0. \end{aligned}$$

Так как  $M_+^{-1}(\mu)$  голоморфна в круге  $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq t\}$ , то интеграл от нее по теореме Коши равен нулю, а оставшийся интеграл является самосопряженным оператором. Этот последний факт доказывается так же, как выше приведенное рассуждение для  $F$ . Окончательно получаем  $ZF = F_1 = F_1^* = (ZF)^*$ .

II этап. Докажем, что оператор  $F$  положительно определен. Введем обозначение:

$$M_0(\mu) := \mu^{-1}M(\mu) = I - \mu^{-1}A^{-1} - \sum \mu^{k-1}B_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Если выполнено условие  $|\mu| = t \in (0, t_+)$ , тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} |((M_0(\mu) - I)z, z)| &= \left| \left( \left( -\mu^{-1}A^{-1} - \sum \mu^{k-1}B_k \right) z, z \right) \right| \\ &\leq \left( \|A^{-1}\| t^{-1} + JN_0^{-2} (1 - tN_0^2)^{-1} \right) \|z\|^2 := \delta(t) \|z\|^2 < \|z\|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее, при любом  $z \in \vec{G}(\Omega, \rho_0)$  и  $\mu$  с  $|\mu| = t$ , в силу  $F^* = F$ , имеем

$$(Fz, z) = \operatorname{Re}(Fz, z) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu|=t} (M^{-1}(\mu)z, z) d\mu \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (M_0^{-1}(te^{i\theta})z, z) d\theta \right),$$

в последнем проведена замена  $\mu = te^{i\theta}$ ,  $d\mu = ite^{i\theta}d\theta$ .

Введем еще функцию  $\psi(\theta) := M_0^{-1}(te^{i\theta})z$ , с учетом (18) получим

$$\begin{aligned} (Fz, z) &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (M_0^{-1}(te^{i\theta})z, z) d\theta \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi(\theta), M_0(te^{i\theta})\psi(\theta)) d\theta \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(\psi(\theta), (M_0(te^{i\theta}) - I)\psi(\theta)) + \|\psi(\theta)\|^2] d\theta \right) \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \delta(t)) \|\psi(\theta)\|^2 d\theta \geq (1 - \delta(t)) \rho^2(t) \|z\|^2 = c \|z\|^2, \end{aligned}$$

где  $c = c(t) := (1 - \delta(t))\rho^2(t) > 0$ . В последнем переходе использовано неравенство

$$\|\psi(\theta)\| \geq \rho(t) \|z\|, \quad \rho(t) := \left( \max_{|\mu|=t} \|M_0(\mu)\| \right)^{-1}. \triangleright$$

Воспользуемся теперь наличием симметризатора  $F$  у оператора спектральной задачи (16), а также леммой 4.

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1 собственные элементы  $\{z_k\}_{k=1}^\infty$  задачи (7), отвечающие собственным значениям  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  из интервала  $[(t_+)^{-1}, +\infty)$ , образуют базис Рисса в пространстве  $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$ :  $z_k = F^{1/2}\psi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$  — ортонормированный базис, составленный из собственных элементов самосопряженного компактного оператора  $F^{-1/2}(ZF)F^{-1/2}$ .

◁ При выполнении условия (10), как и в теореме 1, приходим к спектральной задаче (16). Осуществим в (16) замену  $z = F^{1/2}\psi$ ,  $\psi = F^{-1/2}z$ , где  $F$  — симметризатор фактора  $Z$ . Подействуем на обе части (16) оператором  $F^{-1/2}$ . Возникнет задача

$$K\psi := F^{-\frac{1}{2}}(ZF)F^{-\frac{1}{2}}\psi = \mu\psi. \quad (19)$$

Поскольку здесь оператор  $ZF$  самосопряжен и вполне непрерывен, так как  $F^{-1/2}$ ,  $F^{1/2} \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega, \rho_0))$  и  $Z \in S_\infty(\vec{G}(\Omega, \rho_0))$ , а его ядро нулевое, то (19) есть задача на собственные значения для полного самосопряженного оператора  $K$ . Поэтому, согласно теореме Гильберта — Шмидта, она имеет в качестве решений множество собственных элементов  $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$  оператора  $K$ , образующее ортонормированный базис в  $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$ . А значит, элементы  $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ ,  $z_k = F^{1/2}\psi_k$ , являющиеся решениями задачи (16), образуют базис Рисса в  $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$ .  $\triangleright$

**Лемма 5.** На интервале  $(N_0^2, +\infty)$  собственные значения  $\lambda = \lambda_k$  задачи (7) при  $k \rightarrow \infty$  имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k = \lambda_k(A)[1 + o(1)] = c_A^{-2/3} \lambda_k^{2/3} [1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty. \quad (20)$$

$\triangleleft$  В операторном пучке (7) оператор-функция  $\lambda^{-1}F_0(\lambda)$  голоморфна при  $|\lambda| > N_0^2$  и аннулируется на бесконечности, собственные числа  $\lambda_k(A^{-1})$  оператора  $A^{-1}$  имеют степенную асимптотику (см. подробнее лемму 3 из работы [4]). Таким образом, собственные числа  $\lambda_k$  задачи (7) и укороченной задачи  $(I - \lambda A^{-1})z = 0$  имеют одинаковое асимптотическое поведение при  $k \rightarrow \infty$  (по теореме Маркуса — Мацаева, см. [1, с.71]). Отсюда следует утверждение леммы.  $\triangleright$

#### 4. Заключение

В работе исследуется задача о собственных колебаниях сжимаемой идеальной стратифицированной жидкости, целиком заполняющей неподвижный контейнер. Предполагается, что квадрат частоты колебаний данной гидросистемы превосходит квадрат частоты Вейсяля — Брента. Данный случай в классификации из монографии [2] носит названия «случай акустических волн». Задача исследуется на основе подхода, связанного с применением так называемой спектральной теории операторных пучков (оператор-функций). Изучаются свойства полученных акустических волн. Для мод колебаний этих волн составляющая  $\vec{w}_k$  решения  $(\vec{w}_k; z_k)^\tau$ , принадлежащая вихревому подпространству  $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ , асимптотически стремится к нулю ( $\|\vec{w}_k\|_\Omega \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ ), а составляющая  $z_k$  асимптотически (при  $k \rightarrow \infty$ ) удовлетворяет уравнению (20). Доказано свойство полноты и базисности совокупности мод акустических волн.

В заключение отметим, если  $\lambda \in [0, N_0^2] \subset \mathbb{R}_+$ , то для существования внутренних волн (обусловленных наличием сил плавучести) достаточно доказать, что в задаче (5) отрезок  $[0, N_0^2]$  принадлежит предельному спектру этой задачи. Однако, здесь возникает задача на собственные значения для самосопряженного оператора возмущенным не компактным (как в случае несжимаемой жидкости), а только ограниченным оператором. Последнее не позволяет применить теорему Вейля об устойчивости существенного спектра. Таким образом, пока остается открытым вопрос о том, что квадрат частот внутренних волн образует множество  $[0, N_0^2]$ .

#### Литература

1. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator Approach to Linear Problems Of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-Adjoint Problems for an Idial Fluid.—Verlag, Basel, Boston, Berlin: Birkhauser 2001.—384 p. DOI:10.1007/978-3-0348-8342-9.
2. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей.—М.: Наука, 1986.—288 с.
3. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред.—М.: Наука, 1982.—335 с.
4. *Shatov A. K.* Types of Kelvin waves in a compressible stratified fluid // USSR Comput. Math. Math. Phys.—1987.—Vol. 27, № 1.—P. 201–204. DOI: 10.1016/0041-5553(87)90144-3.

5. Kholodova S. E. Wave motions in a compressible stratified rotating fluid // *Comput. Math. Math. Phys.*—2007.—Vol. 47, № 12.—P. 2014–2022. DOI: 10.1134/S0965542507120111.
6. Zakora D. A. Model of the Maxwell compressible fluid // *J. Math. Sci.*—2020.—Vol. 250.—P. 593–610. DOI: 10.1007/s10958-020-05030-6.
7. Холодова С. Е. Математическое моделирование и анализ течений и волн во вращающейся и электропроводимых жидких средах: дис. . . . д-ра. техн. наук: 25.00.15.—СПб., 2018.—451 с.
8. Цветков Д. О. Об одной начально-краевой задаче, возникающей в динамике сжимаемой идеальной стратифицированной жидкости // *Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика.*—2024.—Т. 48.—С. 49–63. DOI: 10.26516/1997-7670.2024.48.49.
9. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.—М.: Наука, 1965.—448 с.
10. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков.—Кишнев: Штиница, 1986.—260 с.
11. Копачевский Н. Д., Азизов Т. Я., Загора Д. А., Цветков Д. О. Операторные методы в прикладной математике. Т. 2. Основные курсы.—Симферополь: Ариал, 2022.—536 с.

*Статья поступила 30 июля 2024 г.*

ЦВЕТКОВ ДЕНИС ОЛЕГОВИЧ  
 Крымский федеральный университет,  
 доцент кафедры математического анализа  
 РОССИЯ, 295000, Симферополь, пр-т Вернадского, 4  
 E-mail: [tsvetdo@gmail.com](mailto:tsvetdo@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0003-1068-0102>

*Vladikavkaz Mathematical Journal*  
 2025, Volume 27, Issue 2, P. 136–147

## ON THE PROPERTIES OF ACOUSTIC WAVES IN A COMPRESSIBLE IDEAL STRATIFIED FLUID

Tsvetkov, D. O.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Crimean Federal University,  
 4 Vernadskii Ave., Simferopol 295000, Russia  
 E-mail: [tsvetdo@gmail.com](mailto:tsvetdo@gmail.com)

**Abstract.** The problem of small motions of a compressible ideal stratified fluid was previously studied by the author. This problem was reduced to the Cauchy problem for a differential-operator equation of the second order in the orthogonal sum of some Hilbert spaces. An equation with a closed operator was associated with the resulting equation. The application of the operator block matrix method, as well as the theory of abstract differential equations enables us to find sufficient conditions for the existence of a solution to the corresponding problem. In the present work, the corresponding problem of normal oscillations of this hydraulic system is investigated. It is assumed that the square of the oscillation frequency of this hydraulic system exceeds the square of the Weisala–Brent frequency. This case in the classification from the monograph [2] is called the “case of acoustic waves”. The problem is investigated on the base of an approach associated with the application of the so-called spectral theory of operator bundles (operator functions). Using the factorization of the operator bundle (to which the original problem is reduced) with respect to a circle of some radius, using M. V. Keldysh’s theorem, a statement is obtained about the completeness and minimality of the system of root elements. It is further proved that the corresponding system forms the so-called Riesz basis in the Hilbert space. Also, the nature of the asymptotic behavior of the branches of the eigenvalues of the operator pencil under study is clarified.

**Keywords:** stratification effects in ideal fluids, compressible fluid, spectral problem.

**AMS Subject Classification:** 34G10, 35P05.

**For citation:** Tsvetkov, D. O. On the Properties of Acoustic Waves in a Compressible Ideal Stratified Fluid, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 2, pp. 136–147 (in Russian). DOI: 10.46698/i0037-3667-8880-p.

## References

1. Kopachevsky, N. D. and Krein, S. G. *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1 : Self-Adjoint Problems for an Ideal Fluid*, Basel, Boston, Berlin, Birkhauser Verlag, 2001, 384 p. DOI:10.1007/978-3-0348-8342-9.
2. Gabov, S. A. and Sveshnikov, A. G. *Zadachi dinamiki stratifitsirovannykh zhidkostey* [Problems in the dynamics of stratified fluids], Moscow, 1986, 288 p. (in Russian).
3. Brekhovskikh, L. M. and Goncharov, V. V. *Vvedenie v mekhaniku sploshnykh sred* [Introduction to the mechanics of continuous media], Moscow, 1982, 325 p. (in Russian).
4. Shatov, A. K. Types of Kelvin Waves in a Compressible Stratified Fluid, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1987, vol. 27, no. 1, pp. 201–204. DOI: 10.1016/0041-5553(87)90144-3.
5. Kholodova, S. E. Wave Motions in a Compressible Stratified Rotating Fluid, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 12, pp. 2014–2022. DOI: 10.1134/S0965542507120111.
6. Zakora, D. A. Model of the Maxwell Compressible Fluid, *Journal of Mathematical Sciences*, 2020, vol. 250, pp. 593–610. DOI: 10.1007/s10958-020-05030-6.
7. Kholodova, S. E. *Matematicheskoe modelirovanie i analiz techeniy i voln vo vrashchayushcheyasya i elektroprovodimyykh zhidkikh sredakh* [Mathematical modeling and analysis of flows and waves in rotating and electrically conducting liquid media], Doctor's Thesis, Saint Petersburg, 2018, 451 p. (in Russian).
8. Tsvetkov, D. O. On an Initial-Boundary Value Problem Which Arises in the Dynamics of a Compressible Ideal Stratified Fluid, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 48, pp. 49–63. DOI: 10.26516/1997-7670.2024.48.49.
9. Gohberg, I. C. and Krein, M. G. *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space*, Translations of Mathematical Monographs, 1969, vol. 18, 448 p.
10. Markus, A. S. *Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils*, Translations of Mathematical Monographs, 1988, vol. 71, 260 p.
11. Kopachevsky, N. D., Azizov, T. Ya., Zakora, D. A. and Tsvetkov, D. O. *Operatornyye metody v prikladnoy matematike. T. 2. Osnovnyye kursy* [Operator methods in applied mathematics. Vol. 2. Basic courses], Simferopol, Arial, 2022, 536 p. (in Russian).

Received July 30, 2024

DENIS O. TSVETKOV  
Crimean Federal University,  
4 Vernadskogo Ave., Simferopol 295000, Russia,  
Associate Professor  
E-mail: [tsvetdo@gmail.com](mailto:tsvetdo@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0003-1068-0102>

А. Ф. ТЕДЕЕВУ — 70 ЛЕТ

29 мая 2025 г. исполнилось 70 лет известному российскому математику, доктору физико-математических наук, профессору, заведующему кафедрой математики и физики Юго-Осетинского государственного университета им. А. А. Тибилова, ведущему научному сотруднику отдела математического моделирования Южного математического института ВНИЦ РАН Анатолию Федоровичу Тедееву.

Анатолий Федорович родился в поселке Дзау Южной Осетии в семье кандидата геолого-минералогических наук, доцента Федора Алексеевича Тедеева и сотрудницы цхинвальской метеостанции Татьяны Александровны Цховребовой. Именно родители заложили основы характера будущего ученого, а непосредственно интерес к математике привил его дядя кандидат физико-математических наук, доцент Сулико Алексеевич Тедеев.

В 1972 г. после окончания цхинвальской средней школы № 6, где его математическими наставниками были учителя Казбек Григорьевич Бетеев и Отар Харитонович Гассиев, А. Ф. Тедеев поступает на математический факультет Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова. По окончании вуза по ходатайству доктора физико-математических наук Гудиева Амурхана Хаджумаровича был направлен на стажировку на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета, где его научным руководителем был выдающийся математик доктор физико-математических наук, профессор, лауреат премии М. А. Лаврентьева Всеволод Алексеевич Солонников. Их совместная деятельность и определила дальнейшее направление научных исследований Анатолия Федоровича. В 1985 г. А. Ф. Тедеев под руководством доктора физико-математических наук, профессора Андрея Евгеньевича Шишкова защитил кандидатскую диссертацию на тему «Оценки решений и субрешений квазилинейных эллиптических уравнений на бесконечности и в окрестности граничной точки», а в 1998 г. докторскую диссертацию «Начально-краевые задачи для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений в областях с некомпактной границей».

А. Ф. Тедеев внес капитальный вклад в качественную теорию нелинейных дифференциальных уравнений. Актуальность этого направления объясняется многочисленными приложениями в физике плазмы, атмосферы и океана. Остановимся на некоторых фундаментальных результатах, относящихся к квазилинейным параболическим уравнениям с двойным вырождением. Для решения задачи Неймана в неограниченных областях с некомпактной границей, описываемых в терминах изопериметрических неравенств, для широкого класса вырождающихся параболических уравнений установлена точная двусторонняя оценка в равномерной метрике. Отметим, что полученные результаты существенно расширяют смысл показателей Баренблатта и зависят от геометрии области.



Найдена численная характеристика точного поведения решения, зависящая от геометрии области и параметров нелинейности задачи. В проведенных совместных исследованиях с профессором Д. Андреуччи для аналогичной задачи с источником была решена проблема Фуджиты и найдены новые критические показатели. Кроме того, найден допустимый класс растущих начальных функции, при которых имеет место глобальная разрешимость.

Через несколько лет в совместных работах с Д. Андреуччи и М. Уги для решения задачи Коши — Дирихле уравнения пористой среды найден новый весовой подход, гарантирующий точные оценки скорости стабилизации и оценок носителя. Кроме того, для решения задачи Дирихле вязких уравнений Гамильтона — Якоби установлен критерий стремления к нулю тотальной массы решения при неограниченном возрастании времени.

Разработанные методы были перенесены для исследования уравнений с двойной нелинейностью и неоднородной плотностью. А именно, для таких уравнений дана полная классификация поведения решения задачи Коши в зависимости от поведения плотности на бесконечности и найдены новые критические показатели. В частности, впервые найдено условие, при котором имеет место универсальная оценка, не зависящая от начальной функции. Позднее А. Ф. Тедеев и Д. Андреуччи создали новые интегральные подходы и перенесли некоторые из перечисленных результатов на некомпактные римановы многообразия.

Анатолий Федорович активно занимается образовательной деятельностью, много времени и внимания уделяет воспитанию нового поколения исследователей. В 1981 г. он начал работать в Донецком политехническом институте, а затем после защиты докторской диссертации перешел в Донецкий национальный университет, где преподавал на кафедре дифференциальных уравнений. Кроме этого, с 1989 по 2014 гг. А. Ф. Тедеев работал в Институте прикладной математики и механики Национальной академии наук Украины в г. Донецке, где прошел путь от научного сотрудника до заведующего отделом уравнений математической физики. Почти за 50 лет активной научной деятельности он опубликовал более 85 научных работ. Под его руководством защищено 5 кандидатских диссертаций и одна докторская. Кроме того, Анатолий Федорович принимал участие в двух Международных математических конгрессах (ICM) и многократно приглашался для чтения лекций и совместных научных исследований в различные университеты Италии, Великобритании, Германии, Франции и Израиля.

А. Ф. Тедеев является не только известным ученым и талантливым преподавателем, но и образцом порядочности, скромности и доброжелательности. Благодаря этому он пользуется заслуженным авторитетом и уважением среди своих учеников и коллег. Анатолий Федорович прекрасный семьянин; с супругой Изабеллой Мухаровной воспитывают двоих детей — сына Алана Анатольевича, аспиранта первого года обучения и дочь — Милену Анатольевну, ученицу десятого класса.

Отмечая юбилей нашего товарища и коллеги, от всей души желаем Анатолию Федоровичу крепкого здоровья, семейного благополучия и новых творческих достижений!

*В. Е. Бобков, А. Л. Гладков, Г. В. Гришина,  
А. А. Ковалевский, Л. М. Кожневникова, А. Г. Кусраев,  
З. А. Кусраева, Е. Ю. Панов, Д. М. Поляков*

# ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

## Общие положения

1. Периодическое издание «Владикавказский математический журнал» публикует оригинальные научные статьи отечественных и зарубежных авторов, содержащие новые математические результаты по функциональному и комплексному анализу, алгебре, геометрии, дифференциальным уравнениям и математической физике. По заказу редакционной коллегии журнал также публикует обзорные статьи. Журнал предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре выпуска в год. «Владикавказский математический журнал» публикует статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более 2 усл.п.л. (17 страниц формата А4). Работы, превышающие 2 усл.п.л., принимаются к публикации по специальному решению Редколлегии журнала. Срок рассмотрения статей обычно не превышает 8 месяцев. При подготовке статей для ускорения их рассмотрения и публикации следует соблюдать правила для авторов.

2. К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Результаты иных авторов, использованные в статье, следует должным образом отразить в ссылках. Направляя статью в журнал, авторы тем самым подтверждают, что для нее выполнены указанные требования.

3. Направляя статью в журнал, каждый из авторов подтверждает, что статья соответствует наивысшим стандартам публикационной этики для авторов и соавторов, разработанным COPE (Committee on Publication Ethics), см. <http://publicationethics.org/about>.

4. Все материалы, поступившие для публикации в журнале, подлежат регистрации с указанием даты поступления рукописи в редакцию журнала. Решение о публикации, отказе в публикации или направлении рукописи автору для доработки должно быть принято главным редактором и сообщено автору не позднее 4 месяцев со дня поступления рукописи в редакцию журнала. Подробнее см. в разделе Рецензирование.

5. Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего окончательный макет статьи в формате PDF направляется автору на корректуру.

6. Условием публикации статей, принятых к печати, является подписанием авторами договора о передаче авторских прав. Бланк договора можно скачать по ссылке.

7. Полнотекстовые версии статей, публикуемых в журнале, размещаются в Интернете в свободном доступе на официальном сайте журнала <http://www.vlmj.ru>, а также на сайтах Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка».

8. Статьи журнала реферируются и индексируются в Scopus (Elsevier), zbMATH (Springer), MathSciNet (AMS), Russian Science Citation Index (Web of Science), EBSCO, РЖМат (ВИНИТИ РАН), Math-Net.Ru, РИНЦ (eLibrary.Ru).

9. Публикации в журнале для авторов бесплатны.

## Подготовка и представление рукописи статьи

1. Все материалы предоставляются в редакцию в электронном виде. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая рисунки, таблицы и список литературы, следует пронумеровать.

2. Работа должна быть подготовлена на компьютере в издательской системе LaTeX. Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX, не рассматриваются. Файлы статьи \*.tex и \*.ps (\*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте [rio@smath.ru](mailto:rio@smath.ru).

3. В тексте статьи указывается индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся аннотации на русском и английском языках (объемом не менее 200 слов, достаточную для понимания содержания статьи), даются списки ключевых слов на русском и английском языках, а также коды согласно Mathematics Subjects Classifications (2010). Далее в файле приводятся полностью Фамилия, Имя, Отчество каждого автора, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты и ORCID.

4. Датой поступления статьи считается дата поступления электронной копии статьи на официальный e-mail журнала. Текст электронного сообщения должен быть оформлен как сопроводительное письмо, из текста которого ясно следует, что авторы направляют свою статью во Владикавказский математический журнал. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

5. В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

6. При подготовке файла статьи особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макроязыка LaTeX. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела.

7. Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков. Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова «Рис. » с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отформатированной слева надписью «Таблица» с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

8. Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы печатается в конце текста статьи, оформленные в соответствии с правилами издания, на основании требований, предусмотренных действующими ГОСТами. В нем должны быть указаны: для статей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

9. Список литературы полностью дублируется на английском языке, приводится полностью отдельным блоком в конце статьи, повторяя список литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются в списке, готовящемся в романском алфавите. Список References используется международными библиографическими базами (Scopus, WoS и др.) для учета цитирования авторов.

**Примечание:** более подробную информацию можно найти на официальном сайте журнала <http://www.vlmj.ru>.

# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 27

Выпуск 2

Главный редактор А. Г. Кусраев

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций.  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

---

Подписано в печать 24.06.2025. Дата выхода в свет 28.06.2025.  
Формат бумаги А4. Гарн. шрифта Computer modern.  
Усл. п. л. 17,67. Тираж 100 экз. Цена свободная.

---

**Учредитель:**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Федеральный научный центр «Владикавказский научный центр  
Российской академии наук» (ВНЦ РАН)

**Издатель:**

Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ  
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»

**Адрес издателя:**

362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.  
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

Индекс 57380