



# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

<http://www.vlmj.ru>

Том 28, выпуск 1

2026



# VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

<http://www.vlmj.ru>

Volume 28, Issue 1

2026

## Главный редактор

А. Г. КУСПАЕВ

Владикавказский научный центр РАН,  
Владикавказ, Россия

## Зам. главного редактора

Д. М. ПОЛЯКОВ

Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,  
Владикавказ, Россия

## Редакционная коллегия

А. В. АБАНИН

Южный федеральный университет,  
Ростов-на-Дону, Россия

ДАНИЭЛЬ АНДРЕУЧЧИ

Римский университет Ла Сапиенца,  
Рим, Италия

А. О. ВАТУЛЬЯН

Южный федеральный университет,  
Ростов-на-Дону, Россия

С. К. ВОДОПЬЯНОВ

Институт математики Сибирского  
отделения РАН, Новосибирск, Россия

Е. И. ГОРДОН

Университет Восточного Иллинойса,  
Чарльстон, США

А. И. КОЖАНОВ

Институт математики Сибирского  
отделения РАН, Новосибирск, Россия

В. А. КОЙБАЕВ

Северо-Осетинский государственный  
университет им. К. Л. Хетагурова,  
Владикавказ, Россия

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В. Д. МАЗУРОВ

Институт математики Сибирского  
отделения РАН, Новосибирск, Россия

В. Е. НАЗАЙКИНСКИЙ

Институт проблем механики  
им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Ю. Г. НИКОНОРОВ

Южный математический институт —  
филиал ВЦ РАН, Владикавказ, Россия

О. В. ПОЧИНКА

Национальный исследовательский  
университет «Высшая школа экономики»,  
Н. Новгород, Россия

А. В. ПСХУ

Институт прикладной математики  
и автоматизации КБНЦ РАН,  
Нальчик, Россия

В. Ж. САКБАЕВ

Институт прикладной математики  
им. М. В. Келдыша РАН,  
Москва, Россия

С. Г. САМКО

Университет Алгарве,  
Фаро, Португалия

В. А. СТУКОПИН

Московский физико-технический  
институт, Москва, Россия

ФАМ ЧОНГ ТИЕН

Вьетнамский национальный  
университет, Ханой, Вьетнам

В. Г. ТРОИЦКИЙ

Альбертский университет, Эдмонтон, Канада

С. М. УМАРХАДЖИЕВ

Комплексный научно-исследовательский институт  
им. Х. И. Ибрагимова РАН, Грозный, Россия

ЛЕ ХАЙ ХОЙ

Ханойский университет науки и технологий,  
Ханой, Вьетнам

**Адрес редакции:** 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1

Телефон: (8672) 23-00-54; E-mail: [rio@smath.ru](mailto:rio@smath.ru)

**Зав. редакцией:** В. В. КИБИЗОВА

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год

Электронная версия: [www.vlmj.ru](http://www.vlmj.ru)

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций:

свид. ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.;

свид. ЭЛ № ФС77-70171 от 21 июня 2017 г.

© Владикавказский научный центр РАН, 2026

**Editor-in-Chief**

ANATOLY G. KUSRAEV  
Vladikavkaz Scientific Centre  
of the Russian Academy of Sciences,  
Vladikavkaz, Russia

**Associate Editor**

DMITRY M. POLYAKOV  
Southern Mathematical Institute of VSC RAS, Vladikavkaz, Russia

**Editorial Board**

ALEXANDER V. ABANIN  
Southern Federal University,  
Rostov-on-Don, Russia

DANIELE ANDREUCCI  
Sapienza University of Rome, Rome, Italy

EVGENY I. GORDON  
Eastern Illinois University,  
Charleston, USA

LE HAI KHOI  
University of Science and Technology,  
Hanoi, Vietnam

VLADIMIR A. KOÏBAEV  
North Ossetian State University,  
Vladikavkaz, Russia

ALEXANDER I. KOZHANOV  
Sobolev Institute of Mathematics  
of Siberian Branch of the RAS,  
Novosibirsk, Russia

GEORGIĬ G. MAGARIL-IL'YAEV  
Lomonosov Moscow State University,  
Moscow, Russia

VICTOR D. MAZUROV  
Sobolev Institute of Mathematics  
of Siberian Branch of the RAS,  
Novosibirsk, Russia

VLADIMIR E. NAZAIKINSKIĬ  
Ishlinsky Institute for Problems  
in Mechanics RAS, Moscow, Russia

YURIĬ NIKONOROV  
Southern Mathematical Institute  
of VSC RAS, Vladikavkaz, Russia

OLGA V. POCHINKA  
National Research University Higher School  
of Economics, Nizhny Novgorod, Russia

ARSEN V. PSKHU  
Institute of Applied Mathematics  
and Automation KBSC RAS, Nalchik, Russia

VSEVOLOD ZH. SAKBAEV  
Keldysh Institute of Applied Mathematics,  
Moscow, Russia

STEFAN G. SAMKO  
Universidade do Algarve, Faro, Portugal

VLADIMIR A. STUKOPIN,  
Moscow Institute of Physics,  
and Technology, Moscow, Russia

PHAM TRONG TIEN  
Vietnam National University,  
Hanoi, Vietnam

VLADIMIR G. TROITSKY  
University of Alberta,  
Edmonton, Canada

SALAUDIN M. UMARKHADZHIEV  
Ibragimov Complex Institute of the RAS,  
Grozny, Russia

ALEXANDER O. VATULYAN  
Southern Federal University,  
Rostov-on-Don, Russia

SERGEI K. VODOPYANOV  
Sobolev Institute of Mathematics  
of Siberian Branch of the RAS,  
Novosibirsk, Russia

**Editorial Office:** 1 Williams St., Mikhailovskoe 363110,  
the Republic of North Ossetia-Alania, Russia  
Phone: (8672) 23-00-54; E-mail: [rio@smath.ru](mailto:rio@smath.ru)

**Managing Editor:** VICTORIA V. KIBIZOVA

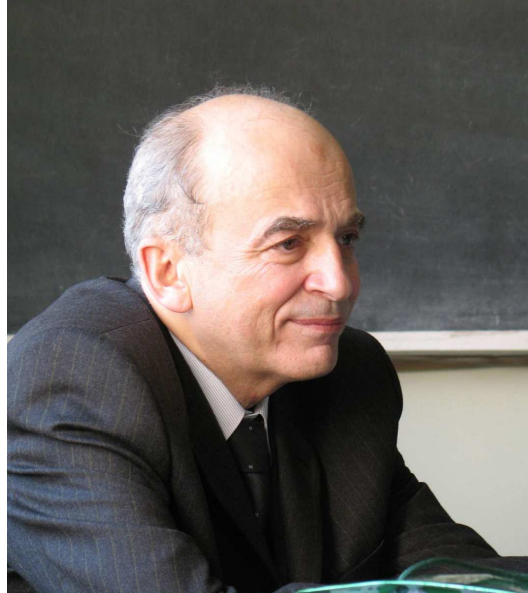
The journal was founded in 1999. It is published four times a year.

ELECTRONIC VERSION: [www.vlmj.ru](http://www.vlmj.ru)

Registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom,  
Information Technologies and Mass Communications:  
ПН № ФС77-70008 dated May 31, 2017; ЭЛ № ФС77-70171 dated June 21, 2017.

© Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, 2026

ПАМЯТИ С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ  
(02.10.1945 — 15.01.2025)



Этот специальный выпуск Владикавказского математического журнала посвящается памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе. Семён Самсонович был членом редакционной коллегии Владикавказского математического журнала с момента выхода первого номера в 1999 г.; оказал решающее влияние на формировании редакционной политики журнала и его репутации как серьезного и интересного математического издания.

Основные направления исследований С. С. Кутателадзе относятся к проблемам функционального анализа, нестандартным методам анализа, приложениям к геометрии и оптимизации, пограничным разделам функционального анализа и математической логики. Ему принадлежат яркие достижения в этих областях. Для более подробного описания академической карьеры и вклада Семёна Самсоновича мы отсылаем к биографическим статьям [1, 2] и к статье [3]. Памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе посвящены два номера Сибирского математического журнала (2025, Т. 66, № 5, 6)<sup>#</sup>, а также Воркшоп по функциональному анализу, состоявшийся в период с 14 по 16 октября 2025 г. в дистанционном формате (<https://smath.ru/activities/workshops/news/17149/>).

1. Кутателадзе С. С. Матселфи. Вестник Владикавказского научного центра РАН. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 68–72.

2. Кутателадзе С. С. Мой Канторович. В кн.: Леонид Витальевич Канторович 1912–1986. Материалы к библиографии ученых РАН: Математические науки (вып. 23). М.: ИНИОН РАН, 2022. С. 100–118.

3. Александров В. А., Гордон Е. И., Гутман А. Е., Дятлов В. Н., Кусраев А. Г., Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Семён Самсонович Кутателадзе (02.10.1945–15.01.2025). Сибирский математический журнал. 2025. Т. 66, № 5. С. 970–976.

---

<sup>#</sup> 5-й выпуск 2025 г. СМЖ на русском языке: <https://math-smz.ru/content/66-5/>; на английском языке: <https://link.springer.com/journal/11202/volumes-and-issues/66-5/>; 6-й выпуск 2025 г. СМЖ на русском языке: <https://math-smz.ru/content/66-6/>; на английском языке: <https://link.springer.com/journal/11202/volumes-and-issues/66-6/>.



# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 28, выпуск 1

январь–март, 2026

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Abasov N. and Gutnova A.</b> On Band Preserving Operators on Complex Vector Lattices .....	7
<b>Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г.</b> Локальная управляемость, траектория геометрического локального инфимума и условия второго порядка в оптимальном управлении .....	16
<b>Avdeev N. N., Zvolinskiy A. E., Momot E. A.</b> Particular Examples of Planar Integral Point Sets and their Classification .....	28
<b>Бештокова З. В., Бештоков М. Х., Шхануков-Лафишев М. Х.</b> Локально-одномерная схема для многомерного уравнения теплопроводности дробного порядка с условиями третьего рода в произвольной области .....	37
<b>Emelyanov E. Yu.</b> Automatic Boundedness of Some Operators Between Ordered and Topological Vector Spaces .....	62
<b>Зволинский Р. Е., Семенов Е. М.</b> Банаховы пределы, инвариантные относительно операторов растяжения .....	68
<b>Кудайбергенов К. К., Орынбаев П. Р.</b> Частично интегральные операторы в банаховых идеальных функциональных пространствах .....	73
<b>Кусраев А. Г.</b> Лемма Фаркаша для полилинейных операторов .....	82
<b>Кусраева З. А., Саадулаева А. А.</b> О продолжении линейных селекторов .....	98
<b>Markina I. G., Nikonorov Yu. G. and Furutani K.</b> On Examples of Geodesic Orbit Pseudo-Riemannian Manifolds .....	108
<b>Naceri M.</b> Existence And Uniqueness of Solution for Nonlinear Anisotropic Elliptic Dirichlet Problems .....	122
<b>Тамаева В. А., Тасоев Б. Б.</b> Экстремальное строение выпуклых множеств линейных операторов на пространстве непрерывных функций .....	134
<b>МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ</b>	
Памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе .....	145
<b>Kutateladze S. S.</b> Math's If (An Imitation of Rudyard Kipling) .....	149

# VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 28, issue 1

January–March, 2026

## CONTENT

<b>Abasov, N. and Gutnova, A.</b> On Band Preserving Operators on Complex Vector Lattices .....	7
<b>Avakov, E. R. and Magaril-II'yaev, G. G.</b> Local Controlability, Trajectory Geometric Local Infimuma, and Second-Order Conditions in Optimal Control .....	16
<b>Avdeev, N. N., Zvolinskiy, A. E. and Momot, E. A.</b> Particular Examples of Planar Integral Point Sets and their Classification .....	28
<b>Beshtokova, Z. V., Beshtokov, M. Kh. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.</b> Locally One-Dimensional Scheme for a Multidimensional Fractional-Order Heat Equation with Conditions of the Third Kind in an Arbitrary Domain .....	37
<b>Emelyanov, E. Yu.</b> Automatic Boundedness of Some Operators Between Ordered and Topological Vector Spaces .....	62
<b>Zvolinsky, R. E. and Semenov, E. M.</b> Banach Limits Invariant Under Dilation Operators .....	68
<b>Kudaybergenov, K. K. and Orinbaev, P. R.</b> Partial Integral Operators in Banach Ideal Function Spaces .....	73
<b>Kusraev, A. G.</b> Farkas Lemma for Multilinear Operators .....	82
<b>Kusraeva, Z. A. and Saadulaeva, A. A.</b> On Extension of Linear Selectors .....	98
<b>Markina, I. G., Nikonorov, Yu. G. and Furutani, K.</b> On Examples of Geodesic Orbit Pseudo-Riemannian Manifolds .....	108
<b>Naceri, M.</b> Existence And Uniqueness of Solution for Nonlinear Anisotropic Elliptic Dirichlet Problems .....	122
<b>Tamaeva, V. A. and Tasoev, B. B.</b> Extremal Structure of Convex Sets of Linear Operators on the Space of Continuous Functions .....	134
MATHEMATICAL LIFE	
In memory of Semën Samsonovich Kutateladze .....	145
<b>Kutateladze, S. S.</b> Math's If (An Imitation of Rudyard Kipling) .....	149

УДК 517.98

DOI 10.46698/h7168-4322-6544-h

ON BAND PRESERVING OPERATORS ON COMPLEX VECTOR LATTICES<sup>#</sup>

N. Abasov<sup>1</sup> and A. Gutnova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University,  
5, Bldg. 4 2-nd Baumanskaya St., Moscow 105005, Russia;

<sup>2</sup>North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,  
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: abasovn@mail.ru, gutnovaalina@gmail.com

*Dedicated to the memory of S. S. Kutateladze*

**Abstract.** In this article we continue an investigation of orthogonally additive operators on complex vector lattices started in [1]. We study the special class of so called band preserving orthogonally additive operators defined on the complexification  $E_{\mathbb{C}}$  of a uniformly complete vector lattice  $E$  and taking values in  $E$ . We say that an orthogonally additive operator  $\mathcal{T}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow E$  is band preserving if  $\mathcal{T}(w) \in \{|w|\}^{\perp\perp}$  for every element  $w$  of  $E_{\mathbb{C}}$ . The authors introduce and study the class of elementary band preserving operators, which are complex extensions  $\mathcal{T}_{T,S}$  constructed from pairs of real operators  $T, S: E \rightarrow E$  that commute with all band projections. It is demonstrated that such operators are not only band preserving, but also regular. A central result of the work is that the set  $\mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E)$  of all elementary band preserving operators constitutes a vector sublattice within the Dedekind complete vector lattice  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E_{\mathbb{C}}, E)$  of all regular orthogonally additive operators. The lattice operations in this sublattice are shown to be calculated pointwise, mirroring the structure of the target space  $E$ , with explicit formulas provided for the supremum, infimum, positive part, negative part, and modulus. Furthermore, it is established that  $\mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E)$  is contained within the band generated by the complex extension of the identity operator  $\{\mathcal{T}_{I,I}\}^{\perp\perp}$ .

**Keywords:** orthogonally additive operator, band preserving operator, regular operator, order projection, vector lattice, complexification.

**AMS Subject Classification:** 47H30, 47H99.

**For citation:** Abasov, N. and Gutnova, A. On Band Preserving Operators on Complex Vector Lattices, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 7–15. DOI: 10.46698/h7168-4322-6544-h.

## 1. Introduction

Linear disjointness preserving operators on vector and Banach lattices had been studied during the early part of the twentieth century (see the survey article [2] and references therein). Orthogonally additive (in general nonlinear) operators (OAOs) on vector lattices were introduced in [3]. Some deep results on different classes of orthogonally additive operators on vector and Banach lattices were obtained in [4–9]. Disjointness preserving OAOs on vector lattices were studied in [10–14].

---

<sup>#</sup>The research was supported by the Ministry of Science and High Education, agreement no. 075-02-2026-1324.

In [1] the concept of an orthogonally additive operator was extended to the setting of maps defined on the complexification  $E_{\mathbb{C}}$  of a uniformly complete vector lattice  $E$  and taking values in a Dedekind complete vector lattice  $F$ . It was proved in [1] that the vector space  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E_{\mathbb{C}}, F)$  of all regular orthogonally additive operators from  $E_{\mathbb{C}}$  to a Dedekind complete vector lattice  $F$  is a Dedekind complete vector lattice with respect to the natural partial order on  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E_{\mathbb{C}}, F)$ .

In this paper we continue this line of thought. We study band preserving OAOs defined on  $E_{\mathbb{C}}$  and taking values in  $E$ . The article is organized as follows. In the next section, we present the necessary information on complex vector lattices and orthogonally additive operators. Then we introduce band preserving orthogonally additive operators from  $E_{\mathbb{C}}$  to  $E$  and present some basic examples of such operators. We show that with a pair of orthogonally additive operators  $T, S: E \rightarrow E$  is associated the orthogonally additive operator  $\mathcal{T}_{T,S}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow E$  which called the complex extension of  $T$  and  $S$ . We prove that a complex extension  $\mathcal{T}_{T,S}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow E$  of commuting with projections operators  $T, S: E \rightarrow E$  is a band preserving operator (Proposition 3.2). We consider a special class of a band preserving operators  $\mathcal{T}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow E$ , which have the form  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{T,S}$ , where  $T, S: E \rightarrow E$  are commuting with projections operators. We call these operators elementary band preserving operators. We prove that the set  $\mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E)$  of all elementary band preserving operators is a vector sublattice of  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E_{\mathbb{C}}, E)$  and there is the inclusion  $\mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E) \subset \{I_{\mathbb{C}}\}^{\perp\perp}$  (Theorem 3.1). Finally, two open problems are stated.

## 2. Preliminaries

In this section we present some necessary facts and notations that we need in the sequel. For the standard information on the theory of vector lattices and regular linear operators between them we refer the reader to [15–17]. All vector lattices we consider below are supposed to be Archimedean. The identity operator on a vector space  $W$  we denote by  $I_W$ . The term «operator from vector spaces  $E$  and  $F$ » means an arbitrary map  $\mathcal{T}: E \rightarrow F$ .

Two elements  $e, f$  of a vector lattice  $E$  are called *disjoint* (notation  $e \perp f$ ), if  $|e| \wedge |f| = 0$ . The sum  $e + f$  of disjoint elements  $e$  and  $f$  we denote by  $e \sqcup f$ .

Given a net  $(e_{\alpha})_{\alpha \in A}$  in a vector lattice  $E$  *order converges* to  $e \in E$ , if there exists a net  $(f_{\xi})_{\xi \in \Xi}$  in  $E_+$ , such that  $f_{\xi} \downarrow 0$  and for every  $\xi \in \Xi$  there is an index  $\alpha(\xi) \in A$ , such that  $|e - e_{\alpha}| \leq f_{\xi}$  for all  $\alpha \geq \alpha(\xi)$ . We note that for a Dedekind complete vector lattice  $E$  a net  $(e_{\alpha})_{\alpha \in A}$  in  $E$  order converges to  $e$  if and only if there exists a net  $(f_{\alpha})_{\alpha \in A}$  in  $E_+$ , such that  $f_{\alpha} \downarrow 0$  and  $|e - e_{\alpha}| \leq f_{\alpha}$  for all  $\alpha \geq \alpha_0$ , with some  $\alpha_0 \in A$ . A linear subspace  $I$  of a vector lattice  $E$  is called an *order ideal* of  $E$ , if for every  $x \in I$  and  $y \in E$  the relation  $|y| \leq |x|$  implies that  $y \in I$ . We note that every order ideal  $I$  of  $E$  is a vector sublattice of  $E$ . An order ideal  $I$  of  $E$  is said to be *order closed* if for every net  $(e_{\alpha})_{\alpha \in A}$  in  $I$ , which order converges to an element  $e \in E$ , it follows that  $e \in I$ . An order closed order ideal  $I$  of a vector lattice  $E$  is called a *band*. Consider a subset  $A$  of a vector lattice  $E$ . By  $A^d$  is denoted the set

$$A^d := \{e \in E : e \perp x, \forall x \in A\}.$$

As usual  $A^{dd} = (A^d)^d$ . It is well known that  $A^d$  is a band of  $E$  [8, p. 34]. A band  $\mathcal{B}$  of vector lattice  $E$  is said to be a *projection band*, if

$$E = \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^d.$$

Suppose that  $\mathcal{B}$  is a projection band in  $E$ . Then every element  $e \in E$  has a unique decomposition  $e = e_1 \sqcup e_2$ , where  $e_1 \in \mathcal{B}$  and  $e_2 \in \mathcal{B}^d$  and there exists a positive projection

$\pi_{\mathcal{B}}: E \rightarrow E$  defined by the formula  $\pi_{\mathcal{B}}e = e_1$ . A projection of the form  $\pi_{\mathcal{B}}$  is called an *order projection* (or a band projection onto the band  $\mathcal{B}$ ). We say that  $E$  is a vector lattice with the *principal projection property* if  $\{e\}^{dd}$  is a projection band for all  $e \in E$ . The order projection in  $E$  onto the band  $\{e\}^{dd}$  is denoted by  $\pi_e$ .

The set of all order projections on  $E$  is denoted by  $\mathfrak{B}(E)$ . There is a natural partial order on  $\mathfrak{B}(E)$ , namely  $\pi \leq \rho \Leftrightarrow \pi \circ \rho = \pi$ . We note that the partially ordered set  $\mathfrak{B}(E)$  is actually a Boolean algebra with respect to the Boolean operations:

$$\pi \wedge \rho := \pi \circ \rho; \quad \pi \vee \rho := \pi + \rho - \pi \circ \rho; \quad \bar{\pi} = I - \pi.$$

We say that an element  $f$  of a vector lattice  $E$  is a *fragment* of  $e \in E$ , and use the notation  $f \sqsubseteq e$ , if  $f \perp (e - f)$ . The set of all fragments of an element  $e \in E$  is denoted by  $\mathfrak{F}_e$ . The relation  $\sqsubseteq$  is turned out to be a partial order on  $E$  which is called the *lateral order* (see [18]).

**DEFINITION 2.1.** A sequence  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in a vector lattice  $E$  is said to be *uniformly Cauchy* whenever there exists some  $e \in E_+$ , such that for every  $\varepsilon > 0$  the inequality  $|e_n - e_m| \leq \varepsilon e$  holds for all sufficiently large  $n$  and  $m$ . We say that a vector lattice  $E$  is *uniformly complete* whenever every uniformly Cauchy sequence is relatively uniformly convergent.

We observe that every Dedekind  $\sigma$ -complete vector lattice is uniformly complete [8, p. 111].

**DEFINITION 2.2.** Let  $X$  be a real vector space. We say that a complex vector space  $X_{\mathbb{C}}$  defined by

$$X_{\mathbb{C}} := X + iX = \{x + iy : x, y \in X\}$$

is a *complexification* of  $X$ . The vector space operations on  $X_{\mathbb{C}}$  defined by

$$(x + iy) + (v + iu) = x + v + i(y + u) \quad \text{and} \quad (\alpha + i\beta)(x + iy) = \alpha x - \beta y + i(\alpha y + \beta x)$$

for all  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  and  $x, y, v, u \in X$ .

**Proposition 2.1** [19, Proposition 2.2.1]. *Suppose  $E$  is a uniformly complete vector lattice. Then for every  $z = x + iy \in E_{\mathbb{C}}$  the following supremum*

$$|z| = |x + iy| := \sup_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \{(\cos \varphi)x + (\sin \varphi)y\}$$

*exists in  $E_+$  which is called the modulus of  $z$ . Moreover the modulus possesses the following properties:*

- 1)  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ;
- 2)  $|\lambda z| = |\lambda| |z|$  for all  $\lambda \in \mathbb{C}$  and  $z \in E_{\mathbb{C}}$ ;
- 3)  $|z + w| \leq |z| + |w|$  for all  $z, w \in E_{\mathbb{C}}$ .

**REMARK 2.1.** It is worth noting that

$$|x| \vee |y| \leq |z| \leq |x| + |y| \quad \text{for every } x + iy = z \in E_{\mathbb{C}}.$$

**DEFINITION 2.3** [20, Definition 3.1]. Suppose that  $E$  is a uniformly complete vector lattice. Two elements  $z, w \in E_{\mathbb{C}}$  are said to be *disjoint* (notation  $z \perp_{\mathbb{C}} w$ ) if  $|z| \wedge |w| = 0$ . An element  $w \in E_{\mathbb{C}}$  is called a *fragment* of  $z$  if  $(z - w) \perp_{\mathbb{C}} w$ . The set of all fragments of  $z$  is denoted by  $\mathfrak{F}_z$ . We shall write  $w \sqsubseteq_{\mathbb{C}} z$ , if  $w \in \mathfrak{F}_z$ . We write  $z = \bigsqcup_{i=1}^n z_i$ , if  $z = \sum_{i=1}^n z_i$  and  $z_i \perp_{\mathbb{C}} z_j$  for all  $i \neq j$ . In particular, if  $n = 2$ , as in the case of vector lattices, we use the notation  $z = z_1 \sqcup z_2$ .

**Proposition 2.2** [20, Proposition 3.1]. *Let  $E$  be a uniformly complete vector lattice,  $w, v \in E_{\mathbb{C}}$ ,  $w = x + iy$  and  $v = f + ig$ . Then the following statements are equivalent:*

- 1)  $w \perp_{\mathbb{C}} v$ ;
- 2)  $(|x| + |y|) \perp (|f| + |g|)$ .

**Proposition 2.3** [20, Proposition 3.2]. *Let  $E$  be a uniformly complete vector lattice. Then  $\sqsubseteq_{\mathbb{C}}$  is a partial order on  $E_{\mathbb{C}}$ . As in the case of real vector lattices the relation  $\sqsubseteq_{\mathbb{C}}$  is called the *lateral order*. It was introduced and studied in [20].*

**Proposition 2.4** [20, Theorem 3.5]. *Let  $E$  be a uniformly complete vector lattice and  $z = x + iy \in E_{\mathbb{C}}$ . Then  $\mathfrak{F}_z$ , the set of all fragments of an element  $z \in E_{\mathbb{C}}$ , is a Boolean algebra with respect to the partial order  $\sqsubseteq_{\mathbb{C}}$ . Moreover  $\mathfrak{F}_z$  is isomorphic to the Boolean subalgebra  $\mathfrak{A}_{x,y}$  of  $\mathfrak{F}_x \times \mathfrak{F}_y$  defined by*

$$\mathfrak{A}_{x,y} := \{(f, g) \in \mathfrak{F}_x \times \mathfrak{F}_y : f \perp (y - g) \text{ and } g \perp (x - f)\}.$$

**DEFINITION 2.4** [1, Definition 3.9]. Let  $E$  be a uniformly complete vector lattice and  $X$  be a vector space. A map  $\mathcal{T} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow X$  (not necessarily linear, not homogeneous) is said to be *orthogonally additive operator*, if

$$\mathcal{T}(u \sqcup v) = \mathcal{T}u + \mathcal{T}v \text{ for all disjoint } u, v \in E_{\mathbb{C}}.$$

**DEFINITION 2.5** [1, Definition 3.15]. Let  $E$  be a uniformly complete vector lattice and  $F$  be a vector lattice. An orthogonally additive operator  $\mathcal{T} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow F$  is called:

- 1) *positive*, if  $\mathcal{T}z \geq 0$  holds in  $F$  for all  $z \in E_{\mathbb{C}}$ ;
- 2) *regular*, if  $\mathcal{T} = \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2$ , where  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  are positive orthogonally additive operators from  $E_{\mathbb{C}}$  to  $F$ ;
- 3) *C-bounded*, if the set  $T(\mathcal{F}_z)$  is order bounded in  $F$  for every  $z \in E_{\mathbb{C}}$ .

The sets of all positive, regular, and  $C$ -bounded orthogonally additive operators from  $E_{\mathbb{C}}$  to  $F$  are denoted by  $\mathcal{O}\mathcal{A}_+(E_{\mathbb{C}}, F)$ ,  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E_{\mathbb{C}}, F)$ , and  $\mathcal{O}\mathcal{A}_{Cb}(E_{\mathbb{C}}, F)$  respectively.

**Proposition 2.5** [1, Theorem 3.16]. *Let  $E$  be a uniformly complete vector lattice with the principal projection property and  $F$  be a Dedekind complete vector lattice. Then  $\mathcal{O}\mathcal{A}_{Cb}(E_{\mathbb{C}}, F) = \mathcal{O}\mathcal{A}_r(E_{\mathbb{C}}, F)$  and  $\mathcal{O}\mathcal{A}_{Cb}(E_{\mathbb{C}}, F)$  is a Dedekind complete vector lattice. Moreover, the lattice operations on  $\mathcal{O}\mathcal{A}_{Cb}(E_{\mathbb{C}}, F)$  can be calculated by the following formulas:*

- 1)  $(\mathcal{T} \vee \mathcal{S})z := \sup\{\mathcal{T}u + \mathcal{S}v : z = u \sqcup v\}$ ;
- 2)  $(\mathcal{T} \wedge \mathcal{S})z := \inf\{\mathcal{T}u + \mathcal{S}v : z = u \sqcup v\}$ ;
- 3)  $\mathcal{T}^+z := \sup\{\mathcal{T}u : u \sqsubseteq_{\mathbb{C}} z\}$ ;
- 4)  $\mathcal{T}^-z := -\inf\{\mathcal{T}u : u \sqsubseteq_{\mathbb{C}} z\}$ ;
- 5)  $|\mathcal{T}|z := \sup\{\mathcal{T}u - \mathcal{T}v : z = u \sqcup v\}$ ;
- 6)  $|\mathcal{T}z| \leq |\mathcal{T}|z$

for every  $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{O}\mathcal{A}_{Cb}(E_{\mathbb{C}}, F)$  and every  $z \in E_{\mathbb{C}}$ .

Let  $(A, \Sigma, \mu)$  be a  $\sigma$ -finite measure space. The vector lattice of all equivalence classes of measurable real-valued functions on  $A$  is denoted by  $L_0(\mu)$ . Given  $f \in L_0(\mu)_{\mathbb{C}}$  by  $\text{supp } f$ , we denote the measurable set

$$\text{supp } f := \{t \in A : f(t) \neq 0\}.$$

The characteristic function of a set  $D$  is denoted by  $1_D$ . We recall that  $H, D \in \Sigma$  are called *disjoint*, if  $\mu\{t \in H \cap D\} = 0$ . The union  $H \cup D$  of two disjoint sets  $H, D \in \Sigma$  we denote by  $H \sqcup D$ .

### 3. Band Preserving Operators

In this section we introduce band preserving operators on complex vector lattices and explore some of their properties. In particular, we consider real band preserving OAOs and prove the main result of these notes, concerning order properties of these operators (Theorem 3.1).

DEFINITION 3.1. Let  $E$  be a uniformly complete vector lattice and  $\mathcal{T}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow E$  be an operator from  $E_{\mathbb{C}}$  to  $E$ . We say that  $\mathcal{T}$  is:

- 1) a *band preserving operator*, if  $\mathcal{T}(w) \in \{|w|\}^{\perp\perp}$  for every  $w \in E_{\mathbb{C}}$ ;
- 2) *disjointness preserving*, if  $\mathcal{T}(w) \perp \mathcal{T}(v)$  for every  $w, v \in E_{\mathbb{C}}$ , such that  $w \perp_{\mathbb{C}} v$ .

It is clear that a band preserving operator  $\mathcal{T}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow E$  preserves disjointness.

Consider some examples of band preserving orthogonally additive operators.

EXAMPLE 3.1 [1, Proposition 3.11]. Let  $E$  be a uniformly complete vector lattice. Then the modulus  $|\cdot|: E_{\mathbb{C}} \rightarrow E$  is a band preserving orthogonally additive operator.

DEFINITION 3.2. Let  $(A, \Sigma, \mu)$  be a finite measure space. We say that a function  $N: A \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  is:

- 1) *superpositionally measurable* (or *super-measurable* for brevity), if  $N(\cdot, f(\cdot)) \in L_0(\mu)$  for every measurable function  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ;
- 2) *normalized*, if  $N(t, 0) = 0$  for almost all  $t \in A$ .

**Proposition 3.1** [1, Proposition 3.14]. *Let  $N: A \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  be super-measurable, normalized function. Then there is the orthogonally additive operator  $T_N: L_0(\mu)_{\mathbb{C}} \rightarrow L_0(\mu)$  defined by  $T_N(f)(\cdot) = N(\cdot, f(\cdot))$ ,  $f \in L_0(\mu)_{\mathbb{C}}$ .*

Actually, it was shown in the proof of [1, Proposition 3.14] that  $T_N(f) \in \{|f|\}^{dd}$  and therefore  $T_N$  is a band preserving operator. The operator  $T_N$  is known in a literature as a nonlinear superposition operator or Nemytskij operator [21].

Suppose that  $E$  is a uniformly complete vector lattice and  $X$  is a real vector space. To a pair of orthogonally additive operators  $T, S: E \rightarrow X$  there is associated a map  $\mathcal{T}_{T,S}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow X$  defined by

$$\mathcal{T}_{T,S}(x + iy) = Tx + Sy, \quad x, y \in E. \quad (1)$$

EXAMPLE 3.2 [1, Proposition 3.12].  $\mathcal{T}_{T,S}$  is an orthogonally additive operator from  $E_{\mathbb{C}}$  to  $X$ .

We say that  $\mathcal{T}_{T,S}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow X$  is the *complex extension* of operators  $T, S: E \rightarrow X$ .

DEFINITION 3.3 [11, Definition 2]. Let  $E$  be a vector lattice with the principal projection property. We say that an operator  $T: E \rightarrow E$  *commutes with projections*, if  $T\pi = \pi T$  for every  $\pi \in \mathfrak{B}(E)$ .

We note that a commuting with projections operator  $T: E \rightarrow E$  is automatically orthogonally additive [11, Proposition 1].

**Proposition 3.2.** *Let  $E$  be a vector lattice with the principal projection property and  $T, S: E \rightarrow E$  be commuting with projections operators. Then  $\mathcal{T}_{T,S}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow X$  is a band preserving operator.*

◁ Fix  $w = x + iy$  with  $x, y \in E$ . Then by Proposition 2.2 we have that  $\{|w|\}^{dd} = \{|x| + |y|\}^{dd}$ . Now we may write

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{T,S}w &= \mathcal{T}_{T,S}(x + iy) = Tx + Sy = T\pi_{(|x|+|y|)}x + S\pi_{(|x|+|y|)}y \\ &= \pi_{(|x|+|y|)}Tx + \pi_{(|x|+|y|)}Sy = \pi_{(|x|+|y|)}(Tx + Sy) = \pi_{(|x|+|y|)}\mathcal{T}_{T,S}w \end{aligned}$$

and therefore  $\mathcal{T}_{T,S}w \in \{|w|\}^{dd}$ . ▷

**Proposition 3.3.** *Let  $E$  be a Dedekind complete vector lattice and  $T, S: E \rightarrow E$  be operators commuting with projections. Then  $\mathcal{T}_{T,S} \in \mathcal{O}\mathcal{A}_r(E_{\mathbb{C}}, E)$ .*

◁ By Proposition 2.5 it is enough to prove that  $\mathcal{T}_{T,S}$  is a  $C$ -bounded operator. Fixing  $w = (x + iy) \in E_{\mathbb{C}}$ , we will show that  $\mathcal{T}_{T,S}(\mathfrak{F}_w)$  is an order bounded subset of  $E$ . Take an element  $v \in \mathfrak{F}_w$ . By Proposition 2.4  $v = c + id$ , where  $c \in \mathfrak{F}_x$  and  $d \in \mathfrak{F}_y$ ,  $c \perp (y - d)$  and  $d \perp (x - c)$ . Since  $T, S: E \rightarrow E$  are disjointness preserving operators we have that

$$|Tx| = |T(c \sqcup (x - c))| = |Tc \sqcup T(x - c)| = |Tc| \sqcup |T(x - c)| \geq |Tc|$$

and analogously  $|Sy| \geq |Sd|$ .

Thus, it follows that  $|Tc| \leq |Tx|$  and  $|Sd| \leq |Sy|$  for every  $c \in \mathfrak{F}_x$  and  $d \in \mathfrak{F}_y$  and therefore

$$\mathcal{T}_{T,S}v = \mathcal{T}_{T,S}(c + id) = Tc + Sd \leq |Tc| + |Sd| \leq |Tx| + |Sy|.$$

Hence,  $\mathcal{T}_{T,S}$  is a  $C$ -bounded and consequently a regular orthogonally additive operator. ▷

An operator  $\mathcal{T}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow E$  which has the form  $\mathcal{T}_{T,S}$  for some commuting with projections operators  $T, S: E \rightarrow E$  is called an *elementary band preserving operator*. The set of all elementary band preserving operators from  $E_{\mathbb{C}}$  to  $E$  is denoted by  $\mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E)$ . It is not hard to verify that  $\mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E)$  is a real vector space. We recall that  $I_E: E \rightarrow E$  is the identity operator on  $E$ . By  $\mathcal{I}_{I,I}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow E$  we denote its complex extension, that is

$$\mathcal{I}_{I,I}(x + iy) = I_E x + I_E y = x + y, \quad x, y \in E.$$

Clearly,  $\mathcal{I}_{I,I}$  is an elementary band preserving operator from  $E_{\mathbb{C}}$  to  $E$ . Now we ready to state the main result of these notes.

**Theorem 3.1.** *Let  $E$  be a Dedekind complete vector lattice. Then  $\mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E)$  is a vector sublattice of the Dedekind complete vector lattice  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E_{\mathbb{C}}, E)$  of all regular OAOs from  $E_{\mathbb{C}}$  to  $E$  and for every  $\mathcal{T}_{T,S}, \mathcal{T}_{R,G} \in \mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E)$ ,  $w \in E_{\mathbb{C}}$  the following equalities hold:*

- 1)  $(\mathcal{T}_{T,S} \vee \mathcal{T}_{R,G})w = \mathcal{T}_{T,S}w \vee \mathcal{T}_{R,G}w$ ;
- 2)  $(\mathcal{T}_{T,S} \wedge \mathcal{T}_{R,G})w = \mathcal{T}_{T,S}w \wedge \mathcal{T}_{R,G}w$ ;
- 3)  $(\mathcal{T}_{T,S})^+ w = (\mathcal{T}_{T,S}w)^+$ ;
- 4)  $(\mathcal{T}_{T,S})^- w = (\mathcal{T}_{T,S}w)^-$ ;
- 5)  $|\mathcal{T}_{T,S}|w = |\mathcal{T}_{T,S}w|$ .

Moreover  $\mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E) \subset \{\mathcal{I}_{I,I}\}^{\perp\perp}$ .

◁ Taking into account Proposition 3.3 we deduce that  $\mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E)$  is a linear subspace of a Dedekind complete vector lattice  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E_{\mathbb{C}}, E)$ . Let  $\mathcal{T}_{T,S}, \mathcal{T}_{R,G} \in \mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E)$  and  $v = (x + iy) \in E_{\mathbb{C}}$ . Then by Proposition 2.5 we have

$$(\mathcal{T}_{T,S} \vee \mathcal{T}_{R,G})v = \sup \{ \mathcal{T}_{T,S}w + \mathcal{T}_{R,G}z : v = w \sqcup z \} \geq \mathcal{T}_{T,S}v \vee \mathcal{T}_{R,G}v.$$

Let us prove the converse inequality. Fix  $w = a + ib$  and  $z = c + id$ , such that  $v = w \sqcup z$ . By Proposition 2.2 we have that  $(|a| + |b|) \perp (|c| + |d|)$ . It follows that  $\pi_{(|a|+|b|)}x = a$ ,  $\pi_{(|a|+|b|)}y = b$ ,  $\pi_{(|c|+|d|)}x = c$ , and  $\pi_{(|c|+|d|)}y = d$ . Now we may write

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{T,S}w + \mathcal{T}_{R,G}z &= \mathcal{T}_{T,S}(a + ib) + \mathcal{T}_{R,G}(c + id) = Ta + Sb + Rc + Gd \\ &= T\pi_{(|a|+|b|)}x + S\pi_{(|a|+|b|)}y + R\pi_{(|c|+|d|)}x + G\pi_{(|c|+|d|)}y = \pi_{(|a|+|b|)}Tx + \pi_{(|a|+|b|)}Sy \\ &\quad + \pi_{(|c|+|d|)}Rx + \pi_{(|c|+|d|)}Gy = \pi_{(|a|+|b|)}(Tx + Sy) + \pi_{(|c|+|d|)}(Rx + Gy) = \pi_{(|a|+|b|)}\mathcal{T}_{T,S}v \\ &\quad + \pi_{(|c|+|d|)}\mathcal{T}_{R,G}v \leq \pi_{(|a|+|b|)}(\mathcal{T}_{T,S}v \vee \mathcal{T}_{R,G}v) + \pi_{(|c|+|d|)}(\mathcal{T}_{T,S}v \vee \mathcal{T}_{R,G}v) = \mathcal{T}_{T,S}v \vee \mathcal{T}_{R,G}v. \end{aligned}$$

Passing to the supremum in left-hand side of the above inequality over all disjoint decompositions  $v = w \sqcup z$  we have that

$$(\mathcal{T}_{T,S} \vee \mathcal{T}_{R,G})v \leq \mathcal{T}_{T,S}v \vee \mathcal{T}_{R,G}v$$

and consequently  $(\mathcal{T}_{T,S} \vee \mathcal{T}_{R,G})v \leq \mathcal{T}_{T,S}v \vee \mathcal{T}_{R,G}v$  for every  $v \in E_{\mathbb{C}}$ . Now, we get all lattice operations for elements of  $\mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E)$  as follows:

$$(\mathcal{T}_{T,S} \wedge \mathcal{T}_{R,G})v = -((-\mathcal{T}_{T,S}) \vee (-\mathcal{T}_{R,G}))v = -((-\mathcal{T}_{T,S}v) \vee (-\mathcal{T}_{R,G}v)) = \mathcal{T}_{T,S}v \wedge \mathcal{T}_{R,G}v;$$

$$(\mathcal{T}_{T,S}^+)v = (\mathcal{T}_{T,S} \vee 0)v = \mathcal{T}_{T,S}v \vee 0 = (\mathcal{T}_{T,S}v)^+;$$

$$(\mathcal{T}_{T,S})^-v = -(\mathcal{T}_{T,S} \vee 0)v = -\mathcal{T}_{T,S}v \vee 0 = (\mathcal{T}_{T,S}v)^-;$$

$$|\mathcal{T}_{T,S}|v = (\mathcal{T}_{T,S} \vee (-\mathcal{T}_{T,S}))v = \mathcal{T}_{T,S}v \vee (-\mathcal{T}_{T,S}v) = |\mathcal{T}_{T,S}v|.$$

Finally we show that  $\mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E) \subset \{\mathcal{T}_{I,I}\}^{\perp\perp}$ . By [17, Theorem 4.3.4] it is enough to prove that  $\mathcal{T}_{T,S} = \sup_n \{n|\mathcal{T}_{I,I}| \wedge \mathcal{T}_{T,S}\}$  for every positive  $\mathcal{T}_{T,S} \in \mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E)$ . Take  $0 \leq \mathcal{T}_{T,S} \in \mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E)$  and  $w \in E_{\mathbb{C}}$ . By above we have that

$$\sup_n \{n|\mathcal{T}_{I,I}| \wedge \mathcal{T}_{T,S}\}w = \sup_n \{n|\mathcal{T}_{I,I}|w \wedge \mathcal{T}_{T,S}w\} = \sup_n \{n|w| \wedge \mathcal{T}_{T,S}w\}.$$

Since  $\mathcal{T}_{T,S}v \in \{|v|\}^{dd}$  for every  $v \in E_{\mathbb{C}}$  by [17, Theorem 4.3.4] it follows that  $\mathcal{T}_{T,S}w = \sup_n \{n|\mathcal{T}_{I,I}|w \wedge \mathcal{T}_{T,S}w\}$  and the proof is finished.  $\triangleright$

#### 4. Open Problems

In this section we point two questions concerning band preserving operator from  $E_{\mathbb{C}}$  to  $E$ .

PROBLEM 4.1: Does every band preserving operator  $\mathcal{T} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E$  has the form  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{T,S}$  for some commuting with projections operators  $T, S : E \rightarrow E$ ?

We remark that in the real-case situation the vector space of all band preserving OAOs on  $E$  is the projection band of  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E)$  which coincides with  $\{I_E\}^{dd}$ . Hence, the following natural problem arises.

PROBLEM 4.2: Is the inclusion  $\mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E) \subset \{\mathcal{T}_{I,I}\}^{\perp\perp}$  in Theorem 3.1 strict?

**Acknowledgments.** We are thankful to Professor M. Pliev for the fruitful and valuable discussion.

#### References

1. Pliev, M. and Sukochev, F. Orthogonally Additive Operators on Complex Vector Lattices, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2025, vol. 541, no. 2, article no. 128719. DOI: 10.1016/j.jmaa.2024.128719.
2. Boulabiar, K. Recent Trends on Order Bounded Disjointness Preserving Operators, *Irish Mathematical Society Bulletin*, 2008, vol. 62, pp. 43–69. DOI: 10.33232/BIMS.0062.43.69.
3. Mazón, J. M. and Segura de León, S. Order Bounded Orthogonally Additive Operators, *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1990, vol. 35, no. 4, pp. 329–353.
4. Erkursun Özcan, N. and Pliev, M. On Orthogonally Additive Operators in  $C$ -Complete Vector Lattices, *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 2022, vol. 16, article no. 6. DOI: 10.1007/s43037-021-00158-2.
5. Feldman, W. A. A Factorization for Orthogonally Additive Operators on Banach Lattices, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, vol. 472, no. 1, pp. 238–245. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.11.021.
6. Fotiy, O., Kadets, V. and Popov, M. Some Remarks on Orthogonally Additive Operators, *Positivity*, 2023, vol. 27, article no. 57. DOI: 10.1007/s11117-023-01008-1.

7. Mykhaylyuk, V. and Popov, M.  $\varepsilon$ -Shading Operator on Riesz Spaces and Order Continuity of Orthogonally Additive Operators, *Results in Mathematics*, 2022, vol. 77, article no. 209. DOI: 10.1007/s00025-022-01742-0.
8. Popov, M. Banach Lattices of Orthogonally Additive Operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2022, vol. 514, no. 1, article no. 126279. DOI: 10.1016/j.jmaa.2022.126279.
9. Tulu, D. and Turan, B. Extension and Restriction of Orthogonally Additive Operators, *Siberian Mathematical Journal*, 2025, vol. 66, pp. 199–206. DOI: 10.1134/S003744662501015X.
10. Abasov, N. M. On Band Preserving Orthogonally Additive Operators, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2021, vol. 18, no. 1, pp. 495–510. DOI: 10.33048/semi.2021.18.036.
11. Abasov, N. On a Band Generated by a Disjointness Preserving Orthogonally Additive Operator, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, no. 5, pp. 851–856. DOI: 10.1134/S1995080221050024.
12. Abasov, N. M., Dzhusoeva, N. A. and Pliev, M. A. Diffuse Orthogonally Additive Operators, *Sbornik: Mathematics*, 2024, vol. 215, no. 1, pp. 1–27. DOI: 10.4213/sm9909e.
13. Abasov, N. and Pliev, M. Disjointness Preserving Orthogonally Additive Operators in Vector Lattices, *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 2018, vol. 12, no. 3, pp. 730–750. DOI: 10.1215/17358787-2018-0001.
14. Turan, B. and Tulu, D. On Orthogonally Additive Band Operators and Orthogonally Additive Disjointness Preserving Operators, *Turkish Journal of Mathematics*, 2023, vol. 47, no. 4, article no. 15. DOI: 10.55730/1300-0098.3425.
15. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. *Positive Operators*, Dordrecht, Springer, 2006.
16. Kusraev, A. G. *Dominated Operators*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
17. Vulikh, B. Z. *Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces*, Gronngen, Wolter-Noordhoff Scientific Publications, LTD, 1967.
18. Mykhaylyuk, V., Pliev, M. and Popov, M. The Lateral Order on Riesz Spaces and Orthogonally Additive Operators, *Positivity*, 2021, vol. 25, pp. 291–327. DOI: 10.1007/s11117-020-00761-x.
19. Meyer-Nieberg, P. *Banach Lattices*, Berlin, Springer, 1991.
20. Dzhusoeva, N., Huang, J., Pliev, M. and Sukochev, F. Lateral Order on Complex Vector Lattices and Narrow Operators, *Mathematische Nachrichten*, 2023, vol. 296, no. 11, pp. 5157–5170. DOI: 10.1002/mana.202200415.
21. Appell, J. and Zabrejko, P. P. *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge, Cambridge University Press, 1990.

Received October 30, 2025

NARIMAN M. ABASOV  
Bauman Moscow State Technical University,  
5, Bldg. 4 2nd Baumanskaya St., Moscow 105005, Russia,  
Assistant Professor  
E-mail: abasovn@mail.ru  
<https://orcid.org/0000-0002-4458-9473>

ALINA K. GUTNOVA  
Noth-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,  
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,  
Assistant Professor  
E-mail: gutnovaalina@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0001-7467-724X>

О НЕРАСШИРЯЮЩИХ ОПЕРАТОРАХ  
В КОМПЛЕКСНЫХ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХАбасов М. Н.<sup>1</sup>, Гутнова А. К.<sup>2</sup><sup>1</sup> Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,  
Россия, Москва, 2-я Бауманская улица, 5, стр. 4;<sup>2</sup> Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,  
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина 44–46

E-mail: abasovn@mail.ru, gutnovaalina@gmail.com

**Аннотация.** Данная заметка продолжает цикл исследований, инициированных работой [1]. В статье рассматривается подкласс так называемых «нерасширяющих» ортогонально аддитивных операторов, заданных на комплексификации  $E_{\mathbb{C}}$  равномерно полной векторной решетки и принимающих значения в  $E$ . Будем говорить, что ортогонально аддитивный оператор  $\mathcal{T}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow E$  является нерасширяющим, если  $\mathcal{T}(w) \in \{w\}^{\perp\perp}$  для каждого элемента  $w$  из  $E_{\mathbb{C}}$ . Вводится и изучается класс элементарных нерасширяющих операторов, которые представляют собой комплексные расширения  $\mathcal{T}_{T,S}$ , построенные из пар вещественных операторов  $T, S: E \rightarrow E$ , коммутирующих со всеми нерасширяющими проекторами. Показано, что такие операторы не только являются нерасширяющими, но и регулярны. Представлено несколько примеров таких операторов и установлено, что действительное векторное пространство  $\mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E)$  всех элементарных нерасширяющих ортогонально аддитивных операторов является подрешеткой  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E_{\mathbb{C}}, E)$  — порядково полной векторной решетки всех регулярных ортогонально аддитивных операторов из  $E_{\mathbb{C}}$  в  $E$ . Показано, что операции решетки в этой подрешетке вычисляются поточечно, отражая структуру пространства  $E$ , с явными формулами для супремума, инфимума, положительной части, отрицательной части и модуля. Кроме того, установлено, что  $\mathcal{N}(E_{\mathbb{C}}, E)$  содержится в полосе, порожденной комплексным расширением единичного оператора  $\{\mathcal{T}_{I,I}\}^{\perp\perp}$ .

**Ключевые слова:** ортогонально аддитивный оператор, нерасширяющий оператор, регулярный оператор, порядковый проектор, векторная решетка, комплексификация.

**AMS Subject Classification:** 47H30, 47H99.

**Образец цитирования:** Abasov, N. and Gutnova, A. On Band Preserving Operators on Complex Vector Lattices // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, № 1.—С. 7–15 (in English). DOI: 10.46698/h7168-4322-6544-h.

УДК 517.977.52

DOI 10.46698/a7281-6269-9782-p

ЛОКАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ, ТРАЕКТОРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО  
ЛОКАЛЬНОГО ИНФИМУМА И УСЛОВИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА  
В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

Е. Р. Аваков<sup>1</sup>, Г. Г. Магарил-Ильяев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,  
Россия, Москва, 117997, ул. Профсоюзная, 65;

<sup>2</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Россия, Москва, 119991, Ленинские горы, 1

E-mail: eramag@mail.ru, georgii.magaril@math.msu.ru

*Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе*

**Аннотация.** В теории оптимального управления вопросы, связанные с необходимыми условиями оптимальности и управляемости системы, являются одними из основных. В данной работе для управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений определяются понятие ее локальной управляемости относительно произвольной непрерывной функции и понятие траектории геометрического локального инфимума. Отметим, что они двойственны друг к другу в том смысле, что либо управляемая система локально управляема относительно данной функции, либо эта функция является траекторией геометрического локального инфимума. Понятие траектории геометрического локального инфимума обобщает понятие траектории локального инфимума (ранее введенного авторами), которое, в свою очередь, обобщает классическое понятие оптимальной траектории. Траектория локального инфимума — это функция, на которой целевой функционал достигает своего минимума. При этом она, вообще говоря, не является допустимой траекторией, но есть равномерный предел таковых. Оптимальная траектория может не существовать, но существование траектории локального инфимума, очевидно, вполне достаточно для приложений. Ранее указанная двойственность понятий локальной управляемости относительно произвольной непрерывной функции и траектории геометрического локального инфимума исследовалась авторами в случае, когда необходимые условия траектории локального инфимума были первого порядка. В данной работе речь идет о необходимых условиях второго порядка. Следует сказать, что необходимые условия первого и второго порядков траектории локального инфимума усиливают соответствующие все классические условия (в частности, принцип максимума Понтрягина). Наша основная цель — показать, что введение более общих понятий (локальная управляемость относительно произвольной функции, траектория геометрического локального инфимума) позволяет единообразно смотреть на вопросы управляемости и оптимальности в оптимальном управлении. Важную роль играют примеры в конце статьи.

**Ключевые слова:** траектория геометрического локального инфимума, локальная управляемость, оптимальное управление, условия второго порядка.

**AMS Subject Classification:** 49K15.

**Образец цитирования:** Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г. Локальная управляемость, траектория геометрического локального инфимума и условия второго порядка в оптимальном управлении // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 1.—С. 16–27. DOI: 10.46698/a7281-6269-9782-p.

## 1. Основные определения и утверждения

Пусть  $U$  — непустое подмножество  $\mathbb{R}^r$ , заданы отображение  $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$  переменных  $t, x$  и  $u$  и отображения  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$  и  $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$  переменных  $\zeta_i \in \mathbb{R}^n, i = 0, 1$ .

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad u(t) \in U \quad \text{для п. в. } t \in [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$f(x(t_0), x(t_1)) \leq 0, \quad g(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad (2)$$

где неравенство понимается покоординатно.

Всюду далее мы предполагаем, что отображение  $\varphi$  непрерывно вместе со своей второй частной производной по  $(x, u)$  на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ , а отображения  $f$  и  $g$  дважды непрерывно дифференцируемы на  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Пространства непрерывных вектор-функций на  $[t_0, t_1]$  со значениями в  $\mathbb{R}^n$ , абсолютно непрерывных вектор-функций со значениями в  $\mathbb{R}^n$  и существенно ограниченных вектор-функций со значениями в  $\mathbb{R}^r$  обозначаются соответственно  $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ ,  $AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  и  $L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$  (если  $r = 1$ , то пишем  $L_\infty([t_0, t_1])$ ).

Пара  $(x(\cdot), u(\cdot)) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$  допустима для управляемой системы (слово «управляемая» далее опускаем) (1), (2), если выполняются условия (1) и (2). Функцию  $x(\cdot)$  в этом случае называем допустимой траекторией для системы (1), (2).

Обозначим  $Z = C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$  и определим следующее множество достижимости для системы (1), (2) относительно открытого множества  $V \subset C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ :

$$R(V) = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} : \exists (x(\cdot), u(\cdot)) \in Z, \text{ удовлетворяющая :} \\ f(x(t_0), x(t_1)) \leq y_1, g(x(t_0), x(t_1)) = y_2, x(\cdot) \in V\}.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Скажем, что система (1), (2) локально управляема относительно функции  $\hat{x}(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ , если для любой окрестности  $V$  этой функции выполняется включение

$$0 \in \text{int } R(V).$$

Обозначим через  $D$  множество всех допустимых траекторий для системы (1), (2), рассматриваемое как подмножество  $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ , а через  $\text{cl } D$  — его замыкание.

Важно отметить, что в определении 1 функция  $\hat{x}(\cdot)$  не обязана принадлежать  $D$ , но из этого определения следует, что  $\hat{x}(\cdot) \in \text{cl } D$  и удовлетворяет условию (2). Действительно, любая окрестность  $\hat{x}(\cdot)$  содержит функции  $x(\cdot)$  такие, что пара  $(x(\cdot), u(\cdot)) \in Z$  удовлетворяет условию (1),  $f(x(t_0), x(t_1)) \leq y_1$  и  $g(x(t_0), x(t_1)) = y_2$  для всех достаточно малых по норме  $y_1$  и  $y_2$ . В частности, при  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 0$ , получаем, что в любой окрестности  $\hat{x}(\cdot)$  есть допустимая траектория для системы (1), (2), т. е.  $\hat{x}(\cdot) \in \text{cl } D$  и, очевидно,  $\hat{x}(\cdot)$  удовлетворяет условию (2).

При стандартном определении локальной управляемости предполагается, что  $\hat{x}(\cdot)$  — допустимая траектория (см., например, [1, 2]).

Через  $\partial A$  будем обозначать границу множества  $A$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Функция  $\hat{x}(\cdot) \in \text{cl } D$  называется траекторией геометрического локального инфимума для системы (1), (2), если существует окрестность  $V \subset C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  этой функции такая, что

$$0 \in \partial R(V).$$

Так как функция  $\hat{x}(\cdot)$  может не принадлежать  $D$ , то легко заметить, что данное определение обобщает определение геометрически оптимальной траектории (см. [3]), которое дословно совпадает с определением 2, если заменить  $\text{cl } D$  на  $D$ .

Под двойственностью понятий, введенных в определениях 1 и 2, понимается (отмеченный ранее в [4]) следующий факт: *если  $\hat{x}(\cdot) \in \text{cl } D$ , то либо система (1), (2) локально управляема относительно функции  $\hat{x}(\cdot)$ , либо  $\hat{x}(\cdot)$  — траектория геометрического локального инфимума для этой системы.* Это непосредственно следует из приведенных определений.

Отсюда, в частности, следует, что отрицание любых достаточных условий локальной управляемости системы (1), (2) относительно функции  $\hat{x}(\cdot)$  является необходимыми условиями того, что  $\hat{x}(\cdot)$  — траектория геометрического локального инфимума для этой системы.

Первый результат, который мы хотим здесь сформулировать — это достаточные условия локальной управляемости системы (1), (2) относительно функции  $\hat{x}(\cdot)$ . Для этого понадобятся некоторые дополнительные обозначения и определения.

Для каждого  $k \in \mathbb{N}$  положим

$$\mathcal{A}_k = \{ \bar{\alpha}(\cdot) = (\alpha_1(\cdot), \dots, \alpha_k(\cdot)) \in (L_\infty([t_0, t_1]))^k : \bar{\alpha}(t) \in \Sigma^k \text{ для п. в. } t \in [t_0, t_1] \},$$

где

$$\Sigma^k = \left\{ \bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\},$$

и определим множество

$$\mathcal{U} = \{ u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r) : u(t) \in U \text{ для п. в. } t \in [t_0, t_1] \}.$$

Сопоставим системе (1), (2) следующую управляемую систему:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \varphi(t, x, u_i), \quad \bar{\alpha}(\cdot) \in \mathcal{A}_k, \quad \bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}^k, \quad (3)$$

$$f(x(t_0), x(t_1)) \leq 0, \quad g(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad (4)$$

где  $\bar{\alpha}(\cdot) = (\alpha_1(\cdot), \dots, \alpha_k(\cdot))$  и  $\bar{u}(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot))$ , которую будем называть *выпуклением* системы (1), (2) или просто *выпуклой* системой. Ясно, что при  $k = 1$  эта система совпадает с исходной системой (1), (2).

Как и выше, тройку  $(x(\cdot), \bar{\alpha}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times \mathcal{A}_k \times \mathcal{U}^k$  называем *допустимой* для выпуклой системы (3), (4), если выполняются условия (3), (4), и функцию  $x(\cdot)$  в этом случае называем *допустимой траекторией* для выпуклой системы (3), (4).

Нам понадобятся некоторые обозначения. Евклидову норму в  $\mathbb{R}^n$  обозначаем  $|\cdot|$ . Значение линейного функционала  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^n)^*$  (векторы из  $\mathbb{R}^n$  мы рассматриваем как вектор-столбцы, тогда, как известно, сопряженное к  $\mathbb{R}^n$  отождествляется с  $\mathbb{R}^n$ , где векторы суть вектор-строки) на элементе  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  ( $T$  — символ транспонирования) обозначаем  $\langle \lambda, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ . Через  $(\mathbb{R}^n)_+^*$  обозначим множество функционалов на  $\mathbb{R}^n$ , принимающих неотрицательные значения на неотрицательных векторах.

Если фиксирована функция  $\hat{x}(\cdot)$ , то для сокращения записи, частные производные отображений  $f, g$  по  $\zeta_0$  и  $\zeta_1$ , их первые производные и вторые производные в точке  $(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$  записываем соответственно как  $\hat{f}_{\zeta_i}, \hat{g}_{\zeta_i}$ ,  $i = 0, 1$ ,  $\hat{f}'$ ,  $\hat{g}'$  и  $\hat{f}''$ ,  $\hat{g}''$  (причем вторые производные стандартным образом отождествляются с соответствующими симметричными билинейными формами).

Если  $B: X \times X \rightarrow Y$  — билинейное отображение, то действие  $B$  на элементе  $(x_1, x_2)$  записываем так:  $B[x_1, x_2]$ .

Если  $A: X \rightarrow Y$  — линейный оператор, то его действие на элементе  $x$  иногда будет удобно записывать как  $A[x]$ , что не приведет к путанице.

Далее, для сокращения записи, вместо  $\widehat{x}(\cdot)$ ,  $\widehat{\alpha}(\cdot)$ ,  $\widehat{u}(\cdot)$ ,  $h(\cdot)$ ,  $v(\cdot)$  и т. д. часто будем писать просто  $\widehat{x}$ ,  $\widehat{\alpha}$ ,  $\widehat{u}$ ,  $h$ ,  $v$  и т. д.

Пусть  $k \in \mathbb{N}$  и тройка  $(\widehat{x}, \widehat{\alpha}, \widehat{u})$ , где  $\widehat{\alpha} = (\widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_k)$  и  $\widehat{u} = (\widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_k)$ , допустима для выпуклой системы (3), (4). Введем следующее множество критических вариаций для этой системы в точке  $(\widehat{x}, \widehat{\alpha}, \widehat{u})$ :

$$K(\widehat{x}, \widehat{\alpha}, \widehat{u}) = \left\{ q = (h, \overline{\beta}, \overline{v}) \in AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times (\mathcal{A}_k - \widehat{\alpha}) \times (L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r))^k : \right. \\ \left. \begin{aligned} \dot{h}(t) &= \sum_{i=1}^k \widehat{\alpha}_i(t) \varphi_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}_i(t)) h(t) + \sum_{i=1}^k \beta_i(t) \varphi(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}_i(t)) \\ &+ \sum_{i=1}^k \widehat{\alpha}_i(t) \varphi_u(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}_i(t)) v_i(t), \widehat{f}'_a[h(t_0), h(t_1)] \leq 0, \quad \widehat{g}'[h(t_0), h(t_1)] = 0 \end{aligned} \right\},$$

где  $\overline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ ,  $\overline{v} = (v_1, \dots, v_k)$ , а  $f_a$  — вектор, который получается из  $f = (f_1, \dots, f_{m_1})$  удалением тех функций  $f_i$ , для которых  $f_i(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1)) < 0$ . Если  $f(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1)) < 0$ , то неравенство  $\widehat{f}'_a[h(t_0), h(t_1)] \leq 0$  в определении  $K(\widehat{x}, \widehat{\alpha}, \widehat{u})$  отсутствует.

Пусть тройка  $(\widehat{x}, \widehat{\alpha}, \widehat{u})$  допустима для выпуклой системы (3), (4),  $\widehat{u} \in \text{int } \mathcal{U}^k$  и  $q = (h, \overline{\beta}, \overline{v}) \in K(\widehat{x}, \widehat{\alpha}, \widehat{u})$ . Обозначим через  $\Lambda(\widehat{x}, \widehat{\alpha}, \widehat{u}, q)$  множество наборов  $(\lambda_f, \lambda_g, p) \in (\mathbb{R}^{m_1})^*_+ \times (\mathbb{R}^{m_2})^* \times AC([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)^*)$ , удовлетворяющих соотношениям:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -p(t) \sum_{i=1}^k \widehat{\alpha}_i(t) \varphi_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}_i(t)), \\ p(t_0) &= \lambda_f \widehat{f}_{\zeta_0} + \lambda_g \widehat{g}_{\zeta_0}, \quad p(t_1) = -\lambda_f \widehat{f}_{\zeta_1} - \lambda_g \widehat{g}_{\zeta_1}, \\ &\langle \lambda_f, f(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1)) \rangle = 0, \\ \max_{u \in U} \langle p(t), \varphi(t, \widehat{x}(t), u) \rangle &= \langle p(t), \widehat{x}(t) \rangle \text{ для п. в. } t \in [t_0, t_1], \\ - \sum_{i=1}^k \int_{t_0}^{t_1} \widehat{\alpha}_i(t) \langle p(t), \varphi_{xx}(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}_i(t)) [h, h](t) &+ 2\varphi_{xu}(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}_i(t)) [h, v_i](t) \\ &+ \varphi_{uu}(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}_i(t)) [v_i, v_i](t) \rangle dt \\ - 2 \sum_{i=1}^k \int_{t_0}^{t_1} \beta_i(t) \langle p(t), \varphi_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}_i(t)) h(t) &+ \varphi_u(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}_i(t)) v_i(t) \rangle dt \\ &+ \langle \lambda_f, \widehat{f}''[\eta, \eta] \rangle + \langle \lambda_g, \widehat{g}''[\eta, \eta] \rangle \geq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $\eta = (h(t_0), h(t_1))$ .

Ясно, что нулевой набор этим соотношениям удовлетворяет.

Заметим, что если  $k = 1$ ,  $\widehat{\alpha}_1 = 1$ ,  $\widehat{u}_1 = \widehat{u}$  и  $\beta_1 = 0$ , то данные соотношения представляют собой условия оптимальности второго порядка с функцией Понтрягина  $H(t) = \langle p(t), \varphi(t, x(t), u(t)) \rangle$ .

**Теорема 1.** Пусть  $k \in \mathbb{N}$ , тройка  $(\hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{u})$ , где  $\hat{u} \in \text{int } \mathcal{U}^k$ , допустима для выпуклой системы (3), (4) и  $q \in K(\hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{u})$  такие, что  $\Lambda(\hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{u}, q) = \{0\}$ . Тогда система (1), (2) локально управляема относительно функции  $\hat{x}$ .

Эта теорема доказана в работе авторов [5].

Из отмеченной выше двойственности и теоремы 1 непосредственно следует

**Теорема 2.** Если функция  $\hat{x}$  является траекторией геометрического локального инфимума для системы (1), (2), то  $\Lambda(\hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{u}, q) \neq \{0\}$  для любой допустимой тройки  $(\hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{u})$  и любого  $q \in K(\hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{u})$ .

Понятие траектории геометрического локального инфимума обобщает понятие траектории локального инфимума, введенное в работе авторов [6]. Действительно, рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$f_0(x(t_0), x(t_1)) \rightarrow \min, \quad \text{при ограничениях (1), (2),} \quad (6)$$

где функция  $f_0: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  переменных  $\zeta_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 0, 1$ , обладает теми же свойствами, что и отображения  $f$  и  $g$ . Об этой задаче будем говорить как о задаче (1), (2), (6).

Задача (1), (2), (6) — стандартная задача оптимального управления, записанная, как иногда говорят, в канонической форме, или как задача в форме Майера. Если в исходной задаче минимизируемый функционал и/или граничные условия содержат интегральные функционалы, то введением дополнительных переменных такая задача легко сводится к задаче вида (1), (2), (6).

Напомним стандартное определение сильного минимума для этой задачи.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Допустимая пара  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$  доставляет сильный минимум (или является оптимальным процессом) в задаче (1), (2), (6), если существует окрестность  $V \subset C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  функции  $\hat{x}(\cdot)$  такая, что для любой допустимой пары  $(x(\cdot), u(\cdot))$ , для которой  $x(\cdot) \in V$ , справедливо неравенство  $f_0(x(t_0), x(t_1)) \geq f_0(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$ .

В этом случае мы говорим, что  $\hat{x}(\cdot)$  — оптимальная траектория в задаче (1), (2), (6).

Ясно, что, если  $\hat{x}(\cdot)$  — оптимальная траектория в задаче (1), (2), (6), то это равносильно тому, что  $\hat{x}(\cdot)$  доставляет локальный минимум функционалу  $f_0$  на множестве  $D$  допустимых траекторий для системы (1), (2).

Следующее определение, введенное в работе [6], обобщает понятие оптимальной траектории.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** Функция  $\hat{x}(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  называется траекторией локального инфимума в задаче (1), (2), (6), если она доставляет локальный минимум функционалу  $f_0$  на замыкании множества допустимых траекторий для системы (1), (2).

Понятно, что значение  $f_0$  на траектории локального инфимума совпадает с точной нижней гранью  $f_0$  по всем допустимым траекториям из данной окрестности (отсюда и название: траектория локального инфимума).

Легко видеть, что если  $\hat{x}(\cdot)$  — оптимальная траектория в задаче (1), (2), (6), то  $\hat{x}(\cdot)$  — траектория локального инфимума в этой задаче. С другой стороны, если функция  $\hat{x}(\cdot)$  — траектория локального инфимума в задаче (1), (2), (6) и допустима, то  $\hat{x}(\cdot)$  — оптимальная траектория в данной задаче.

Пусть  $\hat{x}(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  и отображение  $\bar{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{1+m_1}$  имеет вид  $\bar{f} = (f_0 - f_0(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)), f)$ . Справедливо следующее

**Предложение 1.** Если функция  $\hat{x}(\cdot)$  — траектория локального инфимума в задаче (1), (2), (6), то она является траекторией геометрического локального инфимума для системы (1), (2), где отображение  $f$  заменено на отображение  $\bar{f}$ .

◁ Если  $\hat{x}(\cdot)$  — траектория локального инфимума в задаче (1), (2), (6), то существует окрестность  $V$  функции  $\hat{x}(\cdot)$  такая, что  $f_0(x(t_0), x(t_1)) \geq f_0(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$  для всех допустимых для системы (1), (2) функций  $x(\cdot) \in V$ .

Обозначим через  $\bar{R}(V)$  множество достижимости для системы (1), (2) относительно  $V$ , где  $f$  заменено на  $\bar{f}$ . Тогда, в силу определения 4, для любого  $\varepsilon > 0$  точка  $y = (y_1, y_2) = (-\varepsilon, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m_1+m_2}$  не принадлежит  $\bar{R}(V)$ . Отсюда, так как  $(0, 0) \in \bar{R}(V)$ , следует, что  $(0, 0) \in \partial\bar{R}(V)$ , и значит,  $\hat{x}(\cdot)$  является траекторией геометрического локального инфимума для системы (1), (2), где  $f$  заменено на  $\bar{f}$ . ▷

Из теоремы 2 и предложения 1 вытекает следующая теорема о необходимых условиях для траектории локального инфимума, доказанная в работе [7], где в силу того, что  $f$  заменяется на  $\bar{f}$ , в соотношениях (5) вектор  $\lambda_f$  заменяется на вектор  $(\lambda_0, \lambda_f)$ , при этом в (5) изменяются только второе, третье и шестое условия.

**Теорема 3.** Если функция  $\hat{x} \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  является траекторией локального инфимума в задаче (1), (2), (6), то для любых  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_k)$  и  $\hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_k)$ , где  $\hat{u} \in \text{int } \mathcal{U}^k$ , для которых тройка  $(\hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{u})$  допустима для выпуклой системы (3), (4), и любого  $q_0 = (h, \bar{\beta}, \bar{v}) \in K_0(\hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{u})$  найдутся ненулевой набор  $(\lambda_0, \lambda_f, \lambda_g) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^{m_1})_+^* \times (\mathbb{R}^{m_2})^*$  и вектор-функция  $p \in AC([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)^*)$  такие, что выполнены

1) условие стационарности по  $x$ :

$$\dot{p} = -p \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i(t) \varphi_x(t, \hat{x}, \hat{u}_i(t));$$

2) условия трансверсальности:

$$p(t_0) = \lambda_0 \hat{f}_{0\zeta_1} + \lambda_f \hat{f}_{\zeta_1} + \lambda_g \hat{g}_{\zeta_1}, \quad p(t_1) = -\lambda_0 \hat{f}_{0\zeta_2} - \lambda_f \hat{f}_{\zeta_2} - \lambda_g \hat{g}_{\zeta_2};$$

3) условие дополняющей нежесткости:

$$\langle \lambda_f, f(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) \rangle = 0;$$

4) условие максимума:

$$\max_{u \in U} \langle p(t), \varphi(t, \hat{x}(t), u) \rangle = \langle p(t), \dot{\hat{x}}(t) \rangle \text{ для п. в. } t \in [t_0, t_1];$$

5) условие неотрицательности квадратичной формы:

$$\begin{aligned} & \lambda_0 \hat{f}_0''[\eta, \eta] - \sum_{i=1}^k \int_{t_0}^{t_1} \hat{\alpha}_i(t) \left\langle p(t), \varphi_{xx}(t, \hat{x}(t), \hat{u}_i(t)) [h, h](t) \right. \\ & \left. + 2\varphi_{xu}(t, \hat{x}(t), \hat{u}_i(t)) [h, v_i](t) + \varphi_{uu}(t, \hat{x}(t), \hat{u}_i(t)) [v_i, v_i](t) \right\rangle dt \\ & - 2 \sum_{i=1}^k \int_{t_0}^{t_1} \beta_i(t) \left\langle p(t), \varphi_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}_i(t)) h(t) + \varphi_u(t, \hat{x}(t), \hat{u}_i(t)) v_i(t) \right\rangle dt \\ & + \langle \lambda_f, \hat{f}''[\eta, \eta] \rangle + \langle \lambda_g, \hat{g}''[\eta, \eta] \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

где  $\eta = (h(t_0), h(t_1))$ .

Если множество  $U$  компактно, то траектория локального инфимума в задаче (1), (2), (6) является допустимой для выпуклой системы (3), (4) при  $k = n + 1$ .

Как можно видеть, необходимые условия представляют собой семейство соотношений, параметризованное тройками  $(\hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{u})$ . При этом, если, в частности,  $\hat{x}$  — оптимальная траектория в задаче (1), (2), (6), то эти соотношения при  $k = 1$ ,  $\hat{\alpha}_1 = 1$ ,  $\hat{u}_1 = \hat{u}$  и  $\beta_1 = 0$  содержат известные условия оптимальности второго порядка (см., например, [8, 9]), а также и другие соотношения, которые, вообще говоря, дают дополнительную информацию об оптимальной траектории (см. пример 2 ниже). Таким образом, сформулированная теорема усиливает и обобщает принцип максимума Понтрягина и известные условия оптимальности второго порядка.

Из последнего утверждения теоремы следует, что если множество  $U$  компактно, то для траектории локального инфимума в задаче (1), (2), (6) всегда можно выписать семейство необходимых условий оптимальности второго порядка вида 1)–5).

## 2. Примеры

**Пример 1.** Это пример управляемой системы, для которой можно дать критерий ее локальной управляемости относительно функции, вообще говоря, не являющейся допустимой для этой системы.

Отметим, что если в определенном выше множестве  $\mathcal{U}$  множество  $U$  открыто, то несложно проверить, что в этом случае само множество  $\mathcal{U}$  также открыто.

Пусть  $U_0$  — открытое подмножество  $\mathbb{R}$ , содержащее элементы разных знаков, и  $U$  таково, что  $U_0 \subset U \subset \text{cl } U_0$ .

Рассмотрим следующую управляемую систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \quad \dot{x}_2 = x_1 f_1(u) + x_1^2 f_2(u), \quad u(t) \in U \text{ для п. в. } t \in [0, 1], \\ x_2(1) - x_2(0) &\leq 0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(1) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где функции  $f_1$  и  $f_2$  дважды непрерывно дифференцируемы на  $\mathbb{R}$ ,  $f_1(0) = 0$  и  $f_2(0) \geq 0$ .

Заметим, что функция  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0, 0)$  может быть недопустима для данной системы.

**Предложение 2.** Система (7) локально управляема относительно функции  $\hat{x} = (0, 0)$  тогда и только тогда, когда соотношения  $f_1(u) = \gamma_1 u$  и  $f_2(u) \geq \gamma_2 u$ ,  $u \in U$ , не выполняются одновременно ни для каких  $\gamma_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ .

◁ *Необходимость.* Пусть система (7) локально управляема относительно функции  $\hat{x} = (0, 0)$ . Покажем, что указанные соотношения не выполняются. Допустим, что они выполняются для некоторых  $\gamma_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда для любой допустимой для системы (7) траектории  $x(\cdot) = (x_1(\cdot), x_2(\cdot))$ , интегрируя по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} x_2(1) - x_2(0) &= \int_0^1 (x_1(t) f_1(u(t)) + x_1^2(t) f_2(u(t))) dt \\ &\geq \int_0^1 (\gamma_1 x_1(t) \dot{x}_1(t) + \gamma_2 x_1^2(t) \dot{x}_1(t)) dt = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

т. е. функция  $x(\cdot) \mapsto x_2(1) - x_2(0)$  не может принимать никаких отрицательных значений и значит, система (7) не является локально управляемой относительно  $\hat{x}$ .

Достаточность. Пусть соотношения, указанные в предложении, не выполняются одновременно. Покажем, что в этом случае система (7) локально управляема относительно

функции  $\hat{x} = (0, 0)$ . Снова доказываем от противного. Предположим, что система (7) не локально управляема относительно  $\hat{x}$ . Тогда не выполнены достаточные условия управляемости и тем самым, согласно теореме 1, для любых  $u_i \in U_0$  и  $\alpha_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , для которых справедливы равенства

$$0 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, 0 = \alpha_1(0f_1(u_1) + 0f_2(u_1)) + \alpha_2(0f_1(u_2) + 0f_2(u_2)), \quad (9)$$

$x_1(0) = 0$ ,  $x_1(1) = 0$  и любого набора  $(h, \bar{\beta}, \bar{v}) \in AC([0, 1], \mathbb{R}^2) \times (\mathcal{A}_2 - \widehat{\alpha}) \times (L_\infty([0, 1]))^2$  ( $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ ,  $\bar{v} = (v_1, v_2)$ ,  $\widehat{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ ) из множества критических вариаций  $K(\hat{x}, \widehat{\alpha}, \widehat{u})$  найдутся набор множителей Лагранжа  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\lambda_0 \geq 0$ , и вектор-функция  $p(\cdot) = (p_1(\cdot), p_2(\cdot))$ , не равные одновременно нулю, такие, что выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -p_2(t)(\alpha_1(f_1(u_1) + 0f_2(u_1)) + \alpha_2(f_1(u_2) + 0f_2(u_2))), \\ \dot{p}_2(t) &= 0, \quad p_1(0) = \lambda_1, \quad p_1(1) = -\lambda_2, \quad p_2(0) = p_2(1) = -\lambda_0, \end{aligned} \quad (10)$$

выполнено условие максимума для п. в.  $t \in [0, 1]$ :

$$\max_{u \in \mathbb{R}} p_1(t)u = 0 \quad (11)$$

и справедливо условие неотрицательности квадратичной формы:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^2 \int_0^1 \alpha_i \langle p(t), \varphi_{xx}(0, u_i)[h, h](t) + 2\varphi_{xu}(0, u_i)[h, v_i](t) + \varphi_{uu}(0, u_i)[v_i, v_i](t) \rangle dt \\ -2 \sum_{i=1}^2 \int_0^1 \beta_i(t) \langle p(t), \varphi_x(0, u_i)h(t) + \varphi_u(0, u_i)v_i(t) \rangle dt \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (10) и (11) следует, что  $p(\cdot) = (0, p_2)$  и  $p_2 < 0$ .

Ясно, что любые  $u_1 < 0$  и  $u_2 > 0$ , принадлежащие  $U_0$ ,  $\alpha_1 = -\frac{u_2}{u_1 - u_2}$  и  $\alpha_2 = \frac{u_1}{u_1 - u_2}$  удовлетворяют первому уравнению в (9). Второе выполняется всегда. Подставляя эти  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в первое уравнение в (10), получаем, что справедливо соотношение

$$u_2 f_1(u_1) = u_1 f_1(u_2) \quad (13)$$

для всех указанных  $u_1$  и  $u_2$ . Отсюда следует, что частное  $\frac{f_1(u)}{u}$  есть константа на  $U_0 \setminus \{0\}$ , т. е.

$$f_1(u) = \gamma_1 u$$

для всех  $u \in U_0$ , отличных от нуля и некоторого  $\gamma_1$ . Если  $0 \in U_0$ , то равенство сохраняется, так как  $f_1(0) = 0$ , а тогда, по непрерывности, оно верно и для всех  $u \in U$ .

Докажем теперь, что существует такая константа  $\gamma_2$ , что  $f_2(u) \geq \gamma_2 u$  для всех  $u \in U$ .

В рассматриваемом случае  $K(\hat{x}, \widehat{\alpha}, \widehat{u})$  — это совокупность таких наборов  $(h, \bar{\beta}, \bar{v})$ , что

$$\begin{aligned} \dot{h} &= (\alpha_1 \varphi_x(0, u_1) + \alpha_2 \varphi_x(0, u_2))h + \beta_1(t)\varphi(0, u_1) + \beta_2(t)\varphi(0, u_2) \\ &+ \alpha_1 \varphi_u(0, u_1)v_1(t) + \alpha_2 \varphi_u(0, u_2)v_2(t), \quad h_2(1) - h_2(0) \leq 0, \quad h_1(0) = h_1(1) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $h = (h_1, h_2)^T$  и напомним,  $\varphi(x, u) = (u, x_1 f_1(u) + x_2^2 f_2(u))^T$ .

Так как  $\varphi_x(0, u_i) = (0, f_1(u_i))^T$ ,  $i = 1, 2$ , то в силу доказанной линейности  $f_1$  и того, что  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$ , имеем

$$\alpha_1 \varphi_x(0, u_1) + \alpha_2 \varphi_x(0, u_2) = (0, \gamma_1(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2))^T = (0, 0)^T.$$

Далее,  $\varphi_u(0, u_i) = (1, 0)^T$ ,  $i = 1, 2$ , и поэтому включение  $(h, \bar{\beta}, \bar{v}) \in K(\hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{u})$  означает, что

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \beta_1(t)u_1 + \beta_2(t)u_2 + \alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t), \\ \dot{h}_2 &= 0, \quad h_2(1) - h_2(0) \leq 0, \quad h_1(0) = h_1(1) = 0. \end{aligned}$$

Несложные вычисления показывают, что  $\varphi_{xx}(0, u_i)[h, h] = (0, 2f_2(u_i)h_1^2)^T$ ,  $\varphi_{xu}(0, u_i)[h, v_i] = (0, f_1'(u_i)h_1 v_i)^T$  и  $\varphi_{uu}(0, u_i)[v_i, v_i] = (0, 0)^T$ ,  $i = 1, 2$ . Подставляя это в квадратичную форму (12), будем иметь

$$\begin{aligned} -2p_2 \int_0^1 \left( (\alpha_1 f_2(u_1) + \alpha_2 f_2(u_2)) h_1^2(t) + (\alpha_1 f_1'(u_1) v_1(t) + \alpha_2 f_1'(u_2) v_2(t)) h_1(t) \right. \\ \left. + (\beta_1(t) f_1(u_1) + \beta_2(t) f_1(u_2)) h_1(t) \right) dt \geq 0. \end{aligned}$$

Учитывая то, что  $f_1(u) = \gamma_1 u$  и выражение для  $\dot{h}_1$ , получим

$$\begin{aligned} (\alpha_1 f_1'(u_1) v_1(t) + \alpha_2 f_1'(u_2) v_2(t)) h_1(t) + (\beta_1(t) f_1(u_1) + \beta_2(t) f_1(u_2)) h_1(t) \\ = \gamma_1 (\alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t) + \beta_1(t) u_1 + \beta_2(t) u_2) h_1(t) = \gamma_1 \dot{h}_1(t) h_1(t). \end{aligned}$$

Так как  $h_1(0) = h_1(1) = 0$ , то интеграл от этого выражения равен нулю. Следовательно, неотрицательность квадратичной формы означает, что

$$(\alpha_1 f_2(u_1) + \alpha_2 f_2(u_2)) \int_0^1 h_1^2(t) dt \geq 0$$

и поэтому  $\alpha_1 f_2(u_1) + \alpha_2 f_2(u_2) \geq 0$ . Подставляя сюда  $\alpha_1 = -\frac{u_2}{u_1 - u_2}$  и  $\alpha_2 = \frac{u_1}{u_1 - u_2}$ , приходим к неравенству

$$u_2 f_2(u_1) \geq u_1 f_2(u_2),$$

справедливому для любых  $u_1 < 0$  и  $u_2 > 0$ , принадлежащих  $U$ . Далее, рассуждая аналогично предыдущему (см. равенство (13)), получим, что  $f_2(u) \geq \gamma_2 u$  для всех  $u \in U$  и некоторого  $\gamma_2$ .

Таким образом, доказано, что если система (7) не локально управляема относительно  $\hat{x} = (0, 0)$ , то выполняются одновременно соотношения  $f_1(u) = \gamma_1 u$  и  $f_2(u) \geq \gamma_2 u$  для всех  $u \in U$  и некоторых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Этим доказана достаточность.  $\triangleright$

Теперь приведем пример, когда теорема 3 дает больше информации по сравнению с принципом максимума Понтрягина и известными необходимыми условиями второго порядка.

**Пример 2.** Рассмотрим следующую задачу вариационного исчисления:

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 (x(t) f_1(\dot{x}(t)) + x^2(t) f_2(\dot{x}(t))) dt \rightarrow \min, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad (15)$$

где функции  $f_1$  и  $f_2$  дважды непрерывно дифференцируемы на  $\mathbb{R}$ ,  $f_1(0) = 0$  и  $f_2(0) \geq 0$ .

Задачу будем рассматривать на пространстве функций  $x(\cdot) \in AC([0, 1])$ , для которых  $\dot{x}(\cdot) \in L_\infty([0, 1])$ . Напомним, что функция  $\hat{x}(\cdot)$  доставляет сильный минимум в задаче (15), если существует такая ее окрестность  $\mathcal{O}$  в  $C([0, 1])$ , что  $J(x(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot))$  для всех допустимых функций  $x(\cdot) \in \mathcal{O}$ .

Нулевая функция, очевидно, допустима в задаче (15). Нетрудно показать, что для этой функции выполняется принцип максимума Понтрягина и известные необходимые условия минимума второго порядка и тем самым она подозрительна на сильный минимум (независимо от того какой вид имеют функции  $f_1$  и  $f_2$ ). Но рассматривая эту задачу как задачу оптимального управления и применяя теорему 3, можно получить дополнительные содержательные условия.

Действительно, запишем задачу (15) как задачу оптимального управления в форме Майера:

$$\begin{aligned} x_2(1) - x_2(0) \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1 f_1(u) + x_1^2 f_2(u), \\ u(t) \in \mathbb{R} \text{ для п. в. } t \in [0, 1], \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(1) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Очевидно, что  $\hat{x}_1$  — сильный минимум в задаче (15) тогда и только тогда, когда пара  $(\hat{x}, \hat{u})$ , где  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  и  $\hat{u} = \hat{x}_1$ , доставляет сильный минимум в задаче (16).

Справедливо следующее

**Предложение 3.** *Для того чтобы нулевая функция доставляла сильный минимум в задаче (15) необходимо и достаточно, чтобы существовали такие константы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , что  $f_1(u) = \gamma_1 u$ , а  $f_2(u) \geq \gamma_2 u$  для всех  $u \in \mathbb{R}$ .*

◁ Из предложения 1 следует, что если нулевая функция доставляет сильный минимум в задаче (16), т. е. является оптимальной траекторией для этой задачи, то она есть геометрически оптимальная траектория для управляемой системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1 f_1(u) + x_1^2 f_2(u), \quad u(t) \in \mathbb{R} \text{ для п. в. } t \in [0, 1], \\ x_2(1) - x_2(0) \leq 0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(1) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Необходимыми условиями для нее являются, как было отмечено ранее, отрицание любых достаточных условий локальной управляемости системы (17) относительно нулевой функции. В предложении 2 (где надо взять  $U_0 = U = \mathbb{R}$ ) сформулированы достаточные условия, заключающиеся в том, что соотношения  $f_1(u) = \gamma_1 u$  и  $f_2(u) \geq \gamma_2 u$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , не выполняются одновременно ни для каких  $\gamma_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ . Следовательно, если нулевая функция доставляет сильный минимум в задаче (15), то существуют такие константы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , что  $f_1(u) = \gamma_1 u$ , а  $f_2(u) \geq \gamma_2 u$  для всех  $u \in \mathbb{R}$ . Необходимость доказана.

Достаточность следует из того, что если выполняются указанные соотношения, то, согласно (8), нулевая функция доставляет глобальный (и тем самым сильный) минимум интегралу в (15). ▷

## Литература

1. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.—М.: Наука, 1972.—576 с.
2. Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г. Релаксация и управляемость в задачах оптимального управления // Матем. сб.—2017.—Т. 208, № 5.—С. 3–37. DOI: 10.4213/sm8721.
3. Аграчев А. А., Сарычев Ю. Л. Геометрическая теория управления.—М.: Физматлит, 2005.—392 с.
4. Avakov E. R., Magaril-Ilyayev G. G. Local controllability and trajectories of geometric local infimum in optimal control problems // J. Math. Sci.—2023.—Vol. 269, № 2.—P. 129–142. DOI: 10.1007/s10958-023-06265-9.
5. Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г. Управляемость и необходимые условия второго порядка для траектории локального инфимума в оптимальном управлении // Тр. МИАН. Оптимальное управление и динамические системы. Сборник статей. К 95-летию академика Реваза Валериановича Гамкрелидзе.—2023.—Т. 321.—С. 7–30. DOI: 10.4213/tm4312.
6. Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г. Локальный инфимум и семейство принципов максимума в оптимальном управлении // Матем. сб.—2020.—Т. 211, № 6.—С. 3–39. DOI: 10.4213/sm9234.
7. Avakov E., Magaril-Ilyayev G. G. Necessary second-order conditions for a local infimum in optimal control // SIAM J. Control Optim.—2022.—Vol. 60, № 2.—P. 1018–1038. DOI: 10.1137/21M1389973.

8. Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // Успехи мат. наук.—1978.—Т. 33, № 6 (204).—С. 85–148.
9. Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г. Управляемость и необходимые условия оптимальности второго порядка // Матем. сб.—2019.—Т. 210, № 1.—С. 3–26. DOI: 10.4213/sm9013.

*Статья поступила 19 декабря 2025 г.*

АВАКОВ ЕВГЕНИЙ РАЧИЕВИЧ  
 Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,  
 ведущий научный сотрудник  
 РОССИЯ, Москва, 117997, ул. Профсоюзная, 65  
 E-mail: eramag@mail.ru  
<https://orcid.org/0000-0002-6951-2106>

МАГАРИЛ-ИЛЪЯЕВ ГЕОРГИЙ ГЕОРГИЕВИЧ  
 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
 профессор  
 РОССИЯ, Москва, 119991, Ленинские горы, 1  
 E-mail: georgii.magaril@math.msu.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-4960-8255>

*Vladikavkaz Mathematical Journal*  
 2026, Volume 28, Issue 1, P. 16–27

## LOCAL CONTROLLABILITY, TRAJECTORY GEOMETRIC LOCAL INFIMUM, AND SECOND-ORDER CONDITIONS IN OPTIMAL CONTROL

Avakov, E. R.<sup>1</sup> and Magaril-Il'yaev, G. G.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences,  
 65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russia;

<sup>2</sup> Lomonosov Moscow State University,  
 1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

E-mail: eramag@mail.ru, georgii.magaril@math.msu.ru

**Abstract.** In optimal control theory, questions related to necessary optimality conditions and the controllability of a control system are among the fundamental ones. In this paper, for a control system of ordinary differential equations, the concept of its local controllability with respect to an arbitrary continuous function and the concept of a trajectory of a geometric local infimum are defined. These concepts are dual to each other in the sense that either the control system is locally controllable with respect to a given function or this function is a trajectory of a geometric local infimum. The concept of a trajectory of a geometric local infimum generalizes the concept of a trajectory of a local infimum (previously introduced by the authors), and generalizes the classical concept of an optimal trajectory. A trajectory of a local infimum is a function such that the objective functional attains its minimum, but, generally speaking, it is not a feasible trajectory and it is a uniform limit of such trajectories. An optimal trajectory may not exist, but the existence of a local infimum trajectory is clearly sufficient for applications. The previously mentioned duality between the concepts of local controllability with respect to an arbitrary continuous function and the trajectory of a geometric local infimum was investigated by the authors in the case, where the necessary conditions for the trajectory of a local infimum were first-order. In this paper we focus on second-order necessary conditions. Note that first-order and second-order necessary conditions for the trajectory of a local infimum are improved the corresponding classical conditions (in particular, the Pontryagin maximum principle). Our goal is to show that the introduction of more general concepts (local controllability with respect to an arbitrary function, the trajectory of a geometric local infimum) allows to a unified approach of controllability and optimality in optimal control. Our examples also play an important role.

**Keywords:** trajectory of geometric local infimum, local controllability, optimal control, second-order conditions.

**AMS Subject Classification:** 49K15.

**For citation:** Avakov, E. R. and Magaril-Il'yaev, G. G. Local Controllability, Trajectory Geometric Local Infimum, and Second-Order Conditions in Optimal Control, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 16–27 (in Russian). DOI: 10.46698/a7281-6269-9782-p.

## References

1. Lee, E. B. and Markus, L. *Foundations of Optimal Control Theory*, New York, London, Sydney, John Wiley & Sons, 1967.
2. Avakov, E. R. and Magaril-Il'yaev, G. G. Relaxation and Controllability in Optimal Control Problems, *Sbornik: Mathematics*, 2017, vol. 208, no. 5, pp. 585–619. DOI: 10.1070/SM8721.
3. Agrachev, A. A. and Sarychev, Yu. L. *Geometric Control Theory* [Geometricheskaya teoriya upravleniya], Moscow, Fizmatlit, 2005, 392 p.
4. Avakov, E. R. and Magaril-Il'yaev, G. G. Local Controllability and Trajectories of Geometric Local Infimum in Optimal Control Problems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2023, vol. 269, no. 2, pp. 129–142. DOI: 10.1007/s10958-023-06265-9.
5. Avakov, E. R. and Magaril-Il'yaev, G. G. Controllability and Second-Order Necessary Conditions for Local Infimum Trajectories in Optimal Control, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, Optimal Control and Dynamical Systems. Collected papers. On the occasion of the 95th birthday of Academician Revaz Valerianovich Gamkrelidze, 2023, vol. 321, pp. 1–23. DOI: 10.1134/S0081543823020013.
6. Avakov, E. R. and Magaril-Il'yaev, G. G. Local Infimum and a Family of Maximum Principles in Optimal Control, *Sbornik: Mathematics*, 2020, vol. 211, no. 6, pp. 750–785. DOI: 10.1070/SM9234.
7. Avakov, E. R. and Magaril-Il'yaev, G. G. Necessary Second-Order Conditions for a Local Infimum in Optimal Control, *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2022, vol. 60, no. 2, pp. 1018–1038. DOI: 10.1137/21M1389973.
8. Levitin, E. S., Milyutin, A. A. and Osmolovskii, N. P. Conditions of High Order for a Local Minimum in Problems with Constraints, *Russian Mathematical Surveys*, 1978, vol. 33, no. 6, pp. 97–168. DOI: 10.1070/RM1978v033n06ABEH003885.
9. Avakov, E. R. and Magaril-Il'yaev, G. G. Controllability and Second-Order Necessary Conditions for Optimality, *Sbornik: Mathematics*, 2019, vol. 210, no. 1, pp. 1–23. DOI: 10.1070/SM9013.

*Received December 19, 2025*

EVGENY. R. AVAKOV

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences  
of Russian Academy of Sciences,  
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russia,  
*Leading Researcher*

E-mail: eramag@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-6951-2106>

GEORGY G. MAGARIL-IL'YAEV

Lomonosov Moscow State University,  
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia,  
*Professor*

E-mail: georgii.magaril@math.msu.ru

<https://orcid.org/0000-0003-4960-8255>

УДК 519.146 + 514.11  
DOI 10.46698/q7071-3025-8385-h

PARTICULAR EXAMPLES OF PLANAR INTEGRAL POINT SETS  
AND THEIR CLASSIFICATION<sup>#</sup>

N. N. Avdeev<sup>1</sup>, A. E. Zvolinskiy<sup>1</sup> and E. A. Momot<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Voronezh State University,  
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia  
E-mail: nickkolok@mail.ru, avdeev@math.vsu.ru,  
aezv.global@gmail.com, winter.b258@yandex.ru

*To the blessed memory of Professor Semën Samsonovich Kutateladze*

**Abstract.** A planar integral point set (PIPS) is a finite set of non-collinear points in the Euclidean plane such that the Euclidean distance between any pair of points is an integer. These sets are characterized by their cardinality (the finite number of points), diameter (the maximum pairwise distance), and characteristic (the smallest positive integer  $q$  such that all triangular areas are commensurable with  $\sqrt{q}$ ). The characteristic remains invariant under translations, dilations, reflections, and even the addition or removal of points. Existing classifications include sets in semi-general position (no three points collinear) and general position (no three collinear and no four concyclic). Circular sets and facher sets (all but one point on a line) are prominent examples, but finding sets of general position is difficult problem. For instance, the largest known set has seven points, and no eight-point example is currently known. This work introduces new examples to advance the classification, including rails sets (points on two parallel lines) and sets with multiple symmetries. We also present sets with many shared points that cannot be merged. These constructions highlight the potential of sequential extensions and limitations of merging sets, offering insights into the structure and properties of planar integral point sets.

**Keywords:** integral point set, classification of planar integral point sets, discrete geometry, combinatorial geometry.

**AMS Subject Classification:** 52C10.

**For citation:** Avdeev, N. N., Zvolinskiy, A. E. and Momot, E. A. Particular Examples of Planar Integral Point Sets and Their Classification, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 28–36. DOI: 10.46698/q7071-3025-8385-h.

## 1. Introduction

DEFINITION 1. A planar integral point set (PIPS) is a set  $\mathcal{P}$  of non-collinear points in the plane  $\mathbb{R}^2$  such that for any pair of points  $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$  the Euclidean distance  $|P_1P_2|$  between points  $P_1$  and  $P_2$  is an integer.

How do we describe a planar integral point set? For example, by the number of points in it, which is always finite [1, 2] and is said to be the *cardinality* of the PIPS. Furthermore, we can naturally define the diameter of a finite point set.

---

<sup>#</sup>This work was carried out at Voronezh State University and supported by the Russian Science Foundation, grant no. 19-11-00197.

DEFINITION 2. The diameter of a planar integral point set  $\mathcal{P}$  is defined as  $\text{diam}(\mathcal{P}) = \max_{P_1, P_2 \in \mathcal{P}} |P_1 P_2|$ .

DEFINITION 3 [3, 4]. The characteristic of a planar integral point set  $\mathcal{P}$  is the least positive integer  $p$  such that the area of any triangle with vertices  $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{P}$  is commensurable with  $\sqrt{p}$ .

The characteristic of a PIPS does not change if the set is moved, dilated or flipped; moreover, even addition or deletion of a point does not change the characteristic of a PIPS.

While the minimal possible diameter for planar integral point sets of a given cardinality was being computed, it was noticed [5] that such a diameter is attained at sets with many points on a straight line; for some estimations on this tendency, we also refer the reader to [6]. (For the recently established connection between the characteristic and the minimal possible diameter, see [7].) Thus, the following classification was introduced.

DEFINITION 4. A PIPS  $\mathcal{P}$  is said to be in *semi-general position* if no three points of  $\mathcal{P}$  are located in a straight line.

The most dominating examples of PIPSs in semi-general position are circular sets.

DEFINITION 5. A planar integral point set that is situated on a circle is said to be a *circular* point set.

So, the following constraint appeared.

DEFINITION 6. A planar integral point set  $\mathcal{P}$  is said to be in *general position* if no three points of  $\mathcal{P}$  are located on a straight line and no four points of  $\mathcal{P}$  are located on a circle.

Planar integral point sets in general position are very difficult to find; the first known examples of such sets with cardinality 7 were presented in [8]. Currently, there is no known example of a PIPS of cardinality 8 in general position.

The main purpose of this work is to demonstrate examples of planar integral point sets that may provide clues for the development of further classification.

It is rather common for points of a PIPS to have non-integer coordinates; for convenience, in such cases we use the notation [9–11]:  $\sqrt{p}/q * \{(x_1; y_1); \dots; (x_n; y_n)\}$ , which means that each abscissa is multiplied by  $1/q$  and each ordinate is multiplied by  $\sqrt{p}/q$ , i. e.,

$$\sqrt{p}/q * \{(x_1; y_1); \dots; (x_n; y_n)\} = \left\{ \left( \frac{x_1}{q}; \frac{y_1 \sqrt{p}}{q} \right); \dots; \left( \frac{x_n}{q}; \frac{y_n \sqrt{p}}{q} \right) \right\}. \quad (1)$$

Here  $p$  is the characteristic of the PIPS; any PIPS can be written in this form [11, Theorem 4].

Note that all examples that are discussed below are located on a union of at most three straight lines. For a classification of PIPSs located on the union of two straight lines, see [12].

There are some examples of PIPSs that are not contained in the union of any three straight lines: for example, these include the heptagons presented in [8] and 7-clusters from [13]. However, we have to keep in mind that circular inversion under certain conditions translates a planar integral point set into a planar integral point set (although sometimes additional dilation is necessary). On the other hand, circular inversion may translate a straight line into a circle and vice versa. Thus, we can consider the concept of *generalized circles*, which are circles or straight lines; obviously, from that point of view all the examples from [8] and [13] are located on a union of three generalized circles, because any seven points are located on a union of a circle and two straight lines.

## 2. Rails Sets

DEFINITION 7. A planar integral point set of  $n$  points with  $n - 1$  points on a straight line is called a *facher* set.

Facher sets are predominant examples of planar integral point sets [14]. In [15], facher sets of characteristic 1 are called *semi-crabs*.

DEFINITION 8 [12]. A non-facher planar integral point set situated on two parallel straight lines is called a *rails* set.

Among rails sets, sets with 2 points on one line and all the others on another line dominate.

The two PIPSs below have been obtained by dilating [12, Fig. 34] by 23 and 29 respectively; the third one has been constructed by dilation and merging.

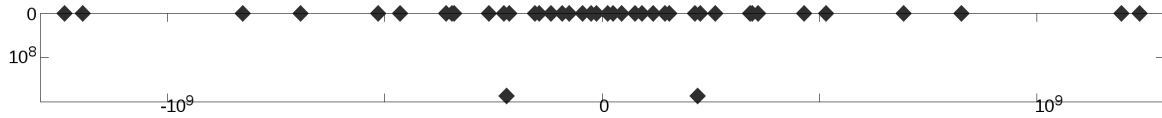


Fig. 1. A PIPS of cardinality 42 and diameter 2473117504.

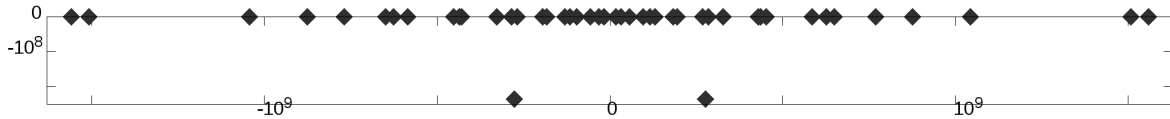


Fig. 2. A PIPS of cardinality 46 and diameter 3118278592.

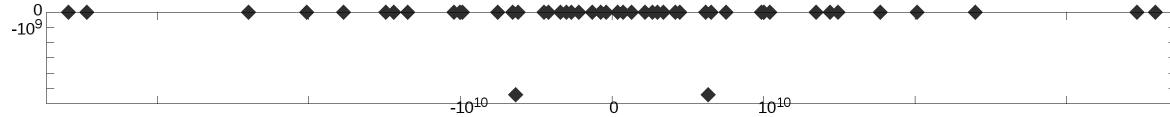


Fig. 3. A PIPS of cardinality 48 and diameter 71720407616.

- Fig. 1:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{42} = \sqrt{154}/1 * \{ & (\pm 219513840; -15069600); (\pm 345596160; 0); (\pm 260201760; 0); \\ & (\pm 225792840; 0); (\pm 213234840; 0); (\pm 153961080; 0); (\pm 144668160; 0); (\pm 25116000; 0); \\ & (\pm 694026840; 0); (\pm 514710560; 0); (\pm 359116940; 0); (\pm 13423904; 0); (\pm 75682880; 0); \\ & (\pm 464143680; 0); (\pm 827069880; 0); (\pm 92144325; 0); (\pm 1195180740; 0); (\pm 1236558752; 0); \\ & (\pm 44590560; 0); (\pm 339925740; 0); (\pm 117312468; 0) \}. \end{aligned}$$

- Fig. 2:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{46} = \sqrt{154}/1 * \{ & (\pm 276778320; -19000800); (\pm 435751680; 0); (\pm 328080480; 0); \\ & (\pm 268861320; 0); (\pm 194124840; 0); (\pm 182407680; 0); (\pm 1559139296; 0); (\pm 284695320; 0); \\ & (\pm 1506967020; 0); (\pm 1042827240; 0); (\pm 875077320; 0); (\pm 648982880; 0); (\pm 585224640; 0); \\ & (\pm 452799620; 0); (\pm 95426240; 0); (\pm 16925792; 0); (\pm 116181975; 0); (\pm 428602020; 0); \\ & (\pm 56222880; 0); (\pm 769560480; 0); (\pm 626458560; 0); (\pm 31668000; 0); (\pm 130761918; 0) \}. \end{aligned}$$

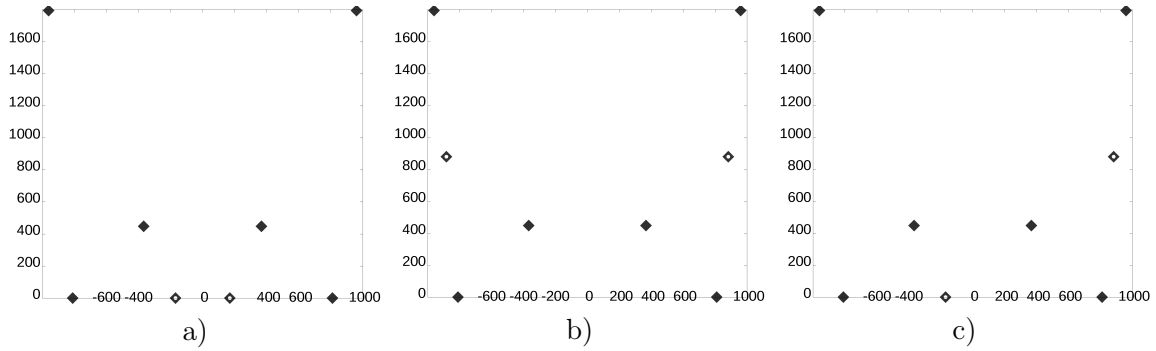
- Fig. 3:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{48} = \sqrt{154}/1 * \{ & (\pm 6365901360; -437018400); (\pm 10022288640; 0); \\ & (\pm 23985026520; 0); (\pm 389293216; 0); (\pm 6183810360; 0); (\pm 4464871320; 0); \\ & (\pm 4195376640; 0); (\pm 728364000; 0); (\pm 35860203808; 0); (\pm 34660241460; 0); \\ & (\pm 7545851040; 0); (\pm 20126778360; 0); (\pm 14926606240; 0); (\pm 13460166720; 0); \\ & (\pm 10414391260; 0); (\pm 2194803520; 0); (\pm 2672185425; 0); (\pm 9857846460; 0); \\ & (\pm 1293126240; 0); (\pm 17699891040; 0); (\pm 14408546880; 0); (\pm 3007524114; 0); \\ & (\pm 6547992360; 0); (\pm 3402061572; 0) \}. \end{aligned}$$

Taking these examples into consideration, we can conjecture that there is an infinite point set with rational distances that contains  $\mathcal{P}_{48}$ . However, it is known [16] that if a point set  $S$  with rational distances has infinitely many points on a line or on a circle, then all but 4 and 3 points, respectively, of  $S$  are on the line or on the circle.

### 3. Example of Sets with Many Common Points That Cannot Be Merged

Fig. 4 shows an example of three PIPs of cardinality 8, each pair of which shares 6 or 7 points but cannot be combined into another PIPS.



**Fig. 4.** PIPs with cardinality 8 and diameter 2520 with many common points.

- $\mathcal{P} = \sqrt{143}/2 * \{(\pm 1620; 0); (\pm 1920; 300); (\pm 735; 75); (\pm 340; 0)\};$
- $\mathcal{P} = \sqrt{143}/2 * \{(\pm 1620; 0); (\pm 1920; 300); (\pm 735; 75); (\pm 1767; 147)\};$
- $\mathcal{P} = \sqrt{143}/2 * \{(\pm 1620; 0); (\pm 1920; 300); (\pm 735; 75); (-340; 0); (1767; 147)\}.$

The distance between the non-adoptable points is  $\sqrt{\left(\frac{1767}{2} - \frac{340}{2}\right)^2 + \left(\frac{147}{2}\right)^2 \cdot 143} = 2\sqrt{320401}$ . Notably, 320401 is a prime.

### 4. Integral Point Sets with Two Axes of Symmetry

The set  $\mathcal{P}_{19}$  shown in Fig. 6 was obtained from the set  $\mathcal{P}_9$  shown in Fig. 5 by dilation and looking for points on the  $x$ -axis.

$$\mathcal{P}_9 = \{(0; 0); (\pm 1445; 0); (\pm 1085; 0); (-455; \pm 528); (455; \pm 528)\}, \quad (2)$$

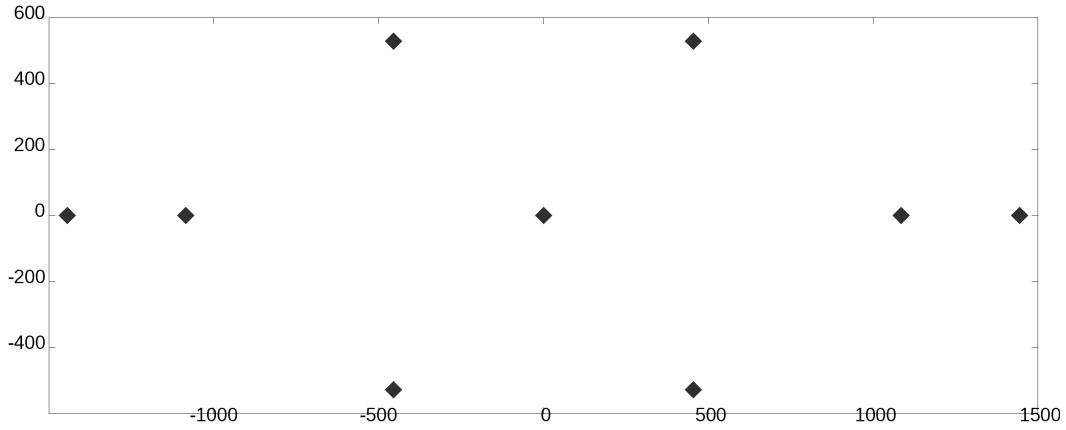


Fig. 5. A PIPS of cardinality 9 and diameter 2890.

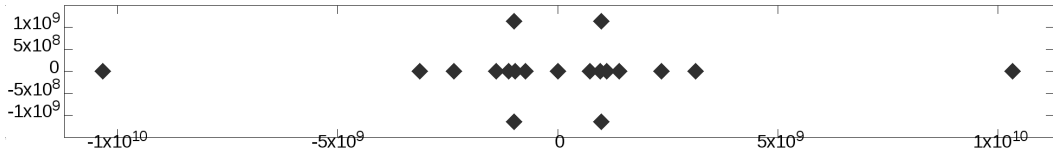


Fig. 6. A PIPS of cardinality 19 and diameter 20663808074.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{19} = \{ & (0; 0); (-987843675; \pm 1146332880); (987843675; \pm 1146332880); \\ & (\pm 729918777; 0); (\pm 972103809; 0); (\pm 1113030324; 0); (\pm 1400170149; 0); \\ & (\pm 3137217825; 0); (\pm 2355627225; 0); (\pm 10331904037; 0) \}. \end{aligned}$$

### 5. Arrow-Like Planar Integral Point Sets with One Axis of Symmetry

In Fig. 7, the following PIPS is shown:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{17} = \{ & (-2847; \pm 72072); (47073; \pm 124488); (47073; 0); (\pm 98943; 0); \\ & (-694668; 0); (15457; 0); (-71487; 0); (-50367; 0); (-14943; 0); \\ & (23582; 0); (63073; 0); (125307; 0); (172207; 0); (329628; 0) \}. \end{aligned}$$

Note that the axis of symmetry for  $\mathcal{P}_{17}$  is the  $x$  axis; all such sets are of characteristic 1. Moreover, note that the set contains three points with the same first coordinates.

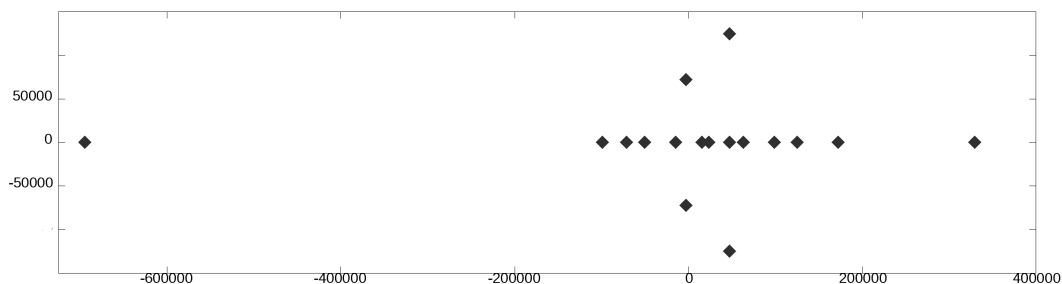
In Fig. 8 and 9, other examples of arrow-like PIPSs are shown. The one in Fig. 9 is obtained from the one in Fig. 8 by dilation and looking for points on the  $x$ -axis.

Fig. 8:

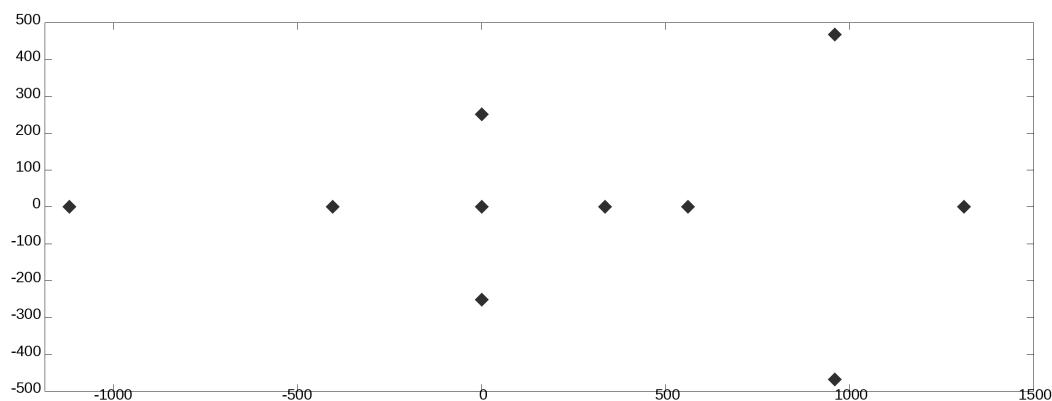
$$\mathcal{P}_{10} = \{(0; 0); (0; \pm 252); (960; \pm 468); (-1120; 0); (-405; 0); (336; 0); (561; 0); (1311; 0)\}.$$

Fig. 9:

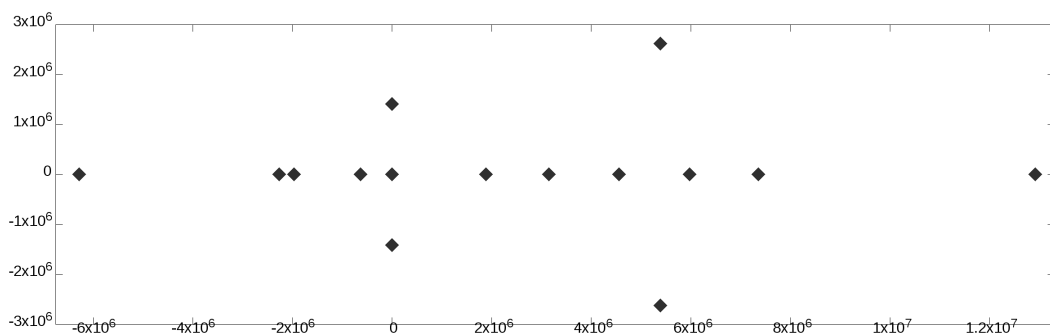
$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{15} = \{ & (0; 0); (0; \pm 1413720); (5385600; \pm 2625480); \\ & (-6283200; 0); (-2272050; 0); (-1971915; 0); (-635040; 0); (1884960; 0); \\ & (3147210; 0); (4558176; 0); (5976333; 0); (7354710; 0); (12920544; 0) \}. \end{aligned}$$



**Fig. 7.** A PIPS of cardinality 17 and diameter 1024296.



**Fig. 8.** A PIPS of cardinality 10 and diameter 2431.



**Fig. 9.** A PIPS of cardinality 15 and diameter 19203744.

## 6. Other Examples

Fig. 10 displays a PIPS with no axis of symmetry; although the set is of characteristic 1, it cannot be extended by the reflection in the  $x$ -axis. Moreover, we failed to extend it by dilation and looking for extra points on the  $x$ -axis.

$$\mathcal{P}_8 = \sqrt{13} * \{(0; 0); (8450; 0); (12844; 0); (21294; 0); (29575; 0); (-2366; -8112); (10647; -14196); (15022; -3696)\}.$$

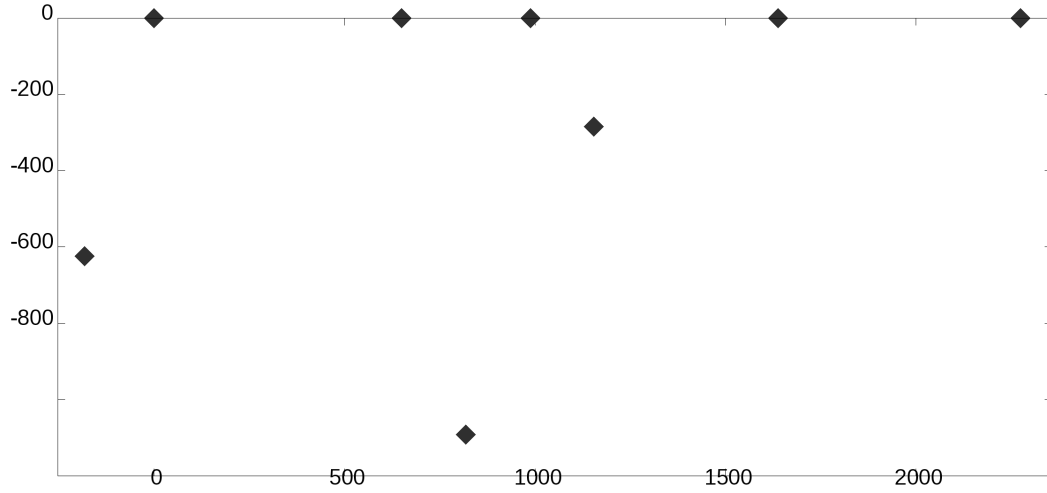


Fig. 10. A PIPS of cardinality 8 and diameter 2535.

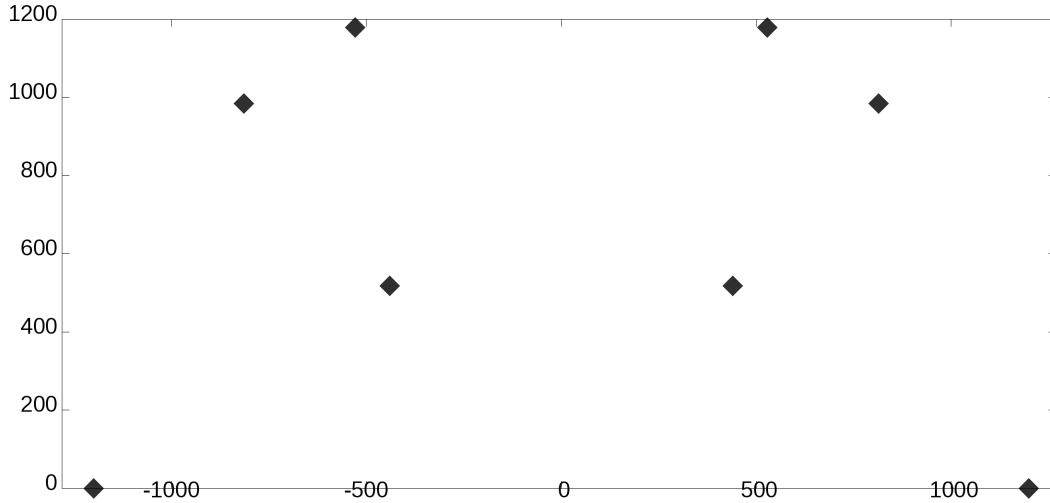


Fig. 11. A PIPS of cardinality 8 and diameter 2400.

The set shown in Fig. 11 has an axis of symmetry, but it is the  $y$ -axis, not the  $x$ -axis. Due to the fact that its characteristic is not 1, the set cannot be rotated by  $90^\circ$  but still be on the lattice (1):

$$\mathcal{P}_{8y} = \sqrt{42}/1 * \{(\pm 1200; 0); (\pm 529; 182); (\pm 814; 152); (\pm 440; 80)\}.$$

## 7. Final Remarks

All given planar integral point sets were obtained through a combination of computer search and the authors' intuition.

The source code can be obtained at <https://gitlab.com/Nickkolok/ips-algo>.

**Acknowledgements.** The authors thank Dr. Prof. E. M. Semenov and Dr. A. S. Usachev for proofreading. Also the authors owe special thanks to the anonymous referee for the helpful comments and suggestions on the paper.

**A special remark from N. Avdeev.** I would like to express my deepest gratitude to the late Professor Semen Samsonovich Kutateladze, who played a pivotal role in my scientific career. He recommended the journal for my first significant scholarly article [17] and facilitated its submission, marking the start of a pioneering series of works on this topic at our university. This contribution is dedicated to his memory.

## References

1. Anning, N. H. and Erdos, P. Integral Distances, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1945, vol. 51, no. 8, pp. 598–600. DOI: 10.1090/S0002-9904-1945-08407-9.
2. Erdos, P. Integral Distances, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1945, vol. 51, no. 12, p. 996. DOI: 10.1090/S0002-9904-1945-08490-0.
3. Kemnitz, A. *Punktmengen mit ganzzahligen Abstanden* [Point Sets with Integral Distances], Habilitationsschrift, Braunschweig, 1988 (in German).
4. Kurz, S. On the Characteristic of Integral Point Sets in  $\mathbb{E}^m$ , *Australasian Journal of Combinatorics*, 2006, vol. 36, pp. 241–248. DOI: 10.48550/arXiv.math/0511704.
5. Kurz, S. and Wassermann, A. On the Minimum Diameter of Plane Integral Point Sets, *Ars Combinatoria*, 2011, vol. 101, pp. 265–287. DOI: 10.48550/arXiv.0804.1307.
6. Solymosi, J. Note on Integral Distances, *Discrete & Computational Geometry*, 2003, vol. 30, no. 2, pp. 337–342. DOI: 10.1007/s00454-003-0014-7.
7. Avdeev, N. and Lushina, E. On the Characteristic and Diameter of Planar Integral Point Sets, *Australasian Journal of Combinatorics*, 2025, vol. 93, no. 3, pp. 461–477. DOI: 10.48550/arXiv.2407.08121.
8. Kreisel, T. and Kurz, S. There Are Integral Heptagons, no Three Points on a Line, no Four on a Circle, *Discrete & Computational Geometry*, 2008, vol. 39, no. 4, pp. 786–790. DOI: 10.1007/s00454-007-9038-6.
9. Avdeev, N. N. On Integral Point Sets in Special Position, *Nekotorye voprosy analiza, algebrы, geometrii i matematicheskogo obrazovaniya: materialy mezhdunarodnoy molodezhnoy nauchnoy shkoly «Aktual'nye napravleniya matematicheskogo analiza i smezhnye voprosy»*, 2018, vol. 8, pp. 5–6 (in Russian).
10. Avdeev, N. N. On the Search of Special Integral Point Sets, *Aktual'nye problemy prikladnoy matematiki, informatiki i mekhaniki, sbornik trudov Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii*, 2018, pp. 492–498 (in Russian).
11. Avdeev, N. N. and Semenov, E. M. Integral Point Sets in the Plane and Euclidean Space, *Mathematical Forum*, vol. 12, *Studies in Mathematics and Mathematical Education, Trends in Science: The South of Russia*, Vladikavkaz, SMI VSC RAS, 2018, pp. 217–236.
12. Avdeev, N. N., Zvolinsky, R. E. and Momot, E. A. On Particular Diameter Bounds for Integral Point Sets in Higher Dimensions, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2025, vol. 1, pp. 62–77. DOI: 10.48550/arXiv.1909.10386.
13. Kurz, S. et al. Constructing 7-Clusters, *Serdica Journal of Computing*, 2014, vol. 8, no. 1, pp. 47–70. DOI: 10.48550/arXiv.1312.2318.
14. Zvolinsky, R. E. Facher Integral Point Sets with Particular Distances of Arbitrary Cardinality, *Aktual'nye problemy prikladnoy matematiki, informatiki i mekhaniki, Sbornik trudov Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii*, 2021, pp. 668–674.
15. Antonov, A. R. and Kurz, S. Maximal Integral Point Sets over  $\mathbb{Z}^2$ , *International Journal of Computer Mathematics*, 2010, vol. 87, no. 12, pp. 2653–2676. DOI: 10.1080/00207160902993636.
16. Solymosi, J. and de Zeeuw, F. On a Question of Erdős and Ulam, *Discrete & Computational Geometry*, 2010, vol. 43, no. 2, pp. 393–401. DOI: 10.1007/s00454-009-9179-x.
17. Avdeev, N. N. and Semenov, E. M. On the Sets of Points on the Plane with Integer-Valued Distances, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 100, pp. 743–746. DOI: 10.1134/S0001434616110110.

Received November 17, 2025

NIKOLAĬ N. AVDEEV  
Voronezh State University,  
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia,  
Postgraduate Student of the Department  
of Function Theory and Geometry  
E-mail: nickkolok@mail.ru, avdeev@math.vsu.ru  
<https://orcid.org/0009-0006-2280-1062>

ALEXANDR E. ZVOLINSKY  
Voronezh State University,  
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia,  
Graduate of the Department of Function Theory and Geometry  
E-mail: aezv.global@gmail.com  
<https://orcid.org/0009-0004-0576-5296>

EKATERINA A. МОМОТ  
Voronezh State University,  
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia,  
Graduate of the Department of Functional Analysis  
and Operator Equations  
E-mail: winter.b258@yandex.ru  
<https://orcid.org/0009-0002-4849-3468>

Владикавказский математический журнал  
2026, Том 28, Выпуск 1, С. 28–36

## НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПЛОСКИХ ЦЕЛОУДАЛЕННЫХ МНОЖЕСТВ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Авдеев Н. Н.<sup>1</sup>, Зволинский А. Е.<sup>1</sup>, Момот Е. А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Воронежский государственный университет,  
Россия, 394018, Воронеж, Университетская пл., 1  
E-mail: nickkolok@mail.ru, avdeev@math.vsu.ru,  
aezv.global@gmail.com, winter.b258@yandex.ru

**Аннотация.** Плоское целоудаленное множество есть конечное множество точек на евклидовой плоскости, не содержащееся ни на какой прямой, такое, что евклидово расстояние между любой парой точек является целым числом. Эти множества характеризуются своей мощностью (конечным числом точек), диаметром (максимальным попарным расстоянием) и характеристикой (наименьшим положительным целым числом  $q$  таким, что площади всех треугольников, образованных точками множества, соизмеримы с  $\sqrt{q}$ ). Характеристика инвариантна относительно сдвига, растяжения, отражения, а также добавления или удаления точек. Существующие классификации включают множества в полуобщем положении (никакие три точки не лежат на одной прямой) и в общем положении (никакие три точки не лежат на одной прямой и никакие четыре не лежат на одной окружности). Классическими примерами являются круговые множества и веерные множества (все точки, кроме одной, лежат на одной прямой). Однако нахождение множеств общего положения представляет значительные трудности. Например, наибольшее известное множество имеет семь точек, и пока не найдено множество из восьми точек общего положения. В данной работе представлены новые примеры для развития классификации, включая рельсовые множества (точки на двух параллельных прямых), множества с несколькими симметриями и стреловидные конфигурации. Мы также рассматриваем множества с большим количеством общих точек, которые нельзя объединить. Эти конструкции подчеркивают потенциал последовательных растяжений и ограничения на объединение множеств, демонстрируя новые особенности структуры и свойств плоских целоудаленных множеств.

**Ключевые слова:** целоудаленное множество, классификация плоских целоудаленных множеств, дискретная геометрия, комбинаторная геометрия.

**AMS Subject Classification:** 52C10.

**Образец цитирования:** Avdeev N. N., Zvolinskiy A. E., Momot E. A. Particular Examples of Planar Integral Point Sets and Their Classification // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, № 1.—С. 28–36 (in English). DOI: 10.46698/q7071-3025-8385-h.

УДК 519.63

DOI 10.46698/f6557-1323-1446-g

## ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

З. В. Бештокова<sup>1</sup>, М. Х. Бештоков<sup>1</sup>, М. Х. Шхануков-Лафишев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,  
Россия, 360004, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

E-mail: zarabaeva@yandex.ru, beshtokov-murat@yandex.ru, lafisev@yandex.ru

**Аннотация.** Исследуется многомерное уравнение теплопроводности дробного порядка с граничными условиями третьего рода в области сложной формы. Вместо исходного дифференциального уравнения рассматривается модифицированное уравнение теплопроводности дробного порядка с параметром регуляризации  $\varepsilon > 0$ . Для приближенного решения модифицированной задачи используется метод конечных разностей. Построена локально-одномерная разностная схема А. А. Самарского с порядком аппроксимации  $O(|h|^2 + \tau)$ , суть которой состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. С помощью принципа максимума получена априорная оценка в равномерной метрике в норме  $C$ . Доказаны устойчивость локально-одномерной разностной схемы и равномерная сходимость решения предложенной разностной схемы к решению исходной задачи при любых значениях  $0 < \alpha < 1$ . Выбор параметра регуляризации  $\varepsilon$  может существенно повлиять на скорость сходимости локально-равномерной разностной схемы и качество ее решения. В данной работе представлен подробный анализ выбора оптимальных значений  $\varepsilon$ , позволяющих наилучшим образом определить скорость равномерной сходимости решения предлагаемой разностной схемы к решению исходной задачи.

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, уравнение дробного порядка, дробная производная Герасимова — Капуто, краевые задачи, локально-одномерная схема, принцип максимума, априорная оценка, устойчивость и сходимость.

**AMS Subject Classification:** 65N06, 65N12.

**Образец цитирования:** Бештокова З. В., Бештоков М. Х., Шхануков-Лафишев М. Х. Локально-одномерная схема для многомерного уравнения теплопроводности дробного порядка с условиями третьего рода в произвольной области // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 1.—С. 37–61. DOI: 10.46698/f6557-1323-1446-g.

### Введение

Работа посвящена исследованию многомерного уравнения теплопроводности дробного порядка с условиями третьего рода в области сложной формы, например, когда замкнутая область имеет криволинейную границу. Построена локально-одномерная разностная схема А. А. Самарского. С помощью принципа максимума для решения разностной задачи получена априорная оценка в сеточной норме  $C$ , выражающая устойчивость локально-одномерной разностной схемы. Кроме того, доказывается ее равномерная сходимость.

Локально-одномерные схемы для дифференциальных уравнений диффузии дробного порядка с самосопряженным оператором и краевыми условиями I рода рассмотрены в [1], в области произвольной формы — в [2], а с краевыми условиями III рода — в [3, 4]. В [1–4] априорные оценки были получены лишь при условии, когда  $1/2 < \alpha < 1$ . В настоящей работе предлагается приближенный метод решения многомерного уравнения теплопроводности дробного порядка с условиями третьего рода в области сложной формы, основным результатом которой является доказательство устойчивости и равномерной сходимости локально-одномерной схемы при любых  $\alpha \in (0, 1)$  с помощью введения параметра регуляризации  $\varepsilon > 0$ .

В последнее время наблюдается интенсивное развитие дробного анализа и его приложений в различных областях знаний, многие явления в механике жидкости, вязкоупругости, химии, физике, процессы тепло-массопереноса в средах с фрактальной структурой и памятью приводят к необходимости изучения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка. Они являются обобщением уравнений с частными производными целочисленного порядка и вызывают большой теоретический и практический интерес. Существует большое количество книг, посвященных математическому анализу, дробным дифференциальным уравнениям и их применениям, например, [5–11], в которых дан достаточно полный обзор работ, посвященных дифференциальным уравнениям дробного порядка. Монография [7] посвящена основополагающим элементам дробного исчисления, качественно новым свойствам операторов дробного интегрирования и дифференцирования и их применению к решению проблем математического моделирования различных процессов и явлений в живых и неживых системах с фрактальной структурой и памятью. В [11] исследованы математические модели различных процессов переноса субстанций в пористых средах, обладающих фрактальной структурой. Изучены основные нелокальные дифференциальные уравнения математических моделей: движение грунтовых вод, почвенной влаги и соли; эволюции малых возмущений в каналах с фрактальными стенками; динамики микрометеорологического режима при орошении больших территорий.

Разностным методам решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка посвящены многие работы. В статье [12] предложены неравенства, позволяющие применять метод энергетических неравенств для нахождения априорных оценок решений дифференциальных уравнений дробного порядка. В [13, 14] исследуются локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения влагопереноса с дробной производной в смысле Герасимова — Капуто и Римана — Лиувилля. В [15] представлен алгоритм экстраполяции типа для численного решения дифференциальных уравнений дробного порядка. В [16] исследуется конечно-разностная аппроксимация производной Герасимова — Капуто на неоднородных сетках для решения уравнения дробной диффузии. Доказана безусловная устойчивость и сходимость. В работе [17] рассматриваются дифференциальные уравнения дробного порядка  $1/2$ . Конечно-разностным методом получены условия устойчивости и сходимости рассматриваемых задач.

Настоящая работа является продолжением серии работ авторов в этом направлении [18, 19].

## 1. Постановка задачи

В цилиндре  $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0, T]$  рассмотрим третью краевую задачу для уравнения теплопроводности дробного порядка:

$$\partial_{0t}^\alpha u = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$\Theta_k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_k} = \beta_{-k}(x, t)u - \mu_{-k}(x, t), \quad x_k = x_k^-, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$-\Theta_k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_k} = \beta_{+k}(x, t)u - \mu_{+k}(x, t), \quad x_k = x_k^+, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad (4)$$

где  $\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{(t-\eta)^\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , — дробная производная Герасимова — Капуто порядка  $\alpha$ ,

$$L = \sum_{k=1}^p L_k, \quad L_k u = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Theta_k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - q_k(x, t)u, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$0 < c_0 \leq \Theta_k(x, t), \quad q_k(x, t) \leq c_1, \quad \beta_{\pm k} \geq c_0 > 0, \quad c_0, c_1 = \text{const} > 0,$$

$$\mu_{+k} = \mu(x_k^+, x', t), \quad \mu_{-k} = \mu(x_k^-, x', t), \quad Q_T = G \times (0, T), \quad k = 1, \dots, p,$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_p), \quad x' = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p),$$

$x_k^-, x_k^+$  — левая и правая граничные значения  $x_k$  соответственно,  $\Gamma_k = \{x_k^-, x_k^+\} \in \Gamma$ ,  $\Gamma$  — граница области  $G$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  — точка  $p$ -мерного евклидова пространства  $R^p$ .

В дальнейшем будем предполагать, что решение  $u(x, t)$  задачи (1)–(4) существует и единственно, коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют условиям гладкости, необходимым для построения локально-одномерной разностной схемы:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}, \frac{\partial^4 u^\varepsilon}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}, \frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial x_k^2 \partial t}, \frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_k^2 \partial t^\alpha}, \frac{\partial^{2+\alpha} u^\varepsilon}{\partial x_k^2 \partial t^\alpha}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2},$$

$$\Theta_k(x, t) \in C^{3,1}(\overline{Q_T}), \quad q_k(x, t) \in C^{2,1}(\overline{Q_T}), \quad 1 \leq k, \nu \leq p, \quad k \neq \nu, \quad 0 < \alpha < 1.$$

В той же области  $\overline{Q_T}$  вместо задачи (1)–(4) рассмотрим следующую задачу с малым параметром  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon u_t^\varepsilon + \partial_{0t}^\alpha u^\varepsilon = Lu^\varepsilon + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (5)$$

$$\Theta_k(x, t) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k} = \beta_{-k}(x, t)u^\varepsilon - \mu_{-k}(x, t), \quad x_k = x_k^-, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$$-\Theta_k(x, t) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k} = \beta_{+k}(x, t)u^\varepsilon - \mu_{+k}(x, t), \quad x_k = x_k^+, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad (8)$$

где  $\varepsilon = \text{const} > 0$ .

Так как при  $t = 0$  начальные условия для уравнений (1) и (5) совпадают, то в окрестности  $t = 0$  производная  $u_t^\varepsilon$  не обладает особенностью типа пограничного слоя [20] (см. также [21, с. 10]).

В дальнейшем покажем, что регуляризация исходной задачи введением члена с первой производной по времени с малым параметром в качестве коэффициента позволяет получить для данной задачи устойчивость и равномерную сходимость локально-одномерной схемы при любых  $\alpha \in (0, 1)$ . В работах [1–4] получены оценки только при  $\alpha \in (1/2, 1)$ .

Покажем, что  $u^\varepsilon \rightarrow u$  в некоторой норме при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Обозначим через  $\tilde{z} = u^\varepsilon - u$  и подставим  $u^\varepsilon = \tilde{z} + u$  в задачу (5)–(8). Тогда

$$\varepsilon \tilde{z}_t + \partial_{0t}^\alpha \tilde{z} = L\tilde{z} + \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (9)$$

$$\Theta_k(x, t) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_k} = \beta_{-k}(x, t) \tilde{z}, \quad x_k = x_k^-, \quad t \geq 0, \quad (10)$$

$$-\Theta_k(x, t) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_k} = \beta_{+k}(x, t) \tilde{z}, \quad x_k = x_k^+, \quad t \geq 0, \quad (11)$$

$$\tilde{z}(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{G}, \quad \bar{G} = G + \Gamma, \quad (12)$$

где  $\tilde{f}(x, t) = -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}$ .

Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (9) скалярно на  $\tilde{z}$  и получим энергетическое тождество:

$$\left( \varepsilon \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}, \tilde{z} \right) + (\partial_{0t}^\alpha \tilde{z}, \tilde{z}) = \left( \sum_{k=1}^p \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Theta_k(x, t) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_k} \right), \tilde{z} \right) - \left( \sum_{k=1}^p q_k(x, t) \tilde{z}, \tilde{z} \right) + (\tilde{f}(x, t), \tilde{z}). \quad (13)$$

Будем пользоваться скалярным произведением и нормой

$$(u, v) = \int_G uv \, dx, \quad (u, u) = \|u\|_0^2, \quad u_x^2 = \sum_{k=1}^p u_{x_k}^2, \quad \|u\|_{L_2(x_k^-, x_k^+)}^2 = \int_{x_k^-}^{x_k^+} u^2(x, t) \, dx_k.$$

Далее через  $M_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , обозначаются положительные постоянные, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

Используя лемму 1 из [12] и применяя  $\varepsilon$ -неравенство Коши, из (13) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\tilde{z}\|_0^2 + \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|\tilde{z}\|_0^2 + c_0 \|\tilde{z}\|_0^2 + c_0 \|\tilde{z}_x\|_0^2 \\ & \leq \sum_{k=1}^p \int_{G'} \Theta_k(x, t) \tilde{z} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_k} \Big|_{x_k^-}^{x_k^+} dx' + \varepsilon_1 \|\tilde{z}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1} \|\tilde{f}\|_0^2, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$G' = \{x' = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p) : x_k^- \leq x_k \leq x_k^+\},$$

$$dx' = dx_1 dx_2 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_p.$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (14) следующим образом:

$$\sum_{k=1}^p \int_{G'} \Theta_k(x, t) \tilde{z} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_k} \Big|_{x_k^-}^{x_k^+} dx' = \sum_{k=1}^p \int_{G'} (-\beta_{-k} \tilde{z}^2(x_k^-, x', t) - \beta_{+k} \tilde{z}^2(x_k^+, x', t)) dx'. \quad (15)$$

Выбирая  $\varepsilon_1 = c_0/2$ , из неравенства (14) с учетом (15) находим

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \|\tilde{z}\|_0^2 + \partial_{0t}^\alpha \|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_0^2 + \sum_{k=1}^p \int_{G'} (\tilde{z}^2(x_k^-, x', t) + \tilde{z}^2(x_k^+, x', t)) dx' \leq M_2 \|\tilde{f}\|_0^2. \quad (16)$$

Проинтегрируем (16) по  $\tau$  от 0 до  $t$ . Тогда

$$\varepsilon \|\tilde{z}\|_0^2 + D_{0t}^{\alpha-1} \|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_{2, Q_t}^2 + \|\tilde{z}_x\|_{2, Q_t}^2 \leq M \int_0^t \|\tilde{f}\|_0^2 d\tau = \varepsilon^2 M \int_0^t \|u_\tau\|_0^2 d\tau = O(\varepsilon^2), \quad (17)$$

где  $\tilde{z} = u^\varepsilon - u$ ,  $M$  зависит только от входных данных задач (9)–(12),  $\|\tilde{z}\|_{2, Q_t}^2 = \int_0^t \|\tilde{z}\|_2^2 d\tau$ ,  $D_{0t}^{\alpha-1} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$  — дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка  $1 - \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Из априорной оценки (17) следует сходимость  $u^\varepsilon$  к  $u$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в норме  $\|\tilde{z}\|_1^2 = \varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2 + D_{0t}^{\delta-1}\|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_{2,Q_t}^2 + \|\tilde{z}_x\|_{2,Q_t}^2$ . Поэтому при малом  $\varepsilon$  решение задачи (5)–(8) будем принимать за приближенное решение краевой задачи (1)–(4).

## 2. Построение локально-одномерной схемы (ЛОС)

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению  $Ox_k$  с шагом  $h_k = \frac{x_k^+ - x_k^-}{N_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ :

$$\bar{\omega}_{h_k} = \left\{ x_k^{(i_k)} = i_k h_k : i_k = 0, 1, \dots, N_k, h_k = \frac{x_k^+ - x_k^-}{N_k}, k = 1, 2, \dots, p \right\}, \quad \bar{\omega} = \prod_{k=1}^p \bar{\omega}_{h_k}.$$

На отрезке  $0 \leq t \leq T$  введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}'_\tau = \left\{ 0, t_{j+\frac{k}{p}} = \left( j + \frac{k}{p} \right) \tau, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1; \tau = \frac{T}{j_0}, k = 1, 2, \dots, p \right\},$$

содержащую наряду с узлами  $t_j = j\tau$  фиктивные узлы  $t_{j+k/p}$ ,  $k = 1, 2, \dots, p-1$ . Будем обозначать через  $\omega'_\tau$  множество узлов сетки  $\bar{\omega}'_\tau$ , для которых  $t > 0$ .

Относительно области  $\bar{G}$  используются два предположения (см. [22, с. 486]):

а) пересечение области  $G$  с прямой  $C_k$ , параллельной оси координат  $Ox_k$ , состоит из одного интервала  $\Delta_k$ ;

б) возможно построение в замкнутой области  $\bar{G} = G \cup \Gamma$  связной сетки  $\bar{\omega}_h$  с шагами  $h_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ . Множество  $\omega_h$  внутренних узлов сетки состоит из точек  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in G$  пересечения гиперплоскостей  $x_k = i_k h_k$ ,  $i_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ , а множество  $\gamma_h$  граничных узлов — из точек пересечения прямых  $C_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ , проходящих через внутренние узлы  $x \in \omega_h$ , с границей  $\Gamma$ .

Обозначим через  $\gamma_{h,k}$  множество граничных по направлению  $x_k$  узлов,  $\gamma_h$  — множество всех граничных узлов  $x \in \Gamma$ ,  $\omega_{h,k}^*$  — множество приграничных по направлению  $x_k$  узлов,  $\omega_h^*$  — множество всех приграничных узлов,  $\omega_{h,k}^{**}$  — множество нерегулярных по направлению  $x_k$  узлов,  $\omega_h^{**}$  — множество всех нерегулярных узлов,  $\omega_{h,k}$  — множество регулярных по направлению  $x_k$  узлов,  $\omega_h$  — множество всех регулярных узлов.

Для разностной аппроксимации оператора  $L_k$  в узле  $x$  выбираем трехточечный шаблон, состоящий из точек  $x^{(-1k)}$ ,  $x$ ,  $x^{(+1k)}$ . Разностный оператор  $\Lambda_k \sim L_k$  имеет следующий вид:

1) В регулярных узлах:

$$\Lambda_k y^{j+\frac{k}{p}} = \left( a_k y_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}} \right)_{x_k} - d_k y^{j+\frac{k}{p}}, \quad a^{(+1)} = a_{i+1}, \quad a_i = \Theta_{i-\frac{1}{2}}(\bar{t}),$$

2) В нерегулярных узлах:

$$\Lambda_k y^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{h_k} \left( a_{k,i_k+1} \frac{y^{(+1k)} - y}{h_k} - a_{k,i_k} \frac{y - y^{(-1k)}}{h_k^*} \right) - d_k y^{(k)}, & x^{(-1k)} \in \gamma_{h,k}, \\ \frac{1}{h_k} \left( a_{k,i_k+1} \frac{y^{(+1k)} - y}{h_k^*} - a_{k,i_k} \frac{y - y^{(-1k)}}{h_k} \right) - d_k y^{(k)}, & x^{(+1k)} \in \gamma_{h,k}, \end{cases}$$

где  $h_k^*$  — расстояние от нерегулярного узла  $x$  до граничного узла  $x^{(+1k)}$  или  $x^{(-1k)}$ . Если оба соседних с  $x \in \omega_{h,k}^*$  узла  $x^{(+1k)}$  и  $x^{(-1k)}$  являются граничными, т. е.  $x^{(\pm 1k)} \in \gamma_{h,k}$ , то

$$\Lambda_k y^{j+\frac{k}{p}} = \frac{1}{h_k} \left( a_{k,i_k+1} \frac{y^{(+1k)} - y}{h_k^*} - a_{k,i_k} \frac{y - y^{(-1k)}}{h_k^*} \right) - d_k y^{j+\frac{k}{p}}$$

— общий вид оператора, где  $h_{k\pm}^*$  — расстояние между  $x$  и  $x^{(+1_k)}$ ,  $h_{k\pm}^* \leq h_k$ .

В регулярных узлах  $\Lambda_k$  имеет второй порядок аппроксимации,  $\Lambda_k u^\varepsilon - L_k u^\varepsilon = O(h_k^2)$ , а в нерегулярных узлах  $\Lambda_k u^\varepsilon - L_k u^\varepsilon = O(1)$  (см. [22, с. 232]).

На равномерной сетке  $\bar{\omega}_{h\tau}$  по аналогии с [22] уравнению (5) поставим в соответствие цепочку «одномерных» уравнений, для этого перепишем (5) в виде

$$\mathcal{L}u^\varepsilon = \varepsilon u_t^\varepsilon + \partial_{0t}^\alpha u^\varepsilon - Lu^\varepsilon - f = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^p \mathcal{L}_k u^\varepsilon = 0, \quad \mathcal{L}_k u^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{p} u_t^\varepsilon + \frac{1}{p} \partial_{0t}^\alpha u^\varepsilon - L_k u^\varepsilon - f_k,$$

где  $f_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ , — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и  $f(x, t)$ , и удовлетворяющие условию  $\sum_{k=1}^p f_k = f$ .

На каждом полуинтервале  $\Delta_k = (t_{j+(k-1)/p}, t_{j+k/p}]$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ , будем последовательно решать задачи

$$\mathcal{L}_k \vartheta_{(k)} = \frac{\varepsilon}{p} \vartheta_t + \frac{1}{p} \partial_{0t}^\alpha \vartheta_{(k)} - L_k \vartheta_{(k)} - f_k = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (18)$$

$$\begin{cases} \Theta_k(x, t) \frac{\partial \vartheta_{(k)}}{\partial x_k} = \beta_{-k}(x, t) \vartheta_{(k)} - \mu_{-k}(x, t), & x_k = x_k^-, \\ -\Theta_k(x, t) \frac{\partial \vartheta_{(k)}}{\partial x_k} = \beta_{+k}(x, t) \vartheta_{(k)} - \mu_{+k}(x, t), & x_k = x_k^+, \end{cases} \quad (19)$$

полагая при этом

$$\vartheta_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}(x, t_j) = \vartheta_{(p)}(x, t_j), \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (20)$$

$$\vartheta_{(k)}\left(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\right) = \vartheta_{(k-1)}\left(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\right), \quad k = 2, 3, \dots, p,$$

где  $\Gamma_k$  — множество граничных точек по направлению  $x_k$ .

Каждое из уравнений (18) заменим разностной схемой на  $\Delta_k$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{p} y_t^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) y_t^{\frac{s}{p}} \\ & = \Lambda_k \left( \sigma_k y^{j+\frac{k}{p}} + (1-\sigma_k) y^{j+\frac{k-1}{p}} \right) + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, 2, \dots, p, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{cases} a_k^{(1_k)} y_{x_k, 0}^{j+\frac{k}{p}} = \beta_{-k} y_0^{j+\frac{k}{p}} - \mu_{-k}, & x_k = x_k^-, \\ -a_k^{(N_k)} y_{\bar{x}_k, N_k}^{j+\frac{k}{p}} = \beta_{+k} y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} - \mu_{+k}, & x_k = x_k^+, \end{cases} \quad (22)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad (23)$$

где

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_{j+\frac{k}{p}}} \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{(t_{j+\frac{k}{p}} - \eta)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) u_t^{\frac{s}{p}} + O\left(\frac{\tau}{p}\right)$$

— дискретный аналог дробной производной порядка  $\alpha$  [1],

$$y_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \frac{y^{\frac{s}{p}} - y^{\frac{s-1}{p}}}{\frac{\tau}{p}}, \quad \mu_{\pm k}^{j+\frac{k}{p}} = \mu_{\pm k} \left( x, t_{j+\frac{k}{p}} \right), \quad \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} = f_k \left( x, t_{j+\frac{k}{p}} \right), \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$\sigma_k$  — произвольные параметры,  $\gamma_{h,k}$  — множество граничных по направлению  $x_k$  узлов,

$$x \in \bar{\omega}_h = \left\{ x_i = (i_1 h_1, \dots, i_p h_p) \in \bar{G}, i_k = 0, 1, \dots, N_k, h_k = \frac{x_k^+ - x_k^-}{N_k} \right\},$$

$$d_k^{j+\frac{k}{p}} = q \left( x_i, t_{j+\frac{k}{p}} \right), \quad a^{(+1)} = a_{i+1}, \quad a_i = \Theta_{i-\frac{1}{2}}(\bar{t}), \quad \bar{t} = t_{j+\frac{1}{2}}.$$

Разностное уравнение (21) пишется вдоль отрезка  $\Delta_k$ , лежащего на прямой  $C_k$ , концы этого отрезка удовлетворяют граничным условиям (22) и принадлежат границе  $\gamma_{h,k} = \{x_k^-, x_k^+\}$ . Узлы  $x \in \gamma_{h,k}$  лежат на  $\Gamma_k$ , если, например,  $\bar{G} = \{0 \leq x_k \leq l_k\}$  — параллелепипед, то  $\Gamma_k$  состоит из граней  $x_k = x_k^- = 0$  и  $x_k = x_k^+ = l_k$ .

Условия (22) имеют порядок аппроксимации  $O(h_k)$ . Повысим порядок аппроксимации до  $O(h_k^2)$  на решениях уравнения (18) при каком-либо  $k$ .

Так как

$$\Theta_k \frac{\partial \vartheta^{(k)}}{\partial x_k} = a_k^{(1k)} \vartheta^{(k)}_{x_k,0} - 0,5 h_k \left( \frac{\varepsilon}{p} \vartheta_t + \frac{1}{p} \partial_{0t}^\alpha \vartheta^{(k)} + q_k(x, t) \vartheta^{(k)} - f_k \right)_0 + O(h_k^2),$$

то

$$a_k^{(1k)} \vartheta_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - 0,5 h_k \left( \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) \vartheta_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} + q_k(x, t) \vartheta^{j+\frac{k}{p}} - f_k \right)_0 \quad (24)$$

$$- 0,5 h_k \frac{\varepsilon}{p} \vartheta_{t,0} = \beta_{-k} \vartheta_0^{j+\frac{k}{p}} - \mu_{-k} + O(h_k^2) + O(h_k \tau).$$

В (24) отбросим величины порядка малости  $O(h_k^2)$ ,  $O(h_k \tau)$ . Тогда после замены  $\vartheta^{(k)}$  на  $y$  получим

$$a_k^{(1k)} y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - 0,5 h_k \frac{\varepsilon}{p} y_{t,0} - \frac{0,5 h_k}{p} \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha y_0 = \bar{\beta}_{-k} y_0^{j+\frac{k}{p}} - \mu_{-k} - 0,5 h_k f_{k,0},$$

или

$$\frac{\varepsilon}{p} y_{t,0} + \frac{1}{p} \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha y_0 = \frac{a_k^{(1k)} y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} y_0^{j+\frac{k}{p}}}{0,5 h_k} + \frac{\bar{\mu}_{-k}}{0,5 h_k}. \quad (25)$$

Аналогично при  $x_k = x_k^+$  получаем:

$$\frac{\varepsilon}{p} y_{t_N} + \frac{1}{p} \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha y_{N_k} = - \frac{a_k^{(N_k)} y_{\bar{x}_k, N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \bar{\beta}_{+k} y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5 h_k} + \frac{\bar{\mu}_{+k}}{0,5 h_k}, \quad (26)$$

где

$$\bar{\beta}_{-k} = \beta_{-k} + 0,5 h_k d_k^{(0)}, \quad \bar{\beta}_{+k} = \beta_{+k} + 0,5 h_k d_k^{(N_k)},$$

$$\bar{\mu}_{-k} = \mu_{-k} + 0,5 h_k f_{k,0}, \quad \bar{\mu}_{+k} = \mu_{+k} + 0,5 h_k f_{k, N_k}.$$

Итак, разностный аналог задачи (5)–(8) имеет вид:

$$\frac{\varepsilon}{p} y_t + \frac{1}{p} \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha y = \bar{\Lambda}_k y^{j+\frac{k}{p}} + \Phi_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (27)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (28)$$

где

$$\bar{\Lambda}_k y = \begin{cases} \Lambda_k y = (a_k y \bar{x}_k)_{x_k} - d_k y, & x_k \in \omega_{h_k}, \\ \Lambda_k^- y = \frac{a_k^{(1_k)} y_{x_k, 0} - \bar{\beta}_k y_0}{0,5 h_k}, & x_k = x_k^-, \\ \Lambda_k^+ y = -\frac{a_k^{(N_k)} y_{\bar{x}_k, N_k} + \bar{\beta}_k y_{N_k}}{0,5 h_k}, & x_k = x_k^+, \end{cases} \quad \Phi_{(k)} = \begin{cases} \varphi_k, & x_k \in \omega_{h_k}, \\ \frac{\bar{\mu}_k}{0,5 h_k}, & x_k = x_k^-, \\ \frac{\bar{\mu}_k}{0,5 h_k}, & x_k = x_k^+. \end{cases}$$

Заметим, что при повышении порядка аппроксимации краевых условий третьего рода (22) на решениях уравнения (18) до  $O(h_k^2 + \tau)$ , естественным образом возникает разностная задача (27), (28) с нелокальным по каждому направлению  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ) граничным условием.

### 3. Погрешность аппроксимации ЛОС

Перейдем к изучению погрешности аппроксимации (невязки) локально-одномерной схемы и убедимся в том, что каждое уравнение (21) для номера  $k$  в отдельности не аппроксимирует уравнение (5), но сумма погрешностей аппроксимации

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_p$$

стремится к нулю при  $\tau$  и  $|h|$  стремящихся к нулю.

Будем считать  $\sigma_k = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ . Пусть  $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t)$  — решение задачи (5)–(8), а  $y^{j+k/p}$  — решение разностной задачи (21). Характеристикой точности локально-одномерной схемы является разность  $y^{j+1} - (u^\varepsilon)^{j+1} = (z^\varepsilon)^{j+1}$ . Промежуточные значения  $y^{j+k/p}$  будем сравнивать с  $(u^\varepsilon)^{j+k/p} = u^\varepsilon(x, t_{j+k/p})$ , полагая  $(z^\varepsilon)^{j+k/p} = y^{j+k/p} - (u^\varepsilon)^{j+k/p}$ . Подставляя  $y^{j+k/p} = (z^\varepsilon)^{j+k/p} + (u^\varepsilon)^{j+k/p}$  в разностное уравнение (21), получим

$$\frac{\varepsilon}{p} (z^\varepsilon)_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) (z^\varepsilon)_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \Lambda_k (z^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}} + \psi_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad (29)$$

где

$$\psi_k^{j+\frac{k}{p}} = \Lambda_k (u^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}} + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) (u^\varepsilon)_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} - \frac{\varepsilon}{p} (u^\varepsilon)_t^{j+\frac{k}{p}}.$$

Обозначив через

$$\overset{\circ}{\psi}_k = \left( L_k u^\varepsilon + f_k - \frac{\varepsilon}{p} u_{\bar{t}}^\varepsilon - \frac{1}{p} \partial_{0t}^\alpha u^\varepsilon \right)^{j+\frac{1}{2}} \quad (30)$$

и замечая, что  $\sum_{k=1}^p \overset{\circ}{\psi}_k = 0$ , если  $\sum_{k=1}^p f_k = f$ , представим  $\psi_k = \psi_k^{j+k/p}$  в виде  $\psi_k = \psi_k^\circ + \psi_k^*$ , где

$$\begin{aligned} \psi_k^{j+\frac{k}{p}} &= \left( \Lambda_k (u^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}} - L_k (u^\varepsilon)^{j+\frac{1}{2}} \right) + \left( \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - f_k^{j+\frac{1}{2}} \right) \\ &- \left( \frac{1}{p} \Delta_{0t}^\alpha (u^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p} (\partial_{0t}^\alpha u^\varepsilon)^{j+\frac{1}{2}} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{p} (u^\varepsilon)_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{\varepsilon}{p} (u^\varepsilon)_t^{j+\frac{1}{2}} \right) + \overset{\circ}{\psi}_k = \overset{\circ}{\psi}_k + \psi_k^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_k^* &= \left( \Lambda_k (u^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}} - L_k (u^\varepsilon)^{j+\frac{1}{2}} \right) + \left( \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - f_k^{j+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \left( \frac{1}{p} \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha (u^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p} (\partial_{0t}^\alpha u^\varepsilon)^{j+\frac{1}{2}} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{p} (u^\varepsilon)_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{\varepsilon}{p} (u^\varepsilon)_t^{j+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\psi_k^* = \begin{cases} O(h_k^2 + \tau) & \text{в регулярных узлах,} \\ O(1) & \text{в нерегулярных узлах,} \end{cases}$$

так как каждая из схем (21) номера  $k$  аппроксимирует в обычном смысле соответствующее уравнение (5). Таким образом,

$$\begin{aligned} \psi_k^* &= O(h_k^2 + \tau), \quad \psi_k^\circ = O(1), \quad \sum_{k=1}^p \psi_k^\circ = 0, \\ \psi &= \sum_{k=1}^p \psi_k = \sum_{k=1}^p \left( \psi_k^\circ + \psi_k^* \right) = \sum_{k=1}^p \psi_k^* = O(|h|^2 + \tau), \end{aligned}$$

в регулярных узлах сетки  $\omega_h$ .

Рассмотрим погрешность краевых условий разностной схемы (25), (26), где  $(z^\varepsilon)^{j+k/p} = y^{j+k/p} - (u^\varepsilon)^{j+k/p}$ . Запишем граничное условие при  $x_k = x_k^-$  следующим образом:

$$0,5 h_k \frac{\varepsilon}{p} y_{t,0} + \frac{0,5 h_k}{p} \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha y_0 = a_k^{(1k)} y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} y_0^{j+\frac{k}{p}} + 0,5 h_k f_{k,0} + \mu_{-k}. \quad (31)$$

Тогда, подставляя  $y^{j+k/p} = (z^\varepsilon)^{j+k/p} + (u^\varepsilon)^{j+k/p}$  в (31), получим

$$\begin{aligned} 0,5 h_k \frac{\varepsilon}{p} (z^\varepsilon)_{t,0} + \frac{0,5 h_k}{p} \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha z_0^\varepsilon &= a_k^{(1k)} (z^\varepsilon)_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} (z^\varepsilon)_0^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} (u^\varepsilon)_0^{j+\frac{k}{p}} \\ &\quad - 0,5 h_k \frac{\varepsilon}{p} u_{t,0}^\varepsilon - \frac{0,5 h_k}{p} \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha u_0^\varepsilon + a_k^{(1k)} (u^\varepsilon)_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} + 0,5 h_k f_{k,0} + \mu_{-k}. \end{aligned}$$

К правой части последнего выражения добавим и вычтем

$$0,5 h_k \psi_{-k}^\circ = 0,5 h_k \left( L_k u^\varepsilon + f_k - \frac{\varepsilon}{p} u_t^\varepsilon - \frac{1}{p} \partial_{0t}^\alpha u^\varepsilon \right)_0^{j+\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi_{-k} &= 0,5 h_k \left( f_{k,0} - \frac{\varepsilon}{p} (u^\varepsilon)_{t,0}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p} \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha (u^\varepsilon)_0^{j+\frac{k}{p}} \right) + a_k^{(1k)} (u^\varepsilon)_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} \\ &\quad - \bar{\beta}_{-k} (u^\varepsilon)_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k} - 0,5 h_k \left( L_k u^\varepsilon + f_k - \frac{\varepsilon}{p} u_t^\varepsilon - \frac{1}{p} \partial_{0t}^\alpha u^\varepsilon \right)_0^{j+\frac{1}{2}} + 0,5 h_k \psi_{-k}^\circ \\ &= 0,5 h_k \left( f_{k,0} - \frac{\varepsilon}{p} (u^\varepsilon)_{t,0}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p} \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha (u^\varepsilon)_0^{j+\frac{k}{p}} \right) + a_k^{(1k)} (u^\varepsilon)_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} (u^\varepsilon)_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k} \\ &\quad - 0,5 h_k (L_k u^\varepsilon)_0^{j+\frac{1}{2}} - 0,5 h_k \left( f_k - \frac{\varepsilon}{p} u_t^\varepsilon - \frac{1}{p} \partial_{0t}^\alpha u^\varepsilon \right)_0^{j+\frac{k}{p}} + 0,5 h_k \psi_{-k}^\circ + O(h_k \tau) \\ &= a_k^{(1k)} (u^\varepsilon)_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} (u^\varepsilon)_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k} - 0,5 h_k (L_k u^\varepsilon)_0^{j+\frac{1}{2}} + 0,5 h_k \psi_{-k}^\circ + O(h_k \tau) \\ &= \Theta_k \frac{\partial (u^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}}}{\partial x_k} + 0,5 h_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Theta_k \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k} \right)^{j+\frac{k}{p}} - \beta_{-k} (u^\varepsilon)_0^{j+\frac{k}{p}} - 0,5 h_k d_{k,0} (u^\varepsilon)_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0,5 h_k \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Theta_k \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k} \right) - q_k u^\varepsilon \right)_0^{j+\frac{k}{p}} + 0,5 h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} + O(h_k^2) + O(h_k \tau) \\
& = \left[ \Theta_k \frac{\partial (u^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}}}{\partial x_k} - \beta_{-k} (u^\varepsilon)_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k} \right] \Big|_{x_k=0} + 0,5 h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} + O(h_k^2) + O(h_k \tau).
\end{aligned}$$

В силу граничных условий (2) выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю. Поэтому

$$\psi_{-k} = 0,5 h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} + \overset{*}{\psi}_{-k}.$$

Итак,

$$0,5 h_k \frac{\varepsilon}{p} z_{t,0}^\varepsilon + \frac{0,5 h_k}{p} \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha z_0^\varepsilon = a_k^{(1k)} (z^\varepsilon)_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} (z^\varepsilon)_0^{j+\frac{k}{p}} + 0,5 h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} + \overset{*}{\psi}_{-k}$$

или

$$\frac{\varepsilon}{p} z_{t,0}^\varepsilon + \frac{1}{p} \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha z_0^\varepsilon = \Lambda_k^- (z^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}} + \psi_{-k}, \quad \psi_{-k} = \overset{\circ}{\psi}_{-k} + \frac{\overset{*}{\psi}_{-k}}{0,5 h_k}.$$

Аналогично при  $x_k = x_k^+$  имеем

$$\frac{\varepsilon}{p} z_{t,N_k}^\varepsilon + \frac{1}{p} \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha z_{N_k}^\varepsilon = \Lambda_k^+ (z^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}} + \psi_{+k}, \quad \psi_{+k} = \overset{\circ}{\psi}_{+k} + \frac{\overset{*}{\psi}_{+k}}{0,5 h_k},$$

$$\overset{\circ}{\psi}_{\pm k} = O(1), \quad \sum_{k=1}^p \overset{\circ}{\psi}_{\pm k} = 0.$$

Очевидно, что

$$\overset{*}{\psi}_{\pm k} = \begin{cases} O(h_k^2 + \tau) + O(h_k \tau) & \text{в регулярных узлах,} \\ O(1) & \text{в нерегулярных узлах.} \end{cases}$$

Таким образом, для погрешности  $z^{j+k/p}$  получаем задачу:

$$\frac{\varepsilon}{p} (z^\varepsilon)_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha z^\varepsilon = \bar{\Lambda}_k (z^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}} + \Psi_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad (32)$$

$$z^\varepsilon(x, 0) = 0, \quad (33)$$

где

$$\bar{\Lambda}_k = \begin{cases} \Lambda_k, & x_k \in \omega_{h_k}, \\ \Lambda_k^-, & x_k = x_k^-, \\ \Lambda_k^+, & x_k = x_k^+, \end{cases} \quad \Psi_k = \begin{cases} \psi_k, & x_k \in \omega_{h_k}, \\ \psi_{-k}, & x_k = x_k^-, \\ \psi_{+k}, & x_k = x_k^+, \end{cases} \quad \psi_k = \overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k, \quad \overset{\circ}{\psi}_k = O(1),$$

$$\overset{*}{\psi}_k = O(h_k^2 + \tau), \quad \sum_{k=1}^p \overset{\circ}{\psi}_k = 0, \quad \psi = \sum_{k=1}^p \psi_k = \sum_{k=1}^p (\overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k) = \sum_{k=1}^p \overset{*}{\psi}_k = O(|h|^2 + \tau),$$

$$\psi_{-k} = \overset{\circ}{\psi}_{-k} + \frac{\overset{*}{\psi}_{-k}}{0,5 h_k}, \quad \psi_{+k} = \overset{\circ}{\psi}_{+k} + \frac{\overset{*}{\psi}_{+k}}{0,5 h_k},$$

$$\psi_{\pm k} = O(h_k^2 + \tau), \quad \overset{*}{\psi}_{\pm k} = O(h_k^2) + O(h_k \tau), \quad \overset{\circ}{\psi}_{\pm k} = O(1), \quad \sum_{k=1}^p \overset{\circ}{\psi}_{\pm k} = 0.$$

Таким образом, ЛОС (27)–(28) обладает суммарной аппроксимацией  $O(|h|^2 + \tau)$  в регулярных узлах сетки  $\bar{\omega}_h$ . В нерегулярных узлах  $\psi = O(1)$ .

## 4. Устойчивость ЛОС

Получим априорную оценку в сеточной норме  $C$  для решения разностной задачи (27)–(28), выражающую устойчивость локально-одномерной схемы по начальным данным и правой части. Разностную задачу (27), (28) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{p} y_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) y_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} \\ = \left( a_k y_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}} \right)_{x_k} - d_k y^{j+\frac{k}{p}} + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad x_k \in \omega_{h_k}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{p} y_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) y_{\bar{t},0}^{\frac{s}{p}} \\ = \frac{a_k^{(1_k)} y_{x_k,0}^{j+\frac{s}{p}} - \bar{\beta}_{-k} y_0^{j+\frac{k}{p}}}{0,5 h_k} + \frac{\bar{\mu}_{-k}}{0,5 h_k}, \quad x_k = x_k^-, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{p} y_{\bar{t},N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) y_{\bar{t},N_k}^{\frac{s}{p}} \\ = - \frac{a_k^{(N_k)} y_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{s}{p}} + \bar{\beta}_{+k} y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5 h_k} + \frac{\bar{\mu}_{+k}}{0,5 h_k}, \quad x_k = x_k^+, \end{aligned} \quad (36)$$

$$y(x, 0) = u_0(x). \quad (37)$$

Исследование устойчивости разностной схемы (34)–(37) будем проводить с помощью принципа максимума [22, с. 226]. Получим априорную оценку для (34)–(37), для этого ее решение представим в виде суммы  $y = \bar{y} + v + w$ , где  $\bar{y}$  – решение однородных уравнений (34) с неоднородными краевыми условиями (35)–(36) и однородными начальными условиями (37):

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{p} \bar{y}_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} \\ = \left( a_k \bar{y}_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}} \right)_{x_k} - d_k \bar{y}^{j+\frac{k}{p}}, \quad k = 1, 2, \dots, p, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{p} \bar{y}_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_{\bar{t},0}^{\frac{s}{p}} \\ = \frac{a_k^{(1_k)} \bar{y}_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} \bar{y}_0^{j+\frac{k}{p}}}{0,5 h_k} + \frac{\bar{\mu}_{-k}}{0,5 h_k}, \quad x_k = x_k^-, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{p} \bar{y}_{\bar{t},N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_{\bar{t},N_k}^{\frac{s}{p}} \\ = - \frac{a_k^{(N_k)} \bar{y}_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \bar{\beta}_{+k} \bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5 h_k} + \frac{\bar{\mu}_{+k}}{0,5 h_k}, \quad x_k = x_k^+, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\bar{y}(x, 0) = 0, \quad (41)$$

а  $v$  — решение неоднородного уравнения (34) с однородными краевыми (35)–(36) и неоднородными начальными условиями (37):

$$\frac{\varepsilon}{p} v_t^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) v_t^{\frac{s}{p}} = \left( a_k v_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}} \right)_{x_k} - d_k v^{j+\frac{k}{p}} + \overset{\circ}{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad (42)$$

$$\frac{\varepsilon}{p} v_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) v_{\bar{t},0}^{\frac{s}{p}} = \frac{a_k^{(1k)} v_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} v_0^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k}, \quad x_k = x_k^-, \quad (43)$$

$$\frac{\varepsilon}{p} v_{\bar{t},N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) v_{\bar{t},N_k}^{\frac{s}{p}} = -\frac{a_k^{(N_k)} v_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \bar{\beta}_{+k} v_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k}, \quad x_k = x_k^+, \quad (44)$$

$$v(x, 0) = u_0(x), \quad (45)$$

и  $w$  — решение неоднородного уравнения (34) с однородными краевыми и начальными условиями (35)–(37):

$$\frac{\varepsilon}{p} w_t^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) w_t^{\frac{s}{p}} = \left( a_k w_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}} \right)_{x_k} - d_k w^{j+\frac{k}{p}} + \overset{*}{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad (46)$$

$$\frac{\varepsilon}{p} w_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) w_{\bar{t},0}^{\frac{s}{p}} = \frac{a_k^{(1k)} w_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} w_0^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k}, \quad x_k = x_k^-, \quad (47)$$

$$\frac{\varepsilon}{p} w_{\bar{t},N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) w_{\bar{t},N_k}^{\frac{s}{p}} = -\frac{a_k^{(N_k)} w_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \bar{\beta}_{+k} w_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k}, \quad x_k = x_k^+, \quad (48)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad (49)$$

где  $\overset{\circ}{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}$ ,  $\overset{*}{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}$  определяются условиями

$$\overset{\circ}{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}} = \begin{cases} \varphi_k, & x \in \overset{\circ}{\omega}_h, \\ 0, & x \in \overset{*}{\omega}_h, \end{cases} \quad \overset{*}{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}} = \begin{cases} \varphi_k, & x \in \overset{*}{\omega}_h, \\ 0, & x \in \overset{\circ}{\omega}_h \end{cases}$$

так, что  $\overset{\circ}{\varphi}_k + \overset{*}{\varphi}_k = \varphi_k$  при  $x \in \omega_h$ , т. е.  $\overset{*}{\varphi}_k$  отлична от нуля только в приграничных узлах.

Получим оценку для  $\bar{y}$ . Для этого уравнение (38) приведем к каноническому виду. В точке  $P = P(x_{i_k}, t_{j+k/p})$  имеем:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h_{k+}^*} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h_{k-}^*} + d_k \right] \bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k}{p}} = \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h_{k+}^*} \bar{y}_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h_{k-}^*} \bar{y}_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}} \\ & + \left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} (2 - 2^{1-\alpha}) \right] \bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}} + \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \left( t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_{i_k}^0 \right. \\ & \left. + \left( -t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_{i_k}^{\frac{1}{p}} + \dots + \left( -t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} \right], \end{aligned}$$

где  $\gamma = \frac{1}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)}$ . К каноническому виду следует привести и граничные условия. В точке  $P = P(x_0, t_{j+k/p})$  имеем:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_k^{(1k)}}{0,5 h_k h_{k+}^*} + \frac{\bar{\beta}_{-k}}{0,5 h_k} \right] \bar{y}_0^{j+\frac{k}{p}} &= \frac{a_k^{(1k)}}{0,5 h_k h_{k+}^*} \bar{y}_1^{j+\frac{k}{p}} + \left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} (2 - 2^{1-\alpha}) \right] \bar{y}_0^{j+\frac{k-1}{p}} \\ &+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \left( t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_0^0 + \left( -t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_0^{\frac{1}{p}} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left( -t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_0^{j+\frac{k-2}{p}} \right]. \end{aligned}$$

В точке  $P = P(x_{N_k}, t_{j+k/p})$  получим

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_k^{(N_k)}}{0,5 h_k h_{k-}^*} + \frac{\bar{\beta}_{+k}}{0,5 h_k} \right] \bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} &= \frac{a_k^{(N_k)}}{0,5 h_k h_{k-}^*} \bar{y}_{N_k-1}^{j+\frac{k}{p}} \\ &+ \left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} (2 - 2^{1-\alpha}) \right] \bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k-1}{p}} + \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \left( t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_{N_k}^0 \right. \\ &\quad \left. + \left( -t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_{N_k}^{\frac{1}{p}} + \dots + \left( -t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} \right) \bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k-2}{p}} \right]. \end{aligned}$$

Справедлива следующая лемма [1].

**Лемма 1.** Пусть  $l = pj + k - 1 \geq 1$ , тогда имеет место неравенство

$$-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} > 0, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad k = 2, 3, \dots, p. \quad (50)$$

В [22] доказан принцип максимума и получены априорные оценки для решения сеточного уравнения общего вида

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in \Pi'(P)} B(P, Q)y(Q) + F(P), \quad P \in \Omega,$$

где  $P, Q$  — узлы сетки  $\Omega + S$ ,  $\Pi'(P)$  — окрестность узла  $P$ , не содержащая самого узла  $P$ . Коэффициенты  $A(P), B(P, Q)$  удовлетворяют условиям

$$A(P) > 0, \quad B(P, Q) > 0, \quad D(P) = A(P) - \sum_{Q \in \Pi'(P)} B(P, Q) \geq 0. \quad (51)$$

Обозначим через  $P(x, t')$ , где  $x \in \omega_h, t' \in \omega'_\tau$ , узел  $(p+1)$ -мерной сетки  $\Omega = \omega_h \times \omega'_\tau$ , через  $S$  — границу  $\Omega$ , состоящую из узлов  $P(x, 0)$  при  $x \in \bar{\omega}_h$  и узлов  $P(x, t_{j+k/p})$  при  $t_{j+k/p} \in \omega'_\tau$  и  $x \in \gamma_{h,k}$  для всех  $k = 1, 2, \dots, p; j = 0, 1, \dots, j_0$ ,  $\Omega_k^*$  — множество узлов  $P(x, t_{j+k/p})$ , где  $x \in \bar{\omega}_{h,k}^*$  — приграничный по направлению  $x_k$  узел сетки  $\bar{\omega}_h$ .

Справедливы следующие теоремы [23].

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты уравнения

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in \Pi'(P)} B(P, Q)y(Q) + F(P), \quad P \in \Omega, \quad (*)$$

удовлетворяют условиям

$$A(P) > 0, \quad B(P, Q) \geq 0, \quad D(P) > 0, \quad P \in \overset{*}{\omega},$$

$$A(P) > 0, \quad B(P, Q) > 0, \quad D(P) = F(P) = 0, \quad P \in \overset{\circ}{\omega},$$

где  $\overset{\circ}{\omega}$  — некоторое связное подмножество множества  $\omega$ , а  $\overset{*}{\omega}$  — дополнение  $\overset{\circ}{\omega}$  до  $\omega$ .

Тогда для решения задачи (\*) справедлива оценка

$$\|y\|_C \leq \left\| \frac{F(P)}{D(P)} \right\|_{C^*},$$

где

$$\|f\|_C = \max_{P \in \omega} |f(P)|, \quad \|f\|_{C^*} = \max_{P \in \omega^*} |f(P)|.$$

**Теорема 2.** Если выполнены условия

$$D'(P_{(n+1)}) > 0 \text{ для всех } P_{(n+1)} \in \omega, \quad A(P_{(n+1)}) > 0, \quad B(P_{(n+1)}, Q) \geq 0,$$

для всех  $Q \in \Pi''_n, Q \in \Pi'_{n+1}$

$$\sum_{Q \in \Pi''_n} B(P_{(n+1)}, Q) > 0, \quad \frac{1}{D'(P_{(n+1)})} \sum_{Q \in \Pi''_n} B(P_{(n+1)}, Q) \leq 1 + c_1 \tau,$$

где  $c_1 = \text{const} > 0$  не зависит от  $\tau, h$ ,  $\Pi'(P_{n+1}) = \Pi'_{n+1} + \Pi''_n$ ,  $\Pi'_{n+1}$  — множество узлов  $Q(\xi, t_{n+1}) \in \Pi'(P_{n+1})$ ,  $\Pi''_n$  — множество узлов  $Q(\xi, t_n) \in \Pi'(P_{n+1})$ .

Тогда для решения задачи

$$A(P_{(n+1)})y(P_{(n+1)}) = \sum_{Q \in \Pi'_{n+1}} B(P_{(n+1)}, Q)y(Q) + \Phi(P_{(n+1)}),$$

где  $P_{(n+1)} = P(x, t_{n+1})$

$$\Phi(P_{(n+1)}) = \sum_{Q \in \Pi''_n} B(P_{(n+1)}, Q)y(Q) + F(P_{(n+1)}),$$

$$D'(P_{(n+1)}) = A(P_{(n+1)}) - \sum_{Q \in \Pi''_n} B(P_{(n+1)}, Q).$$

Справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_{C_h} \leq e^{c_1 t_n} \left( \|y_0\|_{C_h} + \sum_{k=1}^{n+1} \tau \|\tilde{F}_k\|_{C_h} \right),$$

где  $\|\tilde{F}_k\|_{C_h} = \max_{x \in \omega_h} |\tilde{F}_k|$ .

Проверим, учитывая положительность выражений, стоящих в круглых скобках (согласно лемме 1), выполнимость условий теоремы 1. В точке  $P = P(x_{i_k}, t_{j+k/p})$  имеем

$$A(P) = \left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_{k, i_k+1}}{h_k h_{k+}^*} + \frac{a_{k, i_k}}{h_k h_{k-}^*} + d_k \right] > 0,$$

$$B(P, Q) = \left\{ \frac{a_{k, i_{k+1}}}{h_k h_{k+}^*}; \frac{a_{k, i_k}}{h_k h_{k-}^*}; \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} (2 - 2^{1-\alpha}); \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \left( t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} \right); \right. \right. \\ \left. \left. \left( -t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} \right); \dots; \left( -t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} \right) \right] \right\} > 0,$$

$$D(P) = d_k \geq c_0 > 0;$$

а в точке  $P = P(x_0, t_{j+k/p})$  получим

$$A(P) = \left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_k^{(1_k)}}{0,5 h_k h_{k+}^*} + \frac{\bar{\beta}_{-k}}{0,5 h_k} \right] > 0,$$

$$B(P, Q) = \left\{ \frac{a_k^{(1_k)}}{0,5 h_k h_{k+}^*}; \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} (2 - 2^{1-\alpha}); \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \left( t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} \right); \right. \right. \\ \left. \left. \left( -t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} \right); \dots; \left( -t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} \right) \right] \right\} > 0,$$

$$D(P) = \frac{\bar{\beta}_{-k}}{0,5 h_k} > \frac{\beta_{-k}}{0,5 h_k} \geq \frac{c_0}{0,5 h_k} > 0;$$

в точке  $P = P(x_{N_k}, t_{j+k/p})$  имеем

$$A(P) = \left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_k^{(N_k)}}{0,5 h_k h_{k-}^*} + \frac{\bar{\beta}_{+k}}{0,5 h_k} \right] > 0,$$

$$B(P, Q) = \left\{ \frac{a_k^{(N_k)}}{0,5 h_k h_{k-}^*}; \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} (2 - 2^{1-\alpha}); \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \left( t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} \right); \right. \right. \\ \left. \left. \left( -t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} \right); \dots; \left( -t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} \right) \right] \right\} > 0,$$

$$D(P) = \frac{\bar{\beta}_{+k}}{0,5 h_k} > \frac{\beta_{+k}}{0,5 h_k} \geq \frac{c_0}{0,5 h_k} > 0.$$

Таким образом, на основании теоремы 1 для  $\bar{y}$  получаем оценку

$$\|\bar{y}^{j+1}\|_C \leq \frac{1}{c_0} \max_{0 < t' \leq t_j} (\|\bar{\mu}_{-k}(x, t')\|_{C_\gamma} + \|\bar{\mu}_{+k}(x, t')\|_{C_\gamma}), \quad \beta_{\pm k} \geq c_0 > 0, \quad (52)$$

где  $\|y\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y|$ ,  $\|y\|_{C_\gamma} = \max_{x \in \gamma_h} |y|$ .

Переходим к оценке функции  $v$ . Уравнение (42)–(45) перепишем в виде:

$$\left( \frac{\varepsilon}{p} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left( \frac{\tau}{p} \right)^{1-\alpha} \right) v_t^{j+\frac{k}{p}} = \Lambda_k v^{j+\frac{k}{p}} + \tilde{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad (53)$$

где

$$\tilde{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}} = \circ \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k-1} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) v_t^{j+\frac{k}{p}}.$$

Уравнение (53) приведем к каноническому виду:

$$\left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h_{k+}^*} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h_{k-}^*} + d_k \right] v_{i_k}^{j+\frac{k}{p}} = \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h_{k+}^*} v_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h_{k-}^*} v_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}} + \Phi \left( P_{j+\frac{k}{p}} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(P_{j+\frac{k}{p}}) &= \left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} (2 - 2^{1-\alpha}) \right] v_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}} + \bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}, \\ \bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}} &= \bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau} \left( t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} \right) v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} \\ &\quad - \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k-2} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) \left( v_{i_k}^{\frac{s}{p}} - v_{i_k}^{\frac{s-1}{p}} \right). \end{aligned}$$

Проверим выполнимость условий теоремы 2. Тогда в точке  $P_{(k)} = P(x, t_{j+k/p})$  имеем

$$A(P_{(k)}) = \left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h_{k+}^*} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h_{k-}^*} + d_k \right] > 0,$$

$$\begin{aligned} B(P_{(k)}, Q) &= \left\{ \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h_{k+}^*}; \frac{a_{k,i_k}}{h_k h_{k-}^*}; \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} (2 - 2^{1-\alpha}); \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \left( t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} \right); \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left( -t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} \right); \dots; \left( -t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} \right) \right] \right\} > 0, \end{aligned}$$

$$D'(P_{(k)}) = A(P_{(k)}) - \sum_{Q \in \Pi'_k(P)} B(P_{(k)}, Q) = \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + d_k \geq \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} > 0,$$

для всех  $Q \in \Pi''_{k-1}$ ,  $Q \in \Pi'_k$ ,

$$\sum_{Q \in \Pi''_{k-1}} B(P_{(k)}, Q) = \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} (2 - 2^{1-\alpha}) > 0, \quad (54)$$

$$\frac{1}{D'(P_{(k)})} \sum_{Q \in \Pi''_{k-1}} B(P_{(k)}, Q) = \frac{\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma(2-2^{1-\alpha})}{\tau^\alpha}}{\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}} \leq 1,$$

где  $\Pi'_{(P_{(k)})} = \Pi_k + \Pi''_{k-1}$ ,  $\Pi'_k$  — множество узлов  $Q = Q(\xi, t_k) \in \Pi'_{(P(x, t_k))}$ ,  $\Pi''_{k-1}$  — множество узлов  $Q = Q(\xi, t_{k-1}) \in \Pi'_{(P(x, t_{k-1}))}$ .

На основании теоремы 2 и в силу (54) для  $v$  получаем оценку

$$\|v^{j+\frac{k}{p}}\|_C \leq \frac{1}{\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}} \|\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\|_C + \frac{\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma(2-2^{1-\alpha})}{\tau^\alpha}}{\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}} \|v^{j+\frac{k}{p}}\|_C. \quad (55)$$

Оценим  $\|\bar{\varphi}_k^{j+k/p}\|_C$ :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}} &= \bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau} \left( t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} \right) v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} - \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \\ &\quad \times \sum_{s=1}^{pj+k-2} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) v_{i_k}^{\frac{s}{p}} = \bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau} \left[ \left( t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} \right) v_{i_k}^0 \right. \\ &\quad \left. + \left( -t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} \right) v_{i_k}^{\frac{1}{p}} + \dots + \left( -t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} \right) v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

Так как выражения, стоящие в круглых скобках, положительны, то из (56) получаем оценку

$$\left\| \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} \right\|_C \leq \left\| \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} \right\|_C + \frac{\gamma(2^{1-\alpha} - 1)}{\tau^\alpha} \max_{0 \leq s \leq k-2} \left\| v^{j+\frac{s}{p}} \right\|_C. \quad (57)$$

С помощью (57) из (55) находим

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq s \leq k} \left\| v^{j+\frac{s}{p}} \right\|_C &\leq \max_{0 \leq s \leq k-1} \left\| v^{j+\frac{s}{p}} \right\|_C + \left( \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha} + \tau d_k} \right) \max_{0 \leq s \leq k} \left\| \varphi_k^{j+\frac{s}{p}} \right\|_C \\ &\leq \max_{0 \leq s \leq k-2} \left\| v^{j+\frac{s}{p}} \right\|_C + \left( \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \right) \max_{0 \leq s \leq k} \left\| \varphi_k^{j+\frac{s}{p}} \right\|_C. \end{aligned} \quad (58)$$

Суммируем (58) сначала по  $k = 1, 2, \dots, p$ , затем по  $j' = 0, 1, 2, \dots, j$ . Тогда получим

$$\left\| v^{j+\frac{k}{p}} \right\|_C \leq \left\| v^0 \right\|_C + \sum_{j'=0}^j \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^p \max_{0 \leq s \leq k} \left\| \varphi_k^{j'+\frac{s}{p}} \right\|_C. \quad (59)$$

Рассмотрим теперь задачу (46)–(49) для  $w$ . Перепишем уравнение (46) в каноническом виде

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h_{k+}^*} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h_{k-}^*} + d_k \right] w_{i_k}^{j+\frac{k}{p}} &= \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h_{k+}^*} w_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h_{k-}^*} w_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}} \\ &+ \left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} (2 - 2^{1-\alpha}) \right] w_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}} + \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \left( t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} \right) w_{i_k}^0 \right. \\ &+ \left. \left( -t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} \right) w_{i_k}^{\frac{1}{p}} + \dots + \left( -t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} \right) w_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} \right] + \varphi_k^{*j+\frac{k}{p}}, \end{aligned} \quad (60)$$

и присоединим граничные и начальные условия (47)–(49):

$$\frac{\varepsilon}{p} w_{\bar{i},0}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) w_{\bar{i},0}^{\frac{s}{p}} = \frac{a_k^{(1k)} w_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} w_0^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k}, \quad x_k = x_k^-, \quad (61)$$

$$\frac{\varepsilon}{p} w_{\bar{i},N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) w_{\bar{i},N_k}^{\frac{s}{p}} = -\frac{a_k^{(N_k)} w_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \bar{\beta}_{+k} w_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0,5h_k}, \quad x_k = x_k^+, \quad (62)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad (63)$$

т. е.  $w = 0$  на границе  $S$  сетки  $\Omega$ , т. е.  $w(P) = 0$  при  $P \in S$ .

Правая часть  $\varphi^*$  отлична от нуля лишь в узлах  $(x, t')$ , где  $x \in \omega_h^*$ . Видно, что

$$A(P) = \left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h_{k+}^*} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h_{k-}^*} + d_k \right] > 0,$$

$$B(P, Q) = \left\{ \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h_{k+}^*}; \frac{a_{k,i_k}}{h_k h_{k-}^*}; \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} (2 - 2^{1-\alpha}); \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \left( t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} \right); \right. \right. \\ \left. \left. \left( -t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha} \right); \dots; \left( -t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha} \right) \right] \right\} > 0,$$

$$D(P) = \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + d_k > 0.$$

Тогда в силу однородных краевых условий (61)–(62) имеем

$$D(P) = \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + d_k.$$

На основании теоремы 1 получаем

$$\max_{\Omega+S} |w(P)| \leq \max_{t' \in w_\tau} \left\| \frac{\varphi(x, t')}{D} \right\|_C^* \leq \max_{0 < t' \leq t_j} \frac{\tau \|\varphi^*\|_C^*}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha} + \tau d_k} \leq \max_{0 < t' \leq t_j} \frac{\tau \|\varphi^*\|_C^*}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}. \quad (64)$$

Из оценок (52), (59) и (64) следует окончательная оценка

$$\begin{aligned} \|y^{j+1}\|_C &\leq \|u_0\|_C + \frac{1}{c_0} \max_{0 < t' \leq j\tau} (\|\bar{\mu}_{-k}(x, t')\|_{C_\gamma} + \|\bar{\mu}_{+k}(x, t')\|_{C_\gamma}) \\ &+ \max_{0 < t' \leq t_j} \frac{\tau \|\varphi^*\|_C^*}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} + \sum_{j'=0}^j \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^p \max_{0 \leq s \leq k} \left\| \varphi_k^{j'+\frac{s}{p}} \right\|_C^{\circ}, \end{aligned} \quad (65)$$

где

$$h = \max_{1 \leq k \leq p} h_k, \quad \|y\|_C = \max_{x \in \omega_h} |y|, \quad \|y\|_{C_\gamma} = \max_{x \in \gamma h} |y|, \quad \|\varphi\|_C^* = \max_{x \in \omega_h^*} |\varphi|, \quad \|\varphi\|_C^\circ = \max_{x \in \omega_h^\circ} |\varphi|.$$

Таким образом справедлива

**Теорема 3.** Локально-одномерная схема (27), (28) устойчива по начальным данным и правой части так, что для решения задачи (27), (28) справедлива оценка (65).

## 5. Равномерная сходимость ЛОС

Чтобы использовать свойство  $\sum_{k=1}^p \overset{\circ}{\psi}_k = 0$ ,  $\overset{\circ}{\psi}_k = O(1)$ , представим по аналогии с [22], решение задачи для погрешности в виде суммы

$$z_{(k)}^\varepsilon = v_{(k)}^\varepsilon + \eta_{(k)}^\varepsilon, \quad z_{(k)}^\varepsilon = (z^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}}, \quad (66)$$

где  $\eta_{(k)}^\varepsilon$  определяется условиями

$$\frac{\varepsilon}{p} (\eta^\varepsilon)_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{pj+k} \left( t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) (\eta^\varepsilon)_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \overset{\circ}{\Psi}_k, \quad x \in \omega_h + \gamma h_k, \quad (67)$$

$$\eta^\varepsilon(x, 0) = 0, \quad \overset{\circ}{\Psi}_k = \begin{cases} \overset{\circ}{\psi}_k, & x_k \in \omega_{h_k}, \\ \overset{\circ}{\psi}_{0-k}, & x_k = x_k^-, \\ \overset{\circ}{\psi}_{+k}, & x_k = x_k^+. \end{cases}$$

Функция  $v_{(k)}^\varepsilon$  задается соотношениями

$$\Delta_{t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha v_{(k)}^\varepsilon = \Lambda_k v_{(k)}^\varepsilon + \tilde{\Psi}_k, \quad \tilde{\Psi}_k = \Lambda_k \eta_{(k)}^\varepsilon + \overset{*}{\Psi}, \quad x_k \in \omega_{h_k}, \quad (68)$$

$$\Delta_{t_{j+\frac{k}{p}}}^\alpha v_{(k)}^\varepsilon = \Lambda_k^- v_{(k)}^\varepsilon + \tilde{\Psi}_{-k}, \quad \tilde{\Psi}_{-k} = \Lambda_k^- \eta_{(k)}^\varepsilon + \frac{\overset{*}{\Psi}_{-k}}{0,5 h_k}, \quad x_k = x_k^-, \quad (69)$$

$$\Delta_{0t_{j+\frac{k}{p}}}^{\alpha} v_{(k)}^{\varepsilon} = \Lambda_k^+ v_{(k)}^{\varepsilon} + \tilde{\Psi}_{+k}, \quad \tilde{\Psi}_{+k} = \Lambda_k^+ \eta_{(k)}^{\varepsilon} + \frac{\Psi_{+k}^*}{0,5 h_k}, \quad x_k = x_k^+, \quad (70)$$

$$v^{\varepsilon}(x, 0) = 0, \quad (71)$$

где  $\tilde{\Psi}_k = \Psi^* + \Lambda_k \eta_{(k)}^{\varepsilon}$ ,  $\Psi^* = O(h_k^2 + \tau)$ ,  $\Psi_{\pm k}^* = O(h_k^2 + \tau)$ .

Покажем, что

$$(\eta^{\varepsilon})^{j+\frac{k}{p}} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right), \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1.$$

Ради простоты рассмотрим двумерный случай ( $p = 2$ ). Сначала положим  $j = 0$ , т. е. рассмотрим первый слой  $(0, t_1]$ . Тогда задача (67) примет вид

$$\frac{\varepsilon}{2} (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{k}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^k \left( t_{\frac{k-s+1}{2}}^{1-\alpha} - t_{\frac{k-s}{2}}^{1-\alpha} \right) (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{s}{2}} = \overset{\circ}{\Psi}_k, \quad k = 1, 2.$$

Пусть  $k = 1$ . Тогда

$$\frac{\varepsilon}{2} (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} t_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha} (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} = \overset{\circ}{\Psi}_1. \quad (72)$$

При  $k = 2$  получаем

$$\frac{\varepsilon}{2} (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \left( t_1^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha} \right) (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} + t_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha} (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^1 \right] = \overset{\circ}{\Psi}_2. \quad (73)$$

Складывая выражения (72) и (73), имеем

$$\frac{\varepsilon}{2} (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^{\alpha}} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2^{1-\alpha}} \right) (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{1-\alpha}} (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^1 \right] = 0. \quad (74)$$

Из (72) находим

$$(\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \overset{\circ}{\Psi}_1 = -\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \overset{\circ}{\Psi}_2, \quad (75)$$

где  $\gamma = \frac{1}{2^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)}$ .

Выражая  $(\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^1$  из (74) и учитывая (75), получаем

$$(\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}}, (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^1 = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right). \quad (76)$$

Допустим, что при  $j = n$  выполнено условие

$$(\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}}, (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^1, (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{1+\frac{1}{2}}, \dots, (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{n+1} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right). \quad (77)$$

Опираясь на допущение (77), покажем, что аналогичное условие справедливо и при  $j = n + 1$ . Для чего запишем уравнение (67) при  $j = n + 1$ ,  $p = 2$ :

$$\frac{\varepsilon}{2} (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{n+1+\frac{k}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{2(n+1)+k} \left( t_{n+1+\frac{k-s+1}{2}}^{1-\alpha} - t_{n+1+\frac{k-s}{2}}^{1-\alpha} \right) (\eta^{\varepsilon})_{\bar{t}}^{\frac{s}{2}} = \overset{\circ}{\Psi}_k, \quad k = 1, 2. \quad (78)$$

Полагая в (78)  $k = 1$ , получим

$$\begin{aligned} & \tau^{1-\alpha} \left[ \left( n + \frac{3}{2} \right)^{1-\alpha} - 2(n+1)^{1-\alpha} + \left( n + \frac{1}{2} \right)^{1-\alpha} \right] (\eta^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \tau^{1-\alpha} \left[ (n+1)^{1-\alpha} \right. \\ & \left. - 2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^{1-\alpha} + n^{1-\alpha} \right] (\eta^\varepsilon)^1 + \dots - \Gamma(2-\alpha) \left( \varepsilon - \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (1-2^\alpha) \right) (\eta^\varepsilon)^{n+1} \\ & + \Gamma(2-\alpha) (\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}) (\eta^\varepsilon)^{n+\frac{3}{2}} = 2\Gamma(2-\alpha)\tau \overset{\circ}{\Psi}_1. \end{aligned} \quad (79)$$

Откуда, с учетом (77) и достаточной ограниченности коэффициентов при  $(\eta^\varepsilon)^{1/2}, (\eta^\varepsilon)^1, \dots, (\eta^\varepsilon)^{n+3/2}$ , находим  $(\eta^\varepsilon)^{n+3/2} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right)$ .

Положим теперь в (78)  $k = 2$ , затем сложим полученное таким образом выражение с (79) с учетом равенства  $\overset{\circ}{\Psi}_1 + \overset{\circ}{\Psi}_2 = 0$ . Тогда получим

$$(\eta^\varepsilon)^{\frac{1}{2}}, (\eta^\varepsilon)^1, \dots, (\eta^\varepsilon)^{n+1}, (\eta^\varepsilon)^{n+\frac{3}{2}}, (\eta^\varepsilon)^{n+2} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right). \quad (80)$$

Итак, равенство (80) выполнено при любом значении  $j$ . Нетрудно заметить, что аналогично можно показать, что

$$(\eta^\varepsilon)^{j+\frac{k}{p}} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right), \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1.$$

Для оценки решения задачи (68)–(71) воспользуемся теоремой 3:

$$\begin{aligned} \|(v^\varepsilon)^{j+1}\|_C & \leq \max_{0 < j' + \frac{k}{p} \leq j+1} \left( \frac{\tau \|\tilde{\Psi}\|_C^*}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} + \left\| (\eta^\varepsilon)^{j' + \frac{k}{p}} \right\|_{C_\gamma} \right) \\ & + \sum_{j'=0}^j \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^p \max_{0 \leq s \leq k} \left\| \tilde{\psi}_k^{j' + \frac{s}{p}} \right\|_C, \end{aligned} \quad (81)$$

где  $\tilde{\Psi}_k = \overset{*}{\Psi}_k + \Lambda_k \eta_{(k)}^\varepsilon$ .

Если существуют непрерывные в замкнутой области  $\bar{Q}_T$  производные  $\frac{\partial^4 u^\varepsilon}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}$ ,  $1 \leq k, \nu \leq p$ ,  $k \neq \nu$ , то

$$\bar{\Lambda}_k \eta_{(k)}^\varepsilon = - \left( \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \right) a_k \bar{\Lambda}_k \left( \overset{\circ}{\Psi}_{k+1} + \dots + \overset{\circ}{\Psi}_p \right) = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right),$$

во всех узлах  $x \in \omega_h$ , так как  $\eta_{(k)}^\varepsilon$  определяется из уравнения (67) всюду в  $\omega_h + \gamma_h$ , где  $a_k$  — известные постоянные. С другой стороны, имеем  $\overset{*}{\Psi}_k = O\left(h^2 + \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right)$  в регулярных узлах  $\omega_h$  и  $\overset{*}{\Psi}_k = O(1)$  в нерегулярных узлах сетки. Поэтому

$$\frac{\tau \|\tilde{\Psi}\|_C^*}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right), \quad \left\| \tilde{\Psi}_k^{j' + \frac{s}{p}} \right\|_C = O\left(h^2 + \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right).$$

Тогда из оценки (81) находим

$$\begin{aligned} \|(v^\varepsilon)^{j+1}\|_C & \leq M \left( \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} + p \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \sum_{j'=0}^j \left( h^2 + \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \right) \right) \\ & \leq M \left( \frac{h^2}{\varepsilon + \tau^{1-\alpha}} + \frac{\tau}{(\varepsilon + \tau^{1-\alpha})^2} \right), \quad h = \max_{1 \leq k \leq p} h_k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|(z^\varepsilon)^{j+1}\|_C \leq \|(\eta^\varepsilon)^{j+1}\|_C + \|(v^\varepsilon)^{j+1}\|_C \leq O\left(\frac{h^2}{\varepsilon + \tau^{1-\alpha}} + \frac{\tau}{(\varepsilon + \tau^{1-\alpha})^2}\right).$$

Итак, справедлива

**Теорема 4.** Пусть задача (5)–(8) имеет единственное непрерывное решение  $u(x, t)$  в  $\overline{Q}_T$  при всех значениях  $\varepsilon$  и существуют непрерывные в  $\overline{Q}_T$  производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}, \frac{\partial^4 u^\varepsilon}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}, \frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial x_k^2 \partial t}, \frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_k^2 \partial t^\alpha}, \frac{\partial^{2+\alpha} u^\varepsilon}{\partial x_k^2 \partial t^\alpha}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2},$$

$$\Theta_k(x, t) \in C^{3,1}(\overline{Q}_T), \quad q_k(x, t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_T), \quad 1 \leq k, \nu \leq p, \quad k \neq \nu, \quad 0 < \alpha < 1,$$

тогда с учетом оценки (17) решение разностной задачи (27), (28) равномерно сходится к решению задачи (1)–(4) со скоростью

$$O\left(\frac{h^2}{\varepsilon + \tau^{1-\alpha}} + \frac{\tau}{(\varepsilon + \tau^{1-\alpha})^2} + \varepsilon\right),$$

$h^2 = o(\varepsilon + \tau^{1-\alpha})$ ,  $\tau = o((\varepsilon + \tau^{1-\alpha})^2)$ , где  $\varepsilon$  — малый параметр,  $C^{m,n}$  — класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка  $m$  по  $x$  и  $n$  по  $t$ .

Очевидно, что скорость сходимости будет определяться наилучшим образом, если

$$\frac{h^2}{\varepsilon + \tau^{1-\alpha}} + \frac{\tau}{(\varepsilon + \tau^{1-\alpha})^2} = \varepsilon.$$

Пусть  $\varepsilon = \tau^\gamma$ , тогда из последнего получаем

$$h^2 (\tau^\gamma + \tau^{1-\alpha}) + \tau = \tau^\gamma (\tau^\gamma + \tau^{1-\alpha})^2$$

или

$$\tau \leq \tau^\gamma (\tau^\gamma + \tau^{1-\alpha})^2.$$

Следовательно,  $\min\{\gamma, 1 - \alpha\} = \frac{1-\gamma}{2}$ , откуда имеем

$$\varepsilon = \begin{cases} \tau^{\frac{1}{3}}, & 0 < \alpha \leq \frac{2}{3}, \\ \tau^{2\alpha-1}, & \frac{2}{3} < \alpha < 1. \end{cases} \quad (82)$$

Тогда справедливо следующее

**Следствие.** Если  $\varepsilon$  определяется из условия (82), тогда решение разностной задачи (21)–(23) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(4) со скоростью

$$O\left(\frac{h^2}{\tau^{\frac{1}{3}}} + \tau^{\frac{1}{3}}\right), \quad \text{если } 0 < \alpha \leq \frac{2}{3}, \quad \text{и} \quad O\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right), \quad \text{если } \frac{2}{3} < \alpha < 1.$$

## Литература

1. Лафишева М. М., Шхануков-Лафишев М. Х. Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2008.—Т. 48, № 10.—С. 1878–1887.
2. Баззаев А. К., Шхануков-Лафишев М. Х. Локально-одномерные схемы для уравнения диффузии с дробной производной по времени в области произвольной формы // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2016.—Т. 56, № 1.—С. 113–123. DOI: 10.7868/S0044466916010063.
3. Баззаев А. К., Шхануков-Лафишев М. Х. Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями III рода // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2010.—Т. 50, № 7.—С. 1200–1208.
4. Ашабоков Б. А., Бештокова З. В., Шхануков-Лафишев М. Х. Локально-одномерная разностная схема для уравнения переноса примесей дробного порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2017.—Т. 57, № 9.—С. 1517–1529. DOI: 10.7868/S0044466917090046.
5. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
6. Podlubny I. Fractional Differential Equations.—San-Diego: Academic Press, 1999.—368 p.
7. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
8. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка.—М.: Наука, 2005.—199 с.
9. Учайкин В. В. Метод дробных производных.—Ульяновск: Артишок, 2008.—512 с.
10. Shishkina E. L., Sitnik S. M. Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics.—Elsevier Science, 2020.—592 p.
11. Сербина Л. И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах.—М.: Наука, 2007.—167 с.
12. Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения.—2010.—Т. 46, № 5.—С. 658–664.
13. Бештоков М. Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана — Лиувилля // Дифференц. уравнения.—2018.—Т. 54, № 6.—С. 763–778. DOI: 10.1134/S0374064118060055.
14. Бештоков М. Х. К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто // Изв. вузов. Математика.—2018.—№ 10.—С. 3–16.
15. Diethelm K., Walz G. Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation // Numer. Algorithms.—1997.—Vol. 16.—P. 231–253. DOI: 10.1023/A:1019147432240.
16. Zhang Y. N., Sun Z. Z., Liao H. L. Finite difference methods for the time fractional diffusion equation on non-uniform meshes // J. Comput. Phys.—2014.—Vol. 265.—P. 195–210. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.02.008.
17. Кокурин М. Ю., Пискарев С. И., Спреафико М. Конечно-разностные методы для дробных дифференциальных уравнений порядка  $1/2$  // Функциональный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 133.—М.: ВИНТИ РАН, 2017.—С. 120–129.
18. Алиханов А. А., Бештоков М. Х., Шхануков-Лафишев М. Х. Локально-одномерная схема для первой начально-краевой задачи для многомерного уравнения конвекции–диффузии дробного порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2021.—Т. 61, № 7.—С. 1082–1100. DOI: 10.31857/S0044466921070024.
19. Бештокова З. В., Бештоков М. Х., Шхануков-Лафишев М. Х. Об одной разностной схеме решения задачи Дирихле для многомерного уравнения диффузии с дробной производной Капуто в области с произвольной границей // Владикавказ. мат. журн.—2022.—Т. 24, № 3.—С. 37–54. DOI: 10.46698/v2914-8977-8335-s.
20. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук.—1957.—Т. 12, № 5.—С. 3–122.
21. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы.—М.: Наука, 1977.—439 с.
22. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—617 с.
23. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—415 с.

Статья поступила 24 декабря 2024 г.

БЕШТОКОВА ЗАРЬЯНА ВЛАДИМИРОВНА

Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,

младший научный сотрудник отдела вычислительных методов

РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

E-mail: zarabaeva@yandex.ru

БЕШТОКОВ МУРАТ ХАМИДБИЕВИЧ  
Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,  
ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов  
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А  
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-2968-9211>

ШХАНУКОВ-ЛАФИШЕВ МУХАМЕД ХАБАЛОВИЧ  
Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,  
главный научный сотрудник отдела  
математического моделирования геофизических процессов  
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А  
E-mail: lafischev@yandex.ru

*Vladikavkaz Mathematical Journal*  
2026, Volume 28, Issue 1, P. 37–61

LOCALLY ONE-DIMENSIONAL SCHEME FOR A MULTIDIMENSIONAL  
FRACTIONAL-ORDER HEAT EQUATION WITH CONDITIONS  
OF THE THIRD KIND IN AN ARBITRARY DOMAIN

Beshtokova, Z. V.<sup>1</sup>, Beshtokov, M. Kh.<sup>1</sup> and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,  
89 A Shortanov St., Nalchik 360004, Russia

E-mail: zarabaeva@yandex.ru, beshtokov-murat@yandex.ru, lafischev@yandex.ru

**Abstract.** The multidimensional fractional-order heat equation with boundary conditions of the third kind in a domain with a complex shape is studied. Instead of the original differential equation we consider a modified fractional order heat equation with regularization parameter  $\varepsilon > 0$ . The finite difference method is used for approximate solution of the modified problem. A local one-dimensional difference scheme of A. A. Samarsky with approximation order  $O(|h|^2 + \tau)$  is constructed. The essence of this scheme is as follows. We reduce the transition from layer to layer to the sequential solution of one-dimensional problems in each of the coordinate directions. Using the maximum principle, we obtain an a priori estimate in the uniform metric in the norm  $C$ . Moreover, we prove the stability of the locally uniform difference scheme and the uniform convergence of the solution of the proposed difference scheme to the solution of the original problem for any values  $0 < \alpha < 1$ . A particular choice of the regularization parameter  $\varepsilon$  can significantly affect the convergence rate of the local-uniform difference scheme and the quality of its solution. In this manuscript we give detailed analysis of the choice of optimal values of  $\varepsilon$  such that the rate of uniform convergence of the solution of the proposed difference scheme to the solution of the original problem will be determined in the best possible way.

**Keywords:** heat equation, fractional order equation, the Gerasimov–Caputo fractional derivative, boundary value problems, locally one-dimensional scheme, maximum principle, a priori estimate, stability and convergence.

**AMS Subject Classification:** 65N06, 65N12.

**For citation:** Beshtokova, Z. V., Beshtokov, M. Kh. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh. Locally One-Dimensional Scheme for a Multidimensional Fractional-Order Heat Equation with Conditions of the Third Kind in an Arbitrary Domain, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 37–61 (in Russian). DOI: 10.46698/f6557-1323-1446-g.

## References

1. Lafisheva, M. M. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh. Locally One-Dimensional Difference Schemes for the Fractional Order Diffusion Equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 10, pp. 1875–1884. DOI: 10.1134/S0965542508100102.
2. Bazzaev, A. K. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh. Locally One-Dimensional Schemes for the Diffusion Equation with a Fractional Time Derivative in an Arbitrary Domain, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 1, pp. 106–115. DOI: 10.1134/S0965542516010061.

3. Bazzaev, A. K. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh. Locally One Dimensional Scheme for Fractional Diffusion Equations with Robin Boundary Conditions, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, no. 7, pp. 1141–1149. DOI: 10.1134/S0965542510070031.
4. Ashabokov, B. A., Beshtokova, Z. V. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh. Locally One-Dimensional Difference Scheme for a Fractional Tracer Transport Equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 9, pp. 1498–1510. DOI: 10.1134/S0965542517090044.
5. Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications], Minsk, Nauka i Tekhnika, 1987, 688 p. (in Russian).
6. Podlubny, I. *Fractional Differential Equations*, San-Diego, Academic Press, 1999, 368 p.
7. Nakhushhev, A. M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and Its Application], Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 p. (in Russian).
8. Pskhu, A. V. *Urvneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial differential equations of fractional order], Moscow, Nauka, 2005, 199 p. (in Russian).
9. Uchaykin, V. V. *Metod drobnnykh proizvodnykh* [Fractional Derivatives Method], Ul'yanovsk, Artishok, 2008, 512 p. (in Russian).
10. Shishkina, E. L. and Sitnik, S. M. *Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics*, Elsevier Science, 2020, 592 p.
11. Serbina L. I. *Nelokal'nye matematicheskiye modeli perenosa v vodonosnykh sistemakh* [Nonlocal Mathematical Models of Transport in Aquifer System], Moscow, Nauka, 2007, 167 p. (in Russian).
12. Alikhanov, A. A. A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 660–666. DOI: 10.1134/S0012266110050058.
13. Beshtokov, M. Kh. Local and Nonlocal Boundary Value Problems for Degenerating and Nondegenerating Pseudoparabolic Equations with a Riemann–Liouville Fractional Derivative, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no 6, pp. 763–778. DOI: 10.1134/S0012266118060058.
14. Beshtokov, M. Kh. To Boundary-Value Problems for Degenerating Pseudoparabolic Equations with Gerasimov–Caputo Fractional Derivative, *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, no. 10, pp. 1–14. DOI: 10.3103/S1066369X18100018.
15. Diethelm, K. and Walz, G. Numerical Solution of Fractional Order Differential Equations by Extrapolation, *Numerical Algorithms*, 1997, vol. 16, pp. 231–253. DOI: 10.1023/A:1019147432240.
16. Zhang, Y. N., Sun, Z. Z. and Liao, H. L. Finite Difference Methods for the Time Fractional Diffusion Equation on Non-Uniform Meshs, *Journal of Computational Physics*, 2014, vol. 265, pp. 195–210. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.02.008.
17. Kokurin, M. Yu., Piskarev, S. I. and Spreafico, M. Finite-Difference Methods for Fractional Differential Equations of Order 1/2, *Functional Analysis. Results of Science and Technology. Series. Modern Mathematics and Its applications. Topical Review 133. VINITI RAS*, Moscow, 2017, pp. 120–129 (in Russian).
18. Alikhanov, A. A., Beshtokov, M. Kh. and Shhanukov-Lafishev, M. Kh. Local One-Dimensional Scheme for the First Initial-Boundary Value Problem for the Multidimensional Fractional-Order Convection-Diffusion Equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2021, vol. 61, no. 7, pp. 1075–1093. DOI: 10.1134/S0965542521070022.
19. Beshtokova, Z. V., Beshtokov, M. Kh. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh. On a Difference Scheme for Solution of the Dirichlet Problem for Diffusion Equation with a Fractional Caputo Derivative in the Multidimensional Case in a Domain with an Arbitrary Boundary, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2022, vol. 24. no 3. pp. 37–54 (in Russian). DOI: 10.46698/v2914-8977-8335-s.
20. Vishik, M. I. and Lyusternik, L. A. Regular Degeneration and Boundary Layer for Linear Differential Equations with a Small Parameter, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1957, vol. 12, no. 5, pp. 3–122 (in Russian).
21. Godunov, S. K. and Ryaben'kiy, V. S. *Raznostnyye skhemy* [Difference schemes], Moscow, Nauka, 1977, 439 p. (in Russian).
22. Samarskii, A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1983, 616 p. (in Russian).
23. Samarskii, A. A. and Gulin, A. B. *Ustoychivost' raznostnykh skhem* [Stability of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1973, 415 p. (in Russian).

*Received December 24, 2024*

ZARYANA V. BESHTOKOVA

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,  
89 A Shortanov St., Nalchik 360000, Russia,

*Junior Researcher Computational Methods Department*

E-mail: [zarabaeva@yandex.ru](mailto:zarabaeva@yandex.ru)

MURAT KH. BESHTOKOV

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,  
89 A Shortanov St., Nalchik 360000, Russia,

*Leading Researcher Computational Methods Department*

E-mail: [beshtokov-murat@yandex.ru](mailto:beshtokov-murat@yandex.ru)

<https://orcid.org/0000-0003-2968-9211>

MUKHAMED KH. SHKHANUKOV-LAFISHEV

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,  
89 A Shortanov St., Nalchik 360000, Russia,

*Chief Researcher of the Department of Mathematical  
Modeling of Geophysical Processes*

E-mail: [lafishev@yandex.ru](mailto:lafishev@yandex.ru)

УДК 517.98

DOI 10.46698/i3984-2243-2985-z

AUTOMATIC BOUNDEDNESS OF SOME OPERATORS  
BETWEEN ORDERED AND TOPOLOGICAL VECTOR SPACES<sup>#</sup>

E. Yu. Emelyanov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Sobolev Institute of Mathematics,  
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk 630090, Russia  
E-mail: emelanov@math.nsc.ru

*To blessed memory of my wise friend and teacher Semën Kutateladze*

**Abstract.** Order-to-topology continuous operators and order-to-norm bounded operators have been recently studied by many authors mostly in the framework of Banach lattices. In the present note, we extend some of results obtained by these authors to the setting of operators from an ordered Banach space to a topological vector space. We present several conditions providing topological boundedness of such operators, and investigate uniform boundedness principle for collectively qualified families of operators, and establish uniform boundedness of power order-to-norm bounded operator semigroups on an ordered Banach space with a closed generating cone. We prove that every collectively order-to-topology bounded set of operators from an ordered Banach space to a topological vector space is collective ru-to-topology continuous and provide conditions under which such sets are uniformly bounded.

**Keywords:** ordered vector space, topological vector space, ordered Banach space, order-to-topology bounded operator, order-to-topology continuous operator.

**AMS Subject Classification:** 46A40, 47B60.

**For citation:** Emelyanov, E. Yu. Automatic Boundedness of Some Operators Between Ordered and Topological Vector Spaces, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 62–67. DOI: 10.46698/i3984-2243-2985-z.

## 1. Introduction

Order-to-topology continuous and order-to-norm bounded operators have been studied recently by different authors [1–7]. In the present note, some of their results are extended to the setting of topological vector spaces and new conditions for automatic boundedness of operators are given. We abbreviate normed, topological, ordered, ordered normed, and ordered Banach vector spaces as NS, TVS, OVS, ONS, and OBS, respectively. In what follows, vector spaces are real, operators are linear, symbol  $\mathcal{L}(X, Y)$  stands for the space of operators from a vector space  $X$  to a vector space  $Y$ ,  $B_X$  for the closed unit ball of a NS  $X$ , and  $x_\alpha \downarrow 0$  for a decreasing net in an OVS such that  $\inf_\alpha x_\alpha = 0$ . A net  $(x_\alpha)$  in an OVS  $X$

– *order converges* to  $x$  (*o-converges* to  $x$ , or  $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ) if there exists a net  $g_\beta \downarrow 0$  in  $X$  such that, for each  $\beta$  there is  $\alpha_\beta$  such that  $\pm(x_\alpha - x) \leq g_\beta$  for  $\alpha \geq \alpha_\beta$ ;

---

<sup>#</sup>The work was carried out in the framework of the State Task to the Sobolev Institute of Mathematics, project no. FWNF-2026-0022.

© 2026 Emelyanov, E. Yu.

– *relative uniform converges* to  $x$  (*ru-converges* to  $x$ , or  $x_\alpha \xrightarrow{ru} x$ ) if, for some  $u \in X_+$  there exists an increasing sequence  $(\alpha_n)$  of indices with  $\pm(x_\alpha - x) \leq \frac{1}{n}u$  for  $\alpha \geq \alpha_n$ .

We need the following classes of operators.

DEFINITION 1.1. An operator  $T$  between OVSs  $X$  and  $Y$  is

a) *order bounded* if  $T[a, b]$  is order bounded for every order interval  $[a, b]$  in  $X$  (the set of such operators will be denoted by  $\mathcal{L}_{ob}(X, Y)$ ).

b) *ru-continuous* if  $Tx_\alpha \xrightarrow{ru} 0$  in  $Y$  whenever  $x_\alpha \xrightarrow{ru} 0$  (shortly,  $T \in \mathcal{L}_{rc}(X, Y)$ ).

An operator  $T$  from OVS  $X$  to TVS  $(Y, \tau)$  is

c) *order-to-topology continuous* if  $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$  whenever  $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$  (shortly,  $T \in \mathcal{L}_{otc}(X, Y)$ ).

If  $Y$  is a NS, the set of such operators is denoted by  $\mathcal{L}_{onc}(X, Y)$ .

d) *ru-to-topology continuous* if  $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$  whenever  $x_\alpha \xrightarrow{ru} 0$  (shortly,  $T \in \mathcal{L}_{rtc}(X, Y)$ ).

If  $Y$  is a NS, the set of such operators is denoted by  $\mathcal{L}_{rnc}(X, Y)$ .

e) *order-to-topology bounded* if  $T[a, b]$  is  $\tau$ -bounded for every  $[a, b] \subseteq X$  (shortly,  $T \in \mathcal{L}_{otb}(X, Y)$ ). If  $Y$  is a NS, the set of such operators is denoted by  $\mathcal{L}_{omb}(X, Y)$ .

Clearly, all sets of operators mentioned in Definition 1.1 are vector spaces. We also recall several definitions concerning collective convergences and collectively qualified sets of operators (see, [2–4; 8–10]). For convenience, we say that a family  $\mathcal{B} = \{(x_\alpha^b)_{\alpha \in A}\}_{b \in B}$  of nets in a TVS  $X = (X, \tau)$  indexed by the same directed set  $A$  *collective  $\tau$ -converges* to 0 (briefly,  $\mathcal{B} \xrightarrow{c-\tau} 0$ ) whenever, for each  $U \in \tau(0)$  there exists  $\alpha_U$  with  $x_\alpha^b \in U$  for all  $\alpha \geq \alpha_U$  and  $b \in B$ .

DEFINITION 1.2. A set  $\mathcal{T}$  of operators between OVSs  $X$  and  $Y$  is

a) *collectively order bounded* ( $\mathcal{T} \in \mathbf{L}_{ob}(X, Y)$ ), if  $\mathcal{T}[a, b]$  is order bounded for every  $[a, b] \subseteq X$ .

A set  $\mathcal{T}$  of operators from an OVS  $X$  to a TVS  $(Y, \tau)$  is

b) *collectively order-to-topology continuous* ( $\mathcal{T} \in \mathbf{L}_{otc}(X, Y)$ ), if  $\mathcal{T}x_\alpha \xrightarrow{c-\tau} 0$  whenever  $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ . If additionally  $Y$  is a NS, we write  $\mathcal{T} \in \mathbf{L}_{onc}(X, Y)$ .

c) *collectively ru-to-topology continuous* ( $\mathcal{T} \in \mathbf{L}_{rtc}(X, Y)$ ), if  $\mathcal{T}x_\alpha \xrightarrow{c-\tau} 0$  whenever  $x_\alpha \xrightarrow{ru} 0$ . If additionally  $Y$  is a NS, we write  $\mathcal{T} \in \mathbf{L}_{rnc}(X, Y)$ .

d) *collectively order-to-topology bounded* ( $\mathcal{T} \in \mathbf{L}_{otb}(X, Y)$ ), if  $\mathcal{T}[a, b]$  is  $\tau$ -bounded for every  $[a, b] \subseteq X$ . If additionally  $Y$  is a NS, we write  $\mathcal{T} \in \mathbf{L}_{omb}(X, Y)$ .

A set  $\mathcal{T}$  of operators from a TVS  $(X, \xi)$  to a TVS  $(Y, \tau)$  is

e) *collectively continuous* ( $\mathcal{T} \in \mathbf{L}_c(X, Y)$ ), if  $\mathcal{T}x_\alpha \xrightarrow{c-\tau} 0$  whenever  $x_\alpha \xrightarrow{\xi} 0$ .

f) *collectively bounded* ( $\mathcal{T} \in \mathbf{L}_b(X, Y)$ ), if  $\mathcal{T}U$  is  $\tau$ -bounded whenever  $U$  is  $\xi$ -bounded.

The  $\sigma$ -versions of Definitions 1.1 and 1.2 are obtained via replacing nets by sequences, and the corresponding spaces (classes) are denoted by  $\mathcal{L}_{otc}^\sigma(X, Y)$  ( $\mathbf{L}_{otc}^\sigma(X, Y)$ ), etc. Let  $X$  and  $Y$  be OVSs. Then  $r_1\mathcal{T}_1 + r_2\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \in \mathbf{L}_{ob}(X, Y)$  for every  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  and nonempty subsets  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  of  $\mathbf{L}_{ob}(X, Y)$ . The same is true for  $\mathbf{L}_{otc}(X, Y), \mathbf{L}_{rtc}(X, Y), \mathbf{L}_{rnc}(X, Y)$ , etc.

The present note is organized as follows. Theorem 2.1 asserts collective ru-to-topology continuity of collectively order-to-topology bounded sets. In Theorem 2.2, conditions for the inclusion  $\mathbf{L}_{otc}(X, Y) \subseteq \mathbf{L}_{otb}(X, Y)$  are given. Theorem 2.3 gives conditions for the inclusion  $\mathbf{L}_{otb}(X, Y) \subseteq \mathbf{L}_b(X, Y)$ .

For the terminology and notations that are not explained in the text, we refer to [11, 12].

## 2. Main Results

We start with the following theorem which tells us that collectively order-to-topology bounded sets quite often agree with collectively ru-to-topology continuous sets.

**Theorem 2.1.** *Let  $X$  be an OVS and  $(Y, \tau)$  a TVS. Then  $\mathbf{L}_{orb}(X, Y) \subseteq \mathbf{L}_{r\tau c}(X, Y)$ . If additionally  $X_+$  is generating then  $\mathbf{L}_{orb}(X, Y) = \mathbf{L}_{r\tau c}(X, Y)$ .*

$\triangleleft$  If, on the contrary,  $\mathcal{F} \in \mathbf{L}_{orb}(X, Y) \setminus \mathbf{L}_{r\tau c}(X, Y)$  then, for some  $x_\alpha \xrightarrow{ru} 0$  there exists an absorbing  $U \in \tau(0)$  such that, for every  $\alpha$  there exist  $\alpha' \geq \alpha$  and  $T_\alpha \in \mathcal{F}$  with  $T_\alpha x_{\alpha'} \notin U$ .

Since  $x_\alpha \xrightarrow{ru} 0$ , for some  $u \in X_+$  there exists an increasing sequence  $(\alpha_n)$  of indices with  $\pm n x_\alpha \leq u$  for  $\alpha \geq \alpha_n$ . It follows from  $\mathcal{F} \in \mathbf{L}_{orb}(X, Y)$  that  $\mathcal{F}[-u, u] \subseteq NU$  for some  $N \in \mathbb{N}$ . Since  $n x_{\alpha_n} \in [-u, u]$  for  $\alpha \geq \alpha_n$  and  $[\alpha_n]' \geq \alpha_n$  then  $n x_{[\alpha_n]'} \in [-u, u]$ , and hence  $T_{\alpha_n}(n x_{[\alpha_n]'}) \in NU$  for every  $n$ . In particular,  $T_{\alpha_n}(x_{[\alpha_n]'}) \in U$ , which is absurd. We conclude  $\mathbf{L}_{orb}(X, Y) \subseteq \mathbf{L}_{r\tau c}(X, Y)$ .

Now, suppose  $X_+$  is generating, and let  $\mathcal{F} \in \mathbf{L}_{r\tau c}(X, Y) \setminus \mathbf{L}_{orb}(X, Y)$ . Since  $X = X_+ - X_+$  and  $\mathcal{F} \notin \mathbf{L}_{orb}(X, Y)$ , there exist  $x \in X_+$  and an absorbing  $U \in \tau(0)$  with  $\mathcal{F}[-x, x] \not\subseteq nU$  for every  $n \in \mathbb{N}$ . Therefore,  $T_n x_n \notin nU$  for all  $n$  and some sequences  $(x_n)$  in  $[-x, x]$  and  $(T_n)$  in  $\mathcal{F}$ . Since  $\frac{1}{n} x_n \xrightarrow{ru} 0$  and  $\mathcal{F} \in \mathbf{L}_{r\tau c}(X, Y)$ , there exists a sequence  $(n_k)$  such that  $T(\frac{1}{n} x_n) \in U$  for all  $n \geq n_k$  and  $T \in \mathcal{F}$ . Then  $T_{n_1} x_{n_1} \in n_1 U$ , which is a contradiction. So,  $\mathbf{L}_{r\tau c}(X, Y) \subseteq \mathbf{L}_{orb}(X, Y)$ , and hence  $\mathbf{L}_{orb}(X, Y) = \mathbf{L}_{r\tau c}(X, Y)$ .  $\triangleright$

**Corollary 2.1.** *Every order-to-topology bounded operator from an OVS  $X$  to a TVS  $(Y, \tau)$  is  $ru$ -to-topology continuous. Assuming in addition that  $X_+$  is generating,  $\mathcal{L}_{orb}(X, Y) = \mathcal{L}_{r\tau c}(X, Y)$ .*

The following result can be viewed as a topological version of [4, Theorem 2.1] (in the vector lattice setting see also [2, Theorem 2.1]), [11, Lemma 1.72] and [13, Theorem 2.1].

**Theorem 2.2.** *Let  $X$  be an Archimedean OVS with a generating cone and  $(Y, \tau)$  a TVS. Then  $\mathbf{L}_{orc}(X, Y) \subseteq \mathbf{L}_{orb}(X, Y)$ .*

$\triangleleft$  We argue to a contradiction supposing  $\mathcal{F} \in \mathbf{L}_{orc}(X, Y) \setminus \mathbf{L}_{orb}(X, Y)$ . Theorem 2.1 implies  $\mathcal{F} \notin \mathbf{L}_{r\tau c}(X, Y)$ . So,  $\mathcal{F} x_\alpha \not\xrightarrow{c-\tau} 0$  for some net  $(x_\alpha)$  in  $X$  such that  $x_\alpha \xrightarrow{ru} 0$ . Since  $X$  is Archimedean then  $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ , and hence  $\mathcal{F} x_\alpha \xrightarrow{c-\tau} 0$  because of  $\mathcal{F} \in \mathbf{L}_{orc}(X, Y)$ . The obtained contradiction completes the proof.  $\triangleright$

**Corollary 2.2.** *Every order-to-topology continuous operator from an Archimedean OVS with a generating cone to a TVS is order-to-topology bounded.*

It is well known that  $\mathbf{L}_c(X, Y) = \mathbf{L}_b(X, Y)$  whenever  $X$  and  $Y$  are NSs. The following result can be viewed as a partial extension of [2, Theorem 2.1] and [4, Theorem 2.8].

**Theorem 2.3.** *Let  $X$  be an OBS with a closed generating cone and  $(Y, \tau)$  a TVS. Then  $\mathbf{L}_{orb}(X, Y) \subseteq \mathbf{L}_b(X, Y)$ .*

$\triangleleft$  Let  $\mathcal{F} \in \mathbf{L}_{orb}(X, Y)$ . Suppose, on the contrary,  $\mathcal{F} \notin \mathbf{L}_b(X, Y)$ . By the Krein–Smulian theorem (cf. [12, Theorem 2.37]),  $\alpha B_X \subseteq B_X \cap X_+ - B_X \cap X_+$  for some  $\alpha > 0$ , and hence  $\mathcal{F}(B_X \cap X_+)$  is not  $\tau$ -bounded. Then, there exists an absorbing  $U \in \tau(0)$  with  $\mathcal{F}(B_X \cap X_+) \not\subseteq nU$  for every  $n \in \mathbb{N}$ . So, for some sequences  $(x_n)$  in  $B_X \cap X_+$  and  $(T_n)$  in  $\mathcal{F}$  we have  $T_n x_n \notin n^3 U$  for all  $n$ . Set

$$x := \|\cdot\| - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} x_n \in X_+.$$

Since  $\mathcal{F} \in \mathbf{L}_{orb}(X, Y)$  then  $\mathcal{F}[0, x] \subseteq NU$  for some  $N \in \mathbb{N}$ . It follows from  $n^{-2} x_n \in [0, x]$  that  $T_n(n^{-2} x_n) \in NU \subseteq nU$  for large enough  $n$ . This is absurd, because  $T_n(n^{-2} x_n) \notin nU$  for all  $n$ .  $\triangleright$

Norm completeness of  $X$  is essential in Theorem 2.3. For example, an operator  $T \in \mathcal{L}(c_{00})$  defined by  $Tx = (\sum_{k=1}^{\infty} x_k) e_1$  is order-to-norm bounded, yet not bounded. To see that the condition  $X_+ - X_+ = X$  is essential, it is enough to take any unbounded operator  $T$

on a Banach space  $X$  with a trivial cone  $X_+ = \{0\}$ . The closeness of  $X_+$  in a Banach space  $X$  is also essential [4, Example 2.12 b)]. The next corollary is a kind of Uniform Boundedness Principle for families of operators which need not be continuous a priori.

**Corollary 2.3.** *Every collectively order-to-norm bounded set of operators from an OBS with a closed generating cone to a NS is uniformly bounded.*

**Corollary 2.4.** *Every order-to-norm bounded operator from an OBS with a closed generating cone to a NS is bounded.*

The following corollary of Theorem 2.3 provides an automatic continuity result that extends the well known fact (see, for example, [12, Theorem 2.32]) that every positive operator from an OBS with a closed generating cone to an OBS with a closed cone is continuous.

**Corollary 2.5.** *Every order bounded operator from an OBS with a closed generating cone to an ONS with a normal cone is continuous.*

Since in NSs bounded linear operators are continuous, and since weak compact sets are bounded in Banach spaces, we obtain the following consequence of Theorem 2.3.

**Corollary 2.6.** *Every operator from an OBS with a closed generating cone to a Banach space is continuous whenever it takes order intervals onto relatively weak compact sets.*

Collective boundedness of a semigroup generated by a single operator is known as power boundedness of the operator. We say that an operator  $T$  on an ordered TVS  $(X, \tau)$  is power order-to-topology bounded if the set  $\bigcup_{n=1}^{\infty} T^n[a, b]$  is  $\tau$ -bounded for every  $[a, b]$  in  $X$ . An operator semigroup  $\mathcal{S}$  on an ordered TVS  $(X, \tau)$  is order-to-topology bounded if the set  $\bigcup_{T \in \mathcal{S}} T[a, b]$  is  $\tau$ -bounded for every  $[a, b]$  in  $X$ . The next two corollaries deal with these notions.

**Corollary 2.7.** *Every power order-to-norm bounded operator on an OBS with a closed generating cone is power bounded.*

**Corollary 2.8.** *Every power order-to-norm bounded operator semigroup on an OBS with a closed generating cone is uniformly continuous.*

Since  $\mathbf{L}_b(X, Y) \subseteq \mathbf{L}_{onb}(X, Y)$  whenever  $X$  is a normal OVS and  $Y$  is a NS, the next collective extension of [3, Proposition 1.5] follows from Theorems 2.1 and 2.3.

**Proposition 2.1.** *Let  $X$  be an OBS with a closed generating normal cone and  $Y$  a NS. Then  $\mathbf{L}_{rnc}(X, Y) = \mathbf{L}_{onb}(X, Y) = \mathbf{L}_b(X, Y)$ .*

**Corollary 2.9.** *Let  $X$  be an OBS with a closed generating normal cone and  $Y$  a NS. Then  $\mathcal{L}_{rnc}(X, Y) = \mathcal{L}_{onb}(X, Y) = \mathcal{L}_b(X, Y)$ .*

By [4, Theorem 2.4],  $\mathcal{L}_{rc}(X, Y) = \mathcal{L}_{ob}(X, Y)$  whenever  $X$  and  $Y$  are OVSs with generating cones. Therefore, we have one more consequence of Proposition 2.1 that provides conditions for automatic boundedness of ru-continuous operators.

**Corollary 2.10.** *Let  $X$  be an OBS with a closed generating normal cone and  $Y$  an OVS with a generating normal cone. Then  $\mathcal{L}_{rc}(X, Y) \subseteq \mathcal{L}_b(X, Y)$ .*

**Proposition 2.2** [4, Proposition 2.11]. *Let  $X$  and  $Y$  be OBSs with closed generating cones, and  $X^\sim \neq \emptyset$ . Then every  $\mathcal{T} \in \mathbf{L}_{ob}(X, Y)$  is uniformly bounded iff  $Y_+$  is normal.*

$\triangleleft$  If  $Y_+$  is not normal, then the interval  $[0, y_0]$  is not bounded for some  $y_0 \in X_+$ . Pick  $f_0 \neq 0$  in  $X^\sim$  and take  $x_0 \in X$  with  $f_0(x_0) = 1$ . Then,  $\{f_0 \otimes y\}_{y \in [0, y_0]} \in \mathbf{L}_{ob}(X, Y)$ . However, the set  $\{f_0 \otimes y\}_{y \in [0, y_0]}$  is not uniformly bounded since

$$\bigcup_{y \in [0, y_0]} (f_0 \otimes y)(x_0) = [0, y_0]$$

is not bounded.

If  $Y_+$  is normal, then  $\mathbf{L}_{ob}(X, Y) \subseteq \mathbf{L}_{omb}(X, Y)$  by [4, Proposition 2.6]. The rest follows from Proposition 2.1.  $\triangleright$

The following proposition is an extension of [3, Lemma 2.1].

**Proposition 2.3.** *Let  $X$  be a normal OBS and  $(Y, \tau)$  a Banach space with a dual topology. Then  $\mathcal{L}_{\sigma_{rc}}^\sigma(X, Y) \subseteq \mathcal{L}_{omb}(X, Y)$ .*

$\triangleleft$  On the way to contradiction, assume  $T \in \mathcal{L}_{\sigma_{rc}}^\sigma(X, Y) \setminus \mathcal{L}_{omb}(X, Y)$ . Then  $T[0, u]$  is not bounded for some  $u \in X_+$ . Since  $X$  is normal,  $[0, u]$  is bounded, say  $\sup_{x \in [0, u]} \|x\| \leq M$ . Pick a sequence  $(u_n)$  in  $[0, u]$  with  $\|Tu_n\| \geq n2^n$ , and set

$$y_n := \|\cdot\| - \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} u_k \quad \text{for } n \in \mathbb{N}.$$

Then  $y_n \downarrow \geq 0$ . Let  $0 \leq y_0 \leq y_n$  for all  $n \in \mathbb{N}$ . Since  $0 \leq y_0 \leq 2^{1-n}u$  and  $\|2^{1-n}u\| \leq M2^{1-n} \rightarrow 0$  then  $y_0 = 0$  by [12, Theorem 2.23]. So,  $y_n \downarrow 0$ , and hence  $y_n \xrightarrow{o} 0$ . We deduce from  $T \in \mathcal{L}_{\sigma_{rc}}^\sigma(X, Y)$  that  $Ty_n \xrightarrow{\tau} 0$ . Since the topology  $\tau$  is dual then  $Ty_n \xrightarrow{w} 0$ . Therefore, the sequence  $(Tny_n)$  is norm bounded. This is absurd because

$$\|Ty_{n+1} - Ty_n\| = \|T(2^{-n}u_n)\| \geq n \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \quad \triangleright$$

**Corollary 2.11.** *Every order-to-topology  $\sigma$ -continuous operator from a normal OBS to a Banach space with a dual topology is order-to-norm bounded.*

Combining Corollaries 2.11 and 2.4, gives the last result of our note.

**Corollary 2.12.** *Every order-to-topology  $\sigma$ -continuous operator from an OBS with a closed generating normal cone to a Banach space with a dual topology is bounded.*

## References

1. Alpay, S., Emelyanov, E. and Gorokhova, S.  $\sigma$ -Continuous, Lebesgue, KB, and Levi Operators Between Vector Lattices and Topological Vector Spaces, *Results in Mathematics*, 2022, vol. 77, article no. 117. DOI: 10.1007/s00025-022-01650-3.
2. Emelyanov, E. Collective Order Convergence and Collectively Qualified Sets of Operators, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, arxiv.org/pdf/2408.03671 (to appear).
3. Emelyanov, E. *On Automatic Boundedness of Some Operators in Ordered Banach Spaces*, arxiv.org/pdf/2503.18834.
4. Emelyanov, E., Erkursun-Özcan, N. and Gorokhova, S. Collective Order Boundedness of Sets of Operators Between Ordered Vector Spaces, *Results in Mathematics*, 2025, vol. 80, article no. 70. DOI: 10.1007/s00025-025-02386-6.
5. Jalili, S. A., Azar, K. Y. and Moghimi, M. B. F. Order-to-Topology Continuous Operators, *Positivity*, 2021, vol. 25, pp. 1313–1322. DOI: 10.1007/s11117-021-00817-6.
6. Keleş, C. S., Turan, B. and Altın, B. Order Structure of Order-to-Topological Continuous Operator, *Turkish Journal of Mathematics*, 2025, vol. 49 (2), pp. 173–184. DOI: 10.55730/1300-0098.3581.
7. Zhang, F., Shen, H. and Chen, Z. Property (h) of Banach Lattice and Order-to-Norm Continuous Operators, *Mathematics*, 2023, vol. 11, 2747. DOI: 10.3390/math11122747.
8. Alpay, S., Emelyanov, E. and Gorokhova, S. *On Collectively Almost (Limitedly, Order) L-Weakly Compact Sets of Operators*, arxiv.org/pdf/2407.11885.
9. Emelyanov, E. On Collectively  $\sigma$ -Levi Sets of Operators, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 36–43. DOI: 10.46698/y6929-3405-2251-o.
10. Emelyanov, E. On Collectively L-Weakly Compact Sets of Operators, *Analysis Mathematica*, 2025, vol. 51 (2), pp. 447–455. DOI: 10.1007/s10476-025-00088-3.
11. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics*, 2nd edition, Providence, American Mathematical Society, 2003.
12. Aliprantis, C. D. and Tourky, R. *Cones and Duality*, Providence, American Mathematical Society, 2007.
13. Abramovich, Y. and Sirotkin, G. On Order Convergence of Nets, *Positivity*, 2005, vol. 9, pp. 287–292. DOI: 10.1007/s11117-004-7543-x.

Received July 6, 2025

EDUARD YU. EMEL'YANOV  
Sobolev Institute of Mathematics,  
4 Acad. Koptuyug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,  
Leading Researcher  
E-mail: [emelanov@math.nsc.ru](mailto:emelanov@math.nsc.ru)  
<https://orcid.org/0000-0002-8828-0398>

Владикавказский математический журнал  
2026, Том 28, Выпуск 1, С. 62–67

К АВТОМАТИЧЕСКОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ  
МЕЖДУ УПОРЯДОЧЕННЫМИ И ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ  
ВЕКТОРНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

Емельянов Э. Ю.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева,  
Россия, Новосибирск, 630090, пр. ак. Коптюга, 4  
E-mail: [emelanov@math.nsc.ru](mailto:emelanov@math.nsc.ru)

**Аннотация.** Порядково-топологически непрерывные операторы и операторы, переводящие порядковые интервалы в ограниченные по норме множества, изучались в последние годы многими авторами, в основном, в контексте банаховых решеток. В настоящей заметке некоторые из результатов, полученные этими авторами, распространяются на случай операторов, действующих из упорядоченного банахова пространства в топологическое векторное пространство. Устанавливается несколько условий, обеспечивающих топологическую ограниченность вышеупомянутых операторов, и исследуется принцип равномерной ограниченности для различных совместно квалифицированных семейств операторов. Среди прочего, доказывается равномерная ограниченность операторных полугрупп, ограниченных по норме на всяком порядковом интервале и действующих в упорядоченном банаховом пространстве с замкнутым порождающим конусом. В заметке также устанавливается, что каждое совместно порядково-топологически ограниченное множество операторов из упорядоченного банахова пространства в топологическое векторное пространство будет коллективно  $ru$ -топологически непрерывным, и приводятся условия, обеспечивающие равномерную ограниченность таких множеств.

**Ключевые слова:** упорядоченное векторное пространство, топологическое векторное пространство, упорядоченное банахово пространство, порядково-топологически ограниченный оператор, порядково-топологически непрерывный оператор.

**AMS Subject Classification:** 46A40, 47B60.

**Образец цитирования:** *Emelyanov E. Yu. Automatic Boundedness of Some Operators Between Ordered and Topological Vector Spaces // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, № 1.—С. 62–67 (in English).* DOI: 10.46698/i3984-2243-2985-z.

УДК 517.982.22

DOI 10.46698/z6430-9873-2568-v

БАНАХОВЫ ПРЕДЕЛЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ  
ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАТОРОВ РАСТЯЖЕНИЯ<sup>#</sup>

Р. Е. Зволинский<sup>1</sup>, Е. М. Семенов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Воронежский государственный университет,  
Россия, 394018, Воронеж, Университетская пл., 1

E-mail: roman.zvolinskiy@gmail.com, nadezhka\_ssm@geophys.vsu.ru

*Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе*

**Аннотация.** В работе рассматриваются множества банаховых пределов, инвариантных относительно операторов растяжения. Известно, что множество таких пределов является непустым и выпуклым подмножеством множества банаховых пределов. Однако объединение всех таких подмножеств невыпукло. В данной работе приводится необходимое и достаточное условие выпуклости конечных объединений таких подмножеств. Полученный критерий дает полный ответ на вопрос о выпуклости конечных объединений множеств банаховых пределов, инвариантных относительно операторов растяжения. В то же время вопрос об аналогичном критерии для бесконечных объединений остается открытым: авторами найдены лишь необходимые и, отдельно, достаточные условия выпуклости.

**Ключевые слова:** банаховы пределы, операторы растяжения, выпуклые подмножества.

**AMS Subject Classification:** 46B45, 47B37.

**Образец цитирования:** Зволинский Р. Е., Семенов Е. М. Банаховы пределы, инвариантные относительно операторов растяжения // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 1.—С. 68–72. DOI: 10.46698/z6430-9873-2568-v.

## 1. Введение

Через  $\ell_\infty$  обозначается пространство ограниченных последовательностей  $x = (x_1, x_2, \dots)$  с нормой

$$\|x\|_{\ell_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

и стандартной полуупорядоченностью, где  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел. Линейный функционал  $B \in \ell_\infty^*$  называется *банаховым пределом*, если

1.  $B \geq 0$ , т. е.  $Bx \geq 0$  для всех  $x \geq 0$ ;
2.  $Bx = BTx$  для всех  $x \in \ell_\infty$ , где  $T$  — оператор сдвига в  $\ell_\infty$ ;
3.  $B\mathbb{1} = 1$ , где  $\mathbb{1} = (1, 1, \dots)$ .

Существование банаховых пределов было анонсировано С. Мазуром [1], а доказательство приведено в книге С. Банаха [2]. Банахов предел  $B$  называется *инвариантным*

---

<sup>#</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00220.

относительно действующего в  $\ell_\infty$  оператора  $H$ , если  $Bx = BHx$  для всех  $x \in \ell_\infty$ . Существование инвариантных банаховых пределов было доказано У. Эберлейном [3]. Подход У. Эберлейна был развит в [4]. Там было доказано, что множество инвариантных относительно оператора  $H$  банаховых пределов  $\mathfrak{B}(H)$  непусто, если

1.  $H \geq 0$  и  $H\mathbb{1} = \mathbb{1}$ ;
2.  $Hc_0 \subset c_0$ ;
3.  $\limsup_{j \rightarrow \infty} (A(I - T)x)_j \geq 0$  для всех  $x \in \ell_\infty$ ,  $A \in R(H)$ , где  $R(H) = \text{conv}\{H^k, k \in \mathbb{N}\}$ .

Условиям 1–3 удовлетворяет оператор Чезаро

$$(Cx)_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

и операторы растяжения

$$\sigma_n x = (\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_n, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_n, \dots), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots)$ . Поэтому множества  $\mathfrak{B}(\sigma_n)$  непусты и выпуклы для всех  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , и, более того, диаметр и радиус каждого множества  $\mathfrak{B}(\sigma_n)$  совпадают с диаметром и радиусом множества  $\mathfrak{B}$  в  $\ell_\infty^*$  и равны 2. Если банахов предел  $B$  инвариантен относительно оператора  $\sigma_n$ , то  $B$  инвариантен относительно  $(\sigma_n)^2 = \sigma_{n^2}$ . Это означает, что

$$\mathfrak{B}(\sigma_n) \subset \mathfrak{B}(\sigma_{n^k}) \tag{1}$$

для любых  $k, n \in \mathbb{N}, k, n \geq 2$ . Более подробно о банаховых пределах см. обзор [5]. Настоящая работа посвящена изучению множеств  $\mathfrak{B}(\sigma_n), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

Банаховы пределы, инвариантные относительно операторов  $\sigma_n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , рассматривались в работах [6, 7] и других.

## 2. Основные результаты

Всякая строго возрастающая последовательность натуральных чисел  $M = (m_1, m_2, \dots, m_r), r \in \mathbb{N}, r \geq 2, m_1 \geq 2$ , определяет множество

$$\mathfrak{B}(M) = \bigcup_{i=1}^r \mathfrak{B}(\sigma_{m_i}),$$

которое является подмножеством  $\mathfrak{B}$ . Отметим, что в силу (1) мы можем полагать  $m_s^k \neq m_t$  для всех  $s, t \in (1, 2, \dots, r-1), s < t$ , и всех  $k \in \mathbb{N}$ . Дальнейшие рассуждения мы будем проводить исходя из этого предположения.

**Теорема 1.** *Для того чтобы множество  $\mathfrak{B}(M)$  было выпукло необходимо и достаточно, чтобы  $m_i^{k_i} = m_r$  для всех  $i \in (1, 2, \dots, r-1)$  и для некоторых  $k_i \in \mathbb{N}, k_i > 1$ .*

◁ Необходимость докажем от противного примерно по той же схеме, что и [6, теорема 13]. Предположим, что  $m_j^k \neq m_r$  для некоторого  $j \in (1, 2, \dots, r-1)$  и всех  $k \in \mathbb{N}$ . Так как  $m_r > m_j$ , то  $m_r^k \neq m_j$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ . В силу [6, теорема 14] существуют такие  $B_2 \in \mathfrak{B}(\sigma_{m_j})$  и  $B_3 \in \mathfrak{B}(\sigma_{m_r})$ , что

$$\|B_2 - B_3\|_{\ell_\infty^*} = 2 \tag{2}$$

для любого  $B \in \mathfrak{B}(\sigma_\alpha)$  и

$$\|B_3 - B\|_{\ell_\infty^*} = 2 \quad (3)$$

для любого  $B \in \mathfrak{B}(\sigma_\beta)$ , где

$$\begin{aligned} \alpha &\in \mathbb{N} \setminus \{1, m_j, m_j^2, m_j^3, \dots\}, \\ \beta &\in \mathbb{N} \setminus \{1, m_r, m_r^2, m_r^3, \dots\}. \end{aligned}$$

В частности,

$$B_2 \notin \mathfrak{B}(\sigma_{m_r}), \quad B_3 \notin \mathfrak{B}(\sigma_{m_j}). \quad (4)$$

Рассмотрим банахов предел

$$B_1 = \frac{1}{2}(B_2 + B_3)$$

и докажем, что  $B_1 \notin \mathfrak{B}(\sigma_n)$  для любого  $n \in (m_1, m_2, \dots, m_r)$ . Доказательство проведем отдельно для 3 различных подмножеств  $\mathbb{N}$ .

1. Пусть  $n = m_j$  и предположим, что  $B_1 \in \mathfrak{B}(\sigma_{m_j})$ . Так как  $B_3 = 2B_1 - B_2$ , то инвариантность  $B_1$  и  $B_2$  относительно  $\sigma_{m_j}$  влечет инвариантность  $B_3$  относительно  $\sigma_{m_j}$ . Отсюда и из  $B_3 \in \mathfrak{B}$  следует  $B_3 \in \mathfrak{B}(\sigma_{m_j})$ , что противоречит (4).

2. Если  $n = m_r$  и  $B_1 \in \mathfrak{B}(\sigma_{m_r})$ , то те же самые аргументы приводят к противоречию с (4).

3. Пусть  $n \neq m_j$ ,  $n \neq m_r$ . В силу (2), (3) имеем

$$\|B_2 - B_1\|_{\ell_\infty^*} = \|B_3 - B_1\|_{\ell_\infty^*} = 2.$$

Так как  $B_1 - B_2 = B_3 - B_1$ , то

$$\|B_3 - B_2\|_{\ell_\infty^*} = \|B_3 - B_1 + B_1 - B_2\|_{\ell_\infty^*} = 2\|B_3 - B_1\|_{\ell_\infty^*} = 4.$$

Доказанное равенство противоречит отмеченному в §1 факту, что диаметр  $\mathfrak{B}$  равен 2. Полученное во всех трех случаях противоречие доказывает необходимость — первую часть теоремы.

Если  $m_r = m_i^{k_i}$ , то в силу (1) получаем

$$\mathfrak{B}(\sigma_{m_i}) \subset \mathfrak{B}(\sigma_{m_r}).$$

Отсюда  $\mathfrak{B}(M) = \mathfrak{B}(\sigma_{m_r})$  и выпуклость  $\mathfrak{B}(\sigma_{m_r})$  влечет выпуклость  $\mathfrak{B}(M)$ .  $\triangleright$

Теорема 1 была анонсирована в [8, теорема 2]. Возникает естественный вопрос: выполняется ли теорема 1, если  $M$  — бесконечное объединение множеств  $\mathfrak{B}(\sigma_{m_i})$ ? Этот вопрос остается открытым.

**Благодарности.** Авторы благодарят рецензента за ценные замечания, которые были учтены про подготовке финального варианта статьи.

## Литература

1. Mazur S. O metodach sumowalnosci // Ann. Soc. Polon. Math. (Suppl.).—1929.—P. 102–107.
2. Банах С. Теория линейных операций.—М.—Ижевск: РХД, 2001.—272 с.
3. Eberlein W. F. Banach–Hausdorff limits // Proc. Amer. Math. Soc.—1950.—Vol. 1, № 5.—P. 662–665. DOI: 10.1090/S0002-9939-1950-0038009-0.
4. Semenov E. M., Sukochev F. A. Invariant Banach limits and applications // J. Funct. Anal.—2010.—Vol. 259, № 6.—P. 1517–1541. DOI: 10.1016/j.jfa.2010.05.011.

5. Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С. Геометрия банаховых пределов и их приложения // Успехи мат. наук.—2020.—Т. 75, № 4.—С. 153–194.
6. Авдеев Н. Н., Семенов Е. М., Усачев А. С. Банаховы пределы: экстремальные свойства, инвариантность и теорема Фубини // Алгебра и анализ.—2021.—Т. 33, № 4.—С. 32–48.
7. Алехно Е. А., Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С. Порядковые и геометрические свойства множества банаховых пределов // Алгебра и анализ.—2016.—Т. 28, № 3.—С. 3–35.
8. Зволинский Р. Е., Семенов Е. М. Инвариантные банаховы пределы и их выпуклые подмножества // Мат. заметки.—2022.—Т. 112, № 6.—С. 820–824. DOI: 10.4213/mzm13643.

Статья поступила 11 ноября 2025 г.

Зволинский Роман Евгеньевич  
Воронежский государственный университет,  
аспирант кафедры теории функций и геометрии  
РОССИЯ, 394018, Воронеж, Университетская пл. 1  
E-mail: roman.zvolinskiy@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0002-0240-8697>

Семенов Евгений Михайлович  
Воронежский государственный университет,  
профессор, заведующий кафедрой теории функций и геометрии  
РОССИЯ, 394018, Воронеж, Университетская пл. 1  
E-mail: nadezhka\_ssm@geophys.vsu.ru

*Vladikavkaz Mathematical Journal*  
2026, Volume 28, Issue 1, P. 68–72

## BANACH LIMITS INVARIANT UNDER DILATION OPERATORS

Zvolinskii, R. E.<sup>1</sup> and Semenov, E. M.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Voronezh State University,  
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia

E-mail: roman.zvolinskiy@gmail.com, nadezhka\_ssm@geophys.vsu.ru

**Abstract.** This paper considers sets of Banach limits invariant under dilation operators. It is known that the set of these limits is a non-empty and convex subset of the set of Banach limits. However, the union of all such subsets is non-convex. This paper provides a necessary and sufficient condition for the convexity of finite unions of such subsets. The obtained criterion provides a complete answer to the question regarding the convexity of finite unions of sets of Banach limits invariant under dilation operators. At the same time, the question of a similar criterion for infinite unions remains open: the authors have found only necessary and, separately, sufficient conditions for convexity.

**Keywords:** Banach limits, dilation operators, convex subsets.

**AMS Subject Classification:** 46B45, 47B37.

**For citation:** Zvolinskii, R. E. and Semenov, E. M. Banach Limits Invariant Under Dilation Operators, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 68–72 (in Russian). DOI: 10.46698/z6430-9873-2568-v.

## References

1. Mazur, S. O Metodach Sumowalnosci, *Ann. Soc. Polon. Math. (Supplement)*, 1929, pp. 102–107.
2. Banach, S. *Theory of Linear Operations*, Dover Publications, 2009, 254 p.
3. Eberlein, W. F. Banach–Hausdorff Limits, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1950, vol. 1, no. 5, pp. 662–665. DOI: 10.1090/S0002-9939-1950-0038009-0.

4. Semenov, E. M. and Sukochev, F. A. Invariant Banach Limits and Applications, *Journal of Functional Analysis*, 2010, vol. 259, no. 6, pp. 1517–1541. DOI: 10.1016/j.jfa.2010.05.011.
5. Semenov, E. M., Sukochev, F. A. and Usachev, A. S. Geometry of Banach Limits and Their Applications, *Russian Mathematical Surveys*, 2020, vol. 75, no. 4, pp. 725–763. DOI: 10.1070/RM9901.
6. Avdeev, N. N., Semenov, E. M. and Usachev, A. S. Banach Limits: Extreme Properties, Invariance and the Fubini Theorem, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2022, vol. 33, no. 4, pp. 607–618. DOI: 10.1090/spmj/1717.
7. Alekhno, E. A., Semenov, E. M., Sukochev, F. A. and Usachev, A. S. Order and Geometric Properties of the Set of Banach Limits, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2017, vol. 28, no. 3, pp. 299–321. DOI: doi.org/10.1090/spmj/1452.
8. Zvolinskii, R. E. and Semenov, E. M. Invariant Banach Limits and Their Convex Subsets, *Mathematical Notes*, 2022, vol. 112, no. 6, pp. 881–884. DOI: 10.1134/S0001434622110220.

*Received November 11, 2025*

ROMAN E. ZVOLINSKII  
Voronezh State University,  
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia,  
*PhD Student*  
E-mail: roman.zvolinskiy@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0002-0240-8697>

EVGENII M. SEMENOV  
Voronezh State University,  
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia,  
*Professor*  
E-mail: nadezhka\_ssm@geophys.vsu.ru

УДК 517.982

DOI 10.46698/i0132-3339-6227-v

## ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В БАНАХОВЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ<sup>#</sup>

К. К. Кудайбергенов<sup>1</sup>, П. Р. Орынбаев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Владикавказский научный центр РАН,

Россия, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1

E-mail: karim20061@yandex.ru, paraxatorinbaev@gmail.com

*Посвящается памяти профессора  
Семёна Самсоновича Кутателадзе*

**Аннотация.** Задача описания линейных операторов, представимых в виде интегральных, была поставлена Дж. фон Нейманом в середине 30-х годов XX века и долгое время оставалась одной из центральных в теории операторов и функционального анализа. Существенный вклад в ее решение был внесен в 1974 г. Бухваловым, который установил критерий интегральной представимости линейных операторов в идеальных функциональных пространствах. В последующих исследованиях данная тематика получила дальнейшее развитие: в недавней работе Орынбаева и Тасоева был предложен критерий частичной интегральной представимости положительных  $L_\infty$ -однородных операторов на сигма-конечных пространствах. В настоящей работе вводится новое понятие модульной равноизмеримости, основанное на концепции циклической компактности. С использованием этого подхода доказывается, что всякий частично интегральный оператор, действующий в банаховых идеальных функциональных пространствах, переводит порядковые интервалы в модульно-равноизмеримые множества, что существенно дополняет и обобщает ранее известные результаты в данной области.

**Ключевые слова:** частично интегральный оператор, интегральный оператор, банаховы идеальные функциональные пространства.

**AMS Subject Classification:** 46B42, 46B04.

**Образец цитирования:** Кудайбергенов К. К., Орынбаев П. Р. Частично интегральные операторы в банаховых идеальных функциональных пространствах // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 1.—С. 73–81. DOI: 10.46698/i0132-3339-6227-v.

### 1. Введение

В работе [1] Романовским были введены частично интегральные операторы — класс операторов, в которых интегрирование осуществляется лишь по одной переменной, а именно операторы вида

$$Mx(\omega, s) = \int_a^b m(\omega, s, t)x(\omega, t) dt, \quad (1)$$

где ядро  $m : D \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  является непрерывной, либо измеримой функцией. Особенностью оператора (1) является то, что интегрирование ведется лишь по одной переменной.

---

<sup>#</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 24-71-10094, <https://rscf.ru/project/24-71-10094/>.

© 2026 Кудайбергенов К. К., Орынбаев П. Р.

Операторы такого вида называются *частично интегральными*. Теория частично интегральных операторов имеет многочисленные приложения в различных областях математики (см. [1–3]). Различные свойства этих операторов изучались в работах [4–6].

В работе [7] Бухвалов привел критерий интегральной представимости линейных операторов в идеальных функциональных пространствах. В работе Орынбаева и Тасоева [8] был получен критерий частично интегральной представимости положительных  $L_\infty$ -однородных операторов на  $\sigma$ -конечных пространствах. В работе [9] исследована порядковая структура пространства частично интегральных операторов: показано, что пространство абсолютно частично интегральных операторов образует полосу в порядково полной векторной решетке порядково ограниченных операторов, действующих в порядково плотных идеальных пространствах измеримых функций.

В настоящей работе мы вводим новое понятие модульно-равноизмеримости через понятие циклической компактности и доказываем, что всякий частично интегральный оператор, действующий в банаховых идеальных функциональных пространствах, переводит порядковые интервалы в модульно-равноизмеримые множества.

Основной результат работы формулируется следующим образом.

**Теорема 1.1.** Пусть  $(\Omega, \Sigma_\Omega, m)$ ,  $(T, \Sigma_T, \mu)$  и  $(S, \Sigma_S, \nu)$  — измеримые пространства с конечными мерами  $m$ ,  $\mu$  и  $\nu$  соответственно,  $E$  и  $F$  — банаховы идеальные функциональные пространства в  $L^0(\Omega \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_T, m \otimes \mu)$  и  $L^0(\Omega \times S, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_S, m \otimes \nu)$  соответственно. Всякий частично интегральный оператор  $U : E \rightarrow F$  переводит порядковые интервалы в модульно-равноизмеримые множества.

## 2. Предварительные сведения

Необходимые сведения из теории векторных решеток и операторов можно найти в монографиях [10–12].

Всюду далее  $(\Omega, \Sigma_\Omega, m)$ ,  $(T, \Sigma_T, \mu)$  и  $(S, \Sigma_S, \nu)$  — измеримые пространства с конечными мерами  $m$ ,  $\mu$  и  $\nu$  соответственно;  $(\Omega \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_T, m \otimes \mu)$  и  $(\Omega \times S, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_S, m \otimes \nu)$  — произведения этих пространств. Символом  $\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$  будем обозначать пространство всех действительных измеримых  $\mu$ -почти всюду конечных функций, а  $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$  — пространство классов эквивалентности функций из  $\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ . Как обычно, функции  $f, g \in \mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$  называются эквивалентными, если они равны  $\mu$ -почти всюду.

Всюду далее  $E$  и  $F$  — банаховы идеальные функциональные пространства в  $L^0(\Omega \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_T, m \otimes \mu)$  и  $L^0(\Omega \times S, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_S, m \otimes \nu)$  соответственно. Напомним, что решеточные и алгебраические операции в  $E$  и  $F$  вычисляются почти всюду поточечно. Банаховы идеальные пространства обладают следующими свойствами:

1. Пространство  $E$  является идеальным: если  $|y| \leq |x|$  и  $x \in E$ , то  $y \in E$ .
2. Пространство  $E$  является модулем над  $L_\infty(\Omega, m)$ , т. е.

$$\|hx\|_E \leq \|h\|_{L_\infty(\Omega, m)} \|x\|_E.$$

Типичными примерами таких пространств являются пространства  $L_p$ , пространства Орлича и пространства Лоренца.

Будем говорить, что оператор  $U : E \rightarrow F$  является *частично интегральным*, если существует измеримое ядро  $k \in \mathcal{L}^0(\Omega \times S \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_S \otimes \Sigma_T, m \otimes \nu \otimes \mu)$  такое, что выполняется представление

$$(U(x))(\omega, s) = \int_T k(\omega, s, t)x(\omega, t) d\mu(t)$$

для всех  $x \in E$ .

Оператор  $U$  называется  $L_\infty$ -однородным, если для всех  $h \in L_\infty(\Omega, m)$  и  $x \in E$  выполняется равенство

$$U(hx) = hU(x).$$

### 3. Доказательство основной теоремы

**Предложение 3.1.** Пусть  $E$  и  $F$  — банаховы идеальные функциональные пространства в  $L^0(\Omega \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_T, m \otimes \mu)$  и  $L^0(\Omega \times S, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_S, m \otimes \nu)$  соответственно,  $U : E \rightarrow F$  — частично интегральный оператор. Предположим, что  $U$  регулярен, и пусть  $U = U^+ - U^-$  — его разложение на положительную и отрицательную части. Тогда операторы  $U^+$  и  $U^-$  также являются частично интегральными.

◁ Поскольку  $U$  — частично интегральный оператор, тогда существует измеримая функция  $k(\omega, s, t)$  такая, что для любого  $x \in E$  и почти всех  $(\omega, s)$  выполнено

$$(Ux)(\omega, s) = \int_T k(\omega, s, t) x(\omega, t) d\mu(t).$$

Определим функции

$$k^+(\omega, s, t) = \max \{k(\omega, s, t), 0\}, \quad k^-(\omega, s, t) = \max \{-k(\omega, s, t), 0\}.$$

Тогда  $k = k^+ - k^-$  и  $|k| = k^+ + k^-$ . Обе функции  $k^+$  и  $k^-$  измеримы.

Зафиксируем произвольный неотрицательный элемент  $x \in E$ . По определению положительной части оператора  $U^+$  имеем

$$(U^+x)(\omega, s) = \sup \{(U(y))(\omega, s) : 0 \leq y \leq x\},$$

где супремум берется в решетке  $F$  (и, следовательно, для почти всех  $(\omega, s)$  как поточечный супремум).

Для любого  $y$ , удовлетворяющего  $0 \leq y \leq x$ , и почти всех  $(\omega, s)$

$$(Uy)(\omega, s) = \int_T k(\omega, s, t) y(\omega, t) d\mu(t) \leq \int_T k^+(\omega, s, t) y(\omega, t) d\mu(t) \leq \int_T k^+(\omega, s, t) x(\omega, t) d\mu(t).$$

Следовательно,

$$(U^+x)(\omega, s) \leq \int_T k^+(\omega, s, t) x(\omega, t) d\mu(t). \quad (2)$$

С другой стороны, для фиксированного  $s$  рассмотрим функцию

$$y_0(\omega, t) = x(\omega, t) \cdot \chi_{\{(\omega, t) \in \Omega \times T : k(\omega, s, t) \geq 0\}}.$$

Ясно, что  $0 \leq y_0 \leq x$ . Тогда

$$(Uy_0)(\omega, s) = \int_T k(\omega, s, t) y_0(\omega, t) d\mu(t) = \int_T k^+(\omega, s, t) x(\omega, t) d\mu(t).$$

Поскольку  $y_0$  входит в множество, по которому берется супремум, то

$$(U^+x)(\omega, s) \geq \int_T k^+(\omega, s, t) x(\omega, t) d\mu(t). \quad (3)$$

Из неравенств (2) и (3) получаем равенство для почти всех  $(\omega, s)$ :

$$(U^+x)(\omega, s) = \int_T k^+(\omega, s, t) x(\omega, t) d\mu(t).$$

Аналогично, для отрицательной части имеем

$$(U^-x)(\omega, s) = \sup \{(-Uy)(\omega, s) : 0 \leq y \leq x\}$$

и

$$(U^-x)(\omega, s) = \int_T k^-(\omega, s, t)x(\omega, t) d\mu(t).$$

Таким образом, для неотрицательных  $x \in E$  операторы  $U^+$  и  $U^-$  представляются в виде частично интегральных операторов с ядрами  $k^+$  и  $k^-$  соответственно. Для произвольного  $x \in E$  представление получается по линейности:  $x = x^+ - x^-$ , где  $x^+ = \max\{x, 0\}$ ,  $x^- = \max\{-x, 0\}$ . Итак,  $U^+$  и  $U^-$  — частично интегральные операторы.  $\triangleright$

Теперь напомним определение циклически компактного множества (см. [7]). Пусть  $\nabla$  — булева алгебра всех идемпотентов в  $L_\infty(\Omega, m)$ . Если  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  — сеть в  $L^0(\Omega \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_T, m \otimes \mu)$  и  $(\pi_\alpha)_{\alpha \in A}$  — разбиение единицы в  $\nabla$ , то ряд  $\sum_{\alpha \in A} \pi_\alpha x_\alpha$  ( $o$ )-сходится в  $L^0(\Omega \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_T, m \otimes \mu)$ , и сумма этого ряда называется *перемешиванием*  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  относительно  $(\pi_\alpha)_{\alpha \in A}$ . Эта сумма обозначается через  $\text{mix}(\pi_\alpha x_\alpha)$ . Для  $K \subset L^0(\Omega \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_T, m \otimes \mu)$  через  $\text{mix} K$  обозначается множество всех перемешиваний произвольных семейств элементов из  $K$ . Множество  $K$  называется *циклическим*, если  $\text{mix} K = K$ .

Для направленного множества  $A$  через  $\nabla(A)$  обозначается множество всех разбиений единицы в  $\nabla$ , заиндексированных элементами  $A$ . Отношение порядка на  $\nabla(A)$  определяется следующим образом:

$$v_1 \leq v_2 \iff \forall \alpha, \beta \in A (v_1(\alpha) \wedge v_2(\beta) \neq 0 \implies \alpha \leq \beta) (v_1, v_2 \in \nabla(A)).$$

Пусть  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  — сеть в  $L^0(\Omega \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_T, m \otimes \mu)$ . Для каждого  $v \in \nabla(A)$  положим  $x_v = \text{mix}(v(\alpha)x_\alpha)$  и получим новую сеть  $(x_v)_{v \in \nabla(A)}$ . Произвольная подсеть сети  $(x_v)_{v \in \nabla(A)}$  называется *циклической подсетью* сети  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ . Подмножество  $K \subset L^0(\Omega \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_T, m \otimes \mu)$  называется *циклически компактным*, если оно циклично и всякая сеть в  $K$  имеет циклическую подсеть, ( $o$ )-сходящуюся к некоторой точке из  $K$ . Циклическое множество называется *относительно циклически компактным*, если оно содержится в некотором циклически компактном множестве [7]. Для подмножества  $K$  в банаховом идеальном функциональном пространстве  $E$ , в определении циклической компактности будем рассматривать сходимость по норме  $\|\cdot\|_E$  вместо ( $o$ )-сходимости.

Линейный оператор  $U : E \rightarrow F$  называется *циклически компактным*, если для всякого ограниченного по норме множества  $B$  в  $E$  множество  $U(B)$  относительно циклически компактно [7].

Пусть  $a \in L_\infty(S, \nu)$  и  $b \in L_\infty(T, \mu)$ . Поскольку порядковый интервал в  $L_\infty(\Omega \times S, m \otimes \nu)$  является циклически компактным множеством (см. [13, теорема 1.3.7(2)]), то оператор

$$x(\omega, s) \in L_\infty(\Omega \times T, m \otimes \mu) \mapsto a(s) \int_T b(t)x(\omega, t) d\mu(t) \in L_\infty(\Omega \times S, m \otimes \nu) \quad (4)$$

является циклически компактным.

Множество  $K \subset L^0(T, \Sigma_T, \mu)$  называется *равноизмеримым*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует измеримое множество  $T_\varepsilon \subset T$  такое, что  $\mu(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ , и множество  $\{x\chi_{T_\varepsilon} : x \in K\}$  является относительно компактным в пространстве  $L_\infty(T, \mu)$  по  $\text{sup}$ -норме.

Это понятие играет фундаментальную роль в теории компактных операторов в банаховых идеальных пространствах. Однако в пространствах типа  $L_{p,r}$  ситуация существенно меняется. Как показано в [5, предложение 3], частично интегральные операторы

в этих пространствах оказываются компактными лишь в тривиальном случае нулевого ядра. В то же время такие операторы остаются циклически компактными [5, теорема 3].

Это наблюдение показывает, что классическое понятие равноизмеримости оказывается жестким для адекватного описания компактоподобных свойств в модульных (булевозначных) моделях и векторнозначных пространствах. Поэтому естественно искать его обобщение, согласованное с циклической компактностью. Исходя из этого, введем следующее определение.

Циклическое подмножество  $K \subset L^0(\Omega \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_T, m \otimes \mu)$  назовем *модульно-равноизмеримым*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует измеримое множество  $A_\varepsilon \subset \Omega \times T$  такое, что  $(m \otimes \mu)(\Omega \times T \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ , и множество  $\{x\chi_{A_\varepsilon} : x \in K\}$  является относительно циклически компактным в пространстве  $L_\infty(\Omega \times T, m \otimes \mu)$  по sup-норме.

**Лемма 3.1.** Пусть  $U : L_\infty(\Omega \times T, m \otimes \mu) \rightarrow L_\infty(\Omega \times S, m \otimes \nu)$  — частично интегральный оператор. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $A_\varepsilon \in \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_S$  такое, что  $(m \otimes \nu)(\Omega \times S \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$  и оператор  $P_0 \circ U$  является циклически компактным, где  $P_0$  означает оператор  $P_0(x) = \chi_{A_\varepsilon} x$ ,  $x \in L_\infty(\Omega \times S, m \otimes \nu)$ .

◁ Покажем, что  $U$  является ограниченным оператором. Пусть  $\{x_n\}$  — последовательность в  $L_\infty(\Omega \times T, m \otimes \mu)$ , равномерно сходящаяся к нулю, и пусть

$$U(x_n) \rightarrow y \in L_\infty(\Omega \times S, m \otimes \nu)$$

равномерно. Тогда по теореме Лебега о мажорированной сходимости имеем

$$(Ux_n)(\omega, s) \rightarrow 0 \quad \text{почти всюду на } \Omega \times S.$$

Следовательно,  $y = 0$ . Тем самым график оператора  $U$  замкнут, и по теореме о замкнутом графике заключаем, что  $U$  является ограниченным оператором.

По [14, гл. IV, теорема 1.5]  $U$  регулярен. Предложение 3.1 влечет, что  $|U|$  также является частично интегральным оператором. Пусть  $k(\omega, s, t)$  — ядро  $U$ . Тогда  $|U|$  также является частично интегральным оператором с ядром  $|k(\omega, s, t)|$ , и поэтому

$$\int_T |k(\omega, s, t)| d\mu(t) \in L_\infty(\Omega \times S, m \otimes \nu).$$

Следовательно, в силу [4, лемма 2, с. 409] существует последовательность простых функций

$$k_n(\omega, s, t) = \sum_{k=1}^{m_n} a_{k,n} \chi_{A_{k,n}}(\omega) \chi_{B_{k,n}}(s) \chi_{C_{k,n}}(t)$$

такая, что

$$k_n \rightarrow k \quad \text{в } L_1(\Omega \times S \times T, m \otimes \nu \otimes \mu).$$

Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что  $k_n(\omega, s, t) \rightarrow k(\omega, s, t)$  почти всюду на  $\Omega \times S \times T$ . Положим

$$h_n(\omega, s) = \int_T |k_n(\omega, s, t) - k(\omega, s, t)| d\mu(t).$$

По теореме Фубини имеем

$$\int_{\Omega \times S} h_n(\omega, s) dm \otimes \nu(\omega, s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Вновь, при необходимости переходя к подпоследовательности, можем считать  $h_n(\omega, s) \rightarrow 0$  почти всюду на  $\Omega \times S$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Так как  $m \otimes \nu$  — конечная мера, то по теореме Егорова существует измеримое множество  $A_0 \subset \Omega \times S$  такое, что  $(m \otimes \nu)(\Omega \times S \setminus A_0) < \varepsilon$  и  $h_n(\omega, s) \rightarrow 0$  равномерно на  $A_0$ . Для каждого  $n$  определим оператор

$$U_n x(\omega, s) = \chi_{A_0}(\omega, s) \int_T k_n(\omega, s, t) x(\omega, t) d\mu(t), \quad x \in L_\infty(\Omega \times T, m \otimes \mu).$$

Поскольку  $k_n$  — функция с разделяющимися переменными, то каждый оператор  $U_n$  является суммой операторов вида (4), и поэтому циклически компактным.

Пусть  $\|x\|_{L_\infty(\Omega \times T, m \otimes \mu)} \leq 1$ . Тогда почти для всех  $(\omega, s) \in \Omega \times S$  выполняется

$$|U_n x(\omega, s) - P_0 U x(\omega, s)| \leq \chi_{A_0}(\omega, s) \int_T |k_n(\omega, s, t) - k(\omega, s, t)| |x(\omega, t)| d\mu(t) \leq \chi_{A_0}(\omega, s) h_n(\omega, s).$$

Следовательно,

$$\|U_n - P_0 U\|_{L_\infty} \leq \|\chi_{A_0} h_n\|_{L_\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом, оператор  $P_0 U$  является пределом по норме циклически компактных операторов, и следовательно, циклически компактен<sup>2</sup>.  $\triangleright$

Теперь мы можем привести доказательство теоремы 1.1.

$\triangleleft$  ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть  $U$  является частично интегральным оператором. Зафиксируем  $0 \leq x \in E$  и  $\varepsilon > 0$ . Так как  $U$  является частично интегральным оператором, существует ядро  $k(\omega, s, t)$  такое, что

$$Ux(\omega, s) = \int_T k(\omega, s, t) x(\omega, t) d\mu(t) \in F.$$

Так как

$$(\omega, s) \in \Omega \times S \mapsto \int_T |k(\omega, s, t) x(\omega, t)| d\mu(t)$$

— измеримая функция, то существуют число  $M > 0$  и множество  $A_1 \in \Sigma_\Omega \times \Sigma_S$  с  $(m \otimes \nu)(\Omega \times S \setminus A_1) < \varepsilon/2$ , для которых

$$\int_T |k(\omega, s, t) x(\omega, t)| d\mu(t) \leq M \quad \text{для всех } (\omega, s) \in A_1.$$

Введем следующее обозначение:  $L_x = \{y \in E : \exists c > 0, |y| \leq cx\}$ , и пусть  $P_1$  обозначает оператор умножения на  $\chi_{A_1}$ . Тогда оператор  $P_1 \circ U : L_x \rightarrow F$  вновь является частично интегральным. По лемме 3.1 существует множество  $A_2 \in \Sigma_\Omega \times \Sigma_S$  такое, что  $(m \otimes \nu)(\Omega \times S \setminus A_2) < \varepsilon/2$  и оператор  $P_2 P_1 U : L_x \rightarrow L_\infty(\Omega \times S, m \otimes \nu)$  циклически компактен, где  $P_2$  — это оператор умножения на  $\chi_{A_2}$ . Так как  $(m \otimes \nu)(\Omega \times S \setminus (A_1 \cap A_2)) < \varepsilon$ , получаем, что  $U([-x, x])$  является модульно-равноизмеримым, что завершает доказательство.  $\triangleright$

<sup>2</sup> Всякий циклически компактный оператор в пространстве Банаха — Канторовича допускает представление в виде измеримого расслоения компактных операторов (см. [15]). Поскольку равномерный предел компактных операторов является компактным, отсюда следует, что равномерный предел циклически компактных операторов также является циклически компактным.

В заключение отметим, что остается открытым вопрос о справедливости обратного утверждения к теореме 1.1: является ли всякий  $L_\infty$ -однородный оператор, переводящий порядковые интервалы в модульно-равноизмеримые множества, частично интегральным? Положительный ответ на этот вопрос привел бы к модульному варианту теоремы Шахермайера и дал бы характеристическое описание класса частично интегральных операторов в терминах их действия на порядковые интервалы [16, 17].

Отметим также, что одним из ключевых инструментов настоящей работы является понятие циклической компактности, введенное более полувека назад профессором А. Г. Кусраевым [13]. Это понятие возникло естественным образом как булевозначный аналог классической компактности. Основы булевозначного анализа были заложены в совместных трудах С. С. Кутателадзе и А. Г. Кусраева [18, 19].

**Благодарности.** Авторы благодарят анонимного рецензента за тщательное прочтение рукописи и ценные замечания и рекомендации, которые позволили существенно улучшить изложение результатов и общую структуру статьи.

### Литература

1. Romanovsky V. I. Sur une classe d'equations intégrales linéaires // Acta Math.—1932.—Vol. 59.—P. 99–208. DOI: 10.1007/BF02546501.
2. Appel J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations.—New York etc.: Marcel Dekker, 2000. DOI: 10.1201/9781482270402.
3. Калитвин А. С., Калитвин В. А. Линейные операторы и уравнения с частными интегралами // Тр. Крымской осенней матем. школы-симпозиума. Современ. матем. Фундам. направления.—М.: Российский университет дружбы народов, 2019.—Т. 65, № 3.—С. 390–433. DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433.
4. Kudaybergenov K. K., Arziev A. D., Orinbaev P. R., Tanirbergen A. K. The Mercer's theorem for partial integral operators // J. Math. Sci.—2023.—Vol. 271, № 6.—P. 749–761. DOI: 10.1007/s10958-023-06747-w.
5. Арзиев А. Д., Кудайбергенов К. К., Орынбаев П. Р., Танирберген А. К. Частично интегральные операторы на пространствах Банаха — Канторовича // Мат. заметки.—2023.—Т. 114, № 1.—С. 18–37. DOI: 10.4213/mzm13703.
6. Eshkabilov Yu. Kh., Kucharov R. R. Partial integral operators of Fredholm type on Kaplansky–Hilbert module over  $L_0$  // Vladikavkaz Math. J.—2021.—Vol. 23, № 3.—P. 80–90. DOI: 10.46698/w5172-0182-0041-c.
7. Бухвалов А. В. Об интегральном представлении линейных операторов // Зап. науч. сем. ЛОМИ.—1974.—Т. 47.—С. 5–14.
8. Орынбаев П. Р., Тасоев Б. Б. О частично интегральном представлении линейных положительных операторов // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 1.—С. 101–111. DOI: 10.46698/s1056-5701-7829-j.
9. Tasojev B. B. Order structure of the space of partial integral operators // Сиб. матем. журн.—2026.—(В печати).
10. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—Dordrecht: Springer, 2006. DOI: 10.1007/978-1-4020-5008-4.
11. Kusraev A. G. Dominated Operators.—New York: Springer, 2000. DOI: 10.1007/978-94-015-9349-6.
12. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.
13. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.
14. Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin, Heidelberg: Springer, 1974. DOI: 10.1007/978-3-642-65970-6.
15. Kudaybergenov K. K., Ganiev I. G. Measurable bundles of compact operators // Methods Funct. Anal. Topology.—2001.—Vol. 7, № 4.—P. 1–5.
16. Schep A. R. Compactness properties of an operator which imply that it is an integral operator // Trans. Amer. Math. Soc.—1981.—Vol. 265, № 1.—P. 111–119. DOI: 1090/S0002-9947-1981-0607110-7.
17. Schachermayer W. Integral operators on  $L^p$ -spaces, Part I // Indiana Univ. Math. J.—1981.—Vol. 30, № 1.—P. 123–140.

18. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.—526 с.
19. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Boolean Valued Analysis: Selected Topics / Ed. A. E. Gutman.— Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—iv+400 p.—(Trends in Science: The South of Russia. A Mathematical Monograph. Issue 6).

*Статья поступила 2 января 2026 г.*

КУДАЙБЕРГЕНОВ КАРИМБЕРГЕН КАДИРБЕРГЕНОВИЧ  
Владикавказский научный центр РАН,  
главный научный сотрудник лаборатории нелинейных  
операторов в функцион. пространствах  
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1  
E-mail: karim20061@yandex.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-0311-9683>

ОРЫНБАЕВ ПАРАХАТДИИН РАХМАТ УЛИ  
Владикавказский научный центр РАН,  
младший научный сотрудник лаборатории нелинейных  
операторов в функцион. пространствах  
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1  
E-mail: paraxatorinbaev@gmail.com  
<https://orcid.org/0009-0001-8808-651X>

*Vladikavkaz Mathematical Journal*  
2026, Volume 28, Issue 1, P. 73–81

## PARTIAL INTEGRAL OPERATORS IN BANACH IDEAL FUNCTION SPACES

Kudaybergenov, K. K.<sup>1</sup> and Orinbaev, P. R.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Vladikavkaz Scientific Center of the RAS,  
1 Williams St., Villige of Mikhailovskoye 363110, Russia  
E-mail: karim20061@yandex.ru, paraxatorinbaev@gmail.com

**Abstract.** The problem of describing linear operators representable as integral operators was posed by J. von Neumann in the mid-1930s and for a long time remained one of the central problems in operator theory and functional analysis. A significant contribution to its solution was made in 1974 by Buchvalov, who established a criterion for the integral representability of linear operators in ideal function spaces. In subsequent studies, this topic has been further developed: in a recent work by Orynbaev and Tasoiev, a criterion for partial integral representability of positive  $L_\infty$ -homogeneous operators on sigma-finite spaces was obtained. In the present paper, a new notion of modular equimeasurability is introduced, based on the concept of cyclic compactness. Using this approach, it is proved that every partially integral operator acting in Banach ideal function spaces maps order intervals into modularly equimeasurable sets, which significantly extends and generalizes previously known results in this area.

**Keywords:** partial integral operator, integral operator, Banach ideal function spaces.

**AMS Subject Classification:** 46B42, 46B04.

**For citation:** Kudaybergenov, K. K. and Orinbaev, P. R. Partial Integral Operators in Banach Ideal Function Spaces, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 73–81 (in Russian). DOI: 10.46698/i0132-3339-6227-v.

## References

1. Romanovsky, V. I. Sur Une Classe D'Equations Intégrales Linéaires, *Acta Mathematica*, 1932, vol. 59, pp. 99–208. DOI: 10.1007/BF02546501.
2. Appel, J. M., Kalitvin, A. S. and Zabrejko, P. P. *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations*, New York etc., Marcel Dekker, 2000. DOI: 10.1201/9781482270402.

3. Kalitvin, A. S. and Kalitvin, V. A. Linear Operators and Equations with Partial Integrals, *Proceedings of the Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, Moscow, Peoples' Friendship University of Russia, 2019, vol. 65, no. 3, pp. 390–433 (in Russian). DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433.
4. Kudaibergenov, K. K., Arziev, A. D., Orinbaev, P. R. and Tanirbergen, A. K. The Mercer's Theorem for Partial Integral Operators, *Journal of Mathematical Sciences*, 2023, vol. 271, no. 6, pp. 749–761. DOI: 10.1007/s10958-023-06747-w.
5. Arziev, A. D., Kudaibergenov, K. K., Orynbayev, P. R. and Tanirbergen, A. K. Partially Integral Operators on Banach–Kantorovich Spaces, *Mathematical Notes*, 2023, vol. 114, no. 1–2, pp. 15–29. DOI: 10.1134/S0001434623070027.
6. Eshkabilov, Yu. Kh. and Kucharov, R. R. Partial Integral Operators of Fredholm Type on Kaplansky–Hilbert Module over  $L_0$ , *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2021, vol. 23, no. 3, pp. 80–90. DOI: 10.46698/w5172-0182-0041-c.
7. Bukhvalov, A. V. On the Integral Representation of Linear Operators, *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, 1974, vol. 47, pp. 5–14 (in Russian).
8. Orinbayev, P. R. and Tasoev, B. B. On Partial Integral Representation of Linear Positive Operators, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 101–111 (in Russian). DOI: 10.46698/s1056-5701-7829-j.
9. Tasoev, B. B. Order Structure of the Space of Partial Integral Operators, *Siberian Mathematical Journal*, 2026 (In Print).
10. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. *Positive Operators*, Springer, Dordrecht, 2006. DOI: 10.1007/978-1-4020-5008-4.
11. Kusraev, A. G. *Dominated Operators*, New York, Springer, 2000. DOI: 10.1007/978-94-015-9349-6.
12. Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. *Functional Analysis*, Moscow, Nauka, 1984 (in Russian).
13. Kusraev, A. G. *Vector Duality and Its Applications*, Novosibirsk, Nauka, 1985 (in Russian).
14. Schaefer, H. H. *Banach Lattices and Positive Operators*, Berlin, Heidelberg, Springer, 1974. DOI: 10.1007/978-3-642-65970-6.
15. Kudaibergenov, K. K. and Ganiev, I. G. Measurable Bundles of Compact Operators, *Methods of Functional Analysis and Topology*, 2001, vol. 7, no. 4, pp. 1–5.
16. Schep, A. R. Compactness Properties of an Operator which Imply That It Is an Integral Operator, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1981, vol. 265, no. 1, pp. 111–119. DOI: 1090/S0002-9947-1981-0607110-7.
17. Schachermayer, W. Integral Operators on  $L^p$ -Spaces, Part I, *Indiana University Mathematics Journal*, 1981, vol. 30, no. 1, pp. 123–140.
18. Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S. *Introduction to Boolean-Valued Analysis*, Moscow, Nauka, 2005, 526 p. (in Russian).
19. Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S. *Boolean Valued Analysis: Selected Topics*, Trends in Science: The South of Russia. A Mathematical Monograph. Issue 6, Ed. A. E. Gutman, Vladikavkaz, SMI VSC RAS, 2014, iv+400 p.

Received January 2, 2026

KARIMBERGEN K. KUDAYBERGENOV

Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,

1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia,

Chief Researcher of the Laboratory of Nonlinear Operators in Functional Spaces

E-mail: karim20061@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0003-0311-9683>

PARAKHATDIIN R. ORINBAEV

Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,

1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia,

Junior Researcher of the Laboratory of Nonlinear Operators in Functional Spaces

E-mail: paraxatorinbaev@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0001-8808-651X>

УДК 517.98  
DOI 10.46698/o9578-0948-6676-e

## ЛЕММА ФАРКАША ДЛЯ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ<sup>#</sup>

А. Г. Кусраев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Северо-Кавказский центр математических исследований ВЦ РАН,  
Россия, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1;

<sup>2</sup> Южный математический институт ВЦ РАН,  
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: kusraev@smath.ru

*Светлой памяти профессора Семёна Самсоновича Кутателадзе*

**Аннотация.** Лемма Фаркаша является классическим результатом, лежащим в основе двойственности линейного программирования и теории оптимизации. Известны многочисленные ее обобщения, в том числе и различные линейные и нелинейные операторные версии. Однако, лемма Фаркаша неверна для полилинейных операторов и даже для билинейных функционалов на конечномерном пространстве, если число фигурирующих в ее формулировке операторов больше двух. В настоящей заметке выделен класс орторегулярных полилинейных операторов из декартовой степени равномерно полной векторной решетки в пространство Канторовича, для которых лемма Фаркаша имеет место в полном объеме. Для этой цели используется линеаризация с помощью степени векторной решетки, которая позволяет заменить орторегулярный полилинейный оператор регулярным линейным оператором. Показано также, что аналогичная конструкция работает и в том случае, когда область определения операторов — векторное пространство с отношением дизъюнктивности, согласованным с линейной структурой.

**Ключевые слова:** системы линейных неравенств, лемма Фаркаша, векторная решетка, принцип стратификации Кутателадзе, орторегулярный полилинейный оператор, отношение дизъюнктивности.

**AMS Subject Classification:** 46A16, 46B42, 46G25.

**Образец цитирования:** Кусраев А. Г. Лемма Фаркаша для полилинейных операторов // Владикавказ. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 1.—С. 82–97. DOI: 10.46698/o9578-0948-6676-e.

### 1. Введение

Лемма Фаркаша<sup>1</sup> — фундаментальный результат линейного программирования и выпуклого анализа — впервые опубликованный в 1898 г. на венгерском языке [1] и в 1902 г. на немецком языке [2], формулируется следующим образом.

**Лемма Фаркаша.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$  и  $\langle a, x \rangle$  обозначает скалярное произведение векторов  $a$  и  $x$ . Для любых  $m + 1$  вектора  $a_1, \dots, a_m, c \in \mathbb{R}^n$ , равносильны утверждения:

---

<sup>#</sup> Работа выполнена в Северо-Кавказском центре математических исследований ВЦ РАН при поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2026-738.

© 2026 Кусраев А. Г.

<sup>1</sup> Дьюла (Юлиус) Фаркаш (1847–1930) — венгерский математик и физик-теоретик, дал математическую формулировку механическому принципу Фурье и разработал теорию линейных неравенств, чтобы вывести необходимое условие равновесия механической системы.

(1) неравенство  $\langle c, x \rangle \leq 0$  является следствием системы линейных однородных неравенств  $\langle a_i, x \rangle$  ( $i = 1, \dots, m$ ), т. е.

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n) \langle a_1, x \rangle \leq 0 \wedge \dots \wedge \langle a_m, x \rangle \leq 0 \implies \langle c, x \rangle \leq 0.$$

(2) существуют  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}_+$  такие, что  $c = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k$ .

Здесь  $\mathbb{R}$  — поле вещественных чисел и  $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$  — множество натуральных чисел. Лемма Фаркаша остается в силе, если функции  $\langle c, \cdot \rangle$ ,  $\langle a_i, \cdot \rangle$  заменить любыми линейными функционалами  $g, f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  на произвольном векторном пространстве.

**Теорема 1.1.** Для произвольных линейных функционалов  $g, f_1, \dots, f_m \in X^*$  неравенство  $g(x) \leq 0$  является следствием системы неравенств  $f_i(x) \leq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) в том и только в том случае, когда  $g = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i$  для некоторых  $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ .

Хорошо известно, какую важную роль сыграл этот классический результат в развитии теории нелинейной оптимизации. В конце 1930-х гг. Л. В. Канторович открыл новую область применения линейных неравенств — экономическое планирование. Исторический комментарий о развитии теории линейных неравенств имеется в [3, 4]. Множество различных доказательств, обобщений и приложений этой леммы можно найти в литературе (см. [5–10], а также ссылки в них).

Если в теореме 1.1 функции  $f_1, \dots, f_m, g$  не линейны, но выпуклы и выполняется какое-нибудь условие регулярности (например, условие Слейтера), то соответствующая лемма Фаркаша с точностью до элементарных оговорок есть не что иное, как *теорема Каруша — Куна — Таккера*, см. [5]. Бесконечномерной геометрической формой леммы Фаркаша можно считать известную *теорему Дубовицкого — Миллота*, см. [11].

Вопрос о справедливости невыпуклых вариантов леммы Фаркаша восходит к монографии М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [12], в которой введена *S-процедура*<sup>2</sup> — аналог леммы Фаркаша для квадратичных функций. Исторические корни, обзор приложений и взаимосвязей этого направления с разными разделами математики см. в В. Полик и Т. Терлаки [14]. В последнее время группа китайских математиков развивает подход, который объединяет и обобщает классическую лемму Фаркаша для линейных систем и *S*-лемму для квадратичных систем, см. [15]. Отметим также свежую работу [16], в которой *S*-лемма обобщается на минимаксные квадратичные функции.

Лемма Фаркаша в том виде, каком она представлена в теореме 1.1, неверна для полилинейных форм и однородных полиномов. Следующий пример, найденный Дауни в [17], показывает, что эта лемма не выполняется даже для билинейных форм, определенных на  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ .

**ПРИМЕР 1.1.** Рассмотрим три билинейные формы  $A, B, C : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$A(x, y) = (2x_1 + 3x_2)y_1 + (x_1 + 2x_2)y_2,$$

$$B(x, y) = (3x_1 + x_2)y_1 + (2x_1 + x_2)y_2,$$

$$C(x, y) = (2x_1 + x_2)y_1 + (x_1 + x_2)y_2,$$

где  $x := (x_1, x_2)$  и  $y = (y_1, y_2)$ . Как показано в [17, пример 1], неравенство  $C(x, y) \leq 0$  является следствием системы двух неравенств  $A(x, y) \leq 0$  и  $B(x, y) \leq 0$ , однако  $C$  линейно независима от  $A$  и  $B$ , т. е.  $C \neq \lambda A + \mu B$ .

**ПРИМЕР 1.2.** Лемма Фаркаша также не выполняется для однородных многочленов. Рассмотрим  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  и  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , заданные формулами  $P(x_1, x_2) = x_1^2$  и

<sup>2</sup>Название — от английского Stability; означает метод анализа устойчивости нелинейных систем, опирающийся на ключевую *S*-лемму В. А. Якубовича, см. [13].

$Q(x_1, x_2) = x_2^2$ . Тогда  $P(x_1, x_2) \geq 0$  влечет  $Q(x_1, x_2) \geq 0$ , поскольку оба многочлена всегда неотрицательны, но  $P$  и  $Q$  линейно независимы, см. [18].

Следующий результат, утверждающий, что лемма Фаркаша имеет место для двух полилинейных форм, определенных на декартовом произведении любых (не обязательно конечномерных) векторных пространств, приводится в упомянутой выше работе Дауни [17, теорема 2] как простое следствие основного результата из [19].

**Теорема 1.2.** Пусть  $A$  и  $B$  —  $n$ -линейные формы, определенные на декартовом произведении  $X_1 \times \cdots \times X_n$  векторных пространств  $X_1, \dots, X_n$ . Тогда  $\{A \leq 0\} \subset \{B \leq 0\}$  в том и только в том случае, когда  $B = \alpha A$  для некоторого  $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ .

Здесь возникает естественный вопрос: существует ли нетривиальный класс  $n$ -линейных форм такой, что для любого конечного набора форм из этого класса имеет место лемма Фаркаша? Такой класс указан в работе Арона, Гарсия, Пинаско и Зальдуэндо [18, теорема 1], в которой показано, что лемма Фаркаша справедлива для одновременно диагоналируемых билинейных форм на  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Приведем точную формулировку.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** Говорят, что  $n \times n$  матрицы  $A_1, \dots, A_m$  одновременно диагоналируемы, если существует обратимая  $n \times n$  матрица  $C$  такая, что  $C^{-1}A_1C, \dots, C^{-1}A_mC$  — диагональные матрицы. Билинейные формы  $B_1, \dots, B_m$ , определенные на  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , одновременно диагоналируемы, если таковы представляющие их матрицы  $\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_m$  в стандартном базисе  $e_1, \dots, e_n$  в  $\mathbb{R}^n$ , т. е.  $\bar{B}_k = (B_k(e_i, e_j))_{i,j=1}^n$ .

**Теорема 1.3.** Для любого конечного набора одновременно диагоналируемых билинейных форм  $A_j, B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) следующие утверждения равносильны:

- (1)  $A_1(x, y) \leq 0, \dots, A_m(x, y) \leq 0 \implies B(x, y) \leq 0$ ;
- (2)  $B = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_m A_m$  для некоторых  $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ .

В [18, замечание 1] отмечено также, что теорема 1.3 остается в силе, если  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  — гильбертово пространство и  $A_1, \dots, A_m$  — симметричные билинейные формы на  $H \times H$ , определяемые формулой  $A_i(x, y) = \langle y, T_i x \rangle$  ( $i = 1, \dots, m$ ), где  $T_1, \dots, T_m$  — некоторые компактные самосопряженные коммутирующие операторы в  $H$ . Близкие вопросы ставятся и в задачах абсолютной устойчивости систем регулирования с аналогичными ответами, см. [20, теоремы 8 и 9].

Цель настоящей заметки — показать, что лемму Фаркаша типа 1.6 можно распространить на обширный класс полилинейных операторов, действующих в пространстве Канторовича. В § 2 кратко изложен принцип стратификации, предложенный С. С. Кутателадзе для исследования операторов со значениями в пространстве Канторовича, а также некоторые приложения к операторным формам леммы Фаркаша. В § 3 рассмотрен класс орторегулярных полилинейных операторов между векторными решетками и для этого класса установлена лемма Фаркаша. Для определения орторегулярных полилинейных операторов в области определения нужно лишь отношение дизъюнктивности, а не структура векторной решетки целиком. В § 4 устанавливается вариант леммы Фаркаша для орторегулярных полилинейных операторов, определенных на векторном пространстве, с аксиоматически заданным отношением дизъюнктивности.

## 2. Вклад С. С. Кутателадзе

Линейный функционал определяется с точностью до скалярного множителя по своей нулевой гиперплоскости, т. е. по своему ядру. В то же время, линейный оператор лишь в редких случаях восстанавливается по своему ядру с точностью до простого множителя. В работе [21] С. С. Кутателадзе предложил новый метод исследования операторов

со значениями в пространстве Канторовича, основанный на следующем эвристическом положении (см. также [22, теорема 4.3 и замечание 4.6]).

**Принцип стратификации Кутателадзе.** *Линейный оператор  $T$  со значениями в пространстве Канторовича  $Y$  определяется с точностью до ортоморфизма (оператора, сохраняющего полосы) по семейству нулевых подпространств ядер его слоев, т. е. по семейству ядер  $\ker(\pi \circ T)$ , где  $\pi$  пробегает множество  $\mathbb{P}(Y)$  порядковых проекторов в  $Y$ .*

Этот принцип эффективен в различных задачах теории операторов. В частности, работы С. С. Кутателадзе [23, 24, 25, 26] демонстрируют как принцип стратификации в сочетании с булевозначным анализом применяется к изучению систем линейных неравенств с операторами. В настоящем параграфе рассмотрим коротко операторные варианты леммы Фаркаша.

Используются стандартные обозначения и термины из книги Алипрантиса и Бёркиншо [27]. Все рассматриваемые векторные пространства предполагаются вещественными. Для векторной решетки  $G$  символами  $\mathbb{B}(G)$  и  $\mathbb{P}(G)$  обозначаем полные булевы алгебры соответственно *полос* и *порядковых проекторов* в  $G$ . *Разбиением элемента  $b \in \mathbb{B}$*  называют семейство (конечное или бесконечное)  $(b_\xi)$  в  $\mathbb{B}$  такое, что  $b_\xi \wedge b_\eta = 0$  для всех  $\xi \neq \eta$  и  $b = \sup_\xi b_\xi$ ; если  $b$  — единица булевой алгебры  $\mathbb{B}$ , то  $(b_\xi)$  именуют *разбиением единицы*. Напомним также, что  $x, y \in G$  *дизъюнкты* (символически,  $x \perp y$ ), если  $|x| \wedge |y| = 0$ ; дизъюнктное дополнение множества  $M \subset \mathbb{B}$  определяется формулой  $M^\perp := \{x \in F : (\forall y \in M) x \perp y\}$ .

Векторную решетку называют *пространством Канторовича*<sup>3</sup>, если она *порядково полна*, т. е. в ней каждое порядково ограниченное множество имеет точную верхнюю границу. *Универсально полной* принято называть векторную решетку, которая одновременно порядково полна и *латерально полна* (т. е. каждое множество положительных попарно дизъюнктивных элементов имеет точную верхнюю границу).

Для архимедовой векторной решетки  $Y$  существует единственная (с точностью до решеточного гомоморфизма) универсально полная векторная решетка  $Y^u$  (называемая *порядковым пополнением  $Y$* ) такая, что  $Y$  решеточно изоморфна порядково плотной векторной подрешетке  $Y^u$ , см. [27, с. 126]. Универсальное пополнение  $Y^u$  является  $f$ -алгеброй с единицей умножения  $\mathbb{1}$ , см. [27, гл. 2, упр. 13]. *Ортоморфизмом* в  $Y$  называют оператор  $\pi \in L(Y)$ , служащий ограничением на  $Y$  оператора умножения в  $f$ -алгебре  $Y^u$ , т. е.  $\pi(x) = ay$  ( $y \in Y$ ) для некоторого  $a \in Y^u$ , см. [27, определение 2.41 и замечания на с. 127].

Пусть  $X$  — вещественное векторное пространство,  $Y$  — некоторое пространство Канторовича,  $Y_+ := \{y \in Y : y \geq 0\}$  — конус положительных элементов  $Y$ . Символом  $L(X, Y)$  обозначим пространство линейных операторов из  $X$  в  $Y$ . Обозначим  $\ker(T) := \{T = 0\} := T^{-1}(0)$  и  $\{T \leq 0\} := \{x \in X : Tx \leq 0\} := T^{-1}(-Y_+)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** Предположим, что на  $X$  задана  $Y$ -значная полунорма  $p : X \rightarrow Y_+$ , т. е.  $p$  обладает свойствами нормы:  $p(x) = 0 \iff x = 0$ ,  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ ,  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  для всех  $x, y \in X$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$ . В этом случае выделяют класс *мажорируемых операторов*, т. е. таких операторов  $T \in L(X, Y)$ , что существует положительный ортоморфизм  $\alpha \in \text{Orth}(Y)$ , обеспечивающий оценку  $|Tx| \leq \alpha p(x)$  для всех  $x \in X$ . Множество мажорируемых линейных операторов из  $X$  в  $Y$  обозначим символом  $L^{(m)}(X, Y)$ .

Теперь можем уточнить формулировку принципа стратификации Кутателадзе.

<sup>3</sup> Пространство Канторовича называют также *дедекндово полным пространством Рисса* [27, с. 14] или *порядково полной векторной решеткой* [28, с. 137].

**Теорема 2.1.** *Линейный оператор  $T$  из векторного пространства  $X$  в пространство Канторовича  $Y$  восстанавливается в классе мажорируемых операторов  $L^{(m)}(X, Y)$  с точностью до ортоморфизма по семейству ядер  $\ker(\pi \circ T)$  слоев  $\pi \circ T$  оператора  $T$ :*

$$(\forall S, T \in L^{(m)}(X, Y)) (\forall \pi \in \mathbb{P}(Y)) \\ \ker(\pi \circ S) \subset \ker(\pi \circ T) \iff (\exists \lambda \in \text{Orth}(Y)) T = \lambda S.$$

◁ О доказательстве см. в [21, теорема 1] и [22, замечание 4.6]. ▷

Операторная версия леммы Фаркаша формулируется следующим образом.

**Теорема 2.2.** *Пусть  $T, S_1, \dots, S_N \in L^{(m)}(X, Y)$  — линейные мажорированные операторы из векторного пространства  $X$  в пространство в Канторовича  $Y$ . Тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) *для любого  $\pi \in \mathbb{P}(Y)$  операторное неравенство  $\pi T \leq 0$  является следствием системы операторных неравенств  $\pi S_1 x \leq 0, \dots, \pi S_N x \leq 0$ , т. е.*

$$\{\pi T \leq 0\} \supset \{\pi S_1 \leq 0\} \cap \dots \cap \{\pi S_N \leq 0\} \quad (\pi \in \mathbb{P}(Y));$$

(2) *существуют положительные ортоморфизмы  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(Y^u)$  такие, что*

$$T = \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_N S_N,$$

т. е.  $T$  содержится в операторно выпуклой оболочке операторов  $S_1, \dots, S_N$ .

◁ Этот факт установил С. С. Кутателадзе в [24, теорема 1.1], используя булевозначный анализ [29] и субдифференциальное исчисление [30]. Доказательство, использующее лишь стандартные средства, содержится [22, теорема 5.5.] ▷

Как уже отмечалось выше, лемма Фаркаша не имеет места для полилинейных операторов. Однако, справедлив следующий операторный вариант теоремы 1.2.

**Теорема 2.3.** *Для любой пары мажорируемых  $n$ -линейных операторов  $S$  и  $T$  из декартова произведения векторных пространств  $X_1 \times \dots \times X_n$  в пространство Канторовича  $Y$  существует положительный ортоморфизм  $\alpha \in \text{Orth}(G)$ , для которого  $S = \alpha T$ , в том и только в том случае, когда  $\{\pi S \leq 0\} \subset \{\pi T \leq 0\}$  для всех  $\pi \in \mathbb{P}(Y)$ .*

◁ Доказательство, приведенное в [24, теорема 1.3] представляет собой интерпретацию теоремы 1.2 в подходящей булевозначной модели. ▷

Лемма Фаркаша не выполняется также в классе сублинейных функций и операторов (т. е. положительно однородных и субаддитивных операторов, см. [6, определение 1.3.4(2)]); соответствующий пример приводится в работе [31], где лемма Фаркаша доказана для сублинейных функций с разделяющимися переменными, определенных на конечномерном пространстве. Как показал С. С. Кутателадзе [24, 26], операторный вариант леммы Фаркаша имеет место для полиэдральных сублинейных операторов. Обозначим символом  $\text{Sub}(X, Y)$  множество всех сублинейных операторов из  $X$  в  $Y$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.** Оператор  $P \in \text{Sub}(X, Y)$  называют *полиэдральным* и пишут  $P \in \text{PSub}(X, Y)$ , если  $P$  представляет собою верхнюю огибающую конечного набора линейных операторов, т. е. если найдутся  $A_1, \dots, A_k \in L(X, Y)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , такие, что

$$P(x) = \bigvee_{i=1}^k A_i(x) := A_1 x \vee \dots \vee A_k x \quad (x \in X).$$

Если  $X$  снабжено какой-нибудь  $Y$ -полунормой, то считаем сублинейный оператор  $P$  мажорированным, т. е. что  $A_1, \dots, A_k \in L^{(m)}(X, Y)$ .

**Теорема 2.4.** Пусть  $X$  — вещественное  $Y$ -полунормированное пространство, где  $Y$  — некоторое пространство Канторовича. Допустим также, что заданы мажорированные полиэдральные сублинейные операторы  $P_1, \dots, P_N \in \text{PSub}^{(m)}(X, Y)$  и мажорированный сублинейный оператор  $P \in \text{Sub}^{(m)}(X, Y)$ . Следующие утверждения эквивалентны:

(1) для всех  $\pi \in \mathbb{P}(Y)$  сублинейное операторное неравенство  $\pi P(x) \geq 0$  является следствием системы полиэдральных сублинейных операторных неравенств  $\pi P_1(x) \leq 0, \dots, \pi P_N x \leq 0$ , т. е.  $\{\pi P \geq 0\} \supset \{\pi P_1 \leq 0\} \cap \dots \cap \{\pi P_N \leq 0\}$ ;

(2) найдутся положительные ортоморфизмы  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(Y^u)$  такие, что

$$P(x) + \sum_{k=1}^N \alpha_k P_k(x) \geq 0 \text{ для всех } x \in X.$$

◁ Доказательство см. в [24, теорема 2.2]. ▷

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.** Случай неоднородных полиэдральных сублинейных неравенств рассмотрен в другой работе С. С. Кутателадзе [26], в которой приводится также вариант принципа Лагранжа для полиэдральных мажорированных сублинейных операторов.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.** Некоторые иные возможности, открывающиеся в рамках представленного выше подхода, представлены в обзорной статье [22] и в монографии [29].

### 3. Орторегулярные полилинейные операторы

В этом параграфе рассмотрим класс *регулярных ортосимметричных* полилинейных операторов между векторными решетками, для которого линейаризация посредством *степени векторной решетки* позволяет получить полноценную лемму Фаркаша. Начнем с необходимых определений. Всюду в этом параграфе  $E$  и  $F$  — архимедовы векторные решетки.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.**  $n$ -Линейный оператор  $S : E^n \rightarrow F$  называют *положительным* (и пишут  $S \geq 0$ ), если  $S(x_1, \dots, x_n) \geq 0$  для всех  $0 \leq x_1, \dots, x_n \in E$ ; *регулярным*, если он представим в виде разности двух положительных  $n$ -линейных операторов; *решеточным мультиморфизмом* или *решеточным  $n$ -морфизмом*, если  $|T(x_1, \dots, x_n)| = T(|x_1|, \dots, |x_n|)$  для всех  $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.**  $n$ -Линейный оператор  $S : E^n \rightarrow F$  называют *симметричным*, если  $S(x_1, \dots, x_n) = S(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$  для любой перестановки  $\sigma$  множества  $\{1, \dots, n\}$ . Скажем, что  $S$  *ортосимметричен*, если  $S(x_1, \dots, x_n) = 0$  для всех  $x_1, \dots, x_n \in E$  таких, что  $|x_k| \wedge |x_l| = 0$  для некоторой пары  $1 \leq k, l \leq n$ ;  $S$  называют *орторегулярным*, если  $S$  можно представить в виде разности двух положительных ортосимметричных  $n$ -линейных операторов.

Отметим следующие важные свойства ортосимметричных операторов между векторными решетками: 1) положительный ортосимметричный оператор является симметричным, однако обратное не всегда верно [32, теорема 2]; 2) мультиморфизм ортосимметричен в том и только в том случае, когда он симметричен [33, лемма 2.1].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.** Пусть  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ . Пару  $(E^{n\odot}, \odot_n)$  называют  *$n$ -й степенью* векторной решетки  $E$ , если выполнены следующие условия:

(1)  $E^{n\odot}$  — векторная решетка;

(2)  $\odot_n : E^n \rightarrow E^{n\odot}$  — симметричный решеточный  $n$ -морфизм (называемый *каноническим*);

(3) для любой векторной решетки  $F$  и любого симметричного решеточного  $n$ -морфизма  $S : E^n \rightarrow F$  существует единственный решеточный гомоморфизм  $S^\odot : E^{n\odot} \rightarrow F$  такой, что  $S = S^\odot \circ \odot_n$ .

В следующем результате собраны основные свойства степени векторной решетки: существование, универсальность по отношению к классу орторегулярных операторов, сюръективность канонического  $n$ -морфизма.

**Теорема 3.1.** Для произвольных  $n \in \mathbb{N}$  и (архимедовой) векторной решетки  $E$  справедливы следующие утверждения:

(1) существует единственный (с точностью до решеточного изоморфизма)  $n$ -я степень  $(E^{n\odot}, \odot_n)$  векторной решетки  $E$ ;

(2) для любой равномерно полной векторной решетки  $F$  и любого орторегулярного  $n$ -линейного оператора  $S : E^n \rightarrow F$  существует единственный линейный регулярный оператор  $S^\odot : E^{n\odot} \rightarrow F$  такой, что  $S = S^\odot \circ \odot_n$ ;

(3) если  $E$  равномерно полна, то ортосимметричный  $n$ -линейный оператор  $\odot_n$  сюръективен, т. е. любой элемент  $x \in E^\odot$  допускает представление  $x = x_1 \odot_n \cdots \odot_n x_n$  для некоторых  $x_1, \dots, x_n \in E$ .

◁ См. Булабиар и Бускес [33, теоремы 3.2, 3.3(2) и 5.1(1)]. ▷

Теперь все готово, чтобы представить основной результат данного параграфа.

**Теорема 3.2.** Предположим, что  $E$  — равномерно полная векторная решетка,  $G$  — пространство Канторовича и  $1 \leq n, N \in \mathbb{N}$ . Для любого конечного набора орторегулярных  $n$ -линейных операторов  $S_1, \dots, S_N, S$  из  $E^n$  в  $G$  равносильны утверждения:

(1) для любых  $\pi \in \mathbb{P}(G)$  и  $x_1, \dots, x_n \in E$  верна импликация<sup>4</sup>

$$\pi S_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \wedge \dots \wedge \pi S_N(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \implies \pi S(x_1, \dots, x_n) \leq 0.$$

(2) существуют положительные ортоморфизмы  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(G^u)$  такие, что

$$S = \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_N S_N.$$

◁ Нужно лишь убедиться, что из (1) следует (2), так как обратное утверждение очевидно. По теореме 3.1(2) существуют регулярные линейные операторы  $S^\odot, S_1^\odot, \dots, S_N^\odot$  из  $E^{n\odot}$  в  $F$  такие, что  $S = S^\odot \circ \odot_n, S_1 = S_1^\odot \circ \odot_n, \dots, S_N = S_N^\odot \circ \odot_n$ . Ввиду 3.1(3) для произвольного  $u \in E^{n\odot}$  можно подобрать такие  $x_1, \dots, x_n \in E$ , что  $u = x_1 \odot \cdots \odot x_n := \odot_n(x_1, \dots, x_n)$ . Предположим, что  $S_k^\odot(u) \leq 0$  для всех  $k = 1, \dots, N$ . Тогда  $S_k(x_1, \dots, x_n) = S_k^\odot(u) \leq 0$  для всех  $k = 1, \dots, N$  и по условию  $S(x_1, \dots, x_n) \leq 0$ . Отсюда следует, что  $S^\odot(u) = S(x_1, \dots, x_n) \leq 0$ . Применив теорему 2.2 к линейным операторам  $S^\odot, S_1^\odot, \dots, S_N^\odot$ , найдем положительные ортоморфизмы  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(G)$  такие, что

$$S = S^\odot \circ \odot_n = \alpha_1 S_1^\odot \circ \odot_n + \dots + \alpha_N S_N^\odot \circ \odot_n = \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_N S_N.$$

Остается заметить, что операторы  $S^\odot, S_1^\odot, \dots, S_N^\odot$  мажорируются  $G$ -значной полунормой  $p : E^{n\odot} \rightarrow G$ , определяемой формулой  $p(u) = |S^\odot|(|u|) + |S_1^\odot|(|u|) + \dots + |S_N^\odot|(|u|)$ . ▷

<sup>4</sup> Символ  $\wedge$  используется двояко: как знак логической конъюнкции и как знак инфимума в булевой алгебре или векторной решетке; точный смысл всегда ясен из контекста.

Напомним, что  $n$ -однородный полином — отображение  $P : E \rightarrow F$ , определяемое формулой  $P(x) = \check{P}(x, \dots, x)$ , где  $\check{P}$  — единственным образом определенный симметрический полилинейный оператор из  $E^n$  в  $F$ . Положительность и регулярность  $P$  означают, что таковым является полилинейный оператор  $\check{P}$  [34].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4.** Однородный полином  $P$  из  $E$  в  $F$  называют *ортогонально аддитивным*, если  $|x| \wedge |y| = 0$  влечет  $P(x + y) = P(x) + P(y)$  для всех  $x, y \in E$  и *ортотрегулярным*, если  $P$  можно представить как разность двух положительных ортогонально аддитивных однородных полиномов.

**Следствие 3.1.** Пусть  $E, G, n$  и  $N$  — такие же, как и в теореме 3.2. Для оротрегулярных  $n$ -однородных полиномов  $P_1, \dots, P_N, P : E \rightarrow G$  равносильны утверждения:

(1) для любых  $\pi \in \mathbb{P}(G)$  и  $x_1, \dots, x_n \in E$  имеет место импликация

$$\pi \check{P}_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \wedge \dots \wedge \pi \check{P}_N(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \implies \pi P(x_1, \dots, x_n) \leq 0;$$

(2) существуют положительные ортоморфизмы  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(G^u)$  такие, что

$$P = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_N P_N.$$

◁ Нужно применить теорему 3.2 к полилинейным операторам  $\check{P}_1, \dots, \check{P}_N, \check{P}$ , принимая во внимание тот хорошо известный факт, что порядковог ограниченный  $n$ -однородный полином  $P$  ортогонально аддитивен в том и только в том случае, когда ассоциированный  $n$ -линейный оператор  $\check{P}$  ортосимметричен, см., например, [34]. ▷

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.** Определение 3.3 предложено в работе Булабиар и Бускеса [33, определение 3.1]. Обычно для удобства полагают  $E^{1\circ} = E$  и  $\odot_1 = I_E$ . Полином  $j_n : E \rightarrow E^{n\circ}$ , порожденный  $n$ -линейным оператором  $\odot_n$ , положителен и ортогонально аддитивен. Более того, всякий регулярный ортогонально аддитивный  $n$ -однородный полином  $P : E \rightarrow F$  допускает представление вида  $P = T \circ j_n$ , где  $T$  — линейный регулярный оператор из  $E^{n\circ}$  в  $F$ , см. [34].

#### 4. Векторные пространства с дизъюнктивностью

В этом параграфе покажем, что результаты об оротрегулярных полилинейных операторах можно распространить на тот случай, когда область определения представляет собой декартову степень векторного пространства с аксиоматически заданной дизъюнктивностью. Начнем с необходимых сведений об отношении дизъюнктивности.

На непустом множестве  $X$  рассмотрим двухместное отношение  $\perp \subset X \times X$ , а также тождественное отношение  $\Delta(X^2) := \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$  — *диагональ*  $X \times X$ . Будем писать  $x \perp y$  вместо  $(x, y) \in \perp$ . Для  $x \in X$  и  $A \subset X$  обозначим  $\{x\}^\perp := \{y \in X : x \perp y\}$ ,  $A^\perp := \bigcap \{\{x\}^\perp : x \in A\}$ ,  $[A] := A^{\perp\perp} := (A^\perp)^\perp$  и  $[x] := [\{x\}]$ . Следующее определение см. в [28, 0.1.9]. Пусть  $0$  обозначает выделенный элемент множества  $X$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.** Отношение  $\perp$  называют *отношением дизъюнктивности* или *дизъюнктивностью* (в множестве  $X$ ), если выполнены условия:

- (i)  $\perp = \perp^{-1}$ ;
- (ii)  $\perp \cap \Delta(X^2) = \{0, 0\}$ ;
- (iii)  $X^\perp := \bigcap_{x \in X} \{x\}^\perp = \{0\}$ ;
- (iv)  $[x] \cap [y] = \{0\} \implies x \perp y$ .

Если  $x \perp y$ , то говорят, что элементы  $x, y \in X$  *дизъюнкты*. Подмножество вида  $A^\perp$ , где  $A \subset X$ , называют *полосой* относительно  $\perp$  или  $\perp$ -*полосой*; наряду с полосой используется также термин *компонента*. Символом  $\mathbb{B}_\perp(X)$  (или  $\mathbb{B}(X)$ , если  $\perp$  подразумевается) будем обозначать множество всех  $\perp$ -полос, упорядоченное по включению.

Очевидно, что  $A \subset [A]$  и из  $A \subset B$  следует  $B^\perp \subset A^\perp$ , поэтому  $[X]$  — наименьшая (по включению) полоса, содержащая множество  $A$ , а  $\{0\}^\perp$  и  $[X]^\perp$  — наибольшая и наименьшая полосы соответственно. Таким образом, дизъюнктность в  $X$  можно определить свойствами (ср. [35–37]):

- (1)  $x \perp y \iff y \perp x$  для всех  $x, y \in X$  (симметричность);
- (2)  $x \perp x \iff x = 0$  для всех  $x \in X$  (невырожденность);
- (3)  $X^\perp = \{0\}$  (наименьшая  $\perp$ -полоса совпадает с одноточечным множеством  $\{0\}$ );
- (4) если  $x, y \in X$  не дизъюнкты, то существует  $z \in X$  такой, что  $[z] \leq [x]$  и  $[z] \leq [y]$ .

**Лемма 4.1.** *Упорядоченное по включению множество  $\mathbb{B}_\perp(X)$  является полной булевой алгеброй. Булевы операции  $\wedge, \vee, (\cdot)^*$  в  $\mathbb{B}_\perp(X)$  имеют вид:*

$$K \wedge L = K \cap L; \quad K \vee L = [K \cup L]; \quad K^* = K^\perp.$$

◁ Доказательство получено в статье А. И. Векслера [37, теорема 2]; см. также А. С. Бондарев [35, теоремы 3.2 и 3.3] и Г. П. Акилова и С. С. Кутателадзе [28, определение 0.1.9 и предложение 1 в п. 0.2.8]. ▷

Как легко видеть, дизъюнктность в векторной решетке ( $x \perp y \iff |x| \wedge |y| = 0$ ) является дизъюнктностью в смысле определения 4.1. В 1950–60-х годах в рамках ленинградской школы Л. В. Канторовича обсуждалась задача, восходящая к одной проблеме Биркгофа [38, проблема 81]: можно ли восстановить векторную решетку, если стерта часть информации (например, отношение порядка или алгебраические операции), см. [35–40]. Абстрактное отношение дизъюнктности в векторные пространства начала изучать В. И. Сорокина [39]. Нас интересует следующая задача: *при каких условиях в векторном пространстве можно восстановить структуру векторной решетки по заданному отношению дизъюнктности?* Она была решена А. И. Векслером в [36, 37]. Рассмотрим соответствующие свойства отношения дизъюнктности.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.** Пусть теперь  $X$  — вещественное векторное пространство и  $\perp$  — дизъюнктность в множестве  $X$  (в смысле определения 4.1). Пару  $(X, \perp)$  назовем *векторным пространством с дизъюнктностью*, если для любых  $x, y, z \in X$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  дополнительно выполняются следующие условия согласования:

- (5)  $x \perp z \wedge y \perp z \implies (\alpha x + \beta y) \perp z$  (*линейность*);
- (6)  $x \perp y \wedge (x + y) \perp z \implies x \perp z$ .

Из условия (5) вытекает, что в векторном пространстве с дизъюнктностью любая полоса является подпространством. Напомним, что *проектор* в  $X$  — это линейный идемпотентный оператор, т. е.  $\pi \in \mathcal{L}(X)$  и  $\pi \circ \pi = \pi$ . Будем использовать общепринятые обозначения для *ядра*  $\ker(\pi) := \{x \in X : \pi x = 0\}$  и *образа*  $\operatorname{im}(\pi) := \pi(X)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3.** Говорят что  $\perp$ -полоса  $K \in \mathbb{B}(X)$  является (или выделяется) *прямым слагаемым*, если  $X = K \oplus K^\perp$ , т. е.  $X$  служит прямой суммой полос  $K$  и  $K^\perp$ . В этом случае существует единственный проектор  $\pi_K$  в  $X$  — *проектор на полосу  $K$*  — такой, что  $\operatorname{im}(\pi_K) = K$  и  $\ker(\pi_K) = K^\perp$ . Векторное пространство с дизъюнктностью  $(X, \perp)$ , в котором каждая  $\perp$ -полоса выделяется прямым слагаемым, называют *векторным пространством с проекциями*, а  $\perp$  — *проекционной дизъюнктностью*. Множество всех проекторов на всевозможные полосы в  $X$  обозначим через  $\mathbb{P}_\perp(X)$ . Отношение порядка в  $\mathbb{P}_\perp(X)$  вводится так:  $\pi_K \leq \pi_L$  в том и только в том случае, когда  $K \subset L$ .

**Лемма 4.2.** Если  $\perp$  — проекционная дизъюнктивность в векторном пространстве  $X$ , то упорядоченное множество  $\mathbb{P}_\perp(X)$  является полной булевой алгеброй, с нулевым оператором в качестве нуля, тождественным оператором  $I_X$  в качестве единицы и следующими булевыми операциями:

$$\begin{aligned}\pi_1 \wedge \pi_2 &= \pi_1 \circ \pi_2, & \pi_1 \vee \pi_2 &= \pi_1 + \pi_2 - \pi_1 \circ \pi_2, \\ \pi^* &= I_X - \pi \quad (\pi_1, \pi_2, \pi \in \mathbb{P}_\perp(X)).\end{aligned}$$

Отображения  $\pi \mapsto \pi(X)$  и  $K \mapsto \pi_K$  взаимно обратны и осуществляют булев изоморфизм между  $\mathbb{P}_\perp(X)$  и  $\mathbb{B}_\perp(X)$ .

◁ По лемме 4.1  $\mathbb{B}_\perp(X)$  — полная булева алгебра. Отображение  $h : K \mapsto \pi_K$  действует из  $\mathbb{B}_\perp(X)$  на  $\mathbb{P}_\perp(X)$  ввиду определения 4.3 и нашего предположения о дизъюнктивности. Как видно,  $\pi \mapsto \pi(X)$  — обратное отображению  $h^{-1}$ , следовательно,  $h$  осуществляет биекцию между булевыми алгебрами  $\mathbb{B}_\perp(X)$  и  $\mathbb{P}_\perp(X)$ . Тот факт, что  $h$  сохраняет булевы операции из лемм 4.1 и 4.2, без труда выводится непосредственно из определений. ▷

**Теорема 4.1.** Векторное пространство  $X$  с проекционным отношением дизъюнктивности  $\perp$  можно снабдить отношением порядка  $\leq$  так, что  $(X, \leq)$  — векторная решетка и дизъюнктивность  $\perp$  в ней (определяемая порядком) совпадает с первоначально заданной дизъюнктивностью  $\perp$ , т. е. для любых  $x, y \in X$  равносильны соотношения  $x \perp y$  и  $x \leq y$ .

◁ См. Векслер А. И. [36, теорема 5] и [37, теорема 4 и 5]. ▷

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4.** Скажем, что векторное пространство с дизъюнктивностью  $(X, \perp)$  равномерно полно, если равномерно полной является соответствующая векторная решетка  $(X, \leq)$ . Подмножество пространства  $(X, \perp)$  назовем ограниченным, если оно порядково ограничено в векторной решетке  $(X, \leq)$ . Полилинейный оператор  $T : X^n \rightarrow Y$  называют *ограниченным*, если множество  $T(A^n)$  порядково ограничено в  $Y$  для любого ограниченного множества  $A \subset X$  и *ортосимметричным*, если  $T(x_1, \dots, x_n) = 0$  при условии, что  $x_j \perp x_k$  для некоторых  $1 \leq j, k \leq n$ .

Соединив теорему 4.1 с материалом параграфа 3, можно переносить на пространство с дизъюнктивностью различные результаты о строении векторных решеток и операторов в них. Не углубляясь в детали, ограничимся тем утверждением, что перенос теоремы 3.2 приводит к следующему результату.

**Теорема 4.2.** Предположим, что  $X$  — равномерно полное векторное пространство с проекционной дизъюнктивностью,  $Y$  — пространство Канторовича и  $1 \leq n, N \in \mathbb{N}$ . Для любого конечного набора ограниченных ортосимметричных  $n$ -линейных операторов  $S_1, \dots, S_N, S$  из  $X^n$  в  $Y$  равносильны утверждения:

(1) для любых  $\pi \in \mathbb{P}(Y)$  и  $x_1, \dots, x_n \in X$ , верна импликация

$$\pi S_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \wedge \dots \wedge \pi S_N(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \implies \pi S(x_1, \dots, x_n) \leq 0;$$

(2) существуют положительные ортоморфизмы  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(Y^u)$  такие, что

$$S = \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_N S_N.$$

◁ В силу теоремы 4.1 можем считать, что  $X$  является векторной решеткой с проекциями. Пусть  $\bar{I}$  — наименьший равномерно замкнутый идеал в  $X$ , а  $\phi$  — канонический фактор-гомоморфизм из  $X$  на фактор-решетку  $\bar{X} =: X/\bar{I}$ . Тогда  $\bar{X}$  — равномерно полная архимедова векторная решетка (см. [41, следствие 59.4 и упражнение 59.5]), а  $\phi$  — решеточный гомоморфизм. Легко видеть, что любой линейный порядково ограниченный

оператор  $T : X \rightarrow Y$  обращается в ноль на идеале  $\bar{I}$ . Отсюда следует, что для каждого из операторов  $S_0 := S$  и  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , существует  $n$ -линейный порядково ограниченный оператор  $\bar{S}_i : \bar{X}^n \rightarrow Y$  такой, что  $\bar{S}_i(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)) = S_i(x_1, \dots, x_n)$  для всех  $i = 0, 1, \dots, N$  и  $x_1, \dots, x_n \in X$ . Заметим также, что операторы  $\bar{S}_0, \bar{S}_1, \dots, \bar{S}_N$  орторегулярны, так как  $\phi$  — решеточный гомоморфизм. Остается применить теорему 3.2 к операторам  $\bar{S}_0, \dots, \bar{S}_N$  и использовать равносильность соотношений  $\pi \bar{S}_i(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)) \leq 0$  и  $\pi S_i(x_1, \dots, x_n) \leq 0$ .  $\triangleright$

## 5. Заключительные замечания

**5.1.** *Векторным пространством с булевой алгеброй проекций* называют пару  $(X, \mathbb{B})$ , где  $X$  — векторное пространство, а  $\mathbb{B}$  — коммутирующее множество линейных проекторов в  $X$ , образующее полную булеву алгебру в смысле леммы 4.2 (см. [42, определение 2.1.3]). Как видно, это понятие равносильно понятию векторного пространства с проекционной дизъюнктивностью (определение 4.3): с учетом леммы 4.2 нужно лишь заметить, что в векторном пространстве с булевой алгеброй проекций  $(X, \mathbb{B})$  дизъюнктивность  $\perp$  вводится правилом:  $x \perp y$  в том и только в том случае, когда  $\pi_{[x]} \wedge \pi_{[y]} = 0$ . Если при этом  $X$  — векторная решетка, то  $\mathbb{B}$  — полная булева алгебра порядковых проекторов и мы приходим к понятию *векторной решетки с проекциями*. Таким образом, теорема 4.2 не покрывает теорему 3.2 ввиду предположения о том, что дизъюнктивность  $X$  является проекционной; в связи с этим возникает

**Открытый вопрос 1.** *Можно ли в теореме 4.2 ослабить условие проекционности так, чтобы ее частным случаем стала теорема 3.2?*

**5.2.** Для векторного пространства с дизъюнктивностью  $(X, \perp)$  существует (единственное с точностью до изоморфизма) *проекционное пополнение*, т. е. векторное пространство с проекционной дизъюнктивностью  $(\tilde{X}, \perp)$  такое, что выполнены условия: (а)  $X$  — подпространство  $\tilde{X}$  и  $\perp = \perp \cap (X \times X)$ ; (б)  $X$  *псевдоплотно* в  $\tilde{X}$ , т. е. для любого  $0 \neq \tilde{x} \in \tilde{X}$  существует  $0 \neq x \in X$  такой, что  $x \in \{\tilde{x}\}^{\perp\perp}$ ; (в) если подпространство  $Y \subset \tilde{X}$  удовлетворяет условиям (а) и (б), то  $Y = X$ , см. [37, теорема 4]. По теореме 4.1  $\tilde{X}$  можно превратить в векторную решетку с проекциями, в которой отношение дизъюнктивности совпадает с  $\perp$ . Однако может случиться так, что  $X$  нельзя превратить в векторную решетку так, чтобы дизъюнктивность в ней совпадала с  $\perp$  и, следовательно, не является подрешеткой  $\tilde{X}$ , см. [37, пример 2].

**Открытый вопрос 2.** *Каковы необходимые и достаточные условия, при которых векторное пространство с дизъюнктивностью можно превратить в (равномерно полную) векторную решетку с сохранением дизъюнктивности?*

**5.3.** В основе § 4 лежит следующая идея *переноса*. Если векторное пространство  $X$  линейно изоморфно равномерно полной архимедовой векторной решетке  $E$ , то в  $X$  возникает порядок, перенесенный из  $E$  а, следовательно, и индуцированная из  $E$  структура равномерно полной векторной решетки. Тем самым, в  $X$  возможны построения, характерные для равномерно полных векторных решеток, как, например, конструкция степени архимедовой векторной решетки (см. определение 3.3 и теорему 3.4), а также классы операторов, выделяемые какими-нибудь порядковыми свойствами (см. определение 3.2). При этом новый результат желательно формулировать в исходных терминах, т. е. на языке пространства с дизъюнктивностью, а не соответствующей векторной решетки.

**Открытый вопрос 3.** *Как определить равномерную полноту  $X$ , ограниченность множества в  $X$ , ограниченность оператора из  $X$  в  $Y$  (см. определение 4.4), не прибегая к структуре векторной решетки в  $X$ ?*

**5.4.** Указанная выше идея была высказана Г. Я. Лозановским в 1972 г. (см. [43, с. 8]) и реализована А. И. Векслером в [44] как *принцип переноса из банаховых решеток с порядково непрерывной нормой на банаховы циклические пространства*. Та же идея воплощена в работе [45] как *принцип переноса из банаховых решеток на банаховы пространства*, который позволил авторам получить некоторые новые результаты о факторизации операторов, действующих между банаховыми пространствами. Однако в [45] не затрагивается вопрос описания класса банаховых пространств, изоморфных (изометричных) банаховым решеткам.

**Открытый вопрос 4.** *Какова внутренняя характеристика банаховых пространств, изоморфных (функциональным) банаховым решеткам? Какие классы операторов между банаховыми пространствами соответствуют классам операторов, описываемым в порядково-метрических терминах?*

В общей постановке такая задача представляется трудно обозримой. Возможно, интересное описание можно получить в классе банаховых пространств, оснащенных отношением дизъюнктивности или булевой алгеброй проекторов, ср. [42, § 7.3] и [44].

## Литература

1. Farkas Gy. A Fourier féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapja // *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*.—1898.—Vol. 16.—P. 361–364.
2. Farkas J. Theorie der einfachen Ungleichungen // *J. Reine Angew. Math.*—1902.—Vol. 124.—P. 1–2.
3. Kjeldsen T. H. Different motivations and goals in the historical development of the theory of systems of linear inequalities // *Arch. Hist. Exact Sci.*—2002.—Vol. 56, № 6.—P. 459–538. DOI: 10.1007/s004070200057.
4. Kjeldsen T. H. From Measuring tool to geometrical object: Minkowski’s development of the concept of convex bodies // *Arch. Hist. Exact Sci.*—2008.—Vol. 62, № 1.—P. 59–89. DOI: 10.1007/s00407-007-0014-6.
5. Dinh N., Jeyakumar V. Farkas’ lemma: three decades of generalizations for mathematical optimization // *Transactions in Operations Research*.—2014.—Vol. 22.—P. 1–22. DOI: 10.1007/s11750-014-0319-y.
6. Dinh N., Jeyakumar V. Rejoinder on: Farkas’ lemma: three decades of generalizations for mathematical optimization // *Transactions in Operations Research*.—2014.—Vol. 22.—P. 41–44.
7. Bartle D. A short algebraic proof of the Farkas lemma // *SIAM J. Optim.*—2008.—Vol. 19, № 1.—P. 234–239. DOI: 10.1137/06067438.
8. Bartle D. Separation theorems for convex polytopes and finitely-generated cones derived from theorems of the alternative // *Linear Algebra Appl.*—2012.—Vol. 436.—P. 3784–3789. DOI: 10.1016/j.laa.2011.12.009.
9. Черников С. Н. *Линейные неравенства*.—М.: Наука, 1968.—488 с.
10. Floudas C. A., Pardalos P. M. *Pardalosencyclopedia of Optimization* / Floudas C. A., and Pardalos P. M. (eds.).—Berlin–N. Y.: Springer, 2009.
11. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // *Докл. АН СССР*.—1963.—Т. 149, № 4.—С. 759–762.
12. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. *Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем*.—М.: Изд-во АН СССР, 1963.
13. Якубович В. А. *S-процедура в нелинейной теории регулирования* // *Вестн. Ленинградского гос. ун-та. Сер. 1.*—1971.—С. 62–77.
14. Pólik I., Terlaky T. A survey of the *S*-lemma // *SIAM Review*.—2007.—Vol. 49, № 3.—P. 371–418. DOI: 10.1137/S003614450444614X.
15. Yang M., Xia Y., Wang Sh. Unifying Farkas lemma and *S*-lemma: new theory and applications in nonquadratic nonconvex optimization // *J. Optim. Theory and Appl.*—2022.—Vol. 194, № 1.—P. 353–363. DOI: 10.48550/arXiv.2109.03001.
16. Huang Q. Y., Jeyakumar V., Li G., Huyen D. T. K. Convexifiable quadratic inequality systems: new minimax *S*-lemma and exact SOCPs for classes of distributionally robust optimization problems // *J. Glob. Optim.*—2025.—Vol. 92, № 3.—P. 535–568. DOI: 10.1007/s10898-025-01499-0.
17. Downey L. Farkas’ lemma and multilinear forms // *Missouri J. Math. Sci.*—2009.—Vol. 21, № 1.—P. 65–67. DOI: 10.35834/mjms/1316032682.

18. Aron R., García D., Pinasco D., Zalduendo I. Farkas's lemma in the bilinear setting and evaluation functionals // *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat.*—2023.—Vol. 117, article no. 6. DOI: 10.1007/s13398-022-01337-y.
19. Aron R., Downey L., Maestre M. Zero sets and linear dependence of multilinear forms // *Note Mat.*—2005.—Vol. 25, № 1.—P. 49–54. DOI: 10.1285/i15900932v25n1p49.
20. Фрадков А. Л. Теоремы двойственности в некоторых невыпуклых экстремальных задачах // *Сиб. мат. журн.*—1973.—Т. 14, № 2.—С. 357–383.
21. Kutateladze S. S. One general method in operator theory // *Владикавк. мат. журн.*—2005.—Т. 7, вып. 4.—С. 35–37.
22. Kusraev A. G. Around Kutateladze's stratification principle // *Siberian Math. J.*—2025.—Vol. 66, № 5.—P. 1285–1305. DOI: 10.1134/S0037446625050180.
23. Kutateladze S. S. Boolean models and simultaneous inequalities // *Владикавк. мат. журн.*—2009.—Т. 11, вып. 3.—С. 44–50.
24. Кутателадзе С. С. Новые подходы к лемме Фаркаша // *Сиб. мат. журн.*—2010.—Т. 51, № 1.—С. 98–109.
25. Kutateladze S. S. Boolean trends in linear inequalities // *J. Appl. Industrial Math.*—2010.—Vol. 4, № 3.—P. 340–348. DOI: 10.1134/S1990478910030051.
26. Кутателадзе С. С. Полиэдральный принцип Лагранжа // *Сиб. мат. журн.*—2011.—Т. 52, № 3.—С. 606–609.
27. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. *Positive Operators.*—Orlando: Academic Press, 2006.
28. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. *Упорядоченные векторные пространства.*—Новосибирск: Наука, 1978.
29. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. *Boolean Valued Analysis: Selected Topics.*—Vladikavkaz: Vladikavkaz Scientific Center Press, 2014.—400 с.—(Trends in Science: South of Russia. A Mathematical Monograph. Vol. 6.).
30. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. *Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения.*—М.: Наука, 2007.
31. Jeyakumar V., Li G. I. Farkas' lemma for separable sublinear inequalities without qualifications // *Optim. Letters.*—2009.—Vol. 3.—P. 537–545. DOI: 10.1007/s11590-009-0133-x.
32. Boulabiar K. Products in almost  $f$ -algebras // *Comment. Math. Univ. Carolinae.*—2000.—Vol. 41, № 4.—P. 747–759.
33. Boulabiar K., Buskes G. Vector lattice powers:  $f$ -algebras and functional calculus // *Comm. Algebra.*—2006.—Vol. 34, № 4.—P. 1435–1442. DOI: 10.1080/00927870500454885.
34. Bu Q., Buskes G. Polynomials on Banach lattices and positive tensor products // *J. Math. Anal. Appl.*—2012.—Vol. 388, № 2.—P. 845–862. DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.10.001.
35. Бондарев А. С. О множествах с дизъюнктивными элементами // *Изв. вузов. Матем.*—1972.—№ 9.—С. 10–16.
36. Векслер А. И. О структурной упорядочиваемости алгебр и колец // *Докл. АН СССР.*—1965.—Т. 164, № 2.—С. 259–262.
37. Векслер А. И. Линейные пространства с дизъюнктивными элементами и превращение их в векторные структуры // *Учен. зап. Ленинградск. пед. ин-та им. А. И. Герцена.*—1967.—Т. 328.—С. 19–43.—(Сер. «Вопросы современной математики»).
38. Биркгоф Г. *Теория решеток.*—М.: Наука, 1984.
39. Сорокина В. И. Понятие группы и линейного множества с дизъюнктивными элементами // *Уч. зап. Ленинградск. пед. инст. им. А. И. Герцена.*—1955.—Т. 103.—С. 179–208.
40. Пинскер А. Г. Структурная характеристика функциональных пространств // *Успехи мат. наук.*—1957.—Т. 12, № 1.—С. 226–229.
41. Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C. *Riesz Spaces I.*—Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1971.
42. Kusraev A. G. *Dominated Operators.*—Dordrecht: Kluwer, 2000.
43. Векслер А. И. Григорий Яковлевич Лозановский (к 70-летию со дня рождения) // *Владикавк. мат. журн.*—2007.—Т. 9, № 3.—С. 3–10.
44. Векслер А. И. Банаховы циклические пространства и банаховы структуры // *Докл. АН СССР.*—1973.—Т. 213, № 4.—С. 770–773.
45. Agud L., Calabuig J. M., Juan M. A., Sánchez-Pérez E. A. Banach lattice structures and concavifications in Banach spaces // *Mathematics.*—2020.—Vol. 8, № 1.—P. 127. DOI: 10.3390/math8010127.

Статья поступила 24 декабря 2025 г.

КУСРАЕВ АНАТОЛИЙ ГЕОРГИЕВИЧ

Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН,  
руководитель организации

РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1;

Южный математический институт ВНЦ РАН,

руководитель организации, главный научный сотрудник отдела функций. анализа  
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: kusraev@smath.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1318-9602>

*Vladikavkaz Mathematical Journal*  
2026, Volume 28, Issue 1, P. 82–97

## FARKAS LEMMA FOR MULTILINEAR OPERATORS

Kusraev, A. G.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> North-Caucasus Center for Mathematical Research VSC RAS,

1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia;

<sup>2</sup> Southern Mathematical Institute of VSC RAS,

53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: kusraev@smath.ru

**Abstract.** Farkas's lemma is a classic result underlying the duality of linear programming, and it played a central role in the development of mathematical optimization. Numerous generalizations of this lemma are known, including various linear and nonlinear operator versions. However, Farkas's lemma is generally false for multilinear operators and even for bilinear forms in a finite-dimensional space. In this paper, we identify a class of orthoregular multilinear operators for which Farkas's lemma holds true. Consider vector lattices  $E$  and  $G$  with  $E$  uniformly complete and  $G$  universally complete. The main result is worded as follows.

**Theorem 3.2.** For  $n$ -linear orthoregular operators  $S_1, \dots, S_N, S : E^n \rightarrow G$  the following are equivalent:

(1) The inequalities  $\pi S_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \dots, \pi S_N(x_1, \dots, x_n) \leq 0$  imply  $\pi S(x_1, \dots, x_n) \leq 0$  for all members  $x_1, \dots, x_n \in E$  and for every band projection  $\pi$  in  $G$ .

(2) There exists positive orthomorphisms  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(G^u)$  such that  $S = \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_N S_N$ .

The proof relies on Kutateladze's stratification principle. A similar result is established when the domain of the operators under considerations is a vector space equipped with a disjointness relation satisfying certain additional conditions. Some open questions are also formulated.

**Keywords:** simultaneous linear inequalities, Farkas Lemma, vector lattice, Kutateladze's stratification principle, orthoregular multilinear operator, disjointness relation.

**AMS Subject Classification:** 46A16, 46B42, 46G25.

**For citation:** Kusraev, A. G. Farkas Lemma for Multilinear Operators, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 82–97 (in Russian). DOI: 10.46698/o9578-0948-6676-e.

## References

1. Farkas, Gy. A Fourier féle Mechanikai Elv Alkalmazásának Algebrai Alapja, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 1898, vol. 16, pp. 361–364.
2. Farkas, J. Theorie der Einfachen Ungleichungen, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1902, vol. 124, pp. 1–2.
3. Kjeldsen, T. H. Different Motivations and Goals in the Historical Development of the Theory of Systems of Linear Inequalities, *Archive for History of Exact Sciences*, 2002, vol. 56, no. 6, pp. 459–538. DOI: 10.1007/s004070200057.
4. Kjeldsen, T. H. From Measuring Tool to Geometrical Object: Minkowski's Development of the Concept of Convex Bodies, *Archive for History of Exact Sciences*, 2008, vol. 62, no. 1, pp. 59–89. DOI: 10.1007/s00407-007-0014-6.

5. Dinh, N. and Jeyakumar, V. Farkas' Lemma: Three Decades of Generalizations for Mathematical Optimization, *Transactions in Operations Research*, 2014, vol. 22, pp. 1–22. DOI: 10.1007/s11750-014-0319-y.
6. Dinh, N. and Jeyakumar, V. Rejoinder on: Farkas' Lemma: Three Decades of Generalizations for Mathematical Optimization, *Transactions in Operations Research*, 2014, vol. 22, pp. 41–44.
7. Bartle, D. A Short Algebraic Proof of the Farkas Lemma, *SIAM Journal on Optimization*, 2008, vol. 19, no. 1, pp. 234–239. DOI: 10.1137/06067438.
8. Bartle, D. Separation Theorems for Convex Polytopes and Finitely-Generated Cones Derived from Theorems of the Alternative, *Linear Algebra and its Applications*, 2012, vol. 436, pp. 3784–3789. DOI: 10.1016/j.laa.2011.12.009.
9. Chernikov, S. N. *Linear Inequalities*, Moscow, Nauka, 1968, 488 p.
10. Floudas, C. A. and Pardalos, P. M. *Pardalosencyclopedia of Optimization* / Floudas C. A., and Pardalos P. M. (eds.), Berlin–New York, Springer, 2009.
11. Dubovitskii, A. Ya. and Milyutin, A. A. Extremum Problems with Certain Constraints, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1963, vol. 149, no. 4, pp. 759–762.
12. Aizerman, M. A. and Gantmacher, F. R. *Absolute Stability of Regulator Systems*, San Francisco, Holden-Day, 1964.
13. Yakubovich, V. A. The  $S$ -Procedure in Non-Linear Control Theory, *Vestnik Leningradskogo Universiteta, Seriya Matematika, Mekhanika, Astronomiya*, 1971, vol. 1 pp. 62–77.
14. Pólik, I. and Terlaky, T. A Survey of the  $S$ -Lemma, *SIAM Review*, 2007, vol. 49, no. 3, pp. 371–418. DOI: 10.1137/S003614450444614X.
15. Yang, M., Xia, Y. and Wang, Sh. Unifying Farkas Lemma and  $S$ -Lemma: New Theory and Applications in Nonquadratic Nonconvex Optimization, *J. Optim. Theory and Appl.*, 2022, vol. 194, no. 1, pp. 353–363. DOI: 10.48550/arXiv.2109.03001.
16. Huang, Q. Y., Jeyakumar, V., Li, G. and Huyen, D. T. K. Convexifiable Quadratic Inequality Systems: New Minimax  $S$ -Lemma and Exact SOCPs for Classes of Distributionally Robust Optimization Problems, *Journal of Global Optimization*, 2025, vol. 92, no. 3, pp. 535–568. DOI: 10.1007/s10898-025-01499-0.
17. Downey, L. Farkas' Lemma and Multilinear Forms, *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 2009, vol. 21, no. 1, pp. 65–67. DOI: 10.35834/mjms/1316032682.
18. Aron, R., García, D., Pinasco, D. and Zalduendo, I. Farkas's Lemma in the Bilinear Setting and Evaluation Functionals, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A, Matemáticas*, 2023, vol. 117, article no. 6. DOI: 10.1007/s13398-022-01337-y.
19. Aron, R., Downey, L. and Maestre, M. Zero Sets and Linear Dependence of Multilinear Forms, *Note di Matematica*, 2005, vol. 25, no. 1, pp. 49–54. DOI: 10.1285/i15900932v25n1p49.
20. Fradkov, A. L. Duality Theorems in Certain Nonconvex Extremal Problems, *Siberian Mathematical Journal*, 1973, vol. 14, no. 2, pp. 247–264. DOI: 10.1007/BF00967951.
21. Kutateladze, S. S. One General Method in Operator Theory, *Vladikavkaz Math. J.*, 2005, vol. 7, no. 4, pp. 35–37.
22. Kusraev A. G. Around Kutateladze's Stratification Principle, *Siberian Mathematical Journal*, 2025, vol. 66, no. 5, pp. 1285–1305. DOI: 10.1134/S0037446625050180.
23. Kutateladze, S. S. Boolean Models and Simultaneous Inequalities, *Vladikavkaz Math. J.*, 2009, vol. 11, no. 3, pp. 44–50.
24. Kutateladze, S. S. The Farkas Lemma Revisited, *Siberian Mathematical Journal*, 2010, vol. 51, no. 1, pp. 78–87. DOI: 10.1007/s11202-010-0010-y.
25. Kutateladze, S. S. Boolean Trends in Linear Inequalities, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2010, vol. 4, no. 3.—pp. 340–348. DOI: 10.1134/S1990478910030051.
26. Kutateladze, S. S. The Polyhedral Lagrange Principle, *Siberian Mathematical Journal*, 2011, vol. 52, no. 3, pp. 484–486.
27. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. *Positive Operators*, Orlando, Academic Press, 2006.
28. Akilov, G. P. and Kutateladze, S. S. *Uporyadochennyye vektornyye prostranstva* [Ordered Vector Spaces], Novosibirsk, Nauka, 1978 (in Russian).
29. Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S. *Boolean Valued Analysis: Selected Topics, Trends in Science: South of Russia. A Mathematical Monograph*, vol. 6, Vladikavkaz, Vladikavkaz Scientific Center Press, 2014.
30. Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S. *Subdifferentials: Theory and Applications*, Dordrecht, Springer, 1995.
31. Jeyakumar, V. and Li, G. I. Farkas' Lemma for Separable Sublinear Inequalities Without Qualifications, *Optimization Letters*, 2009, vol. 3, pp. 537–545. DOI: 10.1007/s11590-009-0133-x.

32. Boulabiar, K. Products in Almost  $f$ -Algebras, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 2000, vol. 41, no. 4, pp. 747–759.
33. Boulabiar, K. and Buskes, G. Vector lattice Powers:  $f$ -Algebras and Functional Calculus, *Communications in Algebra*, 2006, vol. 34, no. 4, pp. 1435–1442. DOI: 10.1080/00927870500454885.
34. Bu, Q. and Buskes, G. Polynomials on Banach Lattices and Positive Tensor Products, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, vol. 388, no. 2, pp. 845–862. DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.10.001.
35. Bondarev, A. S. Sets with Disjoint Elements, *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1972, vol. 16, no. 9, pp. 8–14.
36. Veksler, A. I. On the Lattice Orderability of Algebras and Rings, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1965, vol. 164, no. 2, pp. 259–262 (in Russian).
37. Veksler, A. I. Linear Spaces with Disjoint Elements and their Conversion into Vector Structures, *Uchenye Zapiski Leningradskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Instituta imeni A. I. Gertsena*, 1967, vol. 328, pp. 19–43 (in Russian).
38. Birkhoff, G. *Lattice Theory*, 3rd ed., Providence, American Mathematical Society, Col Pub., 1967.
39. Sorokina, V. I. The Concept of a Group and a Linear Set with Disjoint Elements, *Uchenye Zapiski Leningradskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Instituta imeni A. I. Gertsena* [Scientific Notes of the Herzen Leningrad State Pedagogical Institute], 1955, vol. 103, pp. 179–208 (in Russian).
40. Pinsker, A. G. Structural Characterization of Functional Spaces, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1957, vol. 12, no. 1, pp. 226–229 (in Russian).
41. Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C. Riesz Spaces I, Amsterdam, North-Holland Publ. Comp., 1971.
42. Kusraev, A. G. Dominated Operators, Dordrecht, Kluwer, 2000.
43. Veksler, A. I. Banach Cyclic Spaces and Banach Structures, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1973, vol. 213, no. 4, pp. 770–773 (in Russian).
44. Veksler, A. I. Grigory Yakovlevich Lozanovsky (on the 70th anniversary of his birth), *Vladikavkaz Math. J.*, 2007, vol. 9, no. 3, pp. 3–10 (in Russian).
45. Agud, L., Calabuig, J. M., Juan, M. A. and Sánchez-Pérez, E. A. Banach Lattice Structures and Concavifications in Banach Spaces, *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 1, pp. 127. DOI: 10.3390/math8010127.

Received December 24, 2025

ANATOLY G. KUSRAEV

North-Caucasus Center for Mathematical Research of the VSC RAS,  
1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia,  
Head of Organization;

Southern Mathematical Institute of the VSC RAS,  
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,  
Head of Organization; Chief Researcher  
of the Department of Functional Analysis

E-mail: kusraev@smath.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1318-9602>

УДК 517.98

DOI 10.46698/o1056-6445-9027-m

## О ПРОДОЛЖЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ СЕЛЕКТОРОВ<sup>#</sup>

З. А. Кусраева<sup>1</sup>, А. А. Саадулаева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Владикавказский научный центр РАН,  
Россия, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1

E-mail: zali13@mail.ru, gelieva00@mail.ru

*Светлой памяти профессора С. С. Кутателадзе*

**Аннотация.** Рассматривается секвенциально полное топологическое векторное пространство  $Y$  и линейно инвариантное семейство  $\mathcal{E}$  выпуклых подмножеств  $Y$ . Будем говорить, что:  $\mathcal{E}$  обладает счетным свойством бинарного пересечения, если всякое счетное подсемейство попарно пересекающихся множеств имеет непустое пересечение; пара  $(Y, \mathcal{E})$  допускает счетное продолжение линейных операторов, если для любых сепарабельного метризуемого топологического векторного пространства, его подпространства, нечетного замкнутозначного полунепрерывного сверху веера (субаддитивное положительное однородное многозначное отображение) и линейного оператора, определенного на подпространстве, и являющегося селектором данного веера, существует линейный селектор, продолжающий линейный оператор с подпространства на все пространство. Основным результатом утверждается, что пара  $(Y, \mathcal{E})$  допускает счетное продолжение линейных непрерывных операторов, если  $\mathcal{E}$  обладает счетным свойством бинарного пересечения. Обращение этого результата также имеет место при том дополнительном предположении, что рассматриваемое топологическое векторное пространство локально ограничено.

**Ключевые слова:** веер, продолжение линейных операторов, свойство счетного бинарного пересечения, сепарабельность, векторная решетка.

**AMS Subject Classification:** 46G25, 47A40, 47H60, 47L07.

**Образец цитирования:** Кусраева З. А., Саадулаева А. А. О продолжении линейных селекторов // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 1.—С. 98–107. DOI: 10.46698/o1056-6445-9027-m.

### 1. Введение

Пространством Канторовича<sup>2</sup> (или, короче,  $K$ -пространством) называют порядково полную векторную решетку. Известно, что пространство Канторовича допускает мажорированное продолжение линейных операторов, см. [1]. Этот результат, установленный в 1935 г. и ставший первой теоремой теории  $K$ -пространств, принято называть теоремой Хана — Банаха — Канторовича. Обращение, утверждающее, что если упорядоченное векторное пространство допускает мажорированное продолжение линейных операторов, то оно является  $K$ -пространством, было получено спустя тридцать с лишним лет независимо Бонайсом и Сильверманом в [2] и Ту в [3]; подробности можно найти в [4]. Новое и весьма изящное доказательство эквивалентности свойства мажорированного продолжения линейных операторов и порядковой полноты упорядоченного векторного пространства образов нашел А. Д. Иоффе в [5, теорема В]. Детальное изложение представлено в книге [6].

<sup>#</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-71-10094, <https://rscf.ru/project/24-71-10094/>.

© 2026 Кусраева З. А., Саадулаева А. А.

<sup>2</sup> В англоязычной литературе чаще используют термин «Дедекиндово полная векторная решетка».

Дальнейшие исследования показали, что в некоторых случаях возможно ослабить требование порядковой полноты пространства образов за счет предъявления к области определения оператора некоторых дополнительных требований. Так, например, Ю. А. Абрамович и Э. Викстед обнаружили в [7, теорема 3.5], что  $\sigma$ -интерполяционное свойство, существенно более слабое, чем порядковая полнота, обеспечивает мажорированное продолжение непрерывных линейных операторов, определенных на сепарабельном банаховом пространстве. Н. Данет распространил этот результат на непрерывные линейные операторы, действующие из метризуемого сепарабельного топологического векторного пространства в топологическое векторное пространство, упорядоченное замкнутым конусом и обладающее сильным  $\sigma$ -интерполяционным свойством, см. [8, теорема 1]. В работе авторов [9, теорема 2] показана необходимость  $\sigma$ -интерполяционного свойства для мажорированного продолжения непрерывных линейных операторов, определенных на сепарабельном и метризуемом топологическом векторном пространстве. Этот результат был доказан в рамках теории множеств Цермело — Френкеля, используя лишь аксиому счетного выбора.

Цель настоящей заметки показать, что теорема Иоффе остается в силе, если заменить в пространстве образов *свойство бинарного пересечения* более слабым — *счетным свойством бинарного пересечения*. Такое ослабление вновь оказывается возможным за счет дополнительных требований метризуемости и сепарабельности, предъявляемых к области определения рассматриваемых операторов. В качестве приложения показывается как из этого результата выводится основной результат статьи [9, теорема 2].

Всюду в тексте символом  $:=$  обозначаем «равно по определению»,  $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ , а  $\mathbb{R}$  обозначает множество действительных чисел. Все встречающиеся ниже пространства вещественны.

## 2. Предварительные сведения

Так же, как и в [5], при доказательстве теоремы о продолжении мы используем однородные субаддитивные выпуклозначные отображения, называемые веерами. По-видимому, этот объект впервые появился в [10]. Начнем с соответствующих определений.

Рассмотрим векторные пространства  $X$  и  $Y$ . Как обычно,  $\mathcal{P}(Y)$  — множество всех подмножеств пространства  $Y$ . Всяду ниже  $\mathcal{E}$  обозначает некоторое семейство непустых выпуклых подмножеств векторного пространства  $Y$ , т. е.  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$  и  $\mathcal{E}$  состоит из непустых выпуклых множеств.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Семейство  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$  называют *линейно инвариантным*, если  $\mathcal{E}$  замкнуто относительно алгебраической суммы, сдвигов и умножения на вещественные числа, т. е. таково, что для любых  $C, C_1, C_2 \in \mathcal{E}$ ,  $y \in Y$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$  выполнено  $C_1 + C_2 \in \mathcal{E}$ ,  $y + C \in \mathcal{E}$  и  $\lambda C_1 \in \mathcal{E}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Отображение  $\Phi$  из  $X$  в  $\mathcal{E}$  называют *веером*, если для любых  $x, x_1, x_2 \in X$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$  выполнены следующие условия:

- (1)  $0 \in \Phi(0)$ ;
- (2)  $\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x)$ ;
- (3)  $\Phi(x_1 + x_2) \subset \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$ .

Веер называют *нечетным*, если  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$  для всех  $x \in X$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Пусть  $X$  и  $Y$  — топологические векторные пространства. Веер  $\Phi : X \rightarrow \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$  называют *полунепрерывным сверху в точке*  $x_0 \in X$ , если для любой окрестности нуля  $V \subset Y$  существует такая окрестность нуля  $U$  в  $X$ , что  $\Phi(x_0 + U) \subset$

$\Phi(x_0) + V$ , где  $\Phi(A) = \bigcup_{x \in A} \Phi(x)$ . Веер *полунепрерывен сверху*, если он полунепрерывен сверху в каждой точке. Говорят, что веер *замкнут*, если его график  $\text{Gr}(\Phi) := \{(x, y) \in X \times Y : y \in \Phi(x)\}$  является замкнутым подмножеством  $X \times Y$ , и *замкнутозначен*, если  $\Phi(x)$  — замкнутое подмножество  $Y$  для всех  $x \in X$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** Линейный оператор  $T : X \rightarrow Y$  называют *селектором* (или *опорным оператором*) веера  $\Phi$ , если  $Tx \in \Phi(x)$  для всех  $x \in X$ . Совокупность всех линейных селекторов веера  $\Phi$  обозначают символом  $\partial\Phi$ .

**Лемма 1.** Для веера  $\Phi : X \rightarrow \mathcal{E}$  имеют место утверждения:

- (1)  $\Phi$  полунепрерывен сверху тогда и только тогда, когда он полунепрерывен сверху в нуле;
- (2) если  $\Phi$  полунепрерывен сверху, то любой оператор из  $\partial(\Phi)$  непрерывен;
- (3) если  $\Phi$  полунепрерывен сверху и замкнутозначен, то  $\Phi$  замкнут.

◁ Полунепрерывность сверху веера  $\Phi$  в нуле означает, что для любой окрестности нуля  $V \subset Y$  существует такая окрестность нуля  $U \subset X$ , что  $\Phi(U) \subset V$ . Для произвольного  $x_0 \in X$  имеем  $\Phi(x_0 + U) \subset \Phi(x_0) + \Phi(U) \subset \Phi(x_0) + V$ , значит, веер  $\Phi$  полунепрерывен сверху в точке  $x_0$ . Если  $T \in \partial(\Phi)$ , то по определению  $T(U) \subset \Phi(U) \subset V$ , т. е.  $T$  непрерывен. В то же время, предполагая, что  $(x_0, y_0) \notin \text{Gr}(\Phi)$ , т. е.  $y_0 \notin \Phi(x_0)$ , в силу замкнутости  $\Phi(x_0)$  можно подобрать окрестность нуля  $V \subset Y$  так, чтобы  $(y_0 + V) \cap (\Phi(x_0) + V) = \emptyset$ . Далее, ввиду определения 3 найдется окрестность нуля  $U \subset X$  такая, что  $\Phi(x_0 + U) \subset \Phi(x_0) + V$ , следовательно,  $(y_0 + V) \cap \Phi(x_0 + U) = \emptyset$ . Но последнее означает, что  $(x_0 + U) \times (y_0 + V) \cap \text{Gr}(\Phi) = \emptyset$ , откуда вытекает замкнутость  $\text{Gr}(\Phi)$ . Т. е. веер  $\Phi$  замкнут. ▷

Пусть  $\Phi|_{X_0}$  обозначает ограничение веера  $\Phi$  на подпространство  $X_0 \subset X$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.** Скажем, что пара  $(Y, \mathcal{E})$  допускает *продолжение линейных операторов*, если для любых векторного пространства  $X$ , подпространства  $X_0 \subset X$ , нечетного веера  $\Phi : X \rightarrow \mathcal{E}$  и линейного оператора  $T_0 : X_0 \rightarrow Y$ , являющегося селектором веера  $\Phi|_{X_0}$ , существует линейный селектор  $T : X \rightarrow Y$  веера  $\Phi$ , продолжающий оператор  $T_0$ . Если в этом определении  $X$  — сепарабельное метризуемое топологическое векторное пространство, а веер  $\Phi$  замкнутозначен и полунепрерывен сверху, то будем говорить, что пара  $(Y, \mathcal{E})$  допускает *счетное продолжение линейных операторов*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.** Подмножество  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$  называют *сцепленным*, если любая пара множеств из  $\mathcal{E}_0$  имеет непустое пересечение. Будем говорить, что  $\mathcal{E}$  обладает *свойством бинарного пересечения* (счетным свойством бинарного пересечения), если всякое сцепленное подмножество (соответственно, всякое счетное сцепленное подмножество)  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$  имеет непустое пересечение.

**Теорема 1** (Иоффе). Пусть  $Y$  — векторное пространство и  $\mathcal{E}$  — линейно инвариантное семейство выпуклых подмножеств  $Y$ . Равносильны утверждения:

- (1)  $\mathcal{E}$  обладает свойством бинарного пересечения;
- (2) пара  $(Y, \mathcal{E})$  допускает продолжение линейных операторов.

Теорема 1 установлена в [5, теорема В]. Импликацию (1)  $\implies$  (2) доказали ранее Родригес-Салинас и Бо в работе [10]. Свойство бинарного пересечения для замкнутых шаров банахова пространства выделил Нахбин в [11].

Рассмотрим пример веера в случае, когда  $Y$  — упорядоченное векторное пространство, т. е. вещественное векторное пространство, снабженное таким отношением порядка, что неравенства можно складывать и умножать на положительные числа.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.** Упорядоченное векторное пространство  $Y$  обладает *декомпозиционным свойством Рисса*, если  $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$  для всех  $a, b, c, d \in Y$  при  $a \leq b, c \leq d$ . Здесь, как обычно,  $[a, b] := \{y \in Y : a \leq y \leq b\}$  — *порядковый отрезок* в  $Y$ . Нетрудно заметить, что декомпозиционное свойство Рисса равносильно следующему правилу сложения порядковых отрезков:  $[0, a + b] = [0, a] + [0, b]$  ( $a, b \in Y_+$ ), где  $Y_+ = \{y \in Y : x \geq 0\}$  — *положительный конус*.

Следующее утверждение, дающее пример веера, см. в [6, утверждение 1.4.5.(2)].

**Лемма 2.** Пусть  $Y$  — упорядоченное векторное пространство и  $\mathcal{E}$  — множество всех порядковых отрезков в  $Y$ . Если  $Y$  обладает декомпозиционным свойством Рисса, то эквивалентны следующие утверждения:

(а)  $\Phi$  — нечетный  $\mathcal{E}$ -значный веер из  $X$  в  $\mathcal{E}$ ;

(б)  $\Phi = \Phi_p$  для некоторого сублинейного оператора  $p : X \rightarrow Y$ , где по определению  $\Phi_p(x) := [-p(-x), p(x)]$  для всех  $x \in X$ .

Сублинейность  $p$  означает, что  $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$  и  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$  для всех  $x, x_1, x_2 \in X$  и  $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ .

Для установления основных результатов настоящей заметки нам понадобится еще один вспомогательный факт о сепарабельных пространствах.

**Лемма 3.** Подмножество сепарабельного метрического пространства сепарабельно.

◁ Доказательство см., например, в [12, гл. 1, п. 4.4]. Это утверждение выводится из аксиомы счетного выбора (и даже равносильно ей), см. [13, теорема 1.12]. ▷

### 3. Основной результат

В этом параграфе покажем, что в теореме Иоффе можно ослабить свойство бинарного пересечения, если в качестве области определения операторов взять сепарабельное метризуемое топологическое векторное пространство. Понятие линейно инвариантного семейства, приведенное в определении 1, всюду далее будем понимать в смысле инвариантности относительно сдвига и умножения на вещественное число.

**Теорема 2.** Пусть  $Y$  — секвенциально полное топологическое векторное пространство и  $\mathcal{E}$  — линейно инвариантное семейство выпуклых подмножеств  $Y$ . Если  $\mathcal{E}$  обладает счетным свойством бинарного пересечения, то пара  $(Y, \mathcal{E})$  допускает счетное продолжение линейных операторов.

◁ Пусть  $\mathcal{E}$  обладает счетным свойством бинарного пересечения и докажем, что пара  $(Y, \mathcal{E})$  допускает счетное продолжение линейных операторов.

**Шаг 1.** Рассмотрим произвольный полунепрерывный сверху нечетный веер  $\Phi : X \rightarrow \mathcal{E}$  и линейный оператор  $T_0 : X_0 \rightarrow Y$  такой, что  $T_0x \in \Phi(x)$  для всех  $x \in X_0$ . В силу леммы 1 оператор  $T_0$  непрерывен. Предположим, что  $X_0 \neq X$ , так как в противном случае доказывать нечего. Возьмем  $x_1 \in X \setminus X_0$  и обозначим через  $X_1$  подпространство в  $X$ , состоящее из всех элементов вида  $x' := x + \lambda x_1$ , где  $x \in X_0, \lambda \in \mathbb{R}$ . Покажем, что существует оператор  $T_1 \in \partial(\Phi|_{X_1})$ , который продолжает  $T_0$  на  $X_1$ . Если предположить, что искомое продолжение  $T_1 : X_1 \rightarrow Y$  существует, и обозначить  $y_1 := T_1x_1$ , то для любого  $x \in X_0$  будет  $y_1 + T_0x = T_1x_1 + T_1x = T_1(x_1 + x) \in \Phi(x_1 + x)$  или  $y_1 \in -T_0x + \Phi(x_1 + x)$ . Таким образом, для существования продолжения  $T_1$  с указанными свойствами необходимо, чтобы все множества вида  $-T_0x + \Phi(x_1 + x)$ , где  $x \in X_0$ , имели общую точку  $y_1$ . Последнее условие является также и достаточным. В самом деле, если какой-либо элемент  $y_1 \in Y$  содержится в пересечении указанного семейства, то можем положить  $T_1x_1 := y_1$ . Очевидно, что оператор  $T_1 : X_1 \rightarrow Y$ , определенный для каждого  $x' := \lambda x_1 + x$ , где  $x \in X_0$ ,

$\lambda \in \mathbb{R}$ , равенством  $T_1x' := \lambda y_1 + T_0x$ , линейен. Кроме того, на основании простейших свойств веера и способа выбора  $y_1$ , при  $\lambda \neq 0$  выводим

$$\begin{aligned} T_1x' &= \lambda(y_1 + T_0(x/\lambda)) \in \lambda(-T_0(x/\lambda) + \Phi(x_1 + x/\lambda) + T_0(x/\lambda)) \\ &= \lambda\Phi(x_1 + x/\lambda) = \Phi(\lambda x_1 + x) = \Phi(x'). \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда следует, что  $T_1 \in \partial(\Phi|_{X_1})$ .

**Шаг 2.** Остается обосновать возможность указанного выбора  $y_1$ , т. е. убедиться, что

$$y_1 \in \bigcap \{-T_0x + \Phi(x_1 + x) : x \in X_0\} \neq \emptyset. \quad (2)$$

Так как по условию  $X$  сепарабельно, то по лемме 3 сепарабельным будет и подпространство  $X_0$ , следовательно, существует счетное всюду плотное подмножество  $D \subset X_0$ . Обозначим  $C_x := -T_0x + \Phi(x_1 + x)$  и покажем, что счетное множество  $\{C_u : u \in D\}$  является сцепленным. Действительно, ввиду линейной инвариантности  $\mathcal{E}$  множество  $C_u$  входит в  $\mathcal{E}$  для любого  $u \in D$ , и, вновь привлекая определение веера, для  $u, v \in D$  выводим

$$\begin{aligned} 0 &\in -T_0(u - v) + \Phi(u - v) = -T_0(u - v) + \Phi(u + x_1 - (x_1 + v)) \\ &\subset -T_0u + \Phi(x_1 + u) - (-T_0v + \Phi(x_1 + v)) = C_u - C_v. \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда видно, что  $C_u \cap C_v \neq \emptyset$ , следовательно, счетное множество  $(C_u)_{u \in D}$  является сцепленным ввиду произвола в выборе  $u$  и  $v$ . Тем самым, можно выбрать  $y_1 \in \bigcap_{u \in D} C_u \neq \emptyset$ , так как по условию  $\mathcal{E}$  обладает счетным свойством бинарного пересечения. Для произвольного  $x \in X_0$  подберем последовательность  $(u_n)$  в  $D$ , сходящуюся к  $x$ . Тогда  $y_1 + T_0u_n$  сходится к  $y_1 + T_0x$  и  $y_1 + T_0u_n \in \Phi(x_1 + u_n)$ , следовательно,  $y_1 + T_0x \in \Phi(x_1 + x)$  ввиду замкнутости веера  $\Phi$  (лемма 1). Итак,  $y_1 \in -T_0x + \Phi(x_1 + x)$  для любого  $x \in X_0$ , и мы приходим к требуемому соотношению  $T_1 \in \partial(\Phi|_{X_1})$ .

**Шаг 3.** Доказательство можно завершить стандартным применением леммы Куратовского — Цорна, однако мы приведем рассуждения, опирающиеся лишь на аксиому счетного выбора.

Возьмем счетное всюду плотное множество  $V := \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$  в  $X$ . Пусть  $n_1$  — наименьший номер, для которого  $v_{n_1} \notin X_0$ . Если в приведенных выше рассуждениях возьмем  $x_1 := v_{n_1}$ , то дополнительно будет  $v_1, \dots, v_{n_1} \in X_1$ . Далее, пусть  $n_2$  обозначает наименьший номер, для которого  $v_{n_2} \notin X_1$ . Повторив для  $x_2 := v_{n_2}$  те же рассуждения, что и для  $x_1$ , найдем подпространство  $X_2 \subset X$  и непрерывный линейный оператор  $T_2 : X_2 \rightarrow Y$  такие, что  $v_1, \dots, v_{n_2} \in X_2$ ,  $T_2|_{X_1} = T_1$  и  $T_2$  — непрерывный селектор ограничения веера  $\Phi$  на  $X_2$ , т. е.  $T_2x \in \Phi(x)$  для всех  $x \in X_2$ .

Продолжая этот процесс, получим последовательность подпространств  $(X_k)$  и непрерывных линейных операторов  $(T_k)$  из  $X_k$  в  $Y$  таких, что  $v_1, \dots, v_{n_k} \in X_k$ ,  $X_k \subset X_{k+1}$ ,  $T_k = T_{k+1}|_{X_k}$  и  $T_k \in \partial(\Phi|_{X_k})$ . Положим  $X_\sigma := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$  и  $T_\sigma(x) := T_k(x)$  при  $x \in X_k$ . Как видно,  $X_\sigma$  — подпространство  $X$ , содержащее  $V$ , а  $T_\sigma : X_\sigma \rightarrow Y$  — линейный оператор, продолжающий  $T_0$  и являющийся селектором веера  $\Phi$  на  $X_\sigma$ . Более того, оператор  $T_\sigma$  непрерывен в силу полунепрерывности сверху веера  $\Phi$  (см. лемму 1).

Для завершения доказательства стоит лишь заметить, что оператор  $T_\sigma$  допускает продолжение по непрерывности на все  $X$ , оставаясь селектором веера  $\Phi$ . В самом деле, если последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  из  $X_\sigma$  сходится к некоторому  $x \in X$ , то эта последовательность фундаментальна, а ввиду непрерывности  $T_\sigma$  фундаментальной будет и последовательность  $(T_\sigma x_n)$ . В силу секвенциальной полноты  $Y$  существует предел  $\lim_n T_\sigma x_n \in Y$ ,

который обозначим через  $Tx$ . Нетрудно проверить, что тем самым корректно определен линейный оператор  $T : X \rightarrow Y$ , причем  $T|_{X_\sigma} = T_\sigma$ . Так как  $Tx_n \in \Phi(x_n)$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , то в силу леммы 1 выполняется также  $Tx \in \Phi(x)$  и, тем самым,  $T \in \partial\Phi$ .  $\triangleright$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.** Говорят, что упорядоченное векторное пространство  $Y$  обладает  $\sigma$ -интерполяционным свойством, если для любых двух последовательностей  $(x_n)$  и  $(z_n)$  в  $Y$ , удовлетворяющих неравенству  $x_n \leq z_m$  для всех  $n, m \in \mathbb{N}$ , существует  $y \in Y$  такой, что  $x_n \leq y \leq z_n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , см. [14, определение 146.6]. Если данное определение выполняется лишь для последовательностей вида  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{u_1, u_2\}$  и  $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} = \{v_1, v_2\}$ , где  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in Y$ , то говорят, что  $Y$  обладает интерполяционным свойством Рисса.

**Следствие 1.** Пусть  $X$  и  $Y$  — топологические векторные пространства, причем  $X$  сепарабельно и метризуемо, а  $Y$  секвенциально полно и упорядочено замкнутым и нормальным конусом  $Y_+$ . Предположим, что на подпространстве  $X_0 \subset X$  задан линейный непрерывный оператор  $T_0 : X_0 \rightarrow Y$ , удовлетворяющий неравенству  $T_0x_0 \leq p(x_0)$  для всех  $x_0 \in X_0$ . Если  $Y$  обладает сильным  $\sigma$ -интерполяционным свойством, то существует линейный непрерывный оператор  $T : X \rightarrow Y$  такой, что  $Tx_0 = T_0x_0$  для всех  $x_0 \in X_0$  и  $Tx \leq p(x)$  для всех  $x \in X$ .

$\triangleleft$  Нужно применить теорему 2 к вееру  $\Phi_p$  из леммы 2. При этом нужно принять во внимание следующие факты. В произвольном упорядоченном векторном пространстве интерполяционное свойство Рисса равносильно декомпозиционному свойству Рисса, сильное  $\sigma$ -интерполяционное свойство для  $Y$  равносильно справедливости свойства счетного бинарного пересечения для порядковых интервалов в  $Y$ . Веер  $\Phi_p$  будет полунепрерывным сверху тогда и только тогда, когда сублинейный оператор  $p$  непрерывен.  $\triangleright$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Следствие 1 доказано в [9] и является вариантом теоремы Хана — Банаха — Канторовича, установленной Данетом в [8, теорема 1]. Разница состоит в том, что в [8] используется лемма Цорна, а значит, и аксиома выбора, а в [9] — лишь аксиомой счетного выбора. В то же время в доказательстве из [9] используется продолжение по непрерывности, что требует дополнительного предположения о секвенциальной полноте пространства  $Y$ .

#### 4. Обращение основного результата

Обращение теоремы 2 будет доказано при некоторых дополнительных ограничениях на пару  $(Y, \mathcal{E})$ . Введем соответствующее определение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.** Топологическое векторное пространство называют *локально ограниченным*, если в нем имеется ограниченная окрестность нуля. *Квазинормой* на векторном пространстве  $X$  называют функцию  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  такую, что для любых  $x, y \in X$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$  выполняются условия  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,  $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$  и  $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$ , где  $C$  — некоторая константа, не зависящая от  $x$  и  $y$ . Если квазинорма удовлетворяет условию  $\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$  для всех  $x, y \in X$ , где  $p$  — некоторое фиксированное число,  $0 < p \leq 1$ , то ее называют *p-нормой*. *Квазинормированное (p-нормированное) пространство* — пара  $(X, \|\cdot\|)$ , где  $\|\cdot\|$  — квазинорма (соответственно, *p-норма*) на векторном пространстве  $X$ .

**Лемма 4.** Для отделимого топологического векторного пространства  $X$  равносильны следующие утверждения:

- (1)  $X$  — локально ограниченное пространство;
- (2)  $X$  —  $p$ -нормированное пространство для некоторого  $0 < p \leq 1$ ;
- (3)  $X$  — квазинормированное пространство.

◁ Эквивалентность (1)  $\iff$  (2) установили Аоки [15] и Ролевич [16], а (1)  $\iff$  (3) — Бурген [17] и Хайерс [18]. ▷

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.** Семейство  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$  называют *насыщенным*, если  $\mathcal{E}$  замкнуто относительно замыкания алгебраической суммы и умножения на вещественные числа, т. е. таково, что для любых  $C, C_1, C_2 \in \mathcal{E}$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$  выполнено  $\text{cl}(C_1 + C_2) \in \mathcal{E}$  и  $\lambda C \in \mathcal{E}$ .

**Теорема 3.** Пусть  $Y$  — полное локально ограниченное топологическое векторное пространство и  $\mathcal{E}$  — насыщенное семейство выпуклых ограниченных подмножеств  $Y$ . Если пара  $(Y, \mathcal{E})$  допускает счетное продолжение линейных операторов, то  $\mathcal{E}$  обладает счетным свойством бинарного пересечения.

◁ Пусть  $B_0$  — фиксированная замкнутая ограниченная окрестность нуля в  $Y$ . Подберем последовательность замкнутых окрестностей нуля  $B_k$  в  $Y$  так, чтобы  $B_{k+1} + B_{k+1} \subset B_k$  для всех  $k = 0, 1, \dots$ . Как видно,  $\sum_{k=1}^n B_k \subset B_0$  для всех  $n \geq 1$ .

Предположим теперь, что пара  $(Y, \mathcal{E})$  допускает счетное продолжение линейных операторов. Возьмем сцепленную последовательность  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  в  $\mathcal{E}$  и покажем, что она имеет непустое пересечение. Положим  $\gamma'_n := \sup\{\gamma \in \mathbb{R}_+ : \gamma C_n \subset B_n\}$  и  $\gamma_n := \min\{1, \gamma'_n\}$ . Непосредственно из определений видно, что  $\gamma_n > 0$  и  $\gamma_n C_n \subset B_n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . В качестве пространства  $X$  возьмем множество всех вещественных последовательностей, имеющих лишь конечное число ненулевых членов, с нормой

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n|}{\gamma_n}, \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X.$$

Подпространство  $X_0 \subset X$  определим следующей формулой:

$$X_0 := \left\{ x := (x_n) \in X : \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = 0 \right\}.$$

Определим теперь отображение  $\Phi : X \rightarrow \mathcal{E}$  соотношением

$$\Phi : x \mapsto \text{cl} \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n C_n \quad (x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X),$$

где  $\text{cl} A$  — замыкание множества  $A$ . Как видно,  $\Phi(x) \in \mathcal{E}$  ввиду насыщенности  $\mathcal{E}$  и отображение  $\Phi$  является нечетным и замкнутозначным веером. Покажем, что  $\Phi$  также полунепрерывен сверху.

Рассмотрим произвольную симметричную окрестность нуля  $V$  (т. е.  $V = -V$ ) в  $Y$ . В силу ограниченности  $B_0$  можно подобрать число  $\varepsilon > 0$  так, что  $\varepsilon B_0 \subset V$ . Если  $x = (x_n) \in X$  и  $N(x)$  обозначает наименьшее натуральное число такое, что  $x_n = 0$  для всех  $n \geq N(x)$ , то имеем

$$\Phi(x) = \text{cl} \sum_{n=1}^{N(x)} x_n C_n = \text{cl} \sum_{n=1}^{N(x)} \frac{x_n}{\gamma_n} \gamma_n C_n \subset \text{cl} \sum_{n=1}^{N(x)} \|x\| \text{cl} B_n = \|x\| \text{cl} \sum_{n=1}^{N(x)} B_n \subset \|x\| B_0 \subset \frac{\|x\|}{\varepsilon} V.$$

Отсюда видно, что если  $\|x\| \leq \varepsilon$ , то  $\Phi(x) \subset V$ . Следовательно,  $\Phi(U) \subset V$ , где  $U$  — это шар радиуса  $\varepsilon$  в  $X$ . Тем самым, веер  $\Phi$  полунепрерывен сверху.

Покажем, что нулевой оператор является селектором ограничения веера  $\Phi$  на  $X_0$ . Если  $x \in X_0$ , то по определению подпространства  $X_0$  выполнено равенство  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^+ = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^-$ , где  $x_n^+ := \max\{x_n, 0\}$  и  $x_n^- := \max\{-x_n, 0\}$ . По лемме о двойном разбиении существует матрица  $(x_{nk})_{n,k \in \mathbb{N}}$  с положительными элементами  $0 \leq x_{nk} \in \mathbb{R}$  такая, что

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} x_{nk} = x_n^+, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} x_{nk} = x_k^- \quad (n, k \in \mathbb{N}).$$

По определению веера  $\Phi$  имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \text{cl} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^+ C_n - \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k^- C_k \right) = \text{cl} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} x_{nk} C_k - \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} x_{nk} C_n \right) \\ &= \text{cl} \left( \sum_{n, k \in \mathbb{N}} x_{nk} (C_k - C_n) \right) \quad (x \in X_0).\end{aligned}$$

В силу сцепленности последовательности  $(C_n)$  имеем  $C_n \cap C_k \neq \emptyset$  для всех  $n, k \in \mathbb{N}$ , что равносильно  $0 \in C_k - C_n$ . А из последнего следует, что  $0 \in \Phi(x)$  при  $x \in X_0$ . По условию этот селектор допускает распространение до линейного селектора  $T$ , заданного на всем  $X$ . Подробнее, существует линейный оператор  $T : X \rightarrow Y$ , для которого  $Tx \in \Phi(x)$  при каждом  $x \in X$ , а также  $Tx_0 = 0$  для всех  $x_0 \in X_0$ .

Теперь можем указать общую точку  $y \in Y$  рассматриваемой сцепленной последовательности. Возьмем последовательность векторов  $\mathbf{e}_n = (e_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$  в  $X$  такую, что  $e_{nk} = 0$  для всех  $k \neq n$  и  $e_{nn} = 1$ . Обозначим  $\mathbf{u}_{nk} := \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_k \in X_0$ . Тогда  $0 = T(\mathbf{u}_{nk}) = T\mathbf{e}_n - T\mathbf{e}_k$ . Следовательно,  $T\mathbf{e}_n = T\mathbf{e}_k =: y$  при любых  $n, k \in \mathbb{N}$ . Тем самым  $y = T\mathbf{e}_n \in \Phi(\mathbf{e}_n)$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Заметим, наконец, что  $\Phi(\mathbf{e}_n) = \text{cl} \sum_{k \in \mathbb{N}} e_{nk} C_k = C_n$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Стало быть, пересечение семейства  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  содержит элемент  $y$ , что и завершает проверку наличия счетного свойства бинарного пересечения у семейства  $\mathcal{E}$ .  $\triangleright$

**Следствие 2.** Пусть  $Y$  — квазибанахово пространство и  $\mathcal{E}$  — насыщенное и линейно инвариантное семейство выпуклых ограниченных подмножеств  $Y$ . Тогда равносильны следующие условия:

- (1)  $\mathcal{E}$  обладает счетным свойством бинарного пересечения;
- (2) пара  $(Y, \mathcal{E})$  обладает счетным свойством мажорированного продолжения.

$\triangleleft$  При указанных условиях применимы теоремы 1 и 2.  $\triangleright$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Обращение следствия 1 имеет место, если положительный конус является воспроизводящим, см. [9]. Однако этот результат не следует из теоремы 3, в формулировке которой имеется дополнительное требование локальной ограниченности. Нам неизвестно, можно ли в теореме 3 опустить условие локальной ограниченности.

## Литература

1. Канторович Л. В. О полуупорядоченных линейных пространствах и их приложениях к теории линейных операций // Докл. АН СССР.—1935.—Т. 4, № 1–2.—С. 11–14.
2. Bonnice W., Silvermann R. The Hahn–Banach extension and the least upper bound properties are equivalent // Proc. Amer. Math. Soc.—1967.—Vol. 18, № 5.—P. 843–849. DOI: 10.1090/S0002-9939-1967-0215050-9.
3. To T.-O. The equivalence of the least upper bound property in ordered vector spaces // Proc. Amer. Math. Soc.—1971.—Vol. 30, № 2.—P. 287–295. DOI: 10.1090/S0002-9939-1971-0417746-3.
4. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.
5. Ioffe A. D. A new proof of the equivalence of the Hanch–Banach extension and the least upper bound properties // Proc. of the Amer. Math.—1981.—Vol. 82, № 3.—P. 385–389. DOI: 10.1090/s0002-9939-1981-0612725-1.
6. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление: теория и приложения.—М.: Наука, 2007.
7. Abramovich Yu. A., Wickstead A. W. The regularity of order bounded operators into  $C(K)$ . II // Quart. J. Math. Oxford.—1993.—Vol. 44, № 3.—P. 257–270.
8. Dănet N. The space of regular operators with the Riesz decomposition property // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Suppl.—2002.—Vol. 68.—P. 373–380.

9. Кусраева З. А., Гелиева А. А. О мажорированном продолжении линейных операторов // Матем. заметки.—2020.—Т. 108, № 2.—С. 190–199. DOI: 10.4213/mzm12580.
10. Rodríguez-Salinas B., Bou L. A Hahn–Banach theorem for arbitrary vector spaces // Boll. Un. Mat. Ital.—1974.—Vol. 4, № 10.—P. 390–393.
11. Nachbin L. A theorem of the Hahn–Banach type for linear transformations // Trans. Amer. Math. Soc.—1950.—Vol. 68, № 1.—P. 28–46. DOI: 10.1090/S0002-9947-1950-0032932-3.
12. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.
13. Bentley H. L., Herrlich H. Countable choice and pseudometric spaces // Topology and Its Applications.—1998.—Vol. 85, № 1–3.—P. 153–164. DOI: 10.1016/S0166-8641(97)00138-7.
14. Zaanen A. C. Riesz Spaces II.—Amsterdam: North Holland, 1983.
15. Aoki T. Locally bounded linear topological spaces // Proc. Imp. Acad. Tokyo.—1942.—Vol. 18, issue 10.—P. 588–594. DOI: 10.3792/pia/1195573733.
16. Rolewicz S. Metric Linear Spaces.—Warszawa: Hafner Press, 1972.
17. Bourgin T. H. Linear topological spaces // Amer. J. Math.—1943.—Vol. 65, № 4.—P. 637–659. DOI: 10.2307/2371871.
18. Hyers D. H. Locally bounded linear topological spaces // Rev. Ci. Lima.—1939.—Vol. 41.—P. 555–574.

*Статья поступила 28 декабря 2025 г.*

КУСРАЕВА ЗАЛИНА АНАТОЛЬЕВНА  
 Владикавказский научный центр РАН,  
 ведущий научный сотрудник лаборатории  
 нелинейных операторов в функцион. пространствах  
 РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1  
 E-mail: zali13@mail.ru  
<https://orcid.org/0000-0002-8817-1888>

СААДУЛАЕВА АЛИНА АЛЬБЕРТОВНА  
 Владикавказский научный центр РАН,  
 младший научный сотрудник лаборатории  
 нелинейных операторов в функцион. пространствах  
 РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1  
 E-mail: gelieva00@mail.ru

*Vladikavkaz Mathematical Journal*  
 2026, Volume 28, Issue 1, P. 98–107

## ON EXTENSION OF LINEAR SELECTORS

Kusraeva, Z. A.<sup>1</sup> and Saadulaeva, A. A.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,  
 1 Williams St., Mikhailovskoye Village 363110, Russia  
 E-mail: zali13@mail.ru, gelieva00@mail.ru

**Abstract.** We consider a sequentially complete topological vector space  $Y$  and a linearly invariant family  $\mathcal{E}$  of convex subsets of  $Y$ . We say that:  $\mathcal{E}$  has the countable binary intersection property if every countable subfamily of pairwise intersecting sets has a nonempty intersection; a pair  $(Y, \mathcal{E})$  is said to admit a countable extension of linear operators if for any separable metrizable topological vector space, its subspace, odd closed-valued upper semicontinuous fan (subadditive positively homogeneous set-valued mapping), and a linear operator defined on the subspace and being a selector of the given fan, there exists a linear selector that extends given linear operator from a subspace to the entire space. The main result states that the pair  $(Y, \mathcal{E})$  admits a countable extension of continuous linear operators if  $E$  has the countable binary intersection property. The inverse to this result also holds under the additional assumption that the topological vector space under consideration is locally bounded.

**Keywords:** fan, extension of linear operators, countable binary intersection property, separability, vector lattice.

**AMS Subject Classification:** 46G25, 47A40, 47H60, 47L07.

**For citation:** Kusraeva, Z. A. and Saadulaeva, A. A. On Extension of Linear Selectors, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 98–107 (in Russian). DOI: 10.46698/o1056-6445-9027-m.

## References

1. Kantorovich, L. V. On Partially Ordered Linear Spaces and Their Applications to the Theory of Linear Operations, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1935, vol. 4, no. 1–2, pp. 11–14 (in Russian).
2. Bonnice, W. and Silvermann, R. The Hahn–Banach Extension and the Least Upper Bound Properties are Equivalent, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1967, vol. 18, no. 5, pp. 843–849. DOI: 10.1090/S0002-9939-1967-0215050-9.
3. To, T.-O. The Equivalence of the Least Upper Bound Property in Ordered Vector Spaces, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1971, vol. 30, no. 2, pp. 287–295. DOI: 10.1090/S0002-9939-1971-0417746-3.
4. Akilov, G. P. and Kutateladze, S. S. *Uporyadochennyye vektornyye prostranstva* [Ordered Vector Spaces], Novosibirsk, Nauka, 1978 (in Russian).
5. Ioffe, A. D. A New Proof of the Equivalence of the Hahn–Banach Extension and the Least Upper Bound Properties, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1981, vol. 82, no. 3, pp. 385–389. DOI: 10.1090/s0002-9939-1981-0612725-1.
6. Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S. *Subdifferentials. Theory and Applications*, Dordrecht, Kluwer, 1995.
7. Abramovich, Yu. A. and Wickstead, A. W. The Regularity of Order Bounded Operators into  $C(K)$ . II, *The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford Second Series*, 1993, vol. 44, no. 3, pp. 257–270.
8. Dänet, N. The Space of Regular Operators with the Riesz Decomposition Property, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Suppl.*, 2002, vol. 68, pp. 373–380.
9. Kusraeva, Z. A. and Gelieva, A. A. On Dominated Extension of Linear Operators, *Mathematical Notes*, 2020, vol. 108, no. 2, pp. 171–178. DOI: 10.1134/S0001434620070184.
10. Rodríguez-Salinas, B. and Bou, L. A Hahn–Banach Theorem for Arbitrary Vector Spaces, *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana*, 1974, vol. 10, no. 4, pp. 390–393.
11. Nachbin, L. A Theorem of the Hahn–Banach Type for Linear Transformations, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1950, vol. 68, no. 1, pp. 28–46. DOI: 10.1090/S0002-9947-1950-0032932-3.
12. Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. *Funkcional’nyy analiz* [Functional Analysis], Moscow, Nauka, 1984 (in Russian).
13. Bentley, H. L. and Herrlich, H. Countable Choice and Pseudometric Spaces *Topology and Its Applications*, 1998, vol. 85, no. 1–3, pp. 153–164. DOI: 10.1016/S0166-8641(97)00138-7.
14. Zaanen, A. C. *Riesz Spaces II*, Amsterdam, North Holland, 1983.
15. Aoki, T. Locally Bounded Linear Topological Spaces, *Proceedings of the Imperial Academy*, 1942, vol. 18, no. 10, pp. 588–594. DOI: 10.3792/pia/1195573733.
16. Rolewicz, S. *Metric Linear Spaces*, Warszawa, Hafner Press, 1972.
17. Bourgin, T. H. Linear Topological Spaces, *American Journal of Mathematics*, 1943, vol. 65, no. 4, pp. 637–659. DOI: 10.2307/2371871.
18. Hyers, D. H. Locally Bounded Linear Topological Spaces, *Revista de Ciencias (Lima)*, 1939, vol. 41, pp. 555–574.

Received December 28, 2025

ZALINA A. KUSRAEVA

Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,  
1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia,

Leading Researcher

E-mail: zali13@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-8817-1888>

ALINA A. SAADULAEVA

Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,  
1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia,

Junior Researcher, PhD Student

E-mail: gelieva00@mail.ru

УДК 514.764.21, 514.765, 512.813  
DOI 10.46698/i4125-5722-6924-j

ON EXAMPLES OF GEODESIC ORBIT PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLDS

I. G. Markina<sup>1</sup>, Yu. G. Nikonorov<sup>2</sup> and K. Furutani<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics, University of Bergen,  
P. O. Box 7803, N-5020 Bergen, 41 Allégaten, Norway;

<sup>2</sup> Southern Mathematical Institute of VSC RAS,  
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia;

<sup>3</sup> Osaka Central Advanced Mathematical Institute, Osaka Metropolitan University,  
Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka 558-8585, Japan

E-mail: irina.markina@uib.no, nikonorov2006@mail.ru, kf46089@gmail.com

*Dedicated to the memory of Professor Semën Samsonovich Kutateladze*

**Abstract.** A pseudo-Riemannian manifold  $(M, g)$  is called a geodesic orbit manifold if any geodesic  $\gamma$  of  $M$  is an orbit of a 1-parameter subgroup of the full isometry group of  $(M, g)$ . This terminology in the case of Riemannian manifolds was introduced in 1991 by O. Kowalski and L. Vanhecke, who initiated a systematic study of spaces  $(M = G/H, g)$ , where  $G$  is an isometry group and  $H$  is an isotropy subgroup. It should be noted that symmetric spaces, weakly symmetric spaces, naturally reductive homogeneous spaces, normal homogeneous spaces, generalized normal homogeneous spaces (but not only) are subclasses of geodesic orbit pseudo-Riemannian spaces. In this paper, we present examples of geodesic orbit pseudo-Riemannian manifolds. The examples are special 15-dimensional pseudo  $H$ -type Lie groups, i. e., 2-step nilpotent Lie groups of Heisenberg type equipped with a left invariant pseudo-Riemannian metric. To construct the corresponding examples, results on the structure of the Lie groups under consideration were used.

**Keywords:** geodesic orbit Riemannian manifolds, geodesic orbit pseudo-Riemannian manifolds,  $H$ -type Lie groups.

**AMS Subject Classification:** 53C50, 53C30, 22E25.

**For citation:** Markina, I. G., Nikonorov, Yu. G. and Furutani, K. On Examples of Geodesic Orbit Pseudo-Riemannian Manifolds, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 108–121. DOI: 10.46698/i4125-5722-6924-j.

## 1. Introduction

A pseudo-Riemannian manifold  $(M, g)$  is called a geodesic orbit manifold if any geodesic  $\gamma$  of  $M$  is an orbit of a 1-parameter subgroup of the full isometry group of  $(M, g)$ . This terminology in the case of Riemannian manifolds was introduced in [1] by O. Kowalski and L. Vanhecke, who initiated a systematic study of spaces  $(M = G/H, g)$ , where  $G$  is an isometry group and  $H$  is an isotropy subgroup. We refer to [2–6] for expositions on general properties of geodesic orbit Riemannian manifolds and historical surveys. Some important results on geodesic orbit pseudo-Riemannian spaces were obtained in [7–11]. It should be noted that symmetric spaces, weakly symmetric spaces, naturally reductive homogeneous spaces, normal homogeneous spaces, generalized normal homogeneous spaces (but not only) are subclasses of geodesic orbit pseudo-Riemannian spaces.

The pseudo-Riemannian  $H$ -type nilmanifold is a 2-step nilpotent  $H$ -type Lie group endowed with a left invariant pseudo-Riemannian metric. The Lie algebra  $\mathfrak{n}$  of a pseudo-Riemannian  $H$ -type nilmanifold carries a non-degenerate scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , whose restriction  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{z}}$  on the centre  $\mathfrak{z}$  of the Lie algebra  $\mathfrak{n}$  is also non-degenerate. The orthogonal complement  $\mathfrak{v}$  to the center is a representation space for the Clifford algebra  $\text{Cl}(\mathfrak{z}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{z}})$ , such that the representation map is the dual to the adjoint map on the Lie algebra, see Section 2.

The problem of classification of geodesic orbit and naturally reductive pseudo-Riemannian nilmanifolds of  $H$ -type is very relevant. The results on Riemannian  $H$ -type nilmanifolds (the metric is positive definite) were obtained by A. Kaplan in [12] and C. Riehm in [13] (see Theorem 1) and the results on pseudo-Riemannian  $H$ -type nilmanifolds, when the space  $\mathfrak{v}$  is a minimal dimensional admissible Clifford module was obtained in [14].

**Theorem 1** [12, 13]. *Let  $N$  be  $H$ -type Lie group (supplied with a left invariant Riemannian metric) with the  $H$ -type algebra  $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$ ,  $m = \dim(\mathfrak{z})$ ,  $n = \dim(\mathfrak{v})$ , and the center  $\mathfrak{z}$ . Then  $N$  is geodesic orbit if and only if one of the following three conditions holds:*

- 1)  $m = 1, 2, 3$  and  $n$  is any possible;
- 2)  $m = 5, 6$  and  $n = 8$ ;
- 3)  $m = 7, n = 8, 16, 24$  and  $\mathfrak{v}$  is an isotypic Clifford module (in this case it is equivalent to the following property: if  $Z_1, Z_2, \dots, Z_7$  is an orthonormal basis of  $\mathfrak{z}$ , the linear transformation  $X \mapsto J_{Z_1} J_{Z_2} \cdots J_{Z_7}(X)$  of  $\mathfrak{v}$  is either  $\text{Id}$  or  $-\text{Id}$ ).

Moreover,  $N$  is naturally reductive if and only if  $m = 1$  or  $m = 3$ .

Recently, an analogue of this theorem was obtained for pseudo-Riemannian metrics.

**Theorem 2** [14]. *Let  $N_{r,s}$  be an  $H$ -type Lie group, where  $(r, s)$ ,  $s \geq 1$ , is the signature of the left invariants pseudo-Riemannian metric restricted to the center of the group. Let  $\mathfrak{n}_{r,s} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$  be the Lie algebra of  $N_{r,s}$ , where  $\mathfrak{z}$  is the centre and  $\mathfrak{v}$  is a minimal admissible module for the Clifford algebra  $\text{Cl}(\mathbb{R}^{r,s})$  orthogonal to  $\mathfrak{z}$ . Then the following four assertions hold:*

- 1)  $N_{r,s}$  is naturally reductive (hence, geodesic orbit) if and only if  $(r, s) \in \{(0, 1), (1, 2)\}$ ;
- 2) If  $N_{r,s}$  is geodesic orbit but not naturally reductive, then  $(r, s) = (3, 4)$ ;
- 3)  $N_{3,4}$  is a geodesic orbit pseudo-Riemannian manifold;
- 4)  $N_{r,s}$  with  $(r, s) \notin \{(0, 1), (1, 2), (3, 4)\}$  is not geodesic orbit pseudo-Riemannian manifold.

It is important that item 3) of the above theorem is proved in [14] using a system of symbolic computations that allows one to calculate and evaluate the ranks of a number of auxiliary matrices to prove that each geodesic can be represented as an orbit of a 1-parameter isometry group of the manifold under study. This kind of reasoning proves the existence of the required one-parameter group, but does not always allow one to specify it explicitly.

The main goal of this note is to provide an alternative proof of the corresponding result, which also provides explicit expressions for the corresponding one-parameter isometry groups, see Theorem 4.

The paper is organized as follows. In Section 2, we recall some important results on pseudo-Riemannian geodesic orbit metrics on nilpotent Lie groups. The main role here is played by the notion of the transitive normalizer condition, which Riemannian version was used by C. Gordon in order to study geodesic orbit Riemannian metric on nilpotent Lie groups. We also recall some important properties of pseudo  $H$ -type Lie groups, their isometry and automorphism groups. In Section 3, we show the geodesic orbit property for the 15-dimensional pseudo-Riemannian  $H$ -type nilmanifold  $N_{3,4}(\mathfrak{v}_{\min})$ . Section 4 is dedicated to the same property for the Riemannian  $H$ -type nilmanifold  $N_{7,0}(\mathfrak{v}_{\min})$ .

## 2. Definitions and Notation

### 2.1. Geodesic orbit pseudo-Riemannian manifolds.

DEFINITION 1. A pseudo-Riemannian homogeneous reductive manifold  $(G/H, g)$  is called *geodesic orbit* if any geodesic through the point  $eH$  is an orbit of some 1-parameter isometry group of  $(G/H, g)$ .

Let  $(N, g)$  be a 2-step pseudo-Riemannian nilpotent Lie group with the Lie algebra  $\mathfrak{n}$  and  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  the scalar product (a symmetric non-degenerate bilinear form) generating the pseudo-Riemannian left invariant metric  $g$ . We call such groups *pseudo-Riemannian nilmanifolds*. If the centre  $\mathfrak{z}$  of  $\mathfrak{n}$  is non-degenerate with respect to  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , then we write  $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$ , where  $\mathfrak{v} = \mathfrak{z}^\perp$  relative to  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . In this case,  $\mathfrak{v}$  is also non-degenerate, see [15, Lemma 2.60].

Whenever  $(N, g)$  is connected simply connected, we do not distinguish between the group of automorphisms of the nilmanifold  $(N, g)$  and of its Lie algebra  $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$ . Note that each skew-symmetric derivation of  $\mathfrak{n}$  leaves each of  $\mathfrak{v}$  and  $\mathfrak{z}$  invariant. For any  $Z \in \mathfrak{z}$ , we consider the operator

$$J_Z: \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{v}, \quad \text{such that} \quad \langle J_Z(X), Y \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{v}. \quad (1)$$

The map  $J_Z$  is skew-symmetric and  $J_Z(Y) = (\text{ad } Y)'(Z)$ , where  $(\text{ad } Y)'$  is dual to  $\text{ad } Y$  with respect to  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . The map  $J: \mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{v}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{v}})$ , sending  $Z \mapsto J_Z$  is linear. The group of isometries of the nilmanifold  $(N, g)$  is given by

$$H = \{(\varphi, \psi) \in O(\mathfrak{z}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{z}}) \times O(\mathfrak{v}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{v}}) : \psi J_Z \psi^{-1} = J_{\varphi(Z)}, Z \in \mathfrak{z}\}, \quad (2)$$

while its Lie algebra is

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \text{Der}(\mathfrak{n}) \cap \mathfrak{so}(\mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \\ &= \{D = (C, A) \in \mathfrak{so}(\mathfrak{z}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{z}}) \times \mathfrak{so}(\mathfrak{v}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{v}}) : [A, J_Z] = J_{C(Z)}, Z \in \mathfrak{z}\}. \end{aligned} \quad (3)$$

The next result is well known, see e. g. Corollary 3.5 in [16].

**Proposition 1.** *Let  $(N, g)$  be a pseudo-Riemannian nilmanifold with non-degenerate center. Then the connected isometry group of  $(N, g)$  is  $N \rtimes H$ , where  $N$  is the set of left translations by elements of  $N$  and the isotropy subgroup  $H$  is given by the isometric automorphisms (2) with Lie algebra  $\mathfrak{h}$  as in (3).*

In this case, the isotropy group of  $(N, g)$  at the identity element  $e$  is exactly  $H$  with the embedding  $a \in H \mapsto (e, a) \in N \rtimes H$ . The following Proposition summarizes well known Geodesic Lemma [10], its reformulation in the spirit of [17], and consideration done in [14] for the setting of  $H$ -type nilmanifolds, see definition in Section 2.2.

**Proposition 2.** *A pseudo-Riemannian  $H$ -type nilmanifold  $(N, g)$  is geodesic orbit if for any  $z_0 \in \mathfrak{z}$  and  $x_0 \in \mathfrak{v}$  there is  $D = (C, A) \in \mathfrak{h}$ , such that*

$$A(x_0) = J_{z_0}(x_0), \quad C(z_0) = 0, \quad [A, J_w] = J_{C(w)} \quad \text{for all } w \in \mathfrak{z}. \quad (4)$$

A special case of geodesic orbit pseudo-Riemannian spaces are naturally reductive homogeneous pseudo-Riemannian spaces. We refer to [14] and references therein for more detailed study.

DEFINITION 2. Let  $(M = G/H, g)$  be a homogeneous reductive pseudo-Riemannian manifold. Then  $M$  is said to be a naturally reductive if there is a reductive decomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ , such that

$$\langle [T, Q]_{\mathfrak{m}}, R \rangle = \langle Q, [T, R]_{\mathfrak{m}} \rangle \quad (5)$$

for the corresponding scalar product and any  $T, Q, R \in \mathfrak{m}$ .

**Theorem 3** [18, Theorem 3.2]. *Let  $(N, g)$  denote a 2-step pseudo-Riemannian nilmanifold with a non-degenerate center. Assume that the map  $J: \mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{v})$  is injective, see (1). Then the metric is naturally reductive with respect to  $G = N \rtimes H$  (see Proposition 1), if and only if*

- (i)  $\mathbf{V} = J(\mathfrak{z})$  is a Lie subalgebra of  $\mathfrak{so}(\mathfrak{v})$  and
- (ii)  $[J(Z_1), J(Z_2)] = J(\tau_{Z_1}(Z_2))$ , where  $\tau_{Z_1} \in \mathfrak{so}(\mathfrak{z})$  for any  $Z_1 \in \mathfrak{z}$ .

Since the map  $J$  is supposed to be injective, the map  $\tau$  can be easily recovered from (ii).

REMARK 1. Using Theorem 3, it is easy to prove that the pseudo-Riemannian  $H$ -type nilmanifold  $N_{3,4}(\mathfrak{v}_{\min})$ , as well as the corresponding Riemannian  $H$ -type nilmanifold  $N_{7,0}(\mathfrak{v}_{\min})$ , that are studied further in this note, are not naturally reductive.

**2.2. Pseudo  $H$ -type Lie groups.** Now, we recall some important properties of pseudo  $H$ -type Lie groups. Let  $(N, g)$  be a 2-step pseudo-Riemannian nilmanifold and  $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$  be its Lie algebra endowed with a scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  making the center non-degenerate. We identify  $(\mathfrak{z}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{z}})$  with the pseudo Euclidean vector space  $\mathbb{R}^{r,s} = (\mathbb{R}^{r+s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{r,s})$ , where

$$\langle z, w \rangle_{r,s} = \sum_{i=1}^r z_i w_i - \sum_{j=1}^s z_{r+j} w_{r+j}, \quad z, w \in \mathbb{R}^{r+s}.$$

If the linear operator  $J: \mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{v}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{v}})$  is defined by for any  $z \in \mathfrak{z}$  by (1), and satisfies  $J_z^2(x) = -\langle z, z \rangle_{r,s} x$  for any  $z \in \mathbb{R}^{r,s}$  and all  $x \in \mathfrak{v}$ , then  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{r,s}$  is called the pseudo  $H$ (eisenberg)-type Lie algebra. We denote by  $N_{r,s}$  the connected simply connected Lie group, whose Lie algebra is the pseudo  $H$ -type Lie algebra  $\mathfrak{n}_{r,s}$ . The  $H$ -type Lie algebras  $N_{r,0}$  with a positive definite scalar product were introduced in [19] and with an arbitrary indefinite scalar product in [20], see also [21].

These Lie algebras are related to the representations of the Clifford algebras in the following way. Let  $J: \text{Cl}(\mathbb{R}^{r,s}) \rightarrow \text{End}(\mathfrak{v})$  be a representation of the Clifford algebra  $\text{Cl}(\mathbb{R}^{r,s})$  generated by the pseudo Euclidean vector space  $\mathbb{R}^{r,s}$ . If there is a scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{v}}$  on the representation space  $\mathfrak{v}$  (Clifford module) such that the linear map  $J_z$  is skew-symmetric for any  $z \in \mathbb{R}^{r,s}$ ; that is

$$\langle J_z(x), y \rangle_{\mathfrak{v}} = -\langle x, J_z(y) \rangle_{\mathfrak{v}}, \quad z \in \mathbb{R}^{r,s}, \quad x, y \in \mathfrak{v},$$

then we get a pseudo  $H$ -type Lie algebra with the commutators defined in (1), see details in [20, 22, 23]. The scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{v}}$  in this case is called admissible and  $\mathfrak{v}$  is called admissible (Clifford) module.

It is important that, see e.g. [20], or [23, Proposition 2.2.2], the signature of the scalar product space  $(\mathfrak{v}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{v}})$  is neutral and  $(\mathfrak{v}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{v}})$  is isometric to  $\mathbb{R}^{l,l}$  for some  $l \in \mathbb{N}$ , if  $s > 0$ , whereas the corresponding signature is either  $(l, 0)$  or  $(0, l)$  for some  $l \in 2\mathbb{N}$ , if  $s = 0$ .

### 3. Pseudo-Riemannian $H$ -Type Nilmanifold $N_{3,4} = N_{3,4}(\mathfrak{v}_{\min})$

Although the fact that a pseudo-Riemannian nilmanifold of  $H$ -type  $N_{3,4}(\mathfrak{v}_{\min})$ , where the complement of the centre is the minimal admissible modulus, is a geodesic orbit manifold is proved in [14], we give here an alternative proof of the following theorem.

**Theorem 4.** *The pseudo-Riemannian  $H$ -type nilmanifold  $N_{3,4}(\mathfrak{v}_{\min})$  is a geodesic orbit manifold. Each geodesic is realized as an orbit of a one-parameter subgroup which initial conditions form an eight dimensional affine space.*

It is known that the Clifford algebra  $\text{Cl}(\mathbb{R}^{3,4})$  has two non-equivalent minimal admissible 8-dimensional modules  $\mathfrak{v}_{\min}^+$  and  $\mathfrak{v}_{\min}^-$ . Moreover, the corresponding 15-dimensional pseudo

$H$ -type Lie algebras  $N_{3,4}(\mathfrak{v}_{\min}^+)$  and  $N_{3,4}(\mathfrak{v}_{\min}^-)$  are isomorphic and isometric, see [24, Theorem 12]. Therefore, it suffices to check only one pseudo  $H$ -type nilmanifold  $N_{3,4}(\mathfrak{v}_{\min}^-) = N_{3,4}(\mathfrak{v}_{\min})$ . The left invariant metric on  $N_{3,4}(\mathfrak{v}_{\min})$  is generated by the scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{3,4} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{4,4}$  on the Lie algebra  $\mathfrak{n}_{3,4} \cong \mathbb{R}^{3,4} \oplus \mathbb{R}^{4,4}$ . We write  $(z_0, x_0) \in \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}_{\min} \cong \mathbb{R}^{3,4} \oplus \mathbb{R}^{4,4}$  for an initial vector for a geodesic. For different type of the initial vectors we will use distinguished bases for the horizontal space  $\mathfrak{v}_{\min}$  and for the centre  $\mathfrak{z}$ . We start from a basis for the centre.

### 3.1. Central component $z_0$ of initial conditions.

(C1) If  $\|z_0\|^2 = \langle z_0, z_0 \rangle_{\mathbb{R}^{3,4}} = 1$ , then we set

$$\{Z_1 = z_0, Z_2, \dots, Z_7\},$$

as an orthonormal basis, satisfying

$$\|Z_1\|^2 = \|Z_2\|^2 = \|Z_3\|^2 = 1, \quad \|Z_4\|^2 = \|Z_5\|^2 = \|Z_6\|^2 = \|Z_7\|^2 = -1. \quad (6)$$

(C2) If  $\|z_0\|^2 = \langle z_0, z_0 \rangle_{\mathbb{R}^{3,4}} = -1$ , then we set

$$\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 = z_0, Z_5, Z_6, \dots, Z_7\},$$

such that (6) holds.

(C3) If  $\|z_0\|^2 = \langle z_0, z_0 \rangle_{\mathbb{R}^{3,4}} = 0$ , then first we fix an arbitrary orthonormal basis  $\{z_1^*, \dots, z_7^*\}$ , satisfying (6) and write

$$z_0 = \sum_{i=1}^3 \theta_i z_i^* + \sum_{i=4}^7 \theta_i z_i^* := z_+^* + z_-^*.$$

Then, without loss of generality, we can assume  $\sum_{i=1}^3 \theta_i^2 = \sum_{i=4}^7 \theta_i^2 = 1$ . Since  $\langle z_+^*, z_-^* \rangle_{\mathbb{R}^{3,4}} = 0$  we can select an orthonormal basis

$$\{Z_1 = z_+^*, Z_2, Z_3, Z_4 = z_-^*, Z_5, Z_6, Z_7\},$$

still satisfying (6). With these basis vectors we can denote  $z_0 = Z_1 + Z_4$ .

In what follows we use the construction of basis on the centre as above.

REMARK 2. In any of the above constructions, the operators  $J_{Z_j}$ ,  $j = 1, \dots, 7$ , span a 7-dimensional subspace in  $J_{\mathfrak{z}} \subset \mathfrak{so}(4, 4)$ , nevertheless the vector space  $\mathbf{V} = J_{\mathfrak{z}}$  is not a Lie subalgebra of  $\mathfrak{so}(4, 4)$ . Hence,  $N_{3,4}(\mathfrak{v}_{\min})$  is not a naturally reductive manifold, see Theorem 3.

**3.2. Horizontal component  $x_0$  of initial conditions and reduction by conjugate Clifford action.** Fix  $z_0 \in \mathfrak{z}$  and choose a suitable basis as was described in Section 3.1. Now we have three cases:

$$\text{(H1)} \quad \|x_0\|^2 = \langle x_0, x_0 \rangle_{\mathbb{R}^{4,4}} = 1, \quad \text{(H2)} \quad \|x_0\|^2 = -1, \quad \text{(H3)} \quad \|x_0\|^2 = 0.$$

Before we consider these three options we let  $v \in \mathfrak{v}_{\min}$  be such that  $\|v\|^2 = 1$  and

$$J_{Z_1 Z_2 Z_4 Z_5}(v) = v, \quad J_{Z_1 Z_2 Z_6 Z_7}(v) = v, \quad J_{Z_1 Z_3 Z_5 Z_7}(v) = v, \quad J_{Z_1 Z_2 Z_3}(v) = v. \quad (7)$$

The condition  $J_{Z_1 Z_2 Z_3}(v) = v$  is equivalent to  $J_{Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_7}(v) = -v$ . This choice fixes the module  $\mathfrak{v}_{\min} = \mathfrak{v}_{\min}^-$ . Moreover, the choice of  $v$  as in (7) allows us to use the following orthonormal basis for the module  $\mathfrak{v}_{\min}$ :

$$\begin{aligned} X_1 = v, \quad X_2 = J_{Z_1}(v), \quad X_3 = J_{Z_2}(v), \quad X_4 = J_{Z_3}(v), \\ X_5 = J_{Z_4}(v), \quad X_6 = J_{Z_5}(v), \quad X_7 = J_{Z_6}(v), \quad X_8 = J_{Z_7}(v). \end{aligned} \quad (8)$$

**REMARK 3.** Once we fix an orthonormal basis  $\{z_i\}$  in  $\mathbb{R}^{3,4}$  (or in general in  $\mathbb{R}^{r,s}$ ), the number of a set of generating positive involutions  $\{p_i\}$  of a maximal abelian subgroup  $S$  consisting of positive involutions, which is a subgroup in the finite group  $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\{z_i\})$  generated by  $\{z_i\}$ , is determined by the pair  $(r, s)$ . In the case  $(r, s) = (3, 4)$  it is 4, that is one set of them is listed in (7). It should be noted that in our case the correspondence  $z \mapsto J_z$  is not one-to-one. This is common in all the cases of the Clifford algebra being not irreducible. In such case we have two irreducible modules and they are distinguished by the action of the volume form  $J_{z_1} \cdots J_{z_{r+s}}$ . As we can see easily that in our case  $J_{z_1} \cdots J_{z_7}$  is in the center of the group  $\mathbb{G}$ , so that  $J_{z_1} J_{z_2} J_{z_3}(v) = v$  is not only equivalent to  $J_{z_1} \cdots J_{z_7}(v) = -v$ , it is also equivalent to  $J_{z_1} \cdots J_{z_7} \equiv -\text{Id}$  as an operator acting on the space generated by  $\{J_{z_i}(v)\}$ . So we may distinguish two irreducible modules  $\mathfrak{v}_{\min}^\pm$  by the action of the volume form  $J_{z_1} \cdots J_{z_7} = \pm \text{Id}$ , see details in [24].

Let  $x_0 \in \mathfrak{v}_{\min}$  be as in **(H1)** above. Let  $T \in SO(4, 4)$  be such that  $x_0 = T(v)$  and consider the conjugate Clifford action  $\tilde{J}_w := T^{-1} J_w T = T^\tau J_w T$ , where  $T^\tau$  is the transpose to  $T$  with respect to the scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{4,4}$ . Then, a geodesic determined by the initial condition  $(z_0, x_0)$  is homogeneous if there is a pair  $D = (C, A)$  such that

$$A(x_0) = J_{z_0}(x_0), \quad C(z_0) = 0, \quad [A, J_w] = J_{C(w)}, \quad \text{for all } w \in \mathbb{R}^{3,4}. \quad (9)$$

**Lemma 1.** *The condition (9) is equivalent to*

$$\tilde{A}(v) = T^{-1} A T(v) = T^{-1} J_{z_0} T(v) = \tilde{J}_{z_0}(v), \quad C(z_0) = 0, \quad [\tilde{A}, \tilde{J}_w] = \tilde{J}_{C(w)}, \quad (10)$$

for all  $w \in \mathfrak{z} \cong \mathbb{R}^{3,4}$ .

◁ In fact, from (9)

$$\begin{aligned} T^{-1} A T(v) &= T^{-1} A(x_0) = T^{-1} J_{z_0}(x_0) = T^{-1} T \tilde{J}_{z_0} T^{-1}(x_0) \\ &= \tilde{J}_{z_0}(v), [T^{-1} A T, T^{-1} J_w T] = T^{-1} [A, J_w] T = T^{-1} J_{C(w)} T = \tilde{J}_{C(w)}, \end{aligned}$$

and vice versa. ▷

We denote the  $H$ -type group  $N_{3,4}(\mathfrak{v}_{\min})$  related to the Clifford action  $J_z: \mathfrak{v}_{\min} \rightarrow \mathfrak{v}_{\min}$  and the  $H$ -type group  $N_{3,4}^T(\mathfrak{v}_{\min})$  related to the Clifford action  $\tilde{J}_z: \mathfrak{v}_{\min} \rightarrow \mathfrak{v}_{\min}$ ,  $\tilde{J}_z = T^{-1} J_z T$ . Then the Lie bracket  $[x, y]^T$  defined by  $\tilde{J}_z$  is given by

$$\langle z, [x, y]^T \rangle_{\mathbb{R}^{3,4}} = \left\langle \tilde{J}_z(x), y \right\rangle_{\mathfrak{v}_{\min}}.$$

**Lemma 2.** *The transformation  $T \times \text{Id}: N_{3,4}(\mathfrak{v}_{\min}) \rightarrow N_{3,4}^T(\mathfrak{v}_{\min})$  is an isometric isomorphism.*

◁ We can see this by the equality:

$$\begin{aligned} \langle z, [T(x), T(y)] \rangle_{\mathfrak{v}_{\min}} &= \langle J_z(T(x)), T(y) \rangle_{\mathfrak{v}_{\min}} \\ &= \langle T^\tau J_z T(x), y \rangle_{\mathfrak{v}_{\min}} = \left\langle \tilde{J}_z(x), y \right\rangle_{\mathfrak{v}_{\min}} = \langle z, [x, y]^T \rangle_{\mathbb{R}^{3,4}}, \end{aligned}$$

that proves the lemma. ▷

Let  $x_0 \in \mathfrak{v}_{\min}$  be as in **(H2)** and  $v \in \mathfrak{v}_{\min}$  as in (7). We find  $T \in SO(4, 4)$ ,  $T: \mathfrak{v}_{\min} \rightarrow \mathfrak{v}_{\min}$ , such that  $T(x_0) = J_{Z_4}(v)$ . Then condition (9) is equivalent to

$$A(J_{Z_4}(v)) = J_{z_0}(v), \quad C(z_0) = 0, \quad [A, J_w] = J_{C(w)} \quad \text{for all } w \in \mathbb{R}^{3,4}.$$

by changing the Clifford action from  $J_z$  to  $\tilde{J}_z = T^{-1}J_zT$ .

Let  $x_0 \in \mathfrak{v}_{\min}$  be as in **(H3)** and  $v \in \mathfrak{v}_{\min}$  as in (7). We fix an orthonormal basis  $\{Z_i\}_{i=1}^7$  as was described in **(C3)**, and express  $x_0$  in the basis (8) as follows

$$x_0 = \sum_{i=0}^3 \theta_i J_{Z_i}(v) + \sum_{i=4}^7 \theta_i J_{Z_i}(v) = x_0^+ + x_0^-, \quad \sum_{i=0}^3 \theta_i^2 = \sum_{i=4}^7 \theta_i^2 = 1.$$

Since  $\langle x_0^+, x_0^- \rangle_{\mathfrak{v}_{\min}} = 0$ , we can find an orthogonal transformation  $T \in SO(4, 0) \times SO(0, 4) \subset SO(4, 4)$ , such that  $T(x_0^+) = v$  and  $T(x_0^-) = J_{Z_4}(v)$ . Then for  $\tilde{J}_z = T^{-1}J_zT$  we obtain

$$\begin{aligned} T^{-1}AT(v + J_{Z_4}(v)) &= T^{-1}J_{z_0}T(v + J_{z_4}(v)), \quad C(z_0) = 0, \\ T^{-1}[A, J_w]T &= [T^{-1}AT, T^{-1}J_wT] = T^{-1}J_{C(w)}T \quad \text{for any } w \in \mathbb{R}^{3,4}, \end{aligned} \quad (11)$$

which is equivalent to condition (9).

The discussions above can be summarized in the statement that an initial vector  $(z_0, x_0)$  for a geodesic can be restricted to the following nine cases.

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 \oplus v, \\ Z_4 \oplus v, \\ (Z_1 + Z_4) \oplus v \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^{3,4} \oplus \mathfrak{v}_{\min}, \quad (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 \oplus J_{Z_4}(v), \\ Z_4 \oplus J_{Z_4}(v), \\ (Z_1 + Z_4) \oplus J_{Z_4}(v) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^{3,4} \oplus \mathfrak{v}_{\min}, \quad (13)$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 \oplus (v + J_{Z_4}(v)), \\ Z_4 \oplus (v + J_{Z_4}(v)), \\ (Z_1 + Z_4) \oplus (v + J_{Z_4}(v)) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^{3,4} \oplus \mathfrak{v}_{\min}. \quad (14)$$

We not only show the existence of a pair  $(C, A)$  for all the 9 cases (12), (13) and (14), but we also show that it form an affine space of a suitable dimension according to the initial conditions.

**3.3. Relation between  $A$  and  $C$  in  $[A, J_w] = J_{C(w)}$ .** We can express  $A$  in the form

$$A = \sum_{i < k} a_{i,k} J_{Z_i} J_{Z_k}. \quad (15)$$

Indeed, we know that  $A$  belongs to linear combination of  $\{[J_{Z_i}, J_{Z_k}] : 1 \leq i < k \leq 7\}$ , see details in [14, Proposition 4]. On the other hand,  $[J_{Z_i}, J_{Z_k}] = J_{Z_i}J_{Z_k} - J_{Z_k}J_{Z_i} = 2J_{Z_i}J_{Z_k}$ .

Then  $[A, J_{Z_1}] = J_{C(Z_1)}$  implies

$$\begin{aligned} [A, J_{Z_1}] &= AJ_{Z_1} - J_{Z_1}A = \sum_{i < k} a_{i,k} J_{Z_i} J_{Z_k} J_{Z_1} - J_{Z_1} \sum_{i < k} a_{i,k} J_{Z_i} J_{Z_k} \\ &= 2 \sum_{k > 1} a_{1,k} J_{Z_k} = J_{2 \sum_{k=2}^7 a_{1,k} Z_k}. \end{aligned}$$

Thus  $C(Z_1) = 2 \sum_{k=2}^7 a_{1,k} Z_k$ . By similar calculations we obtain

$$\begin{aligned} C(Z_2) &= -2a_{1,2}Z_1 + 2 \sum_{k=3}^7 a_{2,k}Z_k, & C(Z_3) &= -2 \sum_{k=1}^2 a_{k,3}Z_k + 2 \sum_{k=4}^7 a_{3,k}Z_k, \\ C(Z_4) &= 2 \sum_{k=1}^3 a_{k,4}Z_k - 2 \sum_{k=5}^7 a_{4,k}Z_k, & C(Z_5) &= 2 \sum_{k=1}^4 a_{k,5}Z_k - 2 \sum_{k=5}^6 a_{5,k}Z_k, \\ C(Z_6) &= 2 \sum_{k=1}^5 a_{k,6}Z_k - 2a_{6,7}Z_7, & C(Z_7) &= 2 \sum_{k=1}^6 a_{k,7}Z_k. \end{aligned}$$

In the matrix form  $C$  is given by

$$C = 2 \times \begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & a_{1,7} \\ a_{1,2} & 0 & -a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} & a_{2,7} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & 0 & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} & a_{3,7} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & 0 & a_{4,5} & a_{4,6} & a_{4,7} \\ a_{1,5} & a_{2,5} & a_{3,5} & -a_{4,5} & 0 & a_{5,6} & a_{5,7} \\ a_{1,6} & a_{2,6} & a_{3,6} & -a_{4,6} & -a_{5,6} & 0 & a_{6,7} \\ a_{1,7} & a_{2,7} & a_{3,7} & -a_{4,7} & -a_{5,7} & -a_{6,7} & 0. \end{pmatrix}. \quad (16)$$

**3.4. Writing  $A(v)$  and  $A(J_{Z_4}(v))$  in the basis (8).** Note that condition (7) implies

$$\begin{aligned} J_{Z_1}(v) &= -J_{Z_2}J_{Z_3}(v) = J_{Z_4}J_{Z_7}(v) = J_{Z_5}J_{Z_6}(v), \\ J_{Z_2}(v) &= J_{Z_1}J_{Z_3}(v) = J_{Z_4}J_{Z_6}(v) = -J_{Z_5}J_{Z_7}(v), \\ J_{Z_3}(v) &= -J_{Z_1}J_{Z_2}(v) = J_{Z_4}J_{Z_5}(v) = J_{Z_6}J_{Z_7}(v), \\ J_{Z_4}(v) &= J_{Z_1}J_{Z_7}(v) = J_{Z_2}J_{Z_6}(v) = J_{Z_3}J_{Z_5}(v), \\ J_{Z_5}(v) &= -J_{Z_2}J_{Z_7}(v) = -J_{Z_3}J_{Z_4}(v) = J_{Z_1}J_{Z_6}(v), \\ J_{Z_6}(v) &= -J_{Z_1}J_{Z_5}(v) = -J_{Z_2}J_{Z_4}(v) = J_{Z_3}J_{Z_7}(v), \\ J_{Z_7}(v) &= -J_{Z_1}J_{Z_4}(v) = J_{Z_2}J_{Z_5}(v) = -J_{Z_3}J_{Z_6}(v). \end{aligned} \quad (17)$$

Put  $A(v) = \sum_{i < k} a_{i,k} J_{Z_i} J_{Z_k}(v) = \alpha_0 v + \sum_{j=1}^7 \alpha_j J_{Z_j}(v)$ . Then using (17) we find the relations between coefficients  $a_{i,k}$  and  $\alpha_j$  as follows

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0, \\ \alpha_1 = -a_{2,3} + a_{4,7} + a_{5,6}, \\ \alpha_2 = a_{1,3} + a_{4,6} - a_{5,7}, \\ \alpha_3 = -a_{1,2} + a_{4,5} + a_{6,7}, \\ \alpha_4 = a_{1,7} + a_{2,6} + a_{3,5}, \\ \alpha_5 = a_{1,6} - a_{2,7} - a_{3,4}, \\ \alpha_6 = -a_{1,5} - a_{2,4} + a_{3,7}, \\ \alpha_7 = -a_{1,4} + a_{2,5} - a_{3,6}. \end{cases} \quad (18)$$

Write  $A(J_{Z_4}(v)) = \beta_0 v + \sum_{m=1}^7 \beta_m J_{Z_m}(v)$ , and note that

$$\begin{aligned}
J_{Z_1}(v) &= J_{Z_1} J_{Z_4} J_{Z_4}(v) = J_{Z_2} J_{Z_5} J_{Z_4}(v) = -J_{Z_3} J_{Z_6} J_{Z_4}(v), \\
J_{Z_2}(v) &= -J_{Z_1} J_{Z_5} J_{Z_4}(v) = J_{Z_2} J_{Z_4} J_{Z_4}(v) = J_{Z_3} J_{Z_7} J_{Z_4}(v), \\
J_{Z_3}(v) &= J_{Z_1} J_{Z_6} J_{Z_4}(v) = -J_{Z_2} J_{Z_7} J_{Z_4}(v) = J_{Z_3} J_{Z_4} J_{Z_4}(v), \\
v &= J_{Z_1} J_{Z_7} J_{Z_4}(v) = J_{Z_2} J_{Z_6} J_{Z_4}(v) = J_{Z_3} J_{Z_5} J_{Z_4}(v), \\
J_{Z_5}(v) &= -J_{Z_1} J_{Z_2} J_{Z_4}(v) = -J_{Z_4} J_{Z_5} J_{Z_4}(v) = J_{Z_6} J_{Z_7} J_{Z_4}(v), \\
J_{Z_6}(v) &= J_{Z_1} J_{Z_3} J_{Z_4}(v) = -J_{Z_4} J_{Z_6} J_{Z_4}(v) = -J_{Z_5} J_{Z_7} J_{Z_4}(v), \\
J_{Z_7}(v) &= -J_{Z_2} J_{Z_3} J_{Z_4}(v) = -J_{Z_4} J_{Z_7} J_{Z_4}(v) = J_{Z_5} J_{Z_6} J_{Z_4}(v).
\end{aligned} \tag{19}$$

By using (19) we find relations between  $a_{i,k}$  and  $\beta_j$  as below:

$$\begin{cases} \beta_0 = a_{1,7} + a_{2,6} + a_{3,5}, \\ \beta_1 = a_{1,4} + a_{2,5} - a_{3,6}, \\ \beta_2 = -a_{1,5} + a_{2,4} + a_{3,7}, \\ \beta_3 = a_{1,6} - a_{2,7} + a_{3,4}, \\ \beta_4 = 0, \\ \beta_5 = -a_{1,2} - a_{4,5} + a_{6,7}, \\ \beta_6 = a_{1,3} - a_{4,6} - a_{5,7}, \\ \beta_7 = -a_{2,3} - a_{4,7} + a_{5,6}. \end{cases} \tag{20}$$

**3.5. Existence of  $D = (C, A)$ .** Based on data in the previous section, we discuss the existence of a pair  $(C, A)$  of condition (9) for each cases of initial conditions (12), (13), and (14).

CASE  $(z_0, x_0)$  WITH  $\|x_0\|^2 \neq 0$ . Assume for the moment that  $\|x_0\|^2 = \|z_0\|^2 = 1$  and use Lemma 1. Then the conditions  $A(v) = J_{Z_1}(v)$ ,  $C(Z_1) = 0$ , and (18) give

$$a_{1,2} = a_{1,3} = a_{1,4} = a_{1,5} = a_{1,6} = a_{1,7} = 0, \quad \text{and}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0, \\ \alpha_1 = -a_{2,3} + a_{4,7} + a_{5,6} = 1, \\ \alpha_2 = a_{1,3} + a_{4,6} - a_{5,7} = 0, \\ \alpha_3 = -a_{1,2} + a_{4,5} + a_{6,7} = 0, \\ \alpha_4 = a_{1,7} + a_{2,6} + a_{3,5} = 0, \\ \alpha_5 = a_{1,6} - a_{2,7} - a_{3,4} = 0, \\ \alpha_6 = -a_{1,5} - a_{2,4} + a_{3,7} = 0, \\ \alpha_7 = -a_{1,4} + a_{2,5} - a_{3,6} = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} a_{5,6} = 1 + a_{2,3} - a_{4,7}, \\ a_{5,7} = a_{4,6}, \\ a_{6,7} = -a_{4,5}, \\ a_{3,5} = -a_{2,6}, \\ a_{3,4} = -a_{2,7}, \\ a_{3,7} = a_{2,4}, \\ a_{3,6} = a_{2,5}, \end{cases} \tag{21}$$

where  $a_{2,3}, a_{2,4}, a_{2,5}, a_{2,6}, a_{2,7}, a_{4,5}, a_{4,6}, a_{4,7}$  are free parameters.

Analogously to the above case one can obtain systems similar to (21) for any of the following initial conditions:

$$Z_1 \oplus v, \quad Z_4 \oplus v, \quad Z_1 \oplus J_{Z_4}(v), \quad Z_4 \oplus J_{Z_4}(v), \quad (Z_1 + Z_4) \oplus v, \quad (Z_1 + Z_4) \oplus J_{Z_4}(v). \tag{22}$$

CASE  $(z_0, x_0)$  WITH  $\|x_0\| = 0$  OR  $\|z_0\| = 0$ . The cases  $Z_1 \oplus (v + J_{Z_4}(v))$ ,  $Z_4 \oplus (v + J_{Z_4}(v))$ , and  $(Z_1 + Z_4) \oplus (v + J_{Z_4}(v))$  are treated by a similar way, requiring more careful calculation. We consider only the  $(Z_1 + Z_4) \oplus (v + J_{Z_4}(v))$  in some details.

Conditions (9) are equivalent to

$$\begin{aligned} A(v + J_{Z_4}(v)) &= J_{Z_1+Z_4}(v + J_{Z_4}(v)) \\ &= J_{Z_1}(v) + J_{Z_1Z_4}(v) + J_{Z_4}(v) + v = \gamma_0 v + \sum_{i=1}^7 \gamma_i J_{Z_i}(v). \end{aligned}$$

Noticing that  $J_{Z_1}(v) + J_{Z_1Z_4}(v) + J_{Z_4}(v) + v = J_{Z_1}(v) - J_{Z_7}(v) + J_{Z_4}(v) + v$ , we obtain the system

$$\begin{cases} \gamma_0 = \alpha_0 + \beta_0 = a_{1,7} + a_{2,6} + a_{3,5} = 1, \\ \gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1 = (-a_{2,3} + a_{5,6} - a_{3,6} + a_{2,5}) + (a_{1,4} + a_{4,7}) = 1, \\ \gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2 = (a_{1,3} - a_{1,5} + a_{3,7} - a_{5,7}) + (a_{4,6} + a_{2,4}) = 0, \\ \gamma_3 = \alpha_3 + \beta_3 = (-a_{1,2} + a_{6,7} + a_{1,6} - a_{2,7}) + (a_{4,5} + a_{3,4}) = 0, \\ \gamma_4 = \alpha_4 + \beta_4 = a_{1,7} + a_{2,6} + a_{3,5} = 1, \\ \gamma_5 = \alpha_5 + \beta_5 = (-a_{1,2} + a_{6,7} + a_{1,6} - a_{2,7}) - (a_{4,5} + a_{3,4}) = 0, \\ \gamma_6 = \alpha_6 + \beta_6 = (a_{1,3} - a_{1,5} + a_{3,7} - a_{5,7}) - (a_{4,6} + a_{2,4}) = 0, \\ \gamma_7 = \alpha_7 + \beta_7 = (-a_{2,3} + a_{5,6} - a_{3,6} + a_{2,5}) - (a_{1,4} + a_{4,7}) = -1. \end{cases} \quad (23)$$

The condition  $C(Z_1 + Z_4) = 0$  leads to

$$a_{1,4} = 0, \quad a_{1,2} + a_{2,4} = 0, \quad a_{1,3} + a_{3,4} = 0, \quad a_{1,5} - a_{4,5} = 0, \quad a_{1,6} - a_{4,6} = 0, \quad a_{1,7} - a_{4,7} = 0,$$

From these expressions we obtain the solution

$$\begin{cases} a_{1,4} = 0, \\ a_{4,6} = -a_{2,4} = a_{1,6} = a_{1,2}, \\ a_{4,5} = -a_{3,4} = a_{1,5} = a_{1,3}, \\ a_{4,7} = a_{1,7} = 1, \\ a_{5,6} = a_{2,3} - a_{2,5} + a_{3,6}, \\ a_{3,5} = -a_{2,6}, \\ a_{6,7} = a_{2,7}, \\ a_{5,7} = a_{3,7}, \end{cases}$$

with eight free parameters  $a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,3}, a_{2,5}, a_{2,6}, a_{2,7}, a_{3,6}, a_{3,7}$ .

This finishes the proof of Theorem 4. We emphasize that this proof is constructive and it is easy to find a 1-parameter group (and even a multi-parameter family of such groups) whose orbit is an arbitrarily chosen geodesic.

#### 4. Riemannian $H$ -type Nilmanifold $N_{7,0} = N_{7,0}(\mathfrak{v}_{\min})$

Here we consider another example of 15-dimensional manifold, related to Clifford algebra. It is the Riemannian  $H$ -type Lie group with 7-dimensional centre and 8-dimensional irreducible Clifford module. The metric on the centre and on the module is positive definite. It is known from the work of [13] that this Riemannian nilmanifold  $N_{7,0}(\mathfrak{v}_{\min})$  is geodesic orbit. We give a proof which is similar to the proof in Section 3, but significantly simpler

since all the vectors has positive square lengths. It also shows more complicated structure of pseudo-Riemannian nilmanifold, compared to Riemannian once.

**Theorem 5.** *The Riemannian  $H$ -type nilmanifold  $N_{7,0}(\mathfrak{v}_{\min})$  is geodesic orbit. Each geodesic is realized as an orbit of a one-parameter subgroup which initial conditions form an eight dimensional affine space.*

◁ The Clifford algebra  $\text{Cl}(\mathbb{R}^{7,0})$  has two non-equivalent irreducible 8-dimensional modules  $\mathfrak{v}_{\min}^+$  and  $\mathfrak{v}_{\min}^-$ . The corresponding 15-dimensional  $H$ -type Lie algebras  $N_{7,0}(\mathfrak{v}_{\min}^+)$  and  $N_{7,0}(\mathfrak{v}_{\min}^-)$  are isomorphic and isometric, see [25, Section 3.1.2]. The left invariant metric is generated by the positive definite scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{7,0} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{8,0}$  on the Lie algebra  $\mathfrak{n}_{7,0} \cong \mathbb{R}^{7,0} \oplus \mathbb{R}^{8,0}$ . We write  $(z_0, x_0) \in \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}_{\min} \cong \mathbb{R}^{7,0} \oplus \mathbb{R}^{8,0}$  for an initial condition for a geodesic. As was shown in Section 3, without loss of generality we can assume that  $z_0 = Z_1$ , where

$$\{Z_1, \dots, Z_7\}, \quad \|Z_1\|_{\mathbb{R}^{7,0}}^2 = \dots = \|Z_7\|_{\mathbb{R}^{7,0}}^2 = 1,$$

is an orthonormal basis for  $\mathbb{R}^{7,0}$  and  $x_0 = v \in \mathfrak{v}_{\min}$  is a vector satisfying (7) and  $\|v\|_{\mathbb{R}^{8,0}}^2 = 1$ . We will also use basis (8).

Then, a geodesic determined by the initial condition  $(z_0, x_0) = (Z_1, v)$  is homogeneous, if there is a pair  $D = (C, A)$ , such that

$$A(v) = J_{Z_1}(v), \quad C(Z_1) = 0, \quad [A, J_w] = J_{C(w)} \quad \text{for all } w \in \mathbb{R}^{7,0}. \quad (24)$$

We write  $A = \sum_{i < k} a_{i,k} J_{Z_i} J_{Z_k}$ . By checking the condition  $[A, J_w] = J_{C(w)}$  for  $w = Z_k$ ,  $k = 1, \dots, 7$ , we come to the conclusion that

$$C = 2 \times \begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & -a_{1,4} & -a_{1,5} & -a_{1,6} & -a_{1,7} \\ a_{1,2} & 0 & -a_{2,3} & -a_{2,4} & -a_{2,5} & -a_{2,6} & -a_{2,7} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & 0 & -a_{3,4} & -a_{3,5} & -a_{3,6} & -a_{3,7} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & 0 & -a_{4,5} & -a_{4,6} & -a_{4,7} \\ a_{1,5} & a_{2,5} & a_{3,5} & a_{4,5} & 0 & -a_{5,6} & -a_{5,7} \\ a_{1,6} & a_{2,6} & a_{3,6} & a_{4,6} & a_{5,6} & 0 & -a_{6,7} \\ a_{1,7} & a_{2,7} & a_{3,7} & a_{4,7} & a_{5,7} & a_{6,7} & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Note that condition (7) for  $N_{7,0}(\mathfrak{v}_{\min})$  implies

$$\begin{aligned} J_{Z_1}(v) &= -J_{Z_2} J_{Z_3}(v) = -J_{Z_4} J_{Z_7}(v) = -J_{Z_5} J_{Z_6}(v), \\ J_{Z_2}(v) &= J_{Z_1} J_{Z_3}(v) = J_{Z_4} J_{Z_6}(v) = -J_{Z_5} J_{Z_7}(v), \\ J_{Z_3}(v) &= -J_{Z_1} J_{Z_2}(v) = J_{Z_4} J_{Z_5}(v) = J_{Z_6} J_{Z_7}(v), \\ J_{Z_4}(v) &= J_{Z_1} J_{Z_7}(v) = -J_{Z_2} J_{Z_6}(v) = -J_{Z_3} J_{Z_5}(v), \\ J_{Z_5}(v) &= J_{Z_2} J_{Z_7}(v) = J_{Z_3} J_{Z_4}(v) = J_{Z_1} J_{Z_6}(v), \\ J_{Z_6}(v) &= -J_{Z_1} J_{Z_5}(v) = J_{Z_2} J_{Z_4}(v) = -J_{Z_3} J_{Z_7}(v), \\ J_{Z_7}(v) &= -J_{Z_1} J_{Z_4}(v) = -J_{Z_2} J_{Z_5}(v) = J_{Z_3} J_{Z_6}(v). \end{aligned} \quad (26)$$

Now we write the value  $A(v)$  in the basis (8). Put  $A(v) = \sum_{i < k} a_{i,k} J_{Z_i} J_{Z_k}(v) = \alpha_0 v + \sum_{j=1}^7 \alpha_j J_{Z_j}(v)$  and solve the equation  $A(v) = J_{Z_1}(v)$ . We obtain the values of  $\alpha_k$  in terms of  $a_{j,k}$ .

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0, \\ \alpha_1 = -a_{2,3} - a_{4,7} - a_{5,6} = 1, \\ \alpha_2 = a_{1,3} + a_{4,6} - a_{5,7} = 0, \\ \alpha_3 = -a_{1,2} + a_{4,5} + a_{6,7} = 0, \\ \alpha_4 = a_{1,7} - a_{2,6} - a_{3,5} = 0, \\ \alpha_5 = a_{1,6} + a_{2,7} + a_{3,4} = 0, \\ \alpha_6 = -a_{1,5} + a_{2,4} - a_{3,7} = 0, \\ \alpha_7 = -a_{1,4} - a_{2,5} + a_{3,6} = 0. \end{cases} \quad (27)$$

The condition  $C(Z_1) = 0$  implies

$$a_{1,2} = a_{1,3} = a_{1,4} = a_{1,5} = a_{1,6} = a_{1,7} = 0.$$

The system (27) has the following solution:

$a_{2,3}, a_{2,4}, a_{2,5}, a_{2,6}, a_{2,7}, a_{4,5}, a_{4,6}, a_{4,7}$  are free variables and

$$\begin{cases} a_{3,4} = -a_{2,7}, \\ a_{3,5} = -a_{2,6}, \\ a_{3,6} = a_{2,5}, \\ a_{3,7} = a_{2,4}, \\ a_{5,6} = 1 + a_{2,3} - a_{4,7}, \\ a_{5,7} = a_{4,6}, \\ a_{6,7} = -a_{4,5}. \end{cases}$$

This finishes the proof of Theorem 5.  $\triangleright$

The given examples of geodesic orbit pseudo-Riemannian metrics are obtained using important structural results for the corresponding pseudo  $H$ -type Lie algebras. We dare to suggest that similar ideas will be useful in constructing other examples of geodesic orbit pseudo-Riemannian manifolds.

## References

1. Kowalski, O. and Vanhecke, L. Riemannian Manifolds with Homogeneous Geodesics, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. B* (7), 1991, vol. 5, no. 1, pp. 189–246.
2. Arvanitoyeorgos, A. Homogeneous Manifolds Whose Geodesics are Orbits. Recent Results and Some Open Problems, *Irish Mathematical Society Bulletin*, 2017, vol. 79, pp. 5–29. DOI: 10.33232/BIMS.0079.5.29.
3. Berestovskii, V. N. and Nikonorov, Yu. G. *Riemannian Manifolds and Homogeneous Geodesics*, Springer Monographs in Mathematics, Cham, Springer, 2020.
4. Nikolayevsky, Y. and Ziller, W. Non-Singular Geodesic Orbit Nilmanifolds, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 2026. DOI: 10.1007/s10231-026-01661-9.
5. Nikonorov, Yu. G. On the Structure of Geodesic Orbit Riemannian Spaces, *Annals of Global Analysis and Geometry*, 2017, vol. 52, pp. 289–311. DOI: 10.1007/s10455-017-9558-0.
6. Nikonorov, Yu. G. On Geodesic Orbit Nilmanifolds, *Journal of Geometry and Physics*, 2024, vol. 203, article ID 105257, 12 p.
7. del Barco, V. Homogeneous Geodesics in Pseudo-Riemannian Nilmanifolds, *Advances in Geometry*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 175–187.
8. Chen, Z., Nikolayevsky, Y., Wolf, J. A. and Zhang, S. Pseudo-Riemannian Geodesic Orbit Nilmanifolds of Signature  $(n - 2, 2)$ , *The Journal of Geometric Analysis*, 2024, vol. 34, no. 5, article no. 132, 21 p. DOI: 10.1007/s12220-024-01579-9.
9. Chen, Z., Wolf, J. A. and Zhang, S. On the Geodesic Orbit Property for Lorentz Manifolds, *The Journal of Geometric Analysis*, 2022, vol. 32, no. 3, article no. 81, 14 p. DOI: 10.1007/s12220-021-00744-8.

10. Dušek, Z. and Kowalski, O. Light-like Homogeneous Geodesics and the Geodesic Lemma for Any Signature, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 2007, vol. 71, no. 1–2, pp. 245–252. DOI: 10.5486/PMD.2007.3800.
11. Nikolayevsky, Y. and Wolf, J. A. The Structure of Geodesic Orbit Lorentz Nilmanifolds, *The Journal of Geometric Analysis*, 2023, vol. 33, no. 3, article no. 82, 12 p. DOI: 10.1007/s12220-022-01134-4.
12. Kaplan, A. On the Geometry of Groups of Heisenberg Type, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 1983, vol. 15, pp. 35–42. DOI: 10.1112/blms/15.1.35.
13. Riehm, C. Explicit Spin Representations and Lie Algebras of Heisenberg Type, *Journal of the London Mathematical Society*, 1984, vol. 29, no. 1, pp. 49–62. DOI: 10.1112/jlms/s2-29.1.49.
14. Furutani, K., Markina, I. and Nikonorov, Y. *Geodesic Orbit Pseudo-Riemannian H-Type Nilmanifolds: Case of Minimal Admissible Clifford Modules*, Preprint, 2025, arXiv: 2507.00470.
15. Lee, J. M. *Introduction to Riemannian Manifolds*, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 176, Cham, Springer, 2018.
16. Cordero, L. A. and Parker, P. E. Isometry Groups of Pseudoriemannian 2-Step Nilpotent Lie Groups, *Houston Journal of Mathematics*, 2009, vol. 35, no. 1, pp. 49–72.
17. Gordon, C. Homogeneous Riemannian Manifolds Whose Geodesics are Orbits, *Topics in Geometry: Honoring the Memory of Joseph D’Atri*, Progress in Nonlinear Differential Equations, vol. 20, Birkhäuser, 1996, pp. 155–174.
18. Ovando, G. P. Naturally Reductive Pseudo-Riemannian 2-Step Nilpotent Lie Groups, *Houston Journal of Mathematics*, 2013, vol. 39, no. 1, pp. 147–167.
19. Kaplan, A. Fundamental Solutions for a Class of Hypoelliptic PDE Generated by Composition of Quadratic Forms, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1980, vol. 258, no. 1, pp. 147–153. DOI: 10.1090/S0002-9947-1980-0554324-X.
20. Ciatti, P. Scalar Products on Clifford Modules and Pseudo- $H$ -Type Lie Algebras, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, IV Ser., 2000, vol. 178, pp. 1–31. DOI: 10.1007/BF02505885.
21. Godoy Molina, M., Korolko, A. and Markina, I. Sub-Semi-Riemannian Geometry of General  $H$ -Type Groups, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2013, vol. 137, no. 6, pp. 805–833. DOI: 10.1016/j.bulsci.2013.05.005.
22. Kaplan, A. Riemannian Nilmanifolds Attached to Clifford Modules, *Geometriae Dedicata*, 1981, vol. 11, pp. 127–136. DOI: 10.1007/BF00147615.
23. Furutani, K. and Markina, I. Automorphism Groups of Pseudo  $H$ -Type Algebras, *Journal of Algebra*, 2021, vol. 568, no. 3, pp. 91–138. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2020.09.038.
24. Furutani, K. and Markina, I. Complete Classification of Pseudo  $H$ -type Lie Algebras. I, *Geometriae Dedicata*, 2017, vol. 190, pp. 23–51. DOI: 10.1007/s10711-017-0225-1.
25. Berndt, J., Tricerri, F. and Vanhecke, L. *Generalized Heisenberg Groups and Damek–Ricci Harmonic Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1598, Berlin, Springer, 1995.

Received November 8, 2025

IRINA G. MARKINA  
 Department of Mathematics, University of Bergen,  
 P. O. Box 7803, N-5020 Bergen, 41 Allégaten, Norway,  
 Professor  
 E-mail: [irina.markina@uib.no](mailto:irina.markina@uib.no)  
<https://orcid.org/0000-0003-2686-6657>

YURIĬ G. NIKONOROV  
 Southern Mathematical Institute of VSC RAS,  
 53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,  
 Principal Investigator  
 E-mail: [nikonorov2006@mail.ru](mailto:nikonorov2006@mail.ru)  
<https://orcid.org/0000-0002-9671-2314>

KENRO FURUTANI  
 Osaka Central Advanced Mathematical Institute,  
 Osaka Metropolitan University,  
 Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka 558-8585, Japan,  
 Professor  
 E-mail: [kf46089@gmail.com](mailto:kf46089@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0002-9972-7693>

О ПРИМЕРАХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИ  
ОРБИТАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙМаркина И. Г.<sup>1</sup>, Никоноров Ю. Г.<sup>2</sup>, Фурутани К.<sup>3</sup><sup>1</sup> Университет Бергена, Норвегия, 5020, Берген, Аллегатен, 41;<sup>2</sup> Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,  
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;<sup>3</sup> Столичный университет Осаки,  
Осацкий центральный институт углубленной математики,  
Япония, 558-8585, Осака, Сугимото, Сумиоши-ку

E-mail: irina.markina@uib.no, nikonorov2006@mail.ru, kf46089@gmail.com

**Аннотация.** Псевдориманово многообразие  $(M, g)$  называется геодезически орбитальным многообразием, если любая геодезическая  $\gamma$  многообразия  $M$  является орбитой 1-параметрической подгруппы полной группы изометрий  $(M, g)$ . Этот термин в случае римановых многообразий был введен в 1991 г. О. Ковальским и Л. Ванхекке, положившими начало систематическому изучению пространств  $(M = G/H, g)$ , где  $G$  — группа изометрий, а  $H$  — подгруппа изотропии. Следует отметить, что симметричные пространства, слабо симметричные пространства, естественно редуктивные однородные пространства, нормальные однородные пространства, обобщенные нормальные однородные пространства (и не только они) являются подклассами класса геодезически орбитальных псевдоримановых пространств. В данной статье приводятся примеры псевдоримановых геодезически орбитальных многообразий. Таковыми примерами являются специальные 15-мерные группы Ли псевдо  $H$ -типа, т. е. 2-ступенно нильпотентные группы Ли гейзенберговского типа, снабженные левоинвариантной псевдоримановой метрикой. Для построения соответствующих примеров использованы результаты о структуре рассматриваемых групп Ли.

**Ключевые слова:** римановы геодезически орбитальные многообразия, псевдоримановы геодезически орбитальные многообразия, группы Ли типа Гейзенберга.

**AMS Subject Classification:** 53C50, 53C30, 22E25.

**Образец цитирования:** Markina I. G., Nikonorov Yu. G. and Furutani K. On Examples of Geodesic Orbit Pseudo-Riemannian Manifolds // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, № 1.—С. 108–121 (in English). DOI: 10.46698/i4125-5722-6924-j.

УДК 517.957  
 DOI 10.46698/c8515-1572-8469-r

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTION FOR NONLINEAR  
 ANISOTROPIC ELLIPTIC DIRICHLET PROBLEMS

M. Naceri<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Higher Normal School of Laghouat,  
 P.O. Box 4033, Martyrs Ave., Laghouat 03000, Algeria  
 E-mail: nasrimokhtar@gmail.com, m.naceri@ens-lagh.dz

**Abstract.** We consider boundary value problem for nonlinear anisotropic elliptic partial differential equations in bounded open Lipschitz domain and the Dirichlet boundary conditions. We also suppose that the body force function belongs to the natural dual space under certain hypotheses regarding the nonlinear anisotropic operators present on the main side of the proposed problems. We prove the existence and uniqueness of a weak solution in anisotropic Sobolev space for this problem. Our proofs are based on various anisotropic Sobolev inequalities, embedding theorems, and features of pseudo-monotone operators. The functional setting involves anisotropic Lebesgue and Sobolev spaces in the scalar case and their most important properties.

**Keywords:** nonlinear elliptic equations, anisotropic Sobolev spaces, weak solution, existence, uniqueness.

**AMS Subject Classification:** 35J60, 35J66, 35J67.

**For citation:** Naceri, M. Existence and Uniqueness of Solution for Nonlinear Anisotropic Elliptic Dirichlet Problems, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 122–133. DOI: 10.46698/c8515-1572-8469-r.

1. Introduction

Our focus is on establishing both the existence and uniqueness of a weak solution for certain classes of nonlinear anisotropic elliptic equations of the following model:

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^N \partial_i (|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u) - \sum_{i=1}^N \partial_i (\sigma_i(x, \partial_i u)) + \sum_{i=1}^N u|u|^{p_i-2} = f(x), & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{in } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

where  $\Omega$  is a bounded open Lipschitz domain of  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ ,  $p_i > 1$ ,  $i = 1, \dots, N$ , are real numbers, such that

$$\bar{p} < N \quad \text{and} \quad p_+ < \bar{p}^*, \quad (2)$$

where  $p_+ = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} p_i$ ,  $\bar{p} = N \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} \right)^{-1}$  the harmonic mean of  $\{p_1, \dots, p_N\}$ , with  $\bar{p}^* = \frac{N\bar{p}}{N-\bar{p}}$  denotes the Sobolev conjugate of  $\bar{p}$ ,  $f \in W_0^{-1, \bar{p}'}(\Omega)$  (i. e. belongs to the dual space of  $W_0^{1, \bar{p}}(\Omega)$ ), with  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_N)$ ,  $\bar{p}' = (p'_1, \dots, p'_N)$ , and  $p'_i$  denotes the Hölder conjugate of  $p_i$  (i. e.,  $p'_i = \frac{p_i}{p_i-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ),  $\sigma_i : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , are Carathéodory functions such that, for almost everywhere  $x \in \Omega$ , and every  $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$ ,  $(\xi, \xi') \neq (0, 0)$ :

$$\sigma_i(x, \xi)\xi \geq c_1 |\xi|^{p_i}, \quad (3)$$

$$|\sigma_i(x, \xi)| \leq c_2 (1 + |\xi|^{p_i})^{1 - \frac{1}{p_i}}, \tag{4}$$

$$(\sigma_i(x, \xi) - \sigma_i(x, \xi')) (\xi - \xi') \geq \begin{cases} c_3 |\xi - \xi'|^{p_i}, & \text{if } p_i \geq 2, \\ c_4 \frac{|\xi - \xi'|^2}{(|\xi| + |\xi'|)^{2 - p_i}}, & \text{if } p_i \in (1, 2), \end{cases} \tag{5}$$

where  $c_j > 0, j = 1, \dots, 4$ .

The anisotropy of the problem is due to the fact that the growth of each partial derivative is controlled by a different power. The interest in studying such operators lies in their application in the mathematical modeling of physical and mechanical processes in anisotropic continua, among them modeling of image processing and electro-rheological fluids; we refer to [1–4] for more details.

Numerous studies have addressed the topic of proving the uniqueness of a weak solution after demonstrating its existence in anisotropic (or isotropic) Sobolev space (i. e.,  $W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$  or  $W_0^{1, p}(\Omega)$ ) for non-linear elliptic problems with data belonging to the natural dual space and with different conditions. However, these studies were conducted under restrictions on the exponent  $p$  (or  $\vec{p}$ ) of Sobolev space. In [5], the uniqueness of the weak solution is demonstrated when at least one  $p_i \leq 2, i = 1, \dots, N$  and when the modulus of continuity of  $a_i, i = 1, \dots, N$  (i. e., the coefficients of  $|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u$  for the main side of the problem) is globally controlled. For the isotropic scalar case, the uniqueness result in [6] to the equation  $-\text{div}(a(x, u, Du)) + \lambda u|u|^{p-2} = f$ , fails for  $(p > 2, \lambda = 0)$ , but it holds for  $(1 < p \leq 2, \lambda \geq 0)$  or  $(2 < p < \infty, \lambda > 0)$ . The study in [7] for the equation  $-\text{div}(a(x, u)|\nabla u|^{p-2} \nabla u - \varphi(u)) = f$ , also proved the existence only of the weak solution and the failure of the uniqueness when  $p > 2$ . To learn more about the works that studied the uniqueness of the solution; we can refer to [8–10].

In our paper, we have proved the existence and uniqueness of a weak solution to a nonlinear anisotropic elliptic problem with  $W_0^{-1, \vec{p}'}(\Omega)$ -data under the above hypotheses. We based our proof on the main theorem on pseudo-monotone operators (Theorem 27.A in [11] and see also [12–14] for the existence and on the various anisotropic Sobolev inequalities for the uniqueness.

The structure of our paper is as follows: Important definitions, characteristics, and ideas pertaining to  $\vec{p}$ -Sobolev spaces are covered in Section 2, along with a review of certain anisotropic Sobolev inequalities. Section 3 contains the main theorem and its proof.

## 2. Preliminaries

The most significant results, basic properties, and embedding theorems pertaining to anisotropic Sobolev spaces in the scalar case will be examined in this section; for that we can refer to [15–19].

Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$  be a bounded open Lipschitz domain. Let  $1 < p_i < \infty, i = 1, \dots, N$  be real numbers. We set

$$\vec{p} = (p_1, \dots, p_N), \quad p_+ = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} p_i, \quad p_- = \min_{i \in \{1, \dots, N\}} p_i,$$

$$\bar{p} = N \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} \right)^{-1} \quad (\text{the harmonic mean of } \{p_1, \dots, p_N\}),$$

$$\bar{p}^* = \frac{N\bar{p}}{N - \bar{p}} \quad (\text{the Sobolev conjugate of } \bar{p} (< N)).$$

The anisotropic Sobolev space  $W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$  is defined as follows:

$$W_0^{1, \vec{p}}(\Omega) = \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \partial_i u \in L^{p_i}(\Omega), i = 1, \dots, N \right\}.$$

It is a reflexive Banach space when endowed with the following norm:

$$\|u\|_{\vec{p}} = \sum_{i=1}^N \|u\|_{L^{p_i}(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)}. \quad (6)$$

The Banach space  $(W_0^{1, \vec{p}}(\Omega), \|\cdot\|_{\vec{p}})$  is defined as follows

$$W_0^{1, \vec{p}}(\Omega) = W^{1, \vec{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1, \vec{p}}(\Omega)}.$$

If  $\bar{p} < N$ , then the following embedding (see [18])

$$W_0^{1, \vec{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \quad (7)$$

is continuous if  $1 \leq r \leq \bar{p}^*$  and also compact if  $1 \leq r < \bar{p}^*$ . In addition, there exists  $c > 0$  dependent on  $N, p_i, i = 1 \dots, N$  and  $|\Omega|$ , such that for all  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  and all  $1 \leq r \leq \bar{p}^*$

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq c \prod_{i=1}^N \|\partial_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{\frac{1}{N}}. \quad (8)$$

The relationship between the arithmetic and geometric means makes the previous Sobolev type inequality (8) implies that

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)}. \quad (9)$$

If  $\bar{p} \geq N$ , then each of (7), (8), and (9) remains true for all  $r \geq 1$ . The following Poincaré type inequality (see [20, 21]) holds true

$$\|u\|_{L^{p_i}(\Omega)} \leq c \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)}. \quad (10)$$

From (10) and (6) we conclude that

$$u \mapsto \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)} \text{ is an equivalent norm to (6) on } W_0^{1, \vec{p}}(\Omega). \quad (11)$$

### 3. Existence and Uniqueness of Weak Solution

DEFINITION 1. The function  $u$  is a weak solution to the equation (1) in  $W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$  if and only if it satisfies for every  $\phi \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$  the following:

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u + \sigma_i(x, \partial_i u)) \partial_i \phi \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u |u|^{p_i-2} \phi \, dx = \langle f, \phi \rangle. \quad (12)$$

Our main result is the following theorem:

**Theorem 1.** *Let  $1 < p_1, \dots, p_N < +\infty$  be real numbers,  $f \in W_0^{-1, \vec{p}'}(\Omega)$ , and  $\sigma_i, i = 1, \dots, N$ , be Carathéodory functions, such that (2)–(5) holds. Then there exists a unique weak solution to (1) in  $W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$ .*

◁ We consider the operator  $\mathbf{T} : W_0^{1, \vec{p}}(\Omega) \rightarrow W_0^{-1, \vec{p}'}(\Omega)$ , such that

$$\mathbf{T} : u \mapsto \left( \phi \mapsto \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u + \sigma_i(x, \partial_i u)) \partial_i \phi \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u |u|^{p_i-2} \phi \, dx \right).$$

Then we have, for all  $u, \phi \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$ ,

$$\langle \mathbf{T}(u), \phi \rangle = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u + \sigma_i(x, \partial_i u)) \partial_i \phi \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u |u|^{p_i-2} \phi \, dx.$$

We will follow a method similar to that in [22–25] to prove the boundedness, coerciveness, and pseudo-monotonicity of  $\mathbf{T}$ .

Putting  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$ , such that

$$\langle \mathbf{T}_1(u), \phi \rangle = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u + \sigma_i(x, \partial_i u)) \partial_i \phi \, dx,$$

$$\langle \mathbf{T}_2(u), \phi \rangle = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u |u|^{p_i-2} \phi \, dx.$$

From (4), (9), and the use of Hölder’s inequality, we obtain

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{T}_1(u), \phi \rangle| &\leq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left| |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right| |\partial_i \phi| \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\sigma_i(x, \partial_i u)| |\partial_i \phi| \, dx \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i-1} |\partial_i \phi| \, dx + c_2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (1 + |\partial_i u|^{p_i})^{1-\frac{1}{p_i}} |\partial_i \phi| \, dx \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left\| |\partial_i u|^{p_i-1} \right\|_{p_i'} \|\partial_i \phi\|_{p_i} + c_2 \sum_{i=1}^N \left\| (1 + |\partial_i u|^{p_i})^{1-\frac{1}{p_i}} \right\|_{p_i'} \|\partial_i \phi\|_{p_i} \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left[ \left( \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i} \, dx \right)^{1-\frac{1}{p_i}} + c_2 \left( |\Omega| + \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i} \, dx \right)^{1-\frac{1}{p_i}} \right] \sum_{i=1}^N \|\partial_i \phi\|_{p_i} \\ &\leq C \left( 1 + N|\Omega| + \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i} \right)^{1-\frac{1}{p^-}} \|\phi\|_{\vec{p}} \\ &\leq C \left( 1 + N|\Omega| + \left( 1 + \|u\|_{\vec{p}}^{p_+} \right) \right)^{1-\frac{1}{p^-}} \|\phi\|_{\vec{p}} \leq C' \left( 1 + \|u\|_{\vec{p}}^{p_+} \right)^{1-\frac{1}{p^-}} \|\phi\|_{\vec{p}}. \end{aligned} \tag{13}$$

From (10), and using Hölder's inequality, we obtain

$$\begin{aligned}
|\langle \mathbf{T}_2(u), \phi \rangle| &\leq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |u|^{p_i-1} |\phi| dx \leq \sum_{i=1}^N \|u\|_{p_i}^{p_i-1} \|\phi\|_{p_i} \\
&\leq \sum_{i=1}^N \|u\|_{p_i}^{p_i-1} \sum_{i=1}^N \|\phi\|_{p_i} \leq \left(1 + \left(\sum_{i=1}^N \|u\|_{p_i}\right)^{p_+-1}\right) \sum_{i=1}^N \|\phi\|_{p_i} \\
&\leq (1 + (Nc\|u\|_{\vec{p}})^{p_+-1}) (Nc' \|\phi\|_{\vec{p}}) \leq C \left(1 + \|u\|_{\vec{p}}^{p_+-1}\right) \|\phi\|_{\vec{p}}.
\end{aligned} \tag{14}$$

So, the boundedness of  $\mathbf{T}$  is provided by (13) and (14).

After dropping the non-negative term  $\langle \mathbf{T}_2(u), u \rangle$ , and using (3), we deduce

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \mathbf{T}(u), u \rangle}{\|u\|_{\vec{p}}} &\geq \frac{\sum_{i=1}^N |\partial_i u|^{p_i} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \sigma_i(x, \partial_i u) \partial_i u dx}{\|u\|_{\vec{p}}} \geq \frac{c \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i}}{\|u\|_{\vec{p}}} \\
&\geq \frac{c \sum_{i=1}^N \min \left\{ \|\partial_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i^-}, \|\partial_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i^+} \right\}}{\|u\|_{\vec{p}}} \geq \frac{c \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i^-} - Nc}{\|u\|_{\vec{p}}} \\
&\geq \frac{c \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)} \right)^{p_i^-} - Nc}{\|u\|_{\vec{p}}} = \frac{c}{N^{p_i^-}} \|u\|_{\vec{p}}^{p_i^- - 1} - \frac{Nc}{\|u\|_{\vec{p}}}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Hence, (15) implies that  $\mathbf{T}$  is coercive.

Let  $(u_n)_n \subset W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$  be a sequence, such that

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } W_0^{1, \vec{p}}(\Omega), \tag{16}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{T}(u_n), u_n - u \rangle \leq 0. \tag{17}$$

After setting

$$\Phi_{(i,n)}^{(1)} = (\sigma_i(x, \partial_i u_n) - \sigma_i(x, \partial_i u)) (\partial_i u_n - \partial_i u),$$

$$\Phi_{(i,n)}^{(2)} = (|\partial_i u_n|^{p_i-2} \partial_i u_n - |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u) (\partial_i u_n - \partial_i u),$$

$$\Phi_{(i,n)}^{(3)} = (|u_n|^{p_i-2} u_n - |u|^{p_i-2} u) (u_n - u),$$

we obtain that

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{T}(u_n), u_n - u \rangle &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \Phi_{(i,n)}^{(1)} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \sigma_i(x, \partial_i u) (\partial_i u_n - \partial_i u) dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \Phi_{(i,n)}^{(2)} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u (\partial_i u_n - \partial_i u) dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \Phi_{(i,n)}^{(3)} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |u|^{p_i-2} u (u_n - u) dx.
\end{aligned} \tag{18}$$

Since  $u_n \rightarrow u$  in  $L^r(\Omega)$ , where  $1 \leq r < \bar{p}^*$  (due (7) and (16)), and the boundedness of  $(|u|^{p_i-2}u)$  in  $L^{p'_i}(\Omega)$ , we conclude

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |u|^{p_i-2}u(u_n - u) \, dx \rightarrow 0. \tag{19}$$

Since  $\partial_i u_n \rightharpoonup \partial_i u$  weakly in  $L^{p_i}(\Omega)$ , then (7) gives us

$$\partial_i u_n \rightarrow \partial_i u \text{ strongly in } L^r(\Omega), \quad 1 \leq r < \bar{p}^*. \tag{20}$$

From (20), and the boundedness of both  $(|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u)$ ,  $\sigma_i(x, \partial_i u)$  in  $L^{p'_i}(\Omega)$ , we get

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \sigma_i(x, \partial_i u)(\partial_i u_n - \partial_i u) \, dx \rightarrow 0, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u(\partial_i u_n - \partial_i u) \, dx \rightarrow 0. \tag{22}$$

By combining (17), (18), (19), (21), and (22), we deduce that

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \Phi_{(i,n)}^{(1)} \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \Phi_{(i,n)}^{(2)} \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \Phi_{(i,n)}^{(3)} \, dx \right) \leq 0. \tag{23}$$

Let us recall this inequality: for every  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ( $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ) and every  $p > 1$ , we have

$$(|\alpha|^{p-2}\alpha - |\beta|^{p-2}\beta)(\alpha - \beta) \geq \begin{cases} 2^{2-p}|\alpha - \beta|^p, & \text{if } p \geq 2, \\ (p-1)\frac{|\alpha - \beta|^2}{(|\alpha| + |\beta|)^{2-p}}, & \text{if } p \in (1, 2). \end{cases} \tag{24}$$

Through (23), (5), and (24), we get

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \Phi_{(i,n)}^{(1)} \, dx = 0, \tag{25}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \Phi_{(i,n)}^{(2)} \, dx = 0, \tag{26}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \Phi_{(i,n)}^{(3)} \, dx = 0. \tag{27}$$

Now, we set that

$$A_{(i,n)} = \partial_i u_n - \partial_i u, \quad B_{(i,n)} = |\partial_i u_n| + |\partial_i u|.$$

If  $p_i \geq 2$ , then by (5) we get

$$\int_{\Omega} |A_{(i,n)}|^{p_i} \, dx \leq \frac{1}{c_3} \int_{\Omega} \Phi_{(i,n)}^{(1)} \, dx. \tag{28}$$

If  $1 < p_i < 2$ , then by (5) and Hölder's inequality we obtain

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |A_{(i,n)}|^{p_i} dx \leq \int_{\Omega} \frac{|A_{(i,n)}|^{p_i}}{(B_{(i,n)})^{\frac{p_i(2-p_i)}{2}}} (B_{(i,n)})^{\frac{p_i(2-p_i)}{2}} dx \\
& \leq \left\| \frac{|A_{(i,n)}|^{p_i}}{(B_{(i,n)})^{\frac{p_i(2-p_i)}{2}}} \right\|_{L^{\frac{2}{p_i}}(\Omega)} \times \left\| (B_{(i,n)})^{\frac{p_i(2-p_i)}{2}} \right\|_{L^{\frac{2}{2-p_i}}(\Omega)} \\
& \leq \max \left\{ \left( \int_{\Omega} \frac{|A_{(i,n)}|^2}{(B_{(i,n)})^{2-p_i}} dx \right)^{\frac{p_-}{2}}, \left( \int_{\Omega} \frac{|A_{(i,n)}|^2}{(B_{(i,n)})^{2-p_i}} dx \right)^{\frac{p_+}{2}} \right\} \\
& \times \max \left\{ \left( \int_{\Omega} (B_{(i,n)})^{p_i} dx \right)^{\frac{2-p_-}{2}}, \left( \int_{\Omega} (B_{(i,n)})^{p_i} dx \right)^{\frac{2-p_+}{2}} \right\} \tag{29} \\
& \leq \frac{1}{c_4} \max \left\{ \left( \int_{\Omega} \Phi_{(i,n)}^{(1)} dx \right)^{\frac{p_-}{2}}, \left( \int_{\Omega} \Phi_{(i,n)}^{(1)} dx \right)^{\frac{p_+}{2}} \right\} \\
& \times \max \left\{ \left( \int_{\Omega} (B_{(i,n)})^{p_i} dx \right)^{\frac{2-p_-}{2}}, \left( \int_{\Omega} (B_{(i,n)})^{p_i} dx \right)^{\frac{2-p_+}{2}} \right\}.
\end{aligned}$$

Since  $u, u_n \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$ , then thanks to (25) we can pass to the limit when  $n \rightarrow +\infty$  in both (28), (29) and thus get

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |A_{(i,n)}|^{p_i} = 0, \quad i \in \{1, \dots, N\}. \tag{30}$$

So, (30) implies, for every  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\partial_i u_n \rightarrow \partial_i u \quad \text{strongly in } L^{p_i}(\Omega) \quad \text{and a.e. in } \Omega. \tag{31}$$

We can point out here that in a similar way using (26) and with the help of (24) we can also simply get (31). By (31) we have

$$\sigma_i(x, \partial_i u_n) \rightharpoonup \sigma_i(x, \partial_i u) \quad \text{weakly in } L^{p'_i}(\Omega),$$

then we have, for every  $\phi \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \sigma_i(x, \partial_i u_n) \partial_i \phi \rightarrow \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \sigma_i(x, \partial_i u) \partial_i \phi. \tag{32}$$

On the other hand, as  $\sigma_i(x, \partial_i u_n) \rightarrow \sigma_i(x, \partial_i u)$  and  $\partial_i u_n \rightarrow \partial_i u$  a.e. in  $\Omega$ , Fatou's Lemma implies that

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \sigma_i(x, \partial_i u_n) \partial_i u_n \geq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \sigma_i(x, \partial_i u) \partial_i u. \tag{33}$$

From (32) and (33), we deduce that

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \int \Omega \sigma_i(x, \partial_i u_n) (\partial_i u_n - \partial_i \phi) \geq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \sigma_i(x, \partial_i u) (\partial_i u - \partial_i \phi). \tag{34}$$

With proof steps similar to proof (34), we can easily get

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\partial_i u_n|^{p_i-2} \partial_i u_n (\partial_i u_n - \partial_i \phi) \geq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u (\partial_i u - \partial_i \phi). \tag{35}$$

In a similar way to proof (31) by using (27) and with the help of (24) we can simply get

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{strongly in } L^{p_i}(\Omega) \quad \text{and a.e. in } \Omega. \tag{36}$$

From (36), we deduce that

$$|u_n|^{p_i-2} u_n \rightharpoonup |u|^{p_i-2} u \quad \text{weakly in } L^{p'_i}(\Omega), \quad \text{and a.e. in } \Omega.$$

and this means that

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |u_n|^{p_i-2} u_n (u_n - \phi) \geq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |u|^{p_i-2} u (u - \phi). \tag{37}$$

We also have, for every  $\phi \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}(u_n), u_n - \phi \rangle &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \sigma_i(x, \partial_i u_n) (\partial_i u_n - \partial_i \phi) dx \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\partial_i u_n|^{p_i-2} \partial_i u_n (u_n - \phi) dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |u_n|^{p_i-2} u_n (u_n - \phi) dx. \end{aligned} \tag{38}$$

By combining (34), (35), (37) and (38), we get for every  $\phi \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{T}(u_n), u_n - \phi \rangle \geq \langle \mathbf{T}(u), u - \phi \rangle. \tag{39}$$

Finally, the pseudo-monotonicity of  $\mathbf{T}$  is implied by (39). Thus, all conditions of the main theorem on pseudo-monotone operators have been satisfied. Therefore, we have proven that our problem (1) has at least one weak solution.

Now we prove the uniqueness of this solution. Let  $u_1, u_2$  be two weak solutions of (1). We have

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (|\partial_i u_1|^{p_i-2} \partial_i u_1 + \sigma_i(x, \partial_i u_1)) \partial_i \phi dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u_1 |u_1|^{p_i-2} \phi dx = \langle f, \phi \rangle, \tag{40}$$

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (|\partial_i u_2|^{p_i-2} \partial_i u_2 + \sigma_i(x, \partial_i u_2)) \partial_i \phi dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u_2 |u_2|^{p_i-2} \phi dx = \langle f, \phi \rangle. \tag{41}$$

By taking  $\varphi = u_1 - u_2$  as a test function in (40) and in (41), then subtracting the results side by side, we can deduce that

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (|\partial_i u_1|^{p_i-2} \partial_i u_1 - |\partial_i u_2|^{p_i-2} \partial_i u_2) (\partial_i u_1 - \partial_i u_2) dx \\ & + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (\sigma_i(x, \partial_i u_1) - \sigma_i(x, \partial_i u_2)) (\partial_i u_1 - \partial_i u_2) dx \\ & + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (|u_1|^{p_i-2} u_1 - |u_2|^{p_i-2} u_2) (u_1 - u_2) dx = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Since (24), we conclude for every  $i \in \{1, \dots, N\}$  that

$$(|\partial_i u_1|^{p_i-2} \partial_i u_1 - |\partial_i u_2|^{p_i-2} \partial_i u_2) (\partial_i u_1 - \partial_i u_2) \geq 0, \quad (43)$$

$$(|u_1|^{p_i-2} u_1 - |u_2|^{p_i-2} u_2) (u_1 - u_2) \geq 0. \quad (44)$$

Also, since (5), we get for all  $i \in \{1, \dots, N\}$  that

$$(\sigma_i(x, \partial_i u_1) - \sigma_i(x, \partial_i u_2)) (\partial_i u_1 - \partial_i u_2) \geq 0. \quad (45)$$

From (43), (44), (45) and (42), we obtain for all  $i \in \{1, \dots, N\}$  that

$$\int_{\Omega} (|\partial_i u_1|^{p_i-2} \partial_i u_1 - |\partial_i u_2|^{p_i-2} \partial_i u_2) (\partial_i u_1 - \partial_i u_2) dx = 0, \quad (46)$$

$$\int_{\Omega} (\sigma_i(x, \partial_i u_1) - \sigma_i(x, \partial_i u_2)) (\partial_i u_1 - \partial_i u_2) dx = 0, \quad (47)$$

$$\int_{\Omega} (|u_1|^{p_i-2} u_1 - |u_2|^{p_i-2} u_2) (u_1 - u_2) dx = 0. \quad (48)$$

Now, after setting, for every  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\Lambda_i = \int_{\Omega} (|\partial_i u_1|^{p_i-2} \partial_i u_1 - |\partial_i u_2|^{p_i-2} \partial_i u_2) (\partial_i u_1 - \partial_i u_2) dx,$$

$$A_i = \partial_i u_1 - \partial_i u_2 \quad \text{and} \quad B_i = |\partial_i u_1| + |\partial_i u_2|,$$

and like the proof steps followed in both (28), (29), thanks to (24) we can obtain, for all  $i = 1, \dots, N$

$$\int_{\Omega} |\partial_i (u_1 - u_2)|^{p_i} dx \leq c \Lambda_i, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\partial_i (u_1 - u_2)|^{p_i} dx \\ & \leq \frac{1}{c_4} \max \left\{ \left( \int_{\Omega} (B_i)^{p_i} dx \right)^{\frac{2-p_-}{2}}, \left( \int_{\Omega} (B_i)^{p_i} dx \right)^{\frac{2-p_+}{2}} \right\} \times \max \left\{ \Lambda_i^{\frac{p_i^-}{2}}, \Lambda_i^{\frac{p_i^+}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (50)$$

Since  $u_1, u_2 \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$ , (50) implies that

$$\int_{\Omega} |\partial_i(u_1 - u_2)|^{p_i} dx \leq c' \max \left\{ \Lambda_i^{\frac{p_i^-}{2}}, \Lambda_i^{\frac{p_i^+}{2}} \right\}. \quad (51)$$

By combining (49), (51), and (46), we get that

$$\int_{\Omega} |\partial_i(u_1 - u_2)|^{p_i} dx = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (52)$$

Then, we conclude that

$$\|\partial_i(u_1 - u_2)\|_{p_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (53)$$

Hence, we get that

$$\|u_1 - u_2\|_{\vec{p}} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (54)$$

Then, (54) implies that  $u_1 = u_2$ . Thus, Theorem 1 has been proven.  $\triangleright$

REMARK 1. In a similar way, we can prove the uniqueness of the solution by adopting one of the two equations (47) (with the help of (5)) or (48) (with the help of (24)) instead of (46).

## References

1. Ružička, M. *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1748, Springer, Berlin, 2000.
2. Chen, Y., Levine, S. and Rao, M. Variable Exponent, Linear Growth Functionals in Image Restoration, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2006, vol. 66, no. 4, pp. 1383–1406. DOI: 10.1137/050624522.
3. Bear, J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*, New York, American Elsevier, 1972.
4. Bendahmane, M., Langlais, M. and Saad, M. On Some Anisotropic Reaction-Diffusion Systems with  $L^1$ -data Modeling the Propagation of an Epidemic Disease, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2003, vol. 54, no. 4, pp. 617–636. DOI: 10.1016/S0362-546X(03)00090-7.
5. Antontsev, S. and Chipot, M. Anisotropic Equations: Uniqueness and Existence Results, *Differential Equations*, 2008, vol. 21, no. 5–6, pp. 401–419.
6. Boccardo, L., Gallouët, T. and Murat, F. Unicité de la Solution de Certaines Equations Elliptiques non Linéaires, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, 1992, vol. 315, no. 1, pp. 1159–1164.
7. Carrillo, J. and Chipot, M. On Some Nonlinear Elliptic Equations Involving Derivatives of the Nonlinearity, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A Mathematics*, 1985, vol. 100, no. 3–4, pp. 281–294.
8. Boccardo, L. and Cirmi, R. Existence and Uniqueness of Solutions of Unilateral Problems with  $L^1$  Data, *Journal of Convex Analysis*, 1999, vol. 6, no. 1, pp. 195–206.
9. Chipot, M. and Cimatti, G. A Uniqueness Result for the Thermistor Problem, *European Journal of Applied Mathematics*, 1991, vol. 2, no. 2, pp. 97–103.
10. Chipot, M. and Michaille, G. Uniqueness Results and Monotonicity Properties for Strongly Nonlinear Elliptic Variational Inequalities, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série*, 1989, vol. 16, no. 1, pp. 137–166.
11. Zeidler, E. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II/B: Nonlinear Monotone Operators*, Translated from the German by the Author and Leo F. Boron, New York, Springer-Verlag, 1990.
12. Brézis, H. Équations et Inéquations Non Linéaires Dans les Espaces Vectoriels en Dualité, *Annales de l'Institut Fourier*, 1968, vol. 18, no. 1, pp. 115–175.
13. Browder, F. E. Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1963, vol. 69, no. 6, pp. 862–874. DOI: 10.1090/S0002-9904-1963-11068-X.
14. Minty, G. J. On a “Monotonicity” Method for the Solution of Nonlinear Equations in Banach Spaces, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1963, vol. 50, no. 6, pp. 1038–1041. DOI: 10.1073/pnas.50.6.1038.

15. Nikolskii, S. M. Imbedding Theorems for Functions with Partial Derivatives Considered in Different Metrics, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1958, vol. 118, no. 1, pp. 35–37 (in Russian).
16. Nikolskii, S. M. An Imbedding Theorem for Functions with Partial Derivatives Considered in Different Metrics, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, 1958, vol. 22, no. 3, pp. 321–336 (in Russian).
17. Slobodeckii, L. N. Generalized Sobolev Spaces and Their Application to Boundary Problems for Partial Differential Equations, *Leningradskij gosudarstvennyj pedagogicheskij institut: Uchenye zapiski* [Leningrad State Pedagogical Institute: Scientific Notes], 1958, vol. 197, pp. 54–112 (in Russian).
18. Troisi, M. Teoremi di Inclusione per Spazi di Sobolev non Isotropi, *Ricerche di Matematica*, 1969, vol. 18, no. 3, pp. 3–24.
19. Trudinger, N. S. An Imbedding Theorem for  $H_0(G, \Omega)$  Spaces, *Studia Mathematica*, 1974, vol. 50, no. 1, pp. 17–30.
20. Fragalà, I., Gazzola, F. and Kawohl, B. Existence and Nonexistence Results for Anisotropic Quasilinear Elliptic Equations, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 2004, vol. 21, no. 5, pp. 715–734.
21. Fan, X. Anisotropic Variable Exponent Sobolev Spaces and  $\vec{p}(x)$ -Laplacian Equations, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2011, vol. 56, no. 7–9, pp. 623–642. DOI: 10.1080/17476931003728412.
22. Naceri, M. Anisotropic Nonlinear Weighted Elliptic Equations with Variable Exponents, *Georgian Mathematical Journal*, 2023, vol. 30, no. 2, pp. 277–285. DOI: 10.1515/gmj-2022-2216.
23. Naceri, M. Entropy Solutions for Variable Exponents Nonlinear Anisotropic Elliptic Equations with Natural Growth Terms, *Revista Colombiana de Matemáticas*, 2024, vol. 58, no. 1, pp. 99–115. DOI: 10.15446/recolma.v58n1.117442.
24. Naceri, M. Anisotropic Nonlinear Elliptic Systems with Variable Exponents, Degenerate Coercivity and  $L^{q(\cdot)}$  Data, *Annals of the Academy of Romanian Scientists: Series on Mathematics and its Applications*, 2022, vol. 14, no. 1–2, pp. 107–140. DOI: 10.56082/annalsarscimath.2022.1-2.107.
25. Naceri, M. and Benboubker, M. B. Distributional Solutions of Anisotropic Nonlinear Elliptic Systems with Variable Exponents: Existence and Regularity, *Advances in Operator Theory*, 2022, vol. 7, no. 2, pp. 1–34. DOI: 10.1007/s43036-022-00183-4.

Received September 11, 2025

МОКНТАР НАСЕРИ  
 Higher Normal School of Laghouat,  
 P.O. Box 4033, Martyrs Ave., Laghouat 03000, Algeria,  
 Professor in the Mathematics Department  
 E-mail: nasrimokhtar@gmail.com, m.naceri@ens-lagh.dz  
<https://orcid.org/0000-0001-8882-6445>

Владикавказский математический журнал  
 2026, Том 28, Выпуск 1, С. 122–133

## СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ

Насери М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Высшая педагогическая школа Лагуата,  
 Алжир, 03000, Лагуат, пр. Мартирс

E-mail: nasrimokhtar@gmail.com, m.naceri@ens-lagh.dz

**Аннотация.** Рассматривается краевая задача для нелинейных анизотропных эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных в ограниченной открытой липшицевой области и граничными условиями Дирихле. При этом предполагается, что функция внешних сил принадлежит естественному двойственному пространству при определенных гипотезах относительно нелинейных анизотропных операторов, присутствующих в основной части предлагаемых задач. Центральный результат представляет собой доказательство существования и единственности слабого решения в анизотропном

пространстве Соболева для этой задачи. Оно основывается на применении различных анизотропных неравенств Соболева, теорем вложения и определенных особенностях псевдомонотонных операторов. Отметим, что функциональная постановка задачи включает анизотропные пространства Лебега и Соболева в скалярном случае и их наиболее важные свойства.

**Ключевые слова:** нелинейные эллиптические уравнения, анизотропные пространства Соболева, слабое решение, существование, единственность.

**AMS Subject Classification:** 35J60, 35J66, 35J67.

**Образец цитирования:** *Naceri M.* Existence and Uniqueness of Solution for Nonlinear Anisotropic Elliptic Dirichlet Problems // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, № 1.—С. 122–133 (in English). DOI: 10.46698/c8515-1572-8469-г.

УДК 517.982

DOI 10.46698/s3306-7592-2603-k

## ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ<sup>#</sup>

В. А. Тамаева<sup>1,2</sup>, Б. Б. Тасоев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Южный математический институт ВНЦ РАН,  
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Вагутина, 53;

<sup>2</sup> Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН,  
Россия, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1

E-mail: [tasoevbatradz@yandex.ru](mailto:tasoevbatradz@yandex.ru), [tamaeva.va@yandex.ru](mailto:tamaeva.va@yandex.ru)

*Посвящается памяти профессора С. С. Кутателадзе*

**Аннотация.** Целью настоящей работы является описание крайних точек выпуклого множества линейных положительных операторов, действующих из пространства непрерывных вещественных функций на компакте в порядково полную векторную решетку и отображающих тождественную единицу в некоторый фиксированный ненулевой элемент. Основным инструментом нашего исследования является метод канонического сублинейного оператора, предложенный С. С. Кутателадзе. Идея этого метода заключается в том, что произвольный сублинейный оператор представляется в виде композиции некоторого линейного оператора и конкретного сублинейного оператора, называемого каноническим сублинейным оператором Кутателадзе. Крайние точки произвольного сублинейного оператора представляют собой композицию линейного оператора и крайних точек канонического сублинейного оператора Кутателадзе. Используя этот факт, мы получили описание крайних точек исследуемого нами выпуклого множества линейных положительных операторов посредством решеточных гомоморфизмов, в частности, чистых состояний, представляющих собой особый вид крайних точек канонического сублинейного оператора Кутателадзе.

**Ключевые слова:** векторная решетка, экстремальная точка, решеточный гомоморфизм, квазирегулярная мера, сублинейный оператор.

**AMS Subject Classification:** 46B42, 46B04.

**Образец цитирования:** Тамаева В. А., Тасоев Б. Б. Экстремальное строение выпуклых множеств линейных операторов на пространстве непрерывных функций // Владикавк. мат. журн.—2026.— Т. 28, вып. 1.—С. 134–144. DOI: 10.46698/s3306-7592-2603-k.

### 1. Введение

Пусть  $Q$  — компакт,  $C(Q)$  — пространство непрерывных действительных функций на  $Q$ ,  $E$  — порядково полная векторная решетка, и  $0 < e \in E$ . Обозначим через  $S_e$  множество всех линейных положительных операторов  $T : C(Q) \rightarrow E$  таких, что  $T(\mathbf{1}_Q) = e$ . Ясно, что  $S_e$  — выпуклое множество. Цель настоящей работы — описать крайние точки множества  $S_e$ .

---

<sup>#</sup> Работа выполнена в Северо-Кавказском центре математических исследований ВНЦ РАН при поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2026-738.

© 2026 Тамаева В. А., Тасоев Б. Б.

В цикле работ [1–5] С. С. Кутателадзе предложил геометрическое изучение выпуклых множеств линейных операторов, в частности опорных множеств сублинейных операторов, на основе пространств Канторовича, именуемых также порядково полными векторными решетками. В работе [5] была изложена принципиально новая идея о представлении произвольного сублинейного оператора в виде композиции линейного оператора и конкретного сублинейного оператора  $\varepsilon_{\mathcal{M}}$ , именуемого в литературе каноническим сублинейным оператором Кутателадзе. При этом все остальные сублинейные операторы со значениями в  $E$  получаются из оператора  $\varepsilon_{\mathcal{M}}$  с помощью линейной замены переменных, а крайние точки произвольного сублинейного оператора представляют собой композицию некоторого линейного оператора и крайних точек канонического сублинейного оператора Кутателадзе. В свою очередь, крайние точки канонического сублинейного оператора Кутателадзе представляют собой поточечный равномерный предел чистых состояний, являющихся решеточными гомоморфизмами. Эти результаты позволяют описать крайние точки множества  $S_e$  при соответствующем выборе сублинейного оператора.

В разделе 2 кратко изложена конструкция порядкового интегрирования по мере со значениями в порядково  $\sigma$ -полной векторной решетке. Данный тип порядкового интегрирования также называется интегралом Канторовича — Райта. Раздел 3 посвящен описанию канонического сублинейного оператора Кутателадзе. Там же приводятся необходимые вспомогательные утверждения. В разделе 4 приводятся основные результаты. В теореме 4.1 дается описание крайних точек множества  $S_e$  через решеточные гомоморфизмы, используя понятие чистых состояний. В теореме 4.2 приводится наиболее полное описание крайних точек, привлекая теорему 4.1, а также установленные в статье [6] результаты. В настоящей статье используются стандартные обозначения и терминология теории векторных решеток и положительных операторов из [7, 8].

## 2. Порядковое интегрирование

В этом параграфе приводится набросок конструкции порядкового интеграла по мере на произвольной  $\sigma$ -алгебре со значениями в порядково  $\sigma$ -полной векторной решетке. Данная конструкция была предложена в работе [9]. Порядковое интегрирование по мере на произвольном  $\delta$ -кольце предложено в работе [10].

Пусть  $\Omega$  — некоторое непустое множество,  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра подмножеств множества  $\Omega$ ,  $E$  — порядково  $\sigma$ -полная векторная решетка. Введем в  $E$  символ  $\infty$  и будем полагать, что  $x < \infty$  для всех  $x \in E$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** Функция  $\mu : \Sigma \rightarrow E \cup \{\infty\}$  называется *мерой*, если выполняются следующие условия:

- (1)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- (2)  $\mu(A) \geq 0$  для всех  $A \in \Sigma$ ;
- (3) для любой последовательности  $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ , удовлетворяющей условию  $A_i \cap A_j = \emptyset$  для всех  $i \neq j$ , справедливо равенство

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{r=1}^n \mu(A_r).$$

Как обычно, пару  $(\Omega, \Sigma)$ , где  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Omega$ , называют *измеримым пространством*, а множества из  $\Sigma$  — *измеримыми*.

Символом  $\mathcal{L}^0(\mu) := \mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$  будем обозначать множество всех  $\Sigma$ -измеримых функций  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Функция  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $\Sigma$ -ступенчатой, если она представима в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i},$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ,  $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$  попарно не пересекаются и  $\mu(A_i) < \infty$  для всех  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Обозначим символом  $\text{St}(\Sigma)$  множество всех  $\Sigma$ -ступенчатых функций. Положим по определению

$$I_\mu(\varphi) := \int \varphi \, d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

для всех  $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \in \text{St}(\Sigma)$ .

Можно показать, что множество  $\text{St}(\Sigma)$  является векторной подрешеткой  $\mathcal{L}^0(\mu)$ , а отображение  $I_\mu : \text{St}(\Sigma) \rightarrow E$  корректно определено, т. е.  $I_\mu(\varphi)$  не зависит от представления  $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \in \text{St}(\Sigma)$ , и является линейным оператором.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Говорят, что некоторое свойство  $P$  выполняется  $\mu$ -почти всюду ( $\mu$ -п.в.), если мера множества, на котором свойство  $P$  не выполняется, равна нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Функция  $0 \leq f \in \mathcal{L}^0(\mu)$   $\mu$ -п.в. называется *интегрируемой*, если существует последовательность  $\Sigma$ -ступенчатых функций  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$  такая, что  $0 \leq \varphi_n \uparrow_n f$   $\mu$ -п.в. и  $\sup_n \int \varphi_n \, d\mu < \infty$ . При этом будем полагать  $I_\mu(f) := \int f \, d\mu := \sup_n \int \varphi_n \, d\mu$ . Таким образом,

$$\int f \, d\mu := \sup_n \int \varphi_n \, d\mu \geq 0.$$

Можно показать, что  $I_\mu(f)$  не зависит от выбора  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \text{St}(\Sigma)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Произвольная функция  $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$  называется *интегрируемой*, если интегрируемы функции  $f^+ := f \vee 0$  и  $f^- := f \wedge 0$ . При этом будем полагать

$$I_\mu(f) := \int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Символом  $\mathcal{L}^1(\mu)$  будем обозначать множество всех интегрируемых функций. Доказательства следующих двух теорем приведены в работе [10].

**Теорема 2.1.** *Справедливы следующие утверждения:*

- (1) Множество  $\mathcal{L}^1(\mu)$  является порядковым идеалом в  $\mathcal{L}^0(\mu)$ ;
- (2) Отображение  $I_\mu : f \mapsto \int f \, d\mu$  из  $\mathcal{L}^1(\mu)$  в  $E$  является линейным положительным оператором;
- (3) Если  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  и  $g \in \mathcal{L}^0(\mu)$  такие, что  $f = g$   $\mu$ -п.в., то  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  и  $I_\mu(f) = I_\mu(g)$ ;
- (4) Если  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  и  $f \geq g$   $\mu$ -п.в., то  $I_\mu(f) \geq I_\mu(g)$ ;
- (5) Для функции  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  выполняется  $I_\mu(|g|) = 0$  тогда и только тогда, когда  $g = 0$   $\mu$ -п.в.

**Теорема 2.2** (О мажорированной сходимости). Пусть последовательность  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^1(\mu)$  удовлетворяет условиям  $|f_n| \leq g$   $\mu$ -п.в. и  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -п.в., то  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  и выполняются равенства  $\lim_n \int f_n \, d\mu = \int \lim_n f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$ .

### 3. Канонический сублинейный оператор Кутателадзе

В данном параграфе приводятся вспомогательные леммы, а также описание крайних точек сублинейного оператора посредством канонического сублинейного оператора Кутателадзе. Подробности можно найти в монографии [11, гл. 2].

Всюду далее  $X, E$  — векторные решетки,  $E$  порядково полна. Символом  $L(X, E)$  будем обозначать множество всех линейных операторов из  $X$  в  $E$ . Линейный оператор  $T \in L(X, E)$  называется *положительным*, если  $Tx \geq 0$  для всех  $0 \leq x \in X$ . Символом  $L(X, E)_+$  будем обозначать множество всех линейных положительных операторов из  $X$  в  $E$ . Оператор  $p : X \rightarrow E$  называется *сублинейным*, если  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  и  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$  для всех  $x, y \in X$  и  $\lambda \geq 0$ .

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Сублинейный оператор  $p : X \rightarrow E$  называется
- (1) *возрастающим*, если  $p(x_2) \geq p(x_1)$  для всех  $x_1, x_2 \in X, x_2 \geq x_1$ ;
  - (2) *субморфизмом*, если  $p(x \vee y) = p(x) \vee p(y)$  для всех  $x, y \in X$ .

Ясно, что всякий субморфизм является возрастающим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Опорным множеством* сублинейного оператора  $p : X \rightarrow E$  называется множество всех линейных операторов  $T \in L(X, E)$ , для которых выполняется  $Tx \leq p(x)$  для всех  $x \in X$ . Символически,

$$\partial p := \{T \in L(X, E) : Tx \leq p(x) \text{ для всех } x \in X\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть  $C$  — выпуклое множество некоторого векторного пространства. Элемент  $z \in C$  называют *крайним* или *экстремальным*, если из условий  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y, 0 < \lambda < 1$  и  $x, y \in C$  следует, что  $z = x = y$ . Символом  $\text{Ch}(p)$  будем обозначать множество всех крайних точек опорного множества  $\partial p$  сублинейного оператора  $p$ . Символически,

$$\text{Ch}(p) := \{T \in L(X, E) : T \text{ — крайняя точка } \partial p\}.$$

**Лемма 3.1.** Пусть  $X, E$  — векторные решетки,  $E$  — порядково полна,  $p : X \rightarrow E$  — субморфизм. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) Каждый оператор  $T \in \partial p$  положителен, т. е.  $\partial p \subset L(X, E)_+$ ;
- (2) Каждый оператор  $T \in \text{Ch}(p)$  является решеточным гомоморфизмом.

< Пусть  $x_1, x_2 \in X, x_2 \geq x_1$ . Так как  $p$  субморфизм, то выполняются соотношения  $p(x_2) = p(x_1 \vee x_2) = p(x_1) \vee p(x_2) \geq p(x_1)$ . Следовательно,  $p$  возрастает, и справедливость утверждения (1) следует из [11, § 2.1.1(2)]. Доказательство утверждения (2) можно найти в [7, § 3.3.9(1)]. >

Пусть  $\mathcal{U}$  — произвольное непустое множество. Обозначим символом  $l_\infty(\mathcal{U}, E)$  совокупность всех отображений  $f : \mathcal{U} \rightarrow E$  таких, что множество значений  $\{f(\alpha) : \alpha \in \mathcal{U}\}$  порядково ограничено в  $E$ . Множество  $l_\infty(\mathcal{U}, E)$  является порядково полной векторной решеткой относительно поточечных операций сложения, умножения на скаляры и отношения порядка:

$$(f + g)(\alpha) := f(\alpha) + g(\alpha), \quad (\lambda)f(\alpha) := \lambda f(\alpha) \\ f \leq g \Leftrightarrow f(\alpha) \leq g(\alpha)$$

для всех  $f, g \in l_\infty(\mathcal{U}, E), \alpha \in \mathcal{U}$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Оператор  $\varepsilon_{\mathcal{U}} : l_\infty(\mathcal{U}, E) \rightarrow E$ , действующий по правилу

$$\varepsilon_{\mathcal{U}}(f) := \sup\{f(\alpha) : \alpha \in \mathcal{U}\}$$

для всех  $f \in l_\infty(\mathcal{U}, E)$ , называется *каноническим сублинейным оператором Кутателадзе*.

Из определения 3.4 непосредственно следует, что  $\varepsilon_{\mathcal{U}}$  сублинеен и возрастает. Рассмотрим теперь некоторое множество  $\mathcal{U} \subset L(X, E)$  слабо порядково ограниченных линейных операторов. Напомним, что  $\mathcal{U}$  называется *слабо порядково ограниченным*, если для всякого  $x \in X$  множество  $\{Tx : T \in \mathcal{U}\}$  порядково ограничено в  $E$ . Для каждого фиксированного  $x \in X$  обозначим символом  $\langle \mathcal{U} \rangle x$  отображение, сопоставляющее каждому  $T \in \mathcal{U}$  элемент  $Tx \in E$ , т. е.

$$\langle \mathcal{U} \rangle x(T) := Tx \quad (1)$$

для всех  $T \in \mathcal{U}$ . Так как  $\mathcal{U}$  слабо порядково ограничено, то  $\langle \mathcal{U} \rangle x \in l_{\infty}(\mathcal{U}, E)$  для каждого  $x \in X$ . Таким образом, возникает линейный оператор  $\langle \mathcal{U} \rangle : X \rightarrow l_{\infty}(\mathcal{U}, E)$ , действующий по правилу

$$\langle \mathcal{U} \rangle : x \mapsto \langle \mathcal{U} \rangle x$$

для всех  $x \in X$ . С множеством  $\mathcal{U}$  можно связать еще один оператор  $P_{\mathcal{U}} : X \rightarrow E$ , действующий по правилу

$$P_{\mathcal{U}}x := \sup\{Tx : T \in \mathcal{U}\} \quad (2)$$

для всех  $x \in X$ . Оператор  $P_{\mathcal{U}}$  сублинеен.

**Лемма 3.2.** Пусть  $X, E$  — векторные решетки,  $E$  порядково полна и  $\mathcal{U} \subset L(X, E)$  — множество слабо порядково ограниченных линейных операторов. Справедливы следующие утверждения:

- (1)  $P_{\mathcal{U}} = \varepsilon_{\mathcal{U}} \circ \langle \mathcal{U} \rangle$ ;
- (2)  $\text{Ch}(P_{\mathcal{U}}) \subset \{S \circ \langle \mathcal{U} \rangle : S \in \text{Ch}(\varepsilon_{\mathcal{U}})\}$ .

◁ Справедливость (1) непосредственно следует из определений  $P_{\mathcal{U}}$ ,  $\varepsilon_{\mathcal{U}}$  и  $\langle \mathcal{U} \rangle$ . Доказательство (2) следует из (1) и [11, теорема 2.2.10]. ▷

Пусть  $\mathfrak{P}(E)$  — полная булева алгебра порядковых проекторов в  $E$ . Напомним, что семейство  $(\pi_{\xi})_{\xi \in \Xi} \subset \mathfrak{P}(E)$  называется *разбиением единицы в  $\mathfrak{P}(E)$* , если  $\bigvee_{\xi \in \Xi} \pi_{\xi} = I_E$  и  $\pi_{\xi} \wedge \pi_{\eta} = 0$  для всех  $\xi \neq \eta$ , где  $I_E$  — тождественный оператор на  $E$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5.** Пусть  $(T_{\xi})_{\xi \in \Xi} \subset L(X, E)$ . Оператор  $T \in L(X, E)$  называется *перемешиванием семейства  $(T_{\xi})_{\xi \in \Xi}$* , если найдется разбиение единицы  $(\pi_{\xi})_{\xi \in \Xi}$  такое, что  $Tx = \sum_{\xi \in \Xi} \pi_{\xi} T_{\xi} x$  для всех  $x \in X$ .

Зафиксируем произвольный элемент  $A \in \mathcal{U}$ . Положим по определению

$$\varepsilon_A(f) := f(A)$$

для всех  $f \in l_{\infty}(\mathcal{U}, E)$ . Тогда  $\varepsilon_A : l_{\infty}(\mathcal{U}, E) \rightarrow E$  называется  *$\delta$ -функцией*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6.** Пусть  $(A_{\xi})_{\xi \in \Xi} \subset \mathcal{U}$ . Перемешивание семейства  $\delta$ -функций  $(\varepsilon_{A_{\xi}})_{\xi \in \Xi}$  называется *чистым состоянием*, т. е. чистые состояния представляют собой операторы вида  $f \mapsto \sum_{\xi \in \Xi} \pi_{\xi} f(A_{\xi})$  для всех  $f \in l_{\infty}(\mathcal{U}, E)$ , где  $(\pi_{\xi})_{\xi \in \Xi}$  — разбиение единицы в  $\mathfrak{P}(E)$ ,  $(A_{\xi})_{\xi \in \Xi} \subset \mathcal{U}$ .

**Лемма 3.3.** Пусть  $S$  — крайняя точка опорного множества канонического сублинейного оператора Кутателадзе  $\varepsilon_{\mathcal{U}} : l_{\infty}(\mathcal{U}, E) \rightarrow E$ . Тогда существует сеть из чистых состояний  $(S_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda} \subset L(l_{\infty}(\mathcal{U}, E), E)_{+}$  такая, что для любых  $g \in l_{\infty}(\mathcal{U}, E)$  и  $\varepsilon > 0$  найдутся  $e_g \in E_{+}$  и  $\lambda(g, \varepsilon) \in \Lambda$  такие, что  $|Sg - S_{\lambda}g| \leq \varepsilon e_g$  для всех  $\lambda \geq \lambda(g, \varepsilon)$ .

◁ Доказательство следует из [11, утверждение 2.4.8]. ▷

#### 4. Основной результат

Всюду далее  $Q$  — компакт,  $C(Q)$  — пространство всех непрерывных функций из  $Q$  в  $\mathbb{R}$ ,  $E$  — порядково полная векторная решетка,  $\mathfrak{B}(E)$  — полная булева алгебра порядковых проекторов в  $E$  и  $0 < e \in E$ . Обозначим символом  $S_e$  множество всех положительных операторов из  $C(Q)$  в  $E$ , отображающих тождественную единицу  $\mathbf{1}_Q$  в  $e$ . Символически,

$$S_e := \{T \in L(C(Q), E)_+ : T(\mathbf{1}_Q) = e\}.$$

Далее опишем крайние точки  $S_e$ , что составляет цель настоящей статьи.

**Лемма 4.1.** *Отображение  $p : C(Q) \rightarrow E$ , осуществляемое по правилу*

$$p(f) := \sup \{f(q) : q \in Q\}e$$

для всех  $f \in C(Q)$ , является субморфизмом и имеют место равенства  $\partial p = S_e$ ,  $p(\mathbf{1}_Q) = e$ .

◁ Ясно, что  $p$  — сублинейный оператор и  $p(\mathbf{1}_Q) = e$ . Для произвольных  $f, g \in C(Q)$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} p(f \vee g) &= \sup \{(f \vee g)(q) : q \in Q\}e = \sup \{f(q) \vee g(q) : q \in Q\}e \\ &= (\sup \{f(q) : q \in Q\}e) \vee (\sup \{g(q) : q \in Q\}e) = p(f) \vee p(g). \end{aligned}$$

Таким образом,  $p$  — субморфизм. Покажем, что  $\partial p = S_e$ . Пусть  $T \in \partial p$ . Так как  $p$  возрастает, то  $T \geq 0$  в силу [11, Утверждение 2.1.1(2)]. Из соотношений  $T(\mathbf{1}_Q) \leq p(\mathbf{1}_Q) = e$  и  $-T(\mathbf{1}_Q) = T(-\mathbf{1}_Q) \leq p(-\mathbf{1}_Q) = -e$  следует, что  $T(\mathbf{1}_Q) = e$ . Следовательно,  $\partial p \subset S_e$ .

Обратно, пусть  $T \in S_e$ . Тогда  $T(f) \leq T(\sup\{f(q) : q \in Q\}\mathbf{1}_Q) = \sup\{f(q) : q \in Q\}e = p(f)$  для всех  $f \in C(Q)$ . Следовательно,  $S_e \subset \partial p$ . Таким образом,  $\partial p = S_e$ . ▷

**Теорема 4.1.** *Пусть  $Q$  — компакт,  $E$  — порядково полная векторная решетка,  $0 < e \in E$  и  $S_e := \{T \in L(C(Q), E)_+ : T(\mathbf{1}_Q) = e\}$ . Для произвольного оператора  $T \in S_e$  равносильны утверждения:*

- (1)  $T$  является крайней точкой множества  $S_e$ ;
- (2) Существует сеть  $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  операторов из  $C(Q)$  в  $E_+$  вида  $f \mapsto \sum_{\xi \in \Xi} f(q_\xi)\pi_\xi e$ , где  $(q_\xi)_{\xi \in \Xi}$  — подмножество в  $Q$ ,  $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$  — разбиение единицы в  $\mathfrak{B}(E)$  такая, что для любых  $f \in C(Q)$  и  $\varepsilon > 0$  найдется элемент  $\lambda(f, \varepsilon) \in \Lambda$  такой, что справедливо неравенство  $|Tf - T_\lambda f| \leq \varepsilon e$  для всех  $\lambda \geq \lambda(f, \varepsilon)$ ;
- (3)  $T$  является решеточным гомоморфизмом.

◁ (1)  $\Rightarrow$  (2). Пусть  $p : C(Q) \rightarrow E$  из леммы 4.1 и  $T$  — крайняя точка  $S_e$ , т. е.  $T \in \text{Ch}(p)$  (см. определение 3.3). Покажем, что существует семейство  $\mathcal{U} \subset L(C(Q), E)$  такое, что справедливо равенство  $p = P_{\mathcal{U}}$ , где  $P_{\mathcal{U}} : C(Q) \rightarrow E$  — сублинейный оператор, определяемый по формуле (2). Для произвольного  $q \in Q$  положим по определению

$$\hat{q}(f) := f(q)e$$

для всех  $f \in C(Q)$  и обозначим символом  $\mathcal{U} := \{\hat{q} : q \in Q\}$ . Тогда  $\mathcal{U} \subset L(C(Q), E)_+$  и  $\mathcal{U}$  — слабо порядково ограничено. В силу леммы 4.1 и формулы (2) выполняются равенства

$$p(f) = \sup \{f(q) : q \in Q\}e = \sup \{f(q)e : q \in Q\} = \sup \{\hat{q}(f) : \hat{q} \in \mathcal{U}\} = P_{\mathcal{U}}(f)$$

для всех  $f \in C(Q)$ . Таким образом,  $p = P_{\mathcal{U}}$  и по лемме 3.2 справедливо соотношение

$$\text{Ch}(P_{\mathcal{U}}) \subset \{S \circ \langle \mathcal{U} \rangle : S \in \text{Ch}(\varepsilon_{\mathcal{U}})\},$$

где  $\varepsilon_{\mathcal{U}} : l_{\infty}(\mathcal{U}, E) \rightarrow E$  — канонический сублинейный оператор Кутателадзе (см. определение 3.4),  $\langle \mathcal{U} \rangle : C(Q) \rightarrow l_{\infty}(\mathcal{U}, E)$  — линейный оператор, определяемый по формуле (1)

$$\langle \mathcal{U} \rangle f(\hat{q}) = \hat{q}(f) = f(q)e \quad (3)$$

для всех  $f \in C(Q)$  и  $\hat{q} \in \mathcal{U}$ . Следовательно, существует оператор  $S \in \text{Ch}(\varepsilon_{\mathcal{U}})$  такой, что справедливо представление

$$T = S \circ \langle \mathcal{U} \rangle. \quad (4)$$

В силу леммы 3.3 существует сеть из чистых состояний  $(S_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda} \subset L(l_{\infty}(\mathcal{U}, E), E)_{+}$  такая, что для любых  $g \in l_{\infty}(\mathcal{U}, E)$  и  $\varepsilon > 0$  найдутся  $e_g \in E_{+}$  и  $\lambda(g, \varepsilon) \in \Lambda$  такие, что выполняется неравенство

$$|Sg - S_{\lambda}g| \leq \varepsilon e_g$$

для всех  $\lambda \geq \lambda(g, \varepsilon)$ . Так как образ каждого оператора из  $S_e$  содержится в главном идеале  $I_e$  в  $E$ , порожденном элементом  $e$ , то, полагая  $E := I_e$ , можно ограничиться одним регулятором сходимости  $e$  для всех  $g \in l_{\infty}(\mathcal{U}, E)$ . Таким образом, для любых  $g \in l_{\infty}(\mathcal{U}, E)$  и  $\varepsilon > 0$  существует элемент  $\lambda(g, \varepsilon) \in \Lambda$  такой, что выполняется неравенство

$$|Sg - S_{\lambda}g| \leq \varepsilon e$$

для всех  $\lambda \geq \lambda(g, \varepsilon)$ . Полагая в последнем неравенстве  $g := \langle \mathcal{U} \rangle f$  для произвольного  $f \in C(Q)$  и  $T_{\lambda} := S_{\lambda} \circ \langle \mathcal{U} \rangle$  для всех  $\lambda \in \Lambda$ , с учетом формулы (4) получим

$$|Tf - T_{\lambda}f| \leq \varepsilon e$$

для всех  $\lambda \geq \lambda(f, \varepsilon)$ . Осталось показать, что каждый оператор  $T_{\lambda} : C(Q) \rightarrow E$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) имеет вид  $f \mapsto \sum_{\xi \in \Xi} f(q_{\xi})\pi_{\xi}e$ , где  $(q_{\xi})_{\xi \in \Xi}$  — подмножество в  $Q$ ,  $(\pi_{\xi})_{\xi \in \Xi}$  — разбиение единицы в  $\mathfrak{P}(E)$ .

Возьмем произвольный  $\lambda \in \Lambda$ . По определению чистого состояния оператор  $S_{\lambda} : l_{\infty}(\mathcal{U}, E) \rightarrow E$  имеет вид  $g \mapsto \sum_{\xi \in \Xi} \pi_{\xi}g(\hat{q}_{\xi})$ , где  $(\pi_{\xi})_{\xi \in \Xi}$  — разбиение единицы в  $\mathfrak{P}(E)$ ,  $(\hat{q}_{\xi})_{\xi \in \Xi}$  — подмножество в  $\mathcal{U}$ . Полагая  $g := \langle \mathcal{U} \rangle f$ , с учетом формулы (3) справедливы равенства

$$T_{\lambda}f = S_{\lambda}\langle \mathcal{U} \rangle f = \sum_{\xi \in \Xi} \pi_{\xi}\langle \mathcal{U} \rangle f(\hat{q}_{\xi}) = \sum_{\xi \in \Xi} \pi_{\xi}f(q_{\xi})e$$

для всех  $f \in C(Q)$ . Таким образом, каждый оператор  $T_{\lambda} : C(Q) \rightarrow E$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) имеет вид  $f \mapsto \sum_{\xi \in \Xi} f(q_{\xi})\pi_{\xi}e$ , где  $(q_{\xi})_{\xi \in \Xi}$  — подмножество в  $Q$ ,  $(\pi_{\xi})_{\xi \in \Xi}$  — разбиение единицы в  $\mathfrak{P}(E)$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3). Пусть верно утверждение (2). Всякий оператор из  $C(Q)$  в  $E$  вида  $f \mapsto \sum_{\xi \in \Xi} f(q_{\xi})\pi_{\xi}e$ , где  $(\pi_{\xi})_{\xi \in \Xi}$  — разбиение единицы в  $\mathfrak{P}(E)$ ,  $(q_{\xi})_{\xi \in \Xi} \subset Q$ , является решеточным гомоморфизмом. Следовательно,  $T$  является решеточным гомоморфизмом как поточечный равномерный предел сети решеточных гомоморфизмов.

(3)  $\Rightarrow$  (1). Пусть  $T$  — решеточный гомоморфизм и верно равенство  $T = \alpha T_1 + (1 - \alpha)T_2$  для некоторых  $T_1, T_2 \in S_e$  и  $0 < \alpha < 1$ . Тогда  $T \geq \alpha T_1$  и по теореме Кутателадзе [7, теорема 3.3.3] существует ортоморфизм  $0 \leq \rho \leq I_E$  такой, что  $\alpha T_1 = \rho T$  или  $T_1 = \rho/\alpha T$ . Следовательно,  $e = T_1(\mathbf{1}_Q) = \rho/\alpha(e)$ . Обозначим через  $\pi$  порядковый проектор на полосу  $\{e\}^{\perp\perp}$  в  $E$ , порожденную элементом  $e$ . Тогда в виду равенств  $\pi(e) = e = \rho/\alpha(e)$  получим  $\pi = \pi\rho/\alpha$ . Следовательно, так как образ каждого оператора из  $S_e$  содержится в  $\{e\}^{\perp\perp}$ , то справедливы равенства  $T_1 = \pi T_1 = \pi\rho/\alpha T = \pi T = T$ . Таким образом,  $T = T_1$ . Тогда  $T_2 = (T - \alpha T)/(1 - \alpha) = T$ , т. е.  $T = T_1 = T_2$ .  $\triangleright$

Пусть  $Bor(Q)$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная всеми открытыми множествами в  $Q$ . Напомним, что всякая мера  $\mu : Bor(Q) \rightarrow E$  называется *борелевской*. Борелевская мера  $\mu : Bor(Q) \rightarrow E$  называется *квазирегулярной*, если выполняется равенство

$$\mu(G) = \sup \{ \mu(K) : K \in Bor(Q), K \text{ замкнуто в } Q, K \subset G \}$$

для всех открытых множеств  $G \in Bor(Q)$ .

**Теорема 4.2.** Пусть  $Q$  — компакт,  $E$  — порядково полная векторная решетка,  $0 < e \in E$  и  $S_e := \{ T \in L(C(Q), E)_+ : T(\mathbf{1}_Q) = e \}$ . Для произвольного оператора  $T \in S_e$  равносильны утверждения:

- (1)  $T$  является крайней точкой множества  $S_e$ ;
- (2) Существует сеть  $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  операторов из  $C(Q)$  в  $E_+$  вида  $f \mapsto \sum_{\xi \in \Xi} f(q_\xi) \pi_\xi e$ , где  $(q_\xi)_{\xi \in \Xi}$  — подмножество в  $Q$ ,  $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$  — разбиение единицы в  $\mathfrak{P}(E)$  такая, что для любых  $f \in C(Q)$  и  $\varepsilon > 0$  найдется элемент  $\lambda(f, \varepsilon) \in \Lambda$  такой, что справедливо неравенство  $|Tf - T_\lambda f| \leq \varepsilon e$  для всех  $\lambda \geq \lambda(f, \varepsilon)$ ;
- (3)  $T$  является решеточным гомоморфизмом;
- (4) Ядро  $\ker(\pi T)$  оператора  $T$  является порядковым идеалом в  $C(Q)$  для любого порядкового проектора  $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ ;
- (5) Существуют экстремальный компакт  $Y$ , непрерывное отображение  $\xi : Y \rightarrow Q$  и решеточный изоморфизм  $h : I_e \rightarrow C(Y)$  из главного идеала  $I_e \subset E$ , порожденного элементом  $e$ , на  $C(Y)$  такие, что справедливо представление

$$((h \circ T)f)(y) = f(\xi(y))$$

для всех  $f \in C(Q)$  и  $y \in Y$ ;

- (6) Существует единственная квазирегулярная борелевская мера  $\mu : Bor(Q) \rightarrow \mathfrak{C}(e)$  со значениями в полной булевой алгебре  $\mathfrak{C}(e)$  осколков элемента  $e$  такая, что справедливо представление

$$Tf = \int_Q f d\mu$$

для всех  $f \in C(Q)$ . При этом мера  $\mu$  является  $\sigma$ -непрерывным булевым гомоморфизмом;

- (7) Существует единственная квазирегулярная борелевская мера  $\varphi : Bor(Q) \rightarrow \mathfrak{P}(E)$  такая, что справедливо представление

$$Tf = \left( \int_Q f d\varphi \right) e$$

для всех  $f \in C(Q)$ . При этом мера  $\varphi$  является  $\sigma$ -непрерывным булевым гомоморфизмом из  $Bor(Q)$  в главный идеал  $\{ \pi \in \mathfrak{P}(E) : \pi \leq \varphi(Q) \}$  в булевой алгебре  $\mathfrak{P}(E)$ .

$\triangleleft$  Равносильность утверждений (1), (2) и (3) показана в теореме 4.1, а равносильность (3) и (4) следует из [12, теорема 3.4.2]. Равносильность утверждений (3), (5) и (6) установлена в [6, теорема 3.4]. Осталось показать, что (6) и (7) равносильны.

(6)  $\Rightarrow$  (7). Пусть верно утверждение (6), т. е. имеем представление

$$Tf = \int_Q f d\mu$$

для всех  $f \in C(Q)$ , где  $\mu : \text{Bor}(Q) \rightarrow \mathfrak{C}(e)$  — единственная квазирегулярная борелевская мера со значениями в полной булевой алгебре  $\mathfrak{C}(e)$  осколков элемента  $e$ , и мера  $\mu$  является  $\sigma$ -непрерывным булевым гомоморфизмом. Очевидно, что все операторы из  $S_e$  действуют в полосу  $B_e$  в  $E$ , порожденную элементом  $e$ . Как известно (см. [7, теорема 1.3.7(1)]), отображение  $\iota : \mathfrak{C}(e) \rightarrow \mathfrak{P}(B_e)$ , которое каждому осколку  $z \in \mathfrak{C}(e)$  ставит в соответствие порядковый проектор  $\pi_z \in \mathfrak{P}(B_e)$  на полосу в  $B_e$ , порожденную элементом  $z$ , является булевым изоморфизмом полных булевых алгебр  $\mathfrak{C}(e)$  и  $\mathfrak{P}(B_e)$ . При этом обратный оператор  $\iota^{-1} : \mathfrak{P}(B_e) \rightarrow \mathfrak{C}(e)$  действует по правилу  $\iota^{-1}(\pi) = \pi e$  для всех  $\pi \in \mathfrak{P}(B_e)$ . Положим по определению

$$\varphi(A) := \iota(\mu(A))$$

для всех  $A \in \text{Bor}(Q)$ . Тогда  $\varphi : \text{Bor}(Q) \rightarrow \mathfrak{P}(B_e)$  — квазирегулярная борелевская мера. Из равенств  $\mathfrak{P}(B_e) = \{\pi \in \mathfrak{P}(E) : \pi \leq \pi_e\}$  и  $\pi_e = \varphi(Q)$  следует, что  $\mathfrak{P}(B_e) = \{\pi \in \mathfrak{P}(E) : \pi \leq \varphi(Q)\}$ . Возьмем произвольную ступенчатую функцию  $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ , где  $A_i \in \text{Bor}(Q)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \left( \int_Q g \, d\varphi \right) e &= \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(A_i) \right) e = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(A_i) e \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \iota(\mu(A_i)) e = \sum_{i=1}^n \alpha_i \iota^{-1}(\iota(\mu(A_i))) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \int_Q g \, d\mu. \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме 2.2 о мажорированной сходимости выполняется равенство

$$\left( \int_Q f \, d\varphi \right) e = \int_Q f \, d\mu$$

для любой измеримой ограниченной функции  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , в частности для всех  $f \in C(Q)$ . Таким образом,  $Tf = \int_Q f \, d\mu = \left( \int_Q f \, d\varphi \right) e$  для всех  $f \in C(Q)$ .

Пользуясь равенством  $\mu = \iota^{-1}\varphi$ , можно показать, что (7)  $\Rightarrow$  (6).  $\triangleright$

### Литература

1. Кутателадзе С. С. Крайние точки субдифференциалов // Докл. АН СССР.—1978.—Т. 242, № 5.—С. 1001–1003.
2. Кутателадзе С. С. Теорема Крейна — Мильмана и ее обращения // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 1.—С. 130–138.
3. Кутателадзе С. С. Шапки и грани множеств операторов // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 280, № 2.—С. 285–288.
4. Кутателадзе С. С. Признаки субдифференциалов, изображающих шапки и грани // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 3.—С. 134–141.
5. Кутателадзе С. С. Опорные множества сублинейных операторов // Докл. АН СССР.—1976.—Т. 230, № 5.—С. 1029–1032.
6. Тамаева В. А., Тасоев Б. Б. A note on the representation of lattice homomorphisms // Positivity.—2024.—Vol. 28, article no. 76. DOI: 10.1007/s11117-024-01095-8.
7. Kusraev A. G. Dominated Operators.—Springer, 2000.
8. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—London: Acad. Press Inc., 1985.
9. Wright M. Stone-Algebra-Valued Measures and Integrals // Proc. London Math. Soc.—1969.—Vol. 19, № 3.—P. 107–122. DOI: 10.1112/plms/s3-19.1.107.
10. Kusraev A. G., Tasoev B. B. Kantorovich–Wright integration and representation of vector lattices // J. Math. Anal. Appl.—2017.—Vol. 455, № 1.—P. 554–568. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.05.059.

11. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения.—М.: Наука, 2007.—559 с.
12. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: Southern Mathematical Institute VSC RAS and RNO-A, 2014.—iv+400 p. DOI: 10.13140/RG.2.1.2164.6486.

*Статья поступила 4 декабря 2025 г.*

ТАМАЕВА ВИКТОРИЯ АМУРХАНОВНА  
Южный математический институт ВНЦ РАН,  
младший научный сотрудник отдела функцион. анализа  
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;  
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН,  
младший научный сотрудник отдела матем. исследований  
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1  
E-mail: [tamaeva.va@yandex.ru](mailto:tamaeva.va@yandex.ru)  
<https://orcid.org/0009-0005-2558-6815>;

ТАСОЕВ БАТРАДЗ БОТАЗОВИЧ  
Южный математический институт ВНЦ РАН,  
старший научный сотрудник отдела функцион. анализа  
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53  
E-mail: [tasoevbatradz@yandex.ru](mailto:tasoevbatradz@yandex.ru)  
<https://orcid.org/0000-0001-8573-4721>

*Vladikavkaz Mathematical Journal*  
2026, Volume 28, Issue 1, P. 134–144

## EXTREMAL STRUCTURE OF CONVEX SETS OF LINEAR OPERATORS ON THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS

Tamaeva, V. A.<sup>1,2</sup> and Tasoev, B. B.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Southern Mathematical Institute of VSC RAS,  
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia;

<sup>2</sup> North-Caucasus Center for Mathematical Research of VSC RAS,  
1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia

E-mail: [tasoevbatradz@yandex.ru](mailto:tasoevbatradz@yandex.ru), [tamaeva.va@yandex.ru](mailto:tamaeva.va@yandex.ru)

**Abstract.** The goal of this paper is to describe the extreme points of a convex set of linear positive operators acting from the space of continuous real-valued functions on a compact set to an order-complete vector lattice and mapping the identity unit to some fixed nonzero element. The main tool of our study is the canonical sublinear operator method proposed by S. S. Kutateladze. The idea of this method is that an arbitrary sublinear operator can be represented as the composition of a linear operator and a specific sublinear operator, called the canonical Kutateladze sublinear operator. The extreme points of an arbitrary sublinear operator are the composition of the linear operator and the extreme points of the canonical Kutateladze sublinear operator. Using this fact, we obtained a description of the extreme points of the convex set of positive linear operators under study using lattice homomorphisms, in particular, pure states, which represent a special type of extreme points of the canonical Kutateladze sublinear operator.

**Keywords:** vector lattice, extreme point, lattice homomorphism, quasi-regular measure, sublinear operator.

**AMS Subject Classification:** 46B42, 46B04.

**For citation:** Tamaeva, V. A. and Tasoev, B. B. Extremal Structure of Convex Sets of Linear Operators on the Space of Continuous Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 134–144 (in Russian). DOI: 10.46698/s3306-7592-2603-k.

## References

1. Kutateladze, S. S. Extreme Points of Subdifferentials, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1978, vol. 242, no. 5, pp. 1001–1003 (in Russian).
2. Kutateladze, S. S. The Krein–Mil’man Theorem and Its Inverse, *Siberian Mathematical Journal*, 1980, vol. 21, no. 1, pp. 97–103. DOI: 10.1007/BF00970127.
3. Kutateladze, S. S. Caps and Faces of Sets of Operators, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1985, vol. 280, no. 2, pp. 285–283 (in Russian).
4. Kutateladze, S. S. *Criteria for Subdifferentials that Represent Caps and Faces*, *Siberian Mathematical Journal*, 1986, vol. 27, pp. 417–423. DOI: 10.1007/BF00969278.
5. Kutateladze, S. S. Support Sets for Sublinear Operators, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1977, vol. 17, no. 5, pp. 1428–1431 (in Russian).
6. Tamaeva, V. A. and Tasoev, B. B. A Note on the Representation of Lattice Homomorphisms, *Positivity*, 2024, vol. 28, no. 5. DOI: 10.1007/s11117-024-01095-8.
7. Kusraev, A. G. *Dominated Operators*, Kluwer, Springer, 2000.
8. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. *Positive Operators*, London, Acad. Press Inc., 1985, xx+376 p.
9. Wright, M. Stone-Algebra-Valued Measures and Integrals, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1969, vol. 19, no. 3, pp. 107–122.
10. Kusraev, A. G. and Tasoev, B. B. Kantorovich–Wright Integration and Representation of Vector Lattices, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2017, vol. 455, no. 1, pp. 554–568. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.05.059.
11. Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S. *Subdifferentials: Theory and Applications*, Springer Dordrecht, 2012, ix+405 p. DOI: 10.1007/978-94-011-0265-0.
12. Kusraev, A. G. and Tasoev, B. B. *Boolean Valued Analysis: Selected Topics*, Vladikavkaz, Southern Mathematical Institute VSC RAS and RNO-A, 2014, iv+400 p. DOI: 10.13140/RG.2.1.2164.6486.

Received December 4, 2025

VICTORIA. A. TAMAIEVA

Southern Mathematical Institute of VSC RAS,  
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,  
Junior Researcher;

North-Caucasus Center for Mathematical Research of VSC RAS,  
1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia,  
Junior Researcher

E-mail: [tamaeva.va@yandex](mailto:tamaeva.va@yandex)

<https://orcid.org/0009-0005-2558-6815>

BATRADZ B. TASOEV

Southern Mathematical Institute of VSC RAS,  
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,  
Senior Researcher

E-mail: [tasoevbatradz@yandex.ru](mailto:tasoevbatradz@yandex.ru)

<https://orcid.org/0000-0001-8573-4721>

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

### ПАМЯТИ СЕМЁНА САМСОНОВИЧА КУТАТЕЛАДЗЕ

В период с 14 по 16 октября 2025 г. в дистанционном формате прошла работа научной сессии по функциональному анализу, посвященного памяти выдающегося российского математика, доктора физико-математических наук, профессора Семёна Самсоновича Кутателадзе (02.10.1945 — 15.01.2025). Мероприятие стало четвертым в 2025 г. в рамках проекта OTDE-Workshop — серии научных встреч по теории операторов, дифференциальным уравнениям и их приложениям.

Организаторами выступили Владикавказский научный центр РАН (Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН и Южный математический институт ВНЦ РАН) и Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН (Лаборатория функционального анализа). Научная сессия проводилась при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

В работе сессии приняли участие более 50 человек — ученики, коллеги, соратники, друзья Семёна Самсоновича — из российских городов Бердска, Брянска, Владикавказа, Москвы, Новосибирска, Омска, Ростова-на-Дону, Самары, Санкт-Петербурга, Тулы, Уфы, Хабаровска, Ярославля, а также из Великобритании, Израиля, Ирана, Канады, Китая, США, Узбекистана. В программу мероприятия вошли доклады известных российских и зарубежных специалистов в области функционального анализа.

#### Программа научной сессии по функциональному анализу, посвященного памяти д.ф.-м.н., профессора Семёна Самсоновича Кутателадзе

**Тихомиров В. М.** (Москва) «Слово о С.С. Кутателадзе».

Воспоминания докладчика о дружбе и совместной работе с Семёном Самсоновичем Кутателадзе.

**Кусраев А. Г.** (Владикавказ) «Об одной проблеме Акилова — Кутателадзе».

Ретроспективный рассказ о некоторых идеях, возникших на семинаре Акилова — Кутателадзе в Институте математики им. Соболева в 1970–80-х годах, взаимодействие которых привело к развитию новых направлений в теории операторов: одновременное продолжение операторов, обобщения теоремы Крейна — Мильмана на некомпактные множества операторов, дезинтегрирование в пространствах Канторовича, новые приложения булевозначного анализа.

**Магарил-Ильяев Г. Г.** (Москва) «Метод Ньютона и теория экстремума».

Теорема об обратной функции и теоремы отделимости выпуклых множеств — основные инструменты в теории экстремума. В основе доказательства теоремы об обратной

функции лежит метод Ньютона, а также теорема о правом обратном, которая доказывается с помощью метода Ньютона.

**Назаров А. И.** (Санкт–Петербург) «О монотонности некоторых функционалов с переменным показателем суммируемости при симметризации».

Получены необходимые и достаточные условия для неравенства типа Пойа — Сегё с переменным показателем суммируемости. Доклад основан на совместной работе с С. В. Банкевичем (Bankevich S. V., Nazarov A. I. On monotonicity of some functionals with variable exponent under symmetrization, *Applicable Analysis*, 2018, vol. 98, no. 1–2, pp. 362–373).

**Китовер А. К.** (Филадельфия, США) «Новый подход к теореме Камовица — Шейнберга».

Представлены существенные усиления известной теоремы Камовица — Шейнберга, согласно которой спектр непериодического автоморфизма полупростой коммутативной банаховой алгебры содержит единичную окружность.

**Кудайбергенов К. К.** (Харбин, Китай) «Изометрии ранговой метрики и отображения, сохраняющие определитель».

Представлено описание линейных (или сопряженно-линейных) изометрий относительно ранговой метрики на алгебре Мюррея — фон Неймана, ассоциированной с  $II_1$ -фактором. В качестве приложения получен аналог теоремы Фробениуса для  $II_1$ -факторов, показывающий, что всякая линейная биекция, сохраняющая определитель, между  $II_1$ -факторами обязательно является либо изоморфизмом, либо антиизоморфизмом. Этот результат подтверждает гипотезу Харриса — Кадисона (1996).

**Емельянов Э. Ю.** (Новосибирск) «О семействах полунорм, совместно ограниченных на порядковых интервалах».

Известно, что порядково ограниченные операторы из банаховой решетки в нормированную являются непрерывными. Показано, что всякое совместно ограниченное на порядковых интервалах семейство полунорм на упорядоченном банаховом пространстве с замкнутым порождающим конусом является равномерно ограниченным.

**Гутман А. Е.** (Новосибирск) «Квазиплотные множества, проективные параллелотопы и проективные автоморфизмы».

Предложены новые критерии замкнутости архимедовых конусов в локально выпуклых пространствах. Получены ответы на некоторые открытые вопросы, связанные с понятиями квазивнутренности и квазиплотности.

**Гордон Е. И.** (Чарльстон, США) «Подход к основаниям квантовой механики, основанный на нестандартном анализе».

Предлагаются первые шаги к подходу к основаниям квантовой механики в духе изложения Е. Нельсона теории вероятностей в его знаменитой книге «Радикально элементарная теория вероятностей».

**Веснин А. Ю.** (Новосибирск) «Прямоугольные многогранники в пространстве Лобачевского».

Рассматриваются многогранники конечного объема в трехмерном пространстве Лобачевского. Многогранник называется прямоугольным, если все его двугранные углы равны  $\pi/2$ . Изучение компактных (все вершины конечные) прямоугольных многогранников было начато А. В. Погореловым в 1967 г. В докладе обсуждается, как устроены множество компактных и множество идеальных (все вершины бесконечно удаленные) прямоугольных многогранников. Показано, что наименьшим по объему прямоугольным

многогранником является треугольная бипирамида. Ее объем равен  $G = 0,915965\dots$  — константе Каталана.

**Дятлов В. Н.** (Новосибирск) «Семён Самсонович Кутателадзе в фотографиях».

Представлены некоторые факты биографии Семёна Самсоновича с фотографиями из личного архива докладчика. Фотодокументы фиксируют в мгновениях «незримые интонации» эпохи и уникальность личности, напоминают нам о людях, местах и событиях, которые сделали нашу жизнь особенной.

**Бережной Е. И.** (Ярославль) «Подпространства минимальной гладкости в гладких пространствах».

Рассматриваются вариации известной задачи Мазура из Шотландской книги: существует ли в  $[0, 1]$  бесконечномерное подпространство, каждая функция из которого, кроме тождественного нуля, не имеет производной ни в одной точке.

**Плиев М. А.** (Владикавказ) «О топологической структуре линейной группы банахового пространства».

Обсуждаются результаты, касающиеся гомотопической структуры полной линейной группы различных классов банаховых пространств. Первые работы в этом направлении восходят ко второй половине прошлого столетия. Для классических банаховых пространств ряд глубоких результатов был получен Митягиным в 1970 г. Им же была предложена общая схема исследования, опираясь на которую удалось доказать стягиваемость полной линейной группы некоторых пространств вектор-функций.

\* \* \*

Подводя итоги трехдневной сессии, Анатолий Георгиевич высказал такое суждение:

— Хорошо бы всегда отмечать юбилеи, но встречи, посвященные памяти наших ушедших учителей, коллег и друзей — это также очень важно. «Юбилей — не репетиция пашихиды, а праздник узнавания», — говорил Семён Самсонович. Продолжая эту мысль, скажем, что цель таких мероприятий — передать новым поколениям исследователей научные достижения и человеческие достоинства наших современников, которые, подобно Семёну Самсоновичу, оставили яркий след в отечественной науке.



MATH'S IF

(An Imitation of Rudyard Kipling)

If you can prove ahead when all about you  
Have lost your points and put the blame on you;  
If you can trust your proof when all men doubt you,  
But make allowance for their doubting too:  
If you can prove and not be tired by proving,  
Or, being questioned, don't deal in lies,  
Or, being asked examples, don't be roving,  
And give a few, but don't talk too wise;

If you can claim and prove claims at your lectures;  
If you can count, not making count your aim,  
If you can meet with problems and conjectures  
And treat all kinds of challenge just the same:  
If you can't bear to see the questions you have posed  
Dissolved by knaves to make a trap for fools,  
Or find the problems you adore unclosed  
And start again to solve'em up with novel tools;

If you can mark each of your own papers  
That yield a vicious circle with a cross,  
And start again controlling mental scrapers,  
And never breathe a word about your loss:  
If you can force your mind and nerve and sinew  
To serve your proof long after they are gone,  
And so prove on when there is nothing in you  
Except the Will which says to them: "Prove on!"

If you can talk your Math and keep your virtue,  
Or walk with deans—nor lose the common touch,  
If neither foes nor loving friends can hurt you,  
If all men count with you, but none too much:  
If you can fill the last remaining minute  
With sixty seconds' Q.E.D. to end,  
You're fond of Math and everything that's in it  
And, which is more, Math blesses you, my friend.



*April 1, 2007*

*S. S. Kutateladze*



# ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

## Общие положения

1. Периодическое издание «Владикавказский математический журнал» публикует оригинальные научные статьи отечественных и зарубежных авторов, содержащие новые математические результаты по функциональному и комплексному анализу, алгебре, геометрии, дифференциальным уравнениям и математической физике. По заказу редакционной коллегии журнал также публикует обзорные статьи. Журнал предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре выпуска в год. «Владикавказский математический журнал» публикует статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более 2 усл.п.л. (17 страниц формата А4). Работы, превышающие 2 усл.п.л., принимаются к публикации по специальному решению Редколлегии журнала. Срок рассмотрения статей обычно не превышает 8 месяцев. При подготовке статей для ускорения их рассмотрения и публикации следует соблюдать правила для авторов.

2. К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Результаты иных авторов, использованные в статье, следует должным образом отразить в ссылках. Направляя статью в журнал, авторы тем самым подтверждают, что для нее выполнены указанные требования.

3. Направляя статью в журнал, каждый из авторов подтверждает, что статья соответствует наивысшим стандартам публикационной этики для авторов и соавторов, разработанным COPE (Committee on Publication Ethics), см. <http://publicationethics.org/about>.

4. Все материалы, поступившие для публикации в журнале, подлежат регистрации с указанием даты поступления рукописи в редакцию журнала. Решение о публикации, отказе в публикации или направлении рукописи автору для доработки должно быть принято главным редактором и сообщено автору не позднее 4 месяцев со дня поступления рукописи в редакцию журнала. Подробнее см. в разделе Рецензирование.

5. Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего окончательный макет статьи в формате PDF направляется автору на корректуру.

6. Условием публикации статей, принятых к печати, является подписанием авторами договора о передаче авторских прав. Бланк договора можно скачать по ссылке.

7. Полнотекстовые версии статей, публикуемых в журнале, размещаются в Интернете в свободном доступе на официальном сайте журнала <http://www.vlmj.ru>, а также на сайтах Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка».

8. Статьи журнала реферируются и индексируются в Scopus (Elsevier), zbMATH (Springer), MathSciNet (AMS), Russian Science Citation Index (Web of Science), EBSCO, РЖМат (ВИНИТИ РАН), Math-Net.Ru, РИНЦ (eLibrary.Ru).

9. Публикации в журнале для авторов бесплатны.

## Подготовка и представление рукописи статьи

1. Все материалы предоставляются в редакцию в электронном виде. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая рисунки, таблицы и список литературы, следует пронумеровать.

2. Работа должна быть подготовлена на компьютере в издательской системе LaTeX. Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX, не рассматриваются. Файлы статьи \*.tex и \*.ps (\*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте [rio@smath.ru](mailto:rio@smath.ru).

3. В тексте статьи указывается индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся аннотации на русском и английском языках (объемом не менее 200 слов, достаточную для понимания содержания статьи), даются списки ключевых слов на русском и английском языках, а также коды согласно Mathematics Subjects Classifications (2010). Далее в файле приводятся полностью Фамилия, Имя, Отчество каждого автора, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты и ORCID.

4. Датой поступления статьи считается дата поступления электронной копии статьи на официальный e-mail журнала. Текст электронного сообщения должен быть оформлен как сопроводительное письмо, из текста которого ясно следует, что авторы направляют свою статью во Владикавказский математический журнал. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

5. В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

6. При подготовке файла статьи особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета LaTeX. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела.

7. Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков. Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова «Рис.» с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отформатированной слева надписью «Таблица» с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

8. Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы печатается в конце текста статьи, оформленные в соответствии с правилами издания, на основании требований, предусмотренных действующими ГОСТами. В нем должны быть указаны: для статей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

9. Список литературы полностью дублируется на английском языке, приводится полностью отдельным блоком в конце статьи, повторяя список литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются в списке, готовящемся в романском алфавите. Список References используется международными библиографическими базами (Scopus, WoS и др.) для учета цитирования авторов.

**Примечание:** более подробную информацию можно найти на официальном сайте журнала <http://www.vlmj.ru>.

# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 28

Выпуск 1

Главный редактор А. Г. Кусраев

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций.  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

---

Подписано в печать 26.03.2026. Дата выхода в свет 30.03.2026.  
Формат бумаги А4. Гарн. шрифта Computer modern.  
Усл. п. л. 17,79. Тираж 100 экз. Цена свободная.

---

**Учредитель:**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Федеральный научный центр «Владикавказский научный центр  
Российской академии наук» (ВНЦ РАН)

**Издатель:**

Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ  
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»

**Адрес издателя:**

362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.  
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

Индекс 57380