ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

http://www.vlmj.ru

Том 27, выпуск 1 2025

ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

http://www.vlmj.ru

Volume 27, Issue 1

2025

Адрес редакции: 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1
Телефон: (8672) 23-00-54; E-mail: rio@smath.ru
Зав. редакцией: В. В. КИБИЗОВА

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vlmj.ru**

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций:
свид. ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.;
свид. ЭЛ № ФС77-70171 от 21 июня 2017 г.

Editorial Office: 1 Williams St., Mikhailovskoe 363110,
the Republic of North Ossetia-Alania, Russia
Phone: (8672) 23-00-54; E-mail: `rio@smath.ru`

Managing Editor: VICTORIA V. KIBIZOVA

The journal was founded in 1999. It is published four times a year.
ELECTRONIC VERSION: **www.vlmj.ru**

Registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom,
Information Technologies and Mass Communications:
ПИ № ФС77-70008 dated May 31, 2017; ЭЛ № ФС77-70171 dated June 21, 2017.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 27, выпуск 1 январь–март, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Алмохамед М., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. О кратных нулях одной целой функции, важной для теории обратных задач 5

Гайсин А. М., Гайсин Р. А. Весовой индекс концентрации 21

Emelyanov E. Yu. On Collectively σ-Levi Sets of Operators 36

Иванова О. А., Мелихов С. Н. Пространство голоморфных функций полиномиального роста как локальная алгебра 44

Малютин К. Г. О типе Полиа целой функции 56

Murugusundaramoorthy, G. and Vijaya, K. On a New Class of Meromorphic Functions Associated with Mittag-Leffler Function 70

Мусин И. Х. О пространствах Гельфанда — Шилова типа S 87

Орынбаев П. Р., Тасоев Б. Б. О частично интегральном представлении линейных положительных операторов 101

Хабибуллин Б. Н. Распределения единственности для целых функций с равномерными ограничениями на их рост 112

Шишкин А. Б., Шишкин Б. А. Односторонние теоремы двойственности 127

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

А. В. Абанину — 70 лет 150

Памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе (02.10.1945 — 15.01.2025) 154

Владикавказ
2025

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTER
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 27, issue 1 January–March, 2025

CONTENT

Almohamed, M., Tikhonov and I. V., Sherstyukov, V. B. On Multiple Zeros of One Entire Function which Is of Interest for the Theory of Inverse Problems 5

Gaisin, A. M. and Gaisin, R. A. Weight Index of Concentration 21

Emelyanov, E. Yu. On Collectively σ-Levi Sets of Operators 36

Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N. Space of Holomorphic Functions of Polynomial Growth as Local Algebra 44

Malyutin, K. G. On the Polya Type of an Entire Function 56

Murugusundaramoorthy, G. and Vijaya, K. On a New Class of Meromorphic Functions Associated with Mittag-Leffler Function 70

Musin, I. Kh. On Gelfand–Shilov Spaces of Type S 87

Orinbaev, P. R. and Tasoev, B. B. On Partial Integral Representation of Linear Positive Operators 101

Khabibullin, B. N. Uniqueness Distributions for Entire Functions with Uniform Constraints on Their Growth 112

Shishkin, A. B. and Shishkin, B. A. One-Sided Duality Theorems 127

MATHEMATICAL LIFE

Abanin Alexander Vasil'evich (on his 70's anniversary) 150

In memory of Semën Samsonovich Kutateladze (02.10.1945 — 15.01.2025) 154

Vladikavkaz
2025

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 5–20

УДК 517.53, 517.58
DOI 10.46698/x2987-6171-9353-j

О КРАТНЫХ НУЛЯХ ОДНОЙ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ, ВАЖНОЙ ДЛЯ ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ[#]

М. Алмохамед[1], И. В. Тихонов[2], В. Б. Шерстюков[2]

[1] Московский технический университет связи и информатики,
Россия, Москва, 111024, ул. Авиамоторная, 8 а;
[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, Москва, 119991, Ленинские горы, 1, стр. 52

E-mail: mssrmtz@gmail.com, ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Александру Васильевичу Абанину
с глубоким уважением от авторов

Аннотация. Исследуется характер нулей одной целой функции, возникшей в теории линейных обратных задач для дифференциальных уравнений второго порядка. Функция является трансцендентной, элементарной, нецелого порядка $\rho = 1/2$. Она простым образом зависит от комплексного параметра p. Спрашивается, возможны ли значения p, при которых функция имеет кратные нули? В работе найден полный ответ на поставленный вопрос и показано, что существует счетное множество значений $p = p_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, при каждом из которых изучаемая целая функция помимо бесконечного числа простых нулей имеет в точности один нуль кратности два. Дано описание как самого множества таких значений p_n, так и соответствующих кратных нулей. Итоговый результат выражен в терминах корней трансцендентного уравнения $\operatorname{sh} z = z$, анализу которого посвящен заключительный раздел работы. Здесь анонсированы новые «неасимптотические» оценки, применимые ко всем корням уравнения в области $z \neq 0$ и дающие для этих корней весьма точные зоны локализации. Численные расчеты подтверждают наши аналитические выводы. Имеются полезные связи с теорией распределения нулей целых функций типа Миттаг-Леффлера и с некоторыми спектральными задачами из математической физики.

Ключевые слова: целые функции, гиперболические функции, распределение нулей, кратные нули, трансцендентные уравнения, обратные задачи для дифференциальных уравнений.

AMS Subject Classification: 30C15, 30D20, 33E12.

Образец цитирования: *Алмохамед М., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* О кратных нулях одной целой функции, важной для теории обратных задач // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 5–20. DOI: 10.46698/x2987-6171-9353-j.

1. Постановка задачи и основной результат

Недавно (см. [1]) при изучении одной обратной задачи для дифференциальных уравнений второго порядка возник вопрос о нулях элементарной целой функции

$$H(\zeta, p) = \frac{2}{\sqrt{\zeta}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\zeta}}{2} + p \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\zeta}}{2} \tag{1}$$

[#]Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики, соглашение № 075-15-2022-284.

переменной $\zeta \in \mathbb{C}$ с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Помимо общего исследования нулей требовалось узнать, существуют ли значения $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, при которых функция (1) имеет кратные нули. Несмотря на то, что конструкция (1) выглядит однотипной по p, ситуация с кратными нулями оказалась весьма неординарной. Как выяснилось, практически всегда все нули функции (1) являются простыми, однако существует счетное множество исключительных значений $p = p_n$, при каждом из которых функция $H(\zeta, p_n)$ имеет не только бесконечное число простых нулей, но и в точности один кратный нуль, кратности два (зависящий от выбранного значения p_n).

Подробному описанию выявленной картины и посвящена наша статья. Полученные результаты полезны для приложений: они позволяют строить присоединенные элементарные решения обратных задач по типу присоединенных собственных векторов линейных операторов (см. [2]). Краткое изложение наших исследований представлено в предыдущих заметках [3, 4] (см. также статью [1, с. 901–904]).

Охарактеризуем изучаемую функцию. Сразу отметим, что присутствие «двоек» в записи (1) объясняется не только происхождением самой $H(\zeta, p)$ (см. [1, с. 901–902]), но и последующим удобством для вывода основного результата. При $p = 0$ возникающая функция $H(\zeta, 0) = (2/\sqrt{\zeta}\,)\,\mathrm{sh}(\sqrt{\zeta}/2)$ имеет лишь простые нули $\zeta_k = -4k^2\pi^2$ с нумерацией $k \in \mathbb{N}$. Этот случай не представляет интереса и потому не обсуждается далее.

Для слагаемых в (1) справедливы степенные разложения

$$\frac{2}{\sqrt{\zeta}}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{\zeta}}{2} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!}\,\frac{\zeta}{4} + \frac{1}{5!}\left(\frac{\zeta}{4}\right)^2 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!}\left(\frac{\zeta}{4}\right)^m, \tag{2}$$

$$\mathrm{ch}\,\frac{\sqrt{\zeta}}{2} = 1 + \frac{1}{2!}\,\frac{\zeta}{4} + \frac{1}{4!}\left(\frac{\zeta}{4}\right)^2 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!}\left(\frac{\zeta}{4}\right)^m, \tag{3}$$

сходящиеся при всех $\zeta \in \mathbb{C}$. Отсюда следуют представления

$$\frac{2}{\sqrt{\zeta}}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{\zeta}}{2} = E_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\zeta}{4}, 2\right), \quad \mathrm{ch}\,\frac{\sqrt{\zeta}}{2} = E_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\zeta}{4}, 1\right), \tag{4}$$

$$H(\zeta, p) = E_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\zeta}{4}, 2\right) + pE_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\zeta}{4}, 1\right) \tag{5}$$

с функциями Миттаг-Леффлера $E_{1/2}(\lambda, 2)$ и $E_{1/2}(\lambda, 1)$. Напомним (см. [5, 6]), что семейство *функций Миттаг-Леффлера* переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ с параметрами $\rho > 0$ и $\mu \in \mathbb{C}$ вводится формулой

$$E_\rho(\lambda, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{\Gamma(\rho^{-1}m + \mu)}. \tag{6}$$

Значение $\rho > 0$ совпадает с порядком целой функции $E_\rho(\lambda, \mu)$ (см. [5, с. 117–118]). Так как $a! = \Gamma(a+1)$, то все переходы, связывающие формулы (1)–(6), практически очевидны. Вопрос о наличии кратных нулей для функций семейства (6) особо отмечается в монографии [6, гл. 4, раздел 4.4]. С этой точки зрения наши результаты примыкают к тематике [6], представляя полное описание возникающих возможностей для линейного пучка (5), образованного из функций $E_{1/2}(\zeta/4, 2)$ и $E_{1/2}(\zeta/4, 1)$.

Поскольку обе функции (4), а также составленная из них комбинация (5), имеют нецелый порядок $\rho = 1/2$, то, в согласии с общей теорией (см. [7, с. 38–40]), изучаемая функция (1) при любом значении $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ обладает бесконечным множеством нулей.

Степенное разложение для $H(\zeta, p)$ имеет вид

$$H(\zeta, p) = 1 + p + \left(\frac{1}{3!} + \frac{p}{2!}\right)\frac{\zeta}{4} + \left(\frac{1}{5!} + \frac{p}{4!}\right)\left(\frac{\zeta}{4}\right)^2 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 + (2m+1)p}{(2m+1)!}\left(\frac{\zeta}{4}\right)^m.$$

Отсюда ясно, что нуль $\zeta = 0$ возможен лишь при $p = -1$ и является простым, ибо

$$H(\zeta, -1) = -\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)\frac{\zeta}{4} - \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)\left(\frac{\zeta}{4}\right)^2 - \ldots = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m}{(2m+1)!}\left(\frac{\zeta}{4}\right)^m$$

с ненулевым коэффициентом при первой степени ζ. Поэтому проблему кратных нулей функции (1) исследуем далее на множестве $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

В формулировке основного результата ключевую роль играют корни уравнения

$$\operatorname{sh} z = z. \tag{7}$$

Подробное описание корней дадим в разделе 4 нашей работы. Сейчас отметим только следующие первичные факты.

1) Трансцендентное уравнение (7) имеет очевидный корень $z = 0$ кратности три, т. е. число $z = 0$ есть нуль кратности три для целой функции $\varphi(z) = \operatorname{sh} z - z$. Это число сразу исключим из рассмотрения.

2) Все остальные корни уравнения (7) являются простыми и образуют счетное множество на комплексной плоскости. Данное множество обладает двумя симметриями — относительно начала координат (так как функция $\varphi(z) = \operatorname{sh} z - z$ является нечетной) и относительно вещественной оси (так как функция $\varphi(z) = \operatorname{sh} z - z$ является вещественной). Запишем это множество в виде

$$\pm z_n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad z_{-n} = \overline{z}_n, \tag{8}$$

где основная серия корней $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ расположена в первом координатном угле[1].

3) Делая в (8) отбор половины корней

$$z_n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad z_{-n} = \overline{z}_n, \tag{9}$$

получаем корни уравнения (7), расположенные в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Именно такое множество (9) используем в формулировке следующего основного результата.

Теорема 1. *Рассматриваем функцию $H(\zeta, p)$ вида* (1) *с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Определим счетное множество значений*

$$p_n = -\frac{2}{\operatorname{ch} z_n + 1}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad p_{-n} = \overline{p}_n, \tag{10}$$

где z_n — корни вида (9) *трансцендентного уравнения* (7), *попадающие в правую полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Тогда справедливы утверждения:*

• *при каждом $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, не входящем во множество* (10), *функция $H(\zeta, p)$ имеет только простые нули;*

[1]Элементарно проверяется, что уравнение (7) не имеет корней $z \neq 0$ ни на вещественной, ни на мнимой осях. Поэтому основная серия корней $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ попадает *строго внутрь* первого координатного угла.

• *при* $p = p_n$ *из множества* (10) *функция* $H(\zeta, p_n)$ *помимо бесконечного числа простых нулей имеет ровно один кратный нуль с кратностью два, который находится по формуле*

$$\zeta = z_n^2, \tag{11}$$

с тем же значением z_n, *что и при выборе параметра* $p_n = -2/(\operatorname{ch} z_n + 1)$;

• *при* $n \in \mathbb{N}$ *точки* p_n *из формулы* (10) *попадают в область*

$$-2 < \operatorname{Re} p < 0, \quad 0 < \operatorname{Im} p < 1, \tag{12}$$

причем $p_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Как следствие, ни при каком номере* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *значение* $p_n = -2/(\operatorname{ch} z_n + 1)$ *не может быть вещественным или чисто мнимым.*

Подробному доказательству теоремы 1 посвятим следующий раздел работы.

2. Доказательство основного результата

Итак, для целой функции $H(\zeta, p)$ вида (1) с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ исследуем проблему кратных нулей на множестве $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. В формуле (1) применим замену $\sqrt{\zeta} = z$, эквивалентную подстановке $\zeta = z^2$. Это не повлияет на кратности нужных нулей в согласии со следующим элементарным утверждением.

Лемма 1. *Пусть* $h(\zeta)$ — *целая функция переменной* $\zeta \in \mathbb{C}$, *отличная от тождественной константы, и* $f(z) = h(z^2)$ — *соответствующая целая функция переменной* $z \in \mathbb{C}$. *Число* $z = z_0 \neq 0$ *является нулем кратности* $k \geqslant 1$ *для функции* $f(z)$ *тогда и только тогда, когда число* $\zeta = z_0^2 \neq 0$ *является нулем той же кратности* $k \geqslant 1$ *для функции* $h(\zeta)$. *В частности, все нули из множества*

$$\Lambda_h \setminus \{0\} = \bigl\{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon h(\zeta) = 0\bigr\}$$

являются простыми для функции $h(\zeta)$ *тогда и только тогда, когда все нули из множества* $\Lambda_f \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon f(z) = 0\}$ *являются простыми для функции* $f(z)$. *Наличие одного двукратного нуля в множестве* $\Lambda_h \setminus \{0\}$ *эквивалентно присутствию двух центрально симметричных двукратных нулей в множестве* $\Lambda_f \setminus \{0\}$ *и т. п.*

$\lhd$ Для указанных функций рассматриваем нули из области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ясно, что когда число $z = z_0 \neq 0$ является нулем функции $f(z)$, то $h(z_0^2) = f(z_0) = 0$ и число $\zeta = z_0^2$ является нулем для $h(\zeta)$. Поскольку всякое число $\zeta \neq 0$ представимо в виде $\zeta = z^2$ двумя способами, то каждому нулю $\zeta = \zeta_0 \neq 0$ функции $h(\zeta)$ отвечают два нуля $z = \pm z_0$ функции $f(z)$ таких, что $(\pm z_0)^2 = \zeta_0$.

Обсудим вопрос о совпадении кратностей. Пусть, например, $k \geqslant 1$ — кратность нуля $\zeta = \zeta_0 = (\pm z_0)^2 \neq 0$ функции $h(\zeta)$. Тогда $h(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^k h_1(\zeta)$, где $h_1(\zeta_0) \neq 0$. Соответственно

$$f(z) = h\bigl(z^2\bigr) = \bigl(z^2 - \zeta_0\bigr)^k h_1\bigl(z^2\bigr) = \bigl(z^2 - z_0^2\bigr)^k h_1\bigl(z^2\bigr) = \bigl(z - z_0\bigr)^k \bigl(z + z_0\bigr)^k h_1\bigl(z^2\bigr).$$

Отсюда видно, что оба нуля $z = z_0 \neq 0$ и $z = -z_0 \neq 0$ функции $f(z)$ имеют ту же кратность $k \geqslant 1$, что и нуль $\zeta = \zeta_0$ функции $h(\zeta)$. Последующие добавления про одновременное отсутствие (или наличие) кратных нулей во множествах $\Lambda_f \setminus \{0\}$ и $\Lambda_h \setminus \{0\}$ есть прямое следствие данного факта. Лемма доказана. $\rhd$

Используем намеченную идею. Сделаем подстановку $\zeta = z^2$ в формуле (1). Получим целую функцию

$$F(z, p) \equiv H\bigl(z^2, p\bigr) = \frac{2}{z} \operatorname{sh}\Bigl(\frac{z}{2}\Bigr) + p \operatorname{ch}\Bigl(\frac{z}{2}\Bigr) \tag{13}$$

переменной $z \in \mathbb{C}$ с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Две первые производные

$$F'_z(z,p) = -\frac{2}{z^2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{z}\,\mathrm{ch}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{p}{2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{z}{2}\right),$$

$$F''_{zz}(z,p) = \frac{4}{z^3}\,\mathrm{sh}\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{2}{z^2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2z}\,\mathrm{sh}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{p}{4}\,\mathrm{ch}\left(\frac{z}{2}\right)$$

представимы в виде

$$F'_z(z,p) = -\frac{1}{z}\,F(z,p) + \frac{p+1}{z}\,\mathrm{ch}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{p}{2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{z}{2}\right), \tag{14}$$

$$F''_{zz}(z,p) = \frac{z^2+8}{4z^2}\,F(z,p) - \frac{2(p+1)}{z^2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{z}{2}\right). \tag{15}$$

Для кратных нулей имеем условия $F(z,p) = F'_z(z,p) = 0$. Отсюда по формулам (13), (14) устанавливаем соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{2}{z}\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{z}{2}\right) + p\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{z}{2}\right) = 0, \\ \dfrac{p+1}{z}\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{z}{2}\right) + \dfrac{p}{2}\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{z}{2}\right) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

требующие отдельного анализа.

Рассмотрим (16) как нелинейную систему относительно переменных $z, p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Если такая пара (z,p) удовлетворяет указанной системе, то

$$\mathrm{ch}\left(\frac{z}{2}\right) \neq 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{sh}\left(\frac{z}{2}\right) \neq 0. \tag{17}$$

Действительно, согласно первому из уравнений (16) величины $\mathrm{ch}(z/2)$ и $\mathrm{sh}(z/2)$ могут обращаться в нуль лишь одновременно. Но это исключено[2], т. е. (17) выполнено.

Теперь первое уравнение в системе (16) умножим на $\mathrm{ch}(z/2)$, а второе — на $2\,\mathrm{sh}(z/2)$. С учетом справедливости (17) такое преобразование будет эквивалентным. Воспользуемся гиперболическими тождествами

$$2\,\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,a = \mathrm{sh}\,2a, \quad 2\,\mathrm{ch}^2 a = \mathrm{ch}\,2a + 1, \quad 2\,\mathrm{sh}^2 a = \mathrm{ch}\,2a - 1,$$

и получим соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{1}{z}\,\mathrm{sh}\,z + \dfrac{p}{2}\,(\mathrm{ch}\,z + 1) = 0, \\ \dfrac{p+1}{z}\,\mathrm{sh}\,z + \dfrac{p}{2}\,(\mathrm{ch}\,z - 1) = 0 \end{cases} \sim \quad \begin{cases} \dfrac{1}{z}\,\mathrm{sh}\,z + \dfrac{p}{2}\,(\mathrm{ch}\,z + 1) = 0, \\ \mathrm{sh}\,z = z. \end{cases}$$

Последний эквивалентный переход выполнен путем вычитания из второго уравнения первого с последующим умножением результата на величину z/p, заведомо отличную от нуля. В итоге все сводится к равенствам

$$p = -\frac{2}{\mathrm{ch}\,z + 1}, \quad \mathrm{sh}\,z = z, \tag{18}$$

[2] Если $\mathrm{ch}\,a \equiv (e^a + e^{-a})/2 = 0$ и $\mathrm{sh}\,a \equiv (e^a - e^{-a})/2 = 0$ при некотором $a \in \mathbb{C}$, то $e^a = 0$, что очевидно невозможно.

система которых равносильна системе (16) на множестве $z, p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Пара (z, p) с комплексными ненулевыми компонентами удовлетворяет системе (16) тогда и только тогда, когда та же пара удовлетворяет равенствам (18).

По прежней договоренности множество корней $z \neq 0$ уравнения $\operatorname{sh} z = z$ оформляем в виде (8) с основной серией корней $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, расположенной внутри первого координатного угла. Введенные в (8) обозначения считаем фиксированными.

Как видим, множество $\mathfrak{M}$ искомых решений системы (16) допускает описание:

$$\mathfrak{M} = \big\{(\pm z_n, p_n) \colon n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\big\}, \quad p_n = -\frac{2}{\operatorname{ch} z_n + 1} = -\frac{2}{\operatorname{ch}(-z_n) + 1}. \tag{19}$$

Значение p_n находится по первому из уравнений (18) и будет одинаковым для $z = z_n$ и $z = -z_n$. При каждом таком $p = p_n$ функция $F(z, p_n)$ имеет кратные нули в симметричных точках $z = z_n$ и $z = -z_n$. Покажем, что любое получаемое число p_n вида (19) однозначно соответствует лишь одной паре симметричных корней уравнения $\operatorname{sh} z = z$.

Допустим, что $p_n = p_m$ при некоторых $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Из определения (19) следует, что $\operatorname{ch} z_n = \operatorname{ch} z_m$, и соответственно

$$z_n^2 = \operatorname{sh}^2 z_n = \operatorname{ch}^2 z_n - 1 = \operatorname{ch}^2 z_m - 1 = \operatorname{sh}^2 z_m = z_m^2.$$

Отсюда либо $z_n = z_m$ (и тогда $n = m$), либо $z_n = -z_m$ (и тогда снова $n = m$). В любом из случаев две пары точек $z = \pm z_n$ и $z = \pm z_m$ оказываются совпадающими.

Таким образом, формула (19) дает полное решение проблемы кратных нулей целой функции $F(z, p) \equiv H(z^2, p)$ вида (13). Ответ выражается в терминах корней $\pm z_n$ трансцендентного уравнения (7). Искомые нули возникают лишь при $p = p_n = -2/(\operatorname{ch} z_n + 1)$ с нумерацией $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, причем каждому такому p_n (а все они различны) отвечает единственная пара симметричных кратных нулей $z = \pm z_n$, совпадающих с соответствующими простыми корнями уравнения (7).

Поясним, почему кратность найденных нулей равна в точности двум. Рассмотрим условия

$$F(z, p) = F'_z(z, p) = F''_{zz}(z, p) = 0 \tag{20}$$

для проверки нулей на кратности, большие чем два. Ограничения $z, p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ сохраняем, исходя из логики задачи. На основании (20) и с учетом представления (15) добавим к прежней системе (16) третье соотношение

$$-\frac{2(p+1)}{z^2} \operatorname{ch}\Big(\frac{z}{2}\Big) = 0. \tag{21}$$

Используя (21) во втором уравнении системы (16), получаем, что $\operatorname{sh}(z/2) = 0$. Затем из первого уравнения той же системы выводим, что $\operatorname{ch}(z/2) = 0$. Как уже отмечалось, такая комбинация равенств невозможна. Поэтому условия (20) не могут выполняться ни при каком $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ни в одной точке $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Нулей кратности больше чем два быть не может.

Итак, вопрос с кратными нулями функции $F(z, p) \equiv H(z^2, p)$ окончательно прояснен. Вернемся теперь к исходной функции $H(\zeta, p)$ с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Напомним, что нуль $\zeta = 0$ возникает лишь при $p = -1$ и является простым, т. е. для нас не интересным. Для описания кратных нулей на множестве $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ воспользуемся леммой 1 и той информацией о нулях функции $F(z, p)$, что заложена в формулу (19).

Как итог, получаем полную картину для кратных нулей функции $H(\zeta, p)$ на основе формул (10), (11) из теоремы 1 с тем пояснением, что среди пары корней $z = \pm z_n$ уравнения (7) достаточно брать корень $z = z_n$, расположенный в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$

(поскольку симметричный корень $z = -z_n$ из полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ приводит к тому же результату в формулах (10), (11)). В этом смысле имеем полное согласование теоремы 1 с леммой 1 и формулой (19) для множества значений (z, p), связанных с кратными нулями функции $F(z, p)$.

Осталось доказать завершающую часть теоремы 1 про локализацию точек p_n, находимых по формуле (10). Ввиду соотношения $p_{-n} = \overline{p}_n$ ограничимся индексами $n \in \mathbb{N}$.

Преобразуем формулу (10). Воспользуемся тождеством $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ для перехода

$$\operatorname{ch} z_n = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 z_n} = \sqrt{1 + z_n^2}\,, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

сделанного на основной серии корней $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ уравнения (7), расположенной в первом координатном угле. В формуле (22) надо брать главную ветвь радикала, отображающую верхнюю полуплоскость в первый координатный угол. Это связано с тем, что подкоренные значения $1 + z_n^2$ при $n \in \mathbb{N}$ очевидно попадают в верхнюю полуплоскость, а числа $\operatorname{ch} z_n$ будут, как раз, в первом координатном угле.

Последнее, кстати, не вполне очевидно и объясняется следующими соображениями. Для $z_n = x_n + iy_n$ при $n \in \mathbb{N}$ запишем стандартные представления

$$\operatorname{ch} z_n = \operatorname{ch} x_n \cos y_n + i \operatorname{sh} x_n \sin y_n, \quad \operatorname{sh} z_n = \operatorname{sh} x_n \cos y_n + i \operatorname{ch} x_n \sin y_n.$$

По условию значения z_n и равные им значения $\operatorname{sh} z_n$ находятся в первом координатном угле. Тем самым

$$x_n > 0, \quad y_n > 0, \quad \operatorname{sh} x_n \cos y_n > 0, \quad \operatorname{ch} x_n \sin y_n > 0. \tag{23}$$

Имеем соотношения $\operatorname{sh} x_n > 0$ (так как $x_n > 0$) и $\operatorname{ch} x_n > 0$ (это, вообще, всегда). Отсюда затем выводим, что $\cos y_n > 0$ и $\sin y_n > 0$ (см. формулу (23)). Но тогда и каждое значение $\operatorname{ch} z_n$ (где $\operatorname{ch} x_n \cos y_n > 0$ и $\operatorname{sh} x_n \sin y_n > 0$) тоже попадает в первый координатный угол, и выбор главной ветви для радикала в (22) обоснован.

Добившись однозначного понимания формулы (22), используем ее в основном соотношении (10) и запишем

$$p_n \equiv -\frac{2}{\operatorname{ch} z_n + 1} = -\frac{2}{\sqrt{1 + z_n^2} + 1} \tag{24}$$

с указанной главной ветвью радикала при всех номерах $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим соответствие (24) как действие на точку z_n конформного отображения

$$p = -\frac{2}{\sqrt{1 + z^2} + 1}\,, \tag{25}$$

определенного в первом координатном угле $\mathbb{C}_{++} \equiv \{z = x + iy : x > 0,\, y > 0\}$. При этом отображение z^2 переводит $\mathbb{C}_{++}$ в верхнюю полуплоскость; затем $1 + z^2$ дает ту же полуплоскость, сдвинутую на единицу вправо, и $\sqrt{1 + z^2}$ возвращает ситуацию в первый координатный угол. Следующий шаг $\sqrt{1 + z^2} + 1$ переводит угол $\mathbb{C}_{++}$ в аналогичный угол $1 + \mathbb{C}_{++}$, сдвинутый на единицу вправо.

Обозначим переменную в возникшем сдвинутом угле через λ и применим к множеству $1 + \mathbb{C}_{++}$ отображение $w \equiv u + iv = 1/\lambda = \overline{\lambda}/|\lambda|^2$. Учитывая свойства указанной дробно линейной функции, получим из $1 + \mathbb{C}_{++}$ круговую лунку в четвертом координатном угле, примыкающую к отрезку $0 \leqslant u \leqslant 1$, $v = 0$, и ограниченную снизу линией[3]

$$v = -\sqrt{u(1-u)}, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1. \tag{26}$$

Минимум в выражении (26) приходится на точку $u = 1/2$, $v = -1/2$, т. е. полученная лунка (открытый полукруг) заключена в прямоугольнике

$$0 < \operatorname{Re} w < 1, \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Im} w < 0. \tag{27}$$

Остается подействовать на (27) заключительным преобразованием $p = -2w$, дающим прямоугольник (12) на плоскости $p \in \mathbb{C}$ (тот, что был указан в теореме 1). Этот прямоугольник (12) содержит в себе образ угла $\mathbb{C}_{++}$ под действием отображения (25). Туда и попадают значения (24) с точками $z_n \in \mathbb{C}_{++}$, взятыми при $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, наконец, что $z_n \to \infty$ при $n \to +\infty$ (как бесконечная серия корней уравнения (7), совпадающих с нулями целой функции $\varphi(z) = \operatorname{sh} z - z$). Но тогда по формуле (24) заключаем, что $p_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Теорема 1 полностью доказана.

3. Дополнения и комментарии

Значения p_{-n} с отрицательными номерами $(-n) \in \mathbb{Z}_- \equiv (-\mathbb{N})$ не требуют отдельных обсуждений. Достаточно напомнить связь $p_{-n} = \overline{p}_n$, элементарно проверяемую по определению (10). При проверке учитывается, что значения функции $\operatorname{ch} z$ в комплексно сопряженных точках z_n и $z_{-n} = \overline{z}_n$ будут комплексно сопряжены.

Отсюда заключаем, что *все* значения p_n из формулы (10) попадают в квадрат

$$-2 < \operatorname{Re} p < 0, \quad -1 < \operatorname{Im} p < 1, \tag{28}$$

при положительных номерах — в верхнюю половину $0 < \operatorname{Im} p < 1$ (см. (12)), а при отрицательных номерах — в нижнюю половину $-1 < \operatorname{Im} p < 0$ (так как $p_{-n} = \overline{p}_n$).

Квадрат (28) дает самую общую оценку для найденных значений (10), и область локализации чисел p_n можно дополнительно уточнить. Так, не меняя схемы наших рассуждений, но применяя в конце доказательства теоремы 1 преобразование $p = -2w$ не к самому прямоугольнику (27), а к найденной круговой лунке в этом прямоугольнике (и учитывая симметрию значений p_n и $p_{-n} = \overline{p}_n$), получим на плоскости $p \in \mathbb{C}$ заведомо более точное множество — открытый круг

$$|p+1| < 1, \tag{29}$$

вписанный в квадрат (28). Именно здесь, в круге (29) (за вычетом отрезка вещественной оси), локализуются все значения p_n из формулы (10).

Численные расчеты конкретизируют наши аналитические выводы. На рисунках ниже представлены результаты компьютерного моделирования первых ста шестидесяти корней z_n из множества (9) (см. рис. 1) и отвечающих им значений p_n из множества (10) (см. рис. 2). В подписях под рисунками даны развернутые комментарии. Обратим внимание, в частности, что согласно рис. 2 зона локализации значений p_n может быть уменьшена до прямоугольника $-0.12 < \operatorname{Re} p < 0$, $-0.25 < \operatorname{Im} p < 0.25$.

[3] Вертикальная граница сдвинутого угла $1 + \mathbb{C}_{++}$ под действием отображения $w \equiv u + iv = 1/\lambda$ перейдет в кривую с параметрическим уравнением $u = 1/(1+t^2)$, $v = -t/(1+t^2)$, где $0 \leqslant t < +\infty$. Исключая отсюда параметр t, получаем явное уравнение (26), соответствующее нижней дуге окружности $(u-1/2)^2 + v^2 = 1/4$.

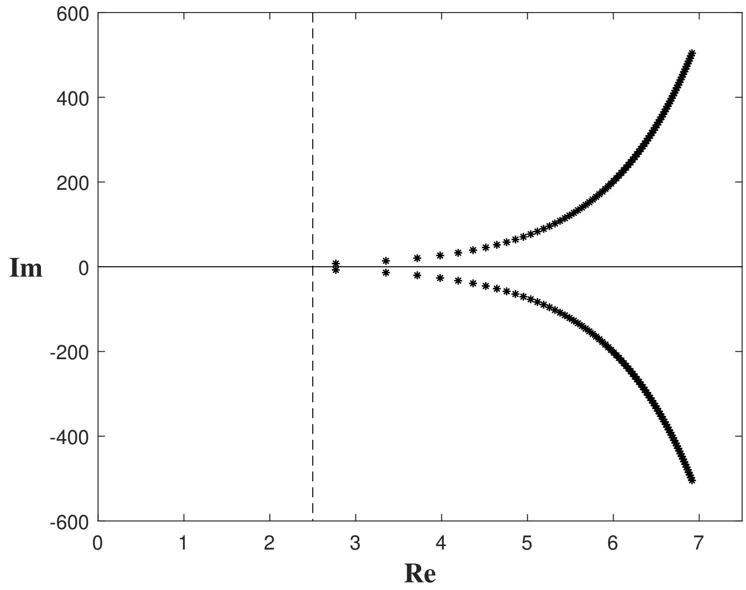

Рис. 1. Результат компьютерного расчета первых ста шестидесяти корней уравнения (7), входящих в множество (9). Взяты номера $n \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant |n| \leqslant 80$. Видно, что корни z_n попадают в правую полуплоскость $\operatorname{Re} z > 2.5$ и асимптотически выстраиваются вдоль двух экспоненциальных кривых. Еще более точная граница $\operatorname{Re} z > 2.7541$, получаемая аналитическим путем, указана в теореме 3 ниже.

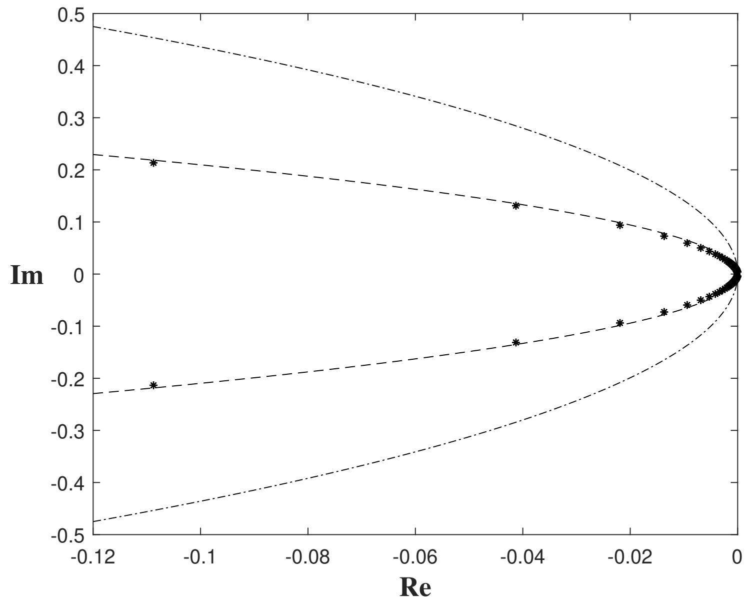

Рис. 2. Результат компьютерного расчета первых ста шестидесяти значений p_n, определяемых по формуле (10). Взяты номера $n \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant |n| \leqslant 80$. Видно, что квадрат (28) дает верную, но все же завышенную оценку на расположение значений p_n при $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Фактически эти значения попадают в меньший прямоугольник $-0.12 < \operatorname{Re} p < 0$, $-0.25 < \operatorname{Im} p < 0.25$. Указанные границы можно еще уточнить, учитывая, что $p_{\pm 1} \approx -0.10876 \pm 0.21344i$. Светлый штрих-пунктир совпадает с дугой окружности $(x+1)^2 + y^2 = 1$, ограничивающей круг локализации (29). Светлый пунктир соответствует экспериментально подобранной дуге эллипса $(x+4.5)^2 + (4.5y)^2 = (4.5)^2$, вблизи которой группируются все найденные значения p_n. Возникающие искажения кривых вызваны различием в масштабах по осям абсцисс и ординат.

Отметим также, что полученные результаты переносятся с функции (1) на родственную целую функцию

$$D(\lambda, p) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh}\sqrt{\lambda} + p \operatorname{ch}\sqrt{\lambda} = E_{\frac{1}{2}}(\lambda, 2) + pE_{\frac{1}{2}}(\lambda, 1) \tag{30}$$

переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (сравни выражение (30) с формулами (1) и (5)). Имеют место соответствия

$$H(\zeta, p) = D\left(\frac{\zeta}{4}, p\right), \quad D(\lambda, p) = H(4\lambda, p).$$

Отсюда понятно, что нули функции $D(\lambda, p)$ при фиксированном $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ получаются из нулей функции $H(\zeta, p)$ путем деления на 4 с сохранением всех соответствущих кратностей. Тем самым, кратные нули у функции (30) возможны лишь при выборе параметра p среди прежних числовых значений (10). Точнее, при любом таком $p = p_n$ функция $D(\lambda, p_n)$ помимо бесконечного числа простых нулей имеет ровно один кратный нуль с кратностью два. Указанный кратный нуль находится по формуле

$$\lambda = \frac{z_n^2}{4} = \left(\frac{z_n}{2}\right)^2 \tag{31}$$

с тем же значением $z_n \neq 0$, что и при выборе параметра $p_n = -2/(\operatorname{ch} z_n + 1)$ (сравни (31) с формулой (11) из теоремы 1). Числа $z = z_n/2$, входящие в запись (31), совпадают с корнями $z \neq 0$ трансцендентного уравнения

$$\operatorname{sh}(2z) = 2z. \tag{32}$$

Вариант (32) неизбежно возникает при исследовании функции (30) на кратные нули по схеме из предыдущего раздела 2. В связи с таким «искажением» базового уравнения (7) первоначальная функция (1) оказывается «более удобной» по сравнению с функцией (30).

Осталось обсудить вопрос о точном расположении корней уравнения (7), т. е. уравнения $\operatorname{sh} z = z$. Материал следующего раздела (подготовленного по мотивам нашей предварительной публикации [4]) связан с классической проблематикой анализа и может быть полезен для математической физики.

4. О корнях нужного трансцендентного уравнения

В 1902 г. опубликована работа Харди [8], посвященная корням уравнения

$$\sin z = z \tag{33}$$

на множестве $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Там же, в [8], введено обобщенное уравнение

$$\sin z = az \tag{34}$$

с параметром $a \neq 0$. Публикация Харди сыграла заметную роль и была использована многими авторами. На созданной теоретической основе проводились дальнейшие исследования по численному анализу корней трансцендентных уравнений (33), (34), их обобщений и аналогов (см. [9–14]).

Отметим, что подобные уравнения встречаются в математической физике при рассмотрении некоторых спектральных задач из механики сплошной среды и теории наноструктур (см. [15–19]), а также используются как важный иллюстративный материал в теории целых функций (см. [20, с. 64–68]).

Наряду с «тригонометрической» версией (33) естественно изучать соответствующий «гиперболический» аналог (7), т. е. уравнение $\operatorname{sh} z = z$. Вариант (33) получается из (7) при замене z на iz. Следовательно, множества корней этих уравнений связаны поворотом на угол $\pi/2$ в плоскости $\mathbb{C}$. Из-за наличия наглядных симметрий в обоих множествах корней возможен ряд других ортогональных преобразований, приводящих корни уравнения (7) к корням уравнения (33). По понятным причинам продолжим обсуждать именно уравнение (7), рассматривая его на области $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Как уже отмечалось, интересующие нас корни уравнения (7) представимы в виде (8) с основной бесконечной серией

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots, \tag{35}$$

расположенной внутри первого координатного угла. Корни (35) являются простыми и упорядочены по возрастанию модулей. Достаточно дать как можно более точное описание именно этой серии (35), так как все прочие корни $z \neq 0$ выражаются потом самым элементарным образом (см. формулу (8)). Непосредственно проверяется, что аналогичная основная серия корней уравнения (33) (расположенная в первом координатном угле) получается из (35) путем замены значений $x_n + iy_n$ на $y_n + ix_n$.

При анализе уравнения (7) полезно учитывать связь

$$\frac{\operatorname{sh} z - z}{z^3} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m+3)!} = E_{\frac{1}{2}}\big(z^2, 4\big) \tag{36}$$

с соответствующей функцией типа Миттаг-Леффлера. Тем самым, к исследованию множества (35) можно привлекать общие результаты монографии [6]. Например, из указанной там теоремы 4.3.1 следует, что основная серия корней (35) локализуется в правой полуплоскости

$$\operatorname{Re} z > \sqrt{2} + \ln\big(\sqrt{2}+1\big) = 2.2955\ldots \tag{37}$$

Затем, применяя теорему 2.1.1, после несложных вычислений получим для основной серии (35) следующую асимптотическую формулу

$$z_n = \ln(4n\pi) + \frac{1}{4n} + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\ln(4n\pi)}{2n\pi}\right) + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right), \quad n \to \infty. \tag{38}$$

Формула (38) согласуется с результатом [20, с. 67] (если переделать ответ из книги [20] на уравнение (7) вместо разобранного там уравнения (33)).

Для подобных корней имеется другой, близкий шаблон асимптотики из работы [16] (см. также [8]), откуда извлекается приближенная формула:

$$z_n = \ln((4n+1)\pi) + \delta_n + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{2\ln((4n+1)\pi)}{(4n+1)\pi} + \varepsilon_n\right) \tag{39}$$

при $n \in \mathbb{N}$ со значениями $\delta_n, \varepsilon_n \in \mathbb{R}$ такими, что $\delta_n \to 0$ и $\varepsilon_n \to 0$, когда $n \to \infty$. На первый взгляд, вариант (38) кажется проще и даже чуть сильнее, но именно представление (39) позволяет вывести следующий по-настоящему точный результат.

Теорема 2. *В формуле* (39) *для основной серии корней* (35) *уравнения* (7) *при всех номерах* $n \in \mathbb{N}$ *действуют оценки*

$$0 < \delta_n < \frac{2\ln^2((4n+1)\pi)}{(4n+1)^2\pi^2}, \quad |\varepsilon_n| < \frac{4\ln^3((4n+1)\pi)}{(4n+1)^3\pi^3}. \tag{40}$$

Указанное сочетание формулы (39) с оценками (40) для погрешностей $\delta_n, \varepsilon_n \in \mathbb{R}$ дает весьма полное представление о поведении корней уравнения (7). Как видим, итоговый ответ получается *неасимптотическим*, применимым при всех номерах $n \in \mathbb{N}$. Отметим еще один неасимптотический результат несколько иного характера.

Теорема 3. *Для уравнения* (7) *рассматриваем основную серию корней* (35) *в первом координатном угле* $\mathbb{C}_{++} \equiv \{z = x + iy : x > 0,\ y > 0\}$. *Тогда справедливы утверждения:*

- *все корни* (35) *находятся на кривой* $\gamma \subset \mathbb{C}_{++}$ *с уравнением*

$$y = \operatorname{ch} x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 x}}\,; \tag{41}$$

- *корень* z_n *при фиксированном* $n \in \mathbb{N}$ *попадает в область*

$$\operatorname{ch} x - 1 < y < \operatorname{ch} x, \quad 2n\pi + \frac{\pi}{3} < y < 2n\pi + \frac{\pi}{2}\,; \tag{42}$$

- *все корни* (35) *расположены в полуплоскости*

$$\operatorname{Re} z > \ln 5\pi = 2.7541\ldots, \tag{43}$$

что точнее прежней оценки (37).

Доказательства теорем 2 и 3 достаточно объемны и не укладываются в формат настоящей статьи. Один из авторов (В. Б. Шерстюков) планирует подробно обосновать эти результаты в отдельной публикации. Сейчас же обсудим лишь несколько технических моментов.

1) Ключевую роль в проводимых рассуждениях играет анализ системы

$$\begin{cases} \operatorname{sh} x \cos y = x, \\ \operatorname{ch} x \sin y = y, \end{cases} \tag{44}$$

к которой сводится «гиперболическое» уравнение $\operatorname{sh} z = z$ переменной $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Элементарные системы, подобные (44), типичны для данного круга задач (см., например, основополагающую работу [8]).

2) Из формулы (41) следует, в частности, что $y_n = (1/2)\exp(x_n)(1 + o(1))$ для изучаемых корней $z_n = x_n + iy_n$ при $n \to +\infty$. Это означает, что корни на рис. 1 асимптотически выстраиваются вблизи экспоненциальных кривых $y = \pm(1/2)\exp x$ с очевидным распределением знаков при $n \in \mathbb{N}$ и $n \in (-\mathbb{N})$.

3) Оценка (43) согласована с формулой (39), где $\delta_n > 0$ при $n \in \mathbb{N}$ (как сказано в теореме 2). Такой результат, находимый аналитическим путем, оказывается весьма точным, и численные расчеты дают приближенное значение $z_1 \approx 2.7687 + 7.4977i$, очень близкое к границе из формулы (43).

4) Для применения нашей основной теоремы 1 важны не только сами корни $z = z_n$, но и их квадраты $\zeta = z_n^2$, каждый из которых, согласно формуле (11), дает кратный нуль функции $H(\zeta, p_n)$ при соответствующем значении $p = p_n$. Учитывая информацию, заложенную в формулу (42), устанавливаем следующий полезный результат.

Теорема 4. *При $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ для корней $z = z_n$ уравнения (7), расположенных в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, значения $\zeta = z_n^2$ находятся в угле*

$$\frac{2\pi}{3} < \arg \zeta < \frac{4\pi}{3} \tag{45}$$

и, как следствие, в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta < 0$, не попадая при этом на луч $\arg \zeta = \pi$.

$\lhd$ Пусть $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем корень $z_n = x_n + iy_n$, взятый из основной серии (35). Тогда $x_n > 0$, $y_n > 0$, и в силу (44) имеем соотношения

$$x_n = \operatorname{sh} x_n \cos y_n, \quad y_n = \operatorname{ch} x_n \sin y_n.$$

Соответственно

$$\operatorname{tg}(\arg z_n) = \frac{y_n}{x_n} = \operatorname{cth} x_n \operatorname{tg} y_n > \operatorname{tg} y_n,$$

так как $\operatorname{cth} x > 1$ при всех $x > 0$. Но $\operatorname{tg} y_n > \operatorname{tg}(\pi/3)$ согласно последнему двойному неравенству из (42). Следовательно, $\operatorname{tg}(\arg z_n) > \operatorname{tg}(\pi/3)$ и $\pi/3 < \arg z_n < \pi/2$. Отсюда выводим, что $2\pi/3 < \arg z_n^2 < \pi$. Поскольку $z_{-n} = \overline{z}_n$, то для числа z_{-n}^2 получаем оценку $\pi < \arg z_{-n}^2 < 4\pi/3$. Ввиду произвольности номера $n \in \mathbb{N}$ приходим к утверждению теоремы 4. $\rhd$

Оценка (45) на величины $\zeta = z_n^2$ может быть полезна при изучении присоединенных решений в обратных задачах для дифференциальных уравнений второго порядка (см. [2]).

Приятно отметить, что наши исследования на стыке анализа и неклассических задач математической физики находили неизменную поддержку Александра Васильевича Абанина, одного из лидеров ростовской математической школы, известного профессора и многолетнего заведующего кафедрой Ростовского государственного университета (ныне Южного федерального университета). Нам памятны многие содержательные выступления Александра Васильевича на крупных математических форумах, а также некоторые собственные доклады при его доброжелательном внимании. Надеемся на продолжение традиций и дальнейшее научное взаимодействие.

Литература

1. *Тихонов И. В., Алмохамед М.* Обратная задача с переопределением третьего рода для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Диф. уравнения.—2022.—Т. 58, № 7.—С. 890–911. DOI: 10.31857/S0374064122070032.
2. *Алмохамед М., Тихонов И. В.* Примеры присоединенных решений в линейных обратных задачах // Челябинский физ.-мат. журн.—2022.—Т. 7, № 4. —С. 395–411. DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17401.
3. *Алмохамед М., Тихонов И. В.* О некоторых спектральных исследованиях, связанных с теорией обратных задач // Современные проблемы теории функций и их приложения: матер. 21-й междунар. Саратов. зимней шк.—Саратов: СГУ, 2022.—С. 20–26.
4. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Алмохамед М.* О некоторых трансцендентных уравнениях, важных для математической физики // Современные проблемы теории функций и их приложения: матер. 21-й междунар. Саратов. зимней шк.—Саратов: СГУ, 2022.—С. 294–299.
5. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.—М.: Наука, 1966.—672 с.
6. *Попов А. Ю., Седлецкий А. М.* Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Соврем. математика. Фундам. направления.—2011.—Т. 40.—С. 3–171.
7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: ГИТТЛ, 1956.—632 с.
8. *Hardy G. H.* On the zeroes of the integral function $x - \sin x = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} x^{2n+1}/(2n+1)!$ // The Messenger of Mathematics.—1902.—Vol. 31, № 11.—P. 161–165.
9. *Hillman A. P., Salzer H. E.* Roots of $\sin z = z$ // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Ser. 7.—1943.—Vol. 34, № 235.—P. 575. DOI: 10.1080/14786444308521415.

10. *Robbins C. I., Smith R. C. T.* A table of roots of $\sin z = -z$ // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Ser. 7.—1948.—Vol. 39, № 299.—P. 1004–1005. DOI: 10.1080/14786444808521711.
11. *Burniston E. E., Siewert C. E.* Exact analytical solutions of the transcendental equation $\alpha \sin \zeta = \zeta$ // SIAM J. Appl. Math.—1973.—Vol. 24, № 4.—P. 460–466. DOI: 10.1137/0124048.
12. *Fettis H. E.* Complex roots of $\sin z = az$, $\cos z = az$, $\cosh z = az$ // Math. Comp.—1976.—Vol. 30, № 135.—P. 541–545. DOI: 10.1090/S0025-5718-1976-0418401-9.
13. *Misici L.* Numerical solutions of two transcendental equations // Math. Comp.—1984.—Vol. 42, № 166.—P. 589–595. DOI: 10.1090/S0025-5718-1984-0736454-X.
14. *Hansen E. B.* Root structure and numerical solution of the equation $\sin z = cz$ // Appl. Math. Let.—1997.—Vol. 10, № 2.—P. 33–38. DOI: 10.1016/S0893-9659(97)00007-4.
15. *Fadle J.* Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe // Ingenieur-Archiv (Archive of Applied Mechanics).—1940.—Vol. 11.—P. 125–149. DOI: 10.1007/BF02084699.
16. *Buchwald V. T.* Eigenfunctions of plane elastostatics. I. The strip // Proc. Royal Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci.—1964.—Vol. 277, № 1370.—P. 385–400. DOI: 10.1098/rspa.1964.0029.
17. *Joseph D. D.* The convergence of biorthogonal series for biharmonic and Stokes flow edge problems. Part I // SIAM J. Appl. Math.—1977.—Vol. 33, №. 2.—P. 337–347. DOI: 10.1137/0133021.
18. *Katopodes F. V., Davis A. M. J., Stone H. A.* Piston flow in a two-dimensional channel // Physics of Fluids.—2000.—Vol. 12, № 5.—P. 1240–1243. DOI: 10.1063/1.870373.
19. *Barsan V.* Algebraic approximations for transcendental equations with applications in nanophysics // Philosophical Magazine.—2015.—Vol. 95, № 27.—P. 3023–3038. DOI: 10.1080/14786435.2015.1081425.
20. *Маркушевич А. И.* Целые функции. Элементарный очерк. Изд. 2-е.—М.: Наука, 1975.—120 с.

Статья поступила 6 ноября 2024 г.

Алмохамед Муатаз
Московский технический университет связи и информатики,
старший преподаватель
РОССИЯ, Москва, 111024, ул. Авиамоторная, 8 а
E-mail: mssrmtz@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-7611-8369

Тихонов Иван Владимирович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
профессор
РОССИЯ, Москва, 119991, Ленинские горы, 1, стр. 52
E-mail: ivtikh@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-5949-3573

Шерстюков Владимир Борисович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
профессор
РОССИЯ, Москва, 119991, Ленинские горы, 1, стр. 52
E-mail: shervb73@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4679-0680

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 5–20

ON MULTIPLE ZEROS OF ONE ENTIRE FUNCTION WHICH IS OF INTEREST FOR THE THEORY OF INVERSE PROBLEMS

Almohamed, M.[1], Tikhonov, I. V.[2] and Sherstyukov, V. B.[2]

[1] Moscow Technical University of Communications and Informatics,
8 a Aviamotornaya St., 111024 Moscow, Russia;
[2] Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia

E-mail: mssrmtz@gmail.com, ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Abstract. We consider complex zeros of one entire function from the theory of linear inverse problems for second-order differential equations. This function of order $\rho = 1/2$ is elementary, transcendental, and depends in a simple way on a complex parameter $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. It is required to find out whether there are values of p for which the function has multiple zeros. The question posed has been fully answered. It is shown that there exists a countable set of values $p = p_n$, for each of which the entire function has not only an infinite number of simple zeros, but also one zero of multiplicity two. A description is given of both the set of such values p_n and the corresponding multiple zeros. Our main result is expressed in terms of roots of the transcendental equation $\operatorname{sh} z = z$, the analysis of which is the subject of the final section of the paper. Here we announce new non-asymptotic estimates, applicable to all roots of the equation in the domain $z \neq 0$ and giving very precise localization for them. Numerical calculations confirm our analytical conclusions. There are useful connections with the theory of Mittag-Leffler functions and some spectral problems from mathematical physics.

Keywords: entire functions, hyperbolic functions, distribution of zeros, multiple zeros, transcendental equations, inverse problems for differential equations.

AMS Subject Classification: 30C15, 30D20, 33E12.

For citation: *Almohamed, M., Tikhonov, I. V. and Sherstyukov, V. B.* On Multiple Zeros of One Entire Function which Is of Interest for the Theory of Inverse Problems, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 5–20 (in Russian). DOI: 10.46698/x2987-6171-9353-j.

References

1. *Tikhonov, I. V. and Almohamed, M.* Inverse Problem with Overdetermination of the Third Kind for an Abstract Second-Order Differential Equation, *Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 7, pp. 877–898. DOI: 10.1134/S0012266122070035.
2. *Almohamed, M. and Tikhonov, I. V.* Examples of Generalized Elementary Solutions in Linear Inverse Problems, *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2022, vol. 7, no. 4, pp. 395–411 (in Russian). DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17401.
3. *Almohamed, M. and Tikhonov, I. V.* On Some Spectral Studies Related to Inverse Problem Theory, *Sovremennye Problemy Teorii Funktsiy i Ikh Prilozheniya: Materialy 21-y Mezhdunarodnoy Saratovskoy Zimney Shkoly*, 2022, pp. 20–26 (in Russian).
4. *Tikhonov, I. V., Sherstyukov, V. B. and Almohamed, M.* On Some Tanscendental Equations that Matter for Mathematical Physics, *Sovremennye Problemy Teorii Funktsiy i Ikh Prilozheniya: Materialy 21-y Mezhdunarodnoy Saratovskoy Zimney Shkoly*, 2022, pp. 294–299 (in Russian).
5. *Dzhrbashyan, M. M. Integralnyye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v komleksnoy oblasti* [Integral Transforms and Representations of Functions in Complex Domain], Moscow, Nauka, 1966, 672 p. (in Russian).
6. *Popov, A. Yu. and Sedletskii, A. M.* Distribution of Roots of Mittag-Leffler Functions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 190, no. 2, pp. 209–409. DOI: 10.1007/s10958-013-1255-3.
7. *Levin, B. Ja. Distribution of Zeros of Entire Functions,* Revised Edition, vol. 5, American Mathematical Society, 1980, xii+523 p.
8. *Hardy, G. H.* On the Zeroes of the Integral Function $x - \sin x = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} x^{2n+1}/(2n+1)!$, *The Messenger of Mathematics*, 1902, vol. 31, no. 11, pp. 161–165.

9. *Hillman, A. P. and Salzer, H. E.* Roots of $\sin z = z$, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Series 7, 1943, vol. 34, no. 235, p. 575. DOI: 10.1080/14786444308521415.
10. *Robbins, C. I. and Smith, R. C. T.* A Table of Roots of $\sin z = -z$, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Series 7, 1948, vol. 39, no. 299, pp. 1004–1005. DOI: 10.1080/14786444808521711.
11. *Burniston, E. E. and Siewert, C. E.* Exact Analytical Solutions of the Transcendental Equation $\alpha \sin \zeta = \zeta$, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1973, vol. 24, no. 4, pp. 460–466. DOI: 10.1137/0124048.
12. *Fettis, H. E.* Complex roots of $\sin z = az$, $\cos z = az$, $\cosh z = az$, *Mathematics of Computation*, 1976, vol. 30, no. 135, pp. 541–545. DOI: 10.1090/S0025-5718-1976-0418401-9.
13. *Misici, L.* Numerical Solutions of Two Transcendental Equations, *Mathematics of Computation*, 1984, vol. 42, no. 166, pp. 589–595. DOI: 10.1090/S0025-5718-1984-0736454-X.
14. *Hansen, E. B.* Root Structure and Numerical Solution of the Equation $\sin z = cz$, *Applied Mathematics Letters*, 1997, vol. 10, no. 2, pp. 33–38. DOI: 10.1016/S0893-9659(97)00007-4.
15. *Fadle, J.* Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der Quadratischen Scheibe, *Ingenieur-Archiv* (*Archive of Applied Mechanics*), 1940, vol. 11, pp. 125–149. DOI: 10.1007/BF02084699.
16. *Buchwald, V. T.* Eigenfunctions of Plane Elastostatics. I. The strip, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 1964, vol. 277, pp. 385–400. DOI: 10.1098/rspa.1964.0029.
17. *Joseph, D. D.* The Convergence of Biorthogonal Series for Biharmonic and Stokes Flow Edge Problems. Part I, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1977, vol. 33, no. 2, pp. 337–347. DOI: 10.1137/0133021.
18. *Katopodes, F. V., Davis, A. M. J. and Stone, H. A.* Piston Flow in a Two-Dimensional Channel, *Physics of Fluids*, 2000, vol. 12, no. 5, pp. 1240–1243. DOI: 10.1063/1.870373.
19. *Barsan, V.* Algebraic Approximations for Transcendental Equations with Applications in Nanophysics, *Philosophical Magazine*, 2015, vol. 95, no. 27, p. 3023–3038. DOI: 10.1080/14786435.2015.1081425.
20. *Markushevich A. I. Tselyye funktsii. Elementarnyy ocherk* [Entire Functions. Elementary Essay], 2nd ed., Moscow, Nauka, 1975, 120 p. (in Russian).

Received November 6, 2024

Muataz Almohamed
Moscow Technical University of Communications and Informatics,
8 a Aviamotornaya St., Moscow 111024, Russia,
Senior Lecturer
E-mail: `mssrmtz@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0002-7611-8369

Ivan V. Tikhonov
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia,
Professor
E-mail: `ivtikh@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0001-5949-3573

Vladimir B. Sherstyukov
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia,
Professor
E-mail: `shervb73@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0002-4679-0680

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 21–35

УДК 517.53
DOI 10.46698/y0305-5846-4678-h

ВЕСОВОЙ ИНДЕКС КОНЦЕНТРАЦИИ

А. М. Гайсин[1], **Р. А. Гайсин**[1]
[1] Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: gaisinam@mail.ru, rashit.gajsin@mail.ru

Посвящается 70-летию профессора А. В. Абанина

Аннотация. В терминах весового индекса концентрации исследуется поведение функции $|W(re^{i\theta})|^{-1}$ при $\theta \to 0$, где W — четная целая функция экспоненциального типа, имеющая только вещественные нули. Этот вопрос актуален в ряде задач комплексного анализа, связанных с усиленной неполнотой (усиленной минимальностью) системы экспонент на семействе кривых, интерполяцией типа Павлова — Коревара — Диксона, аналитическим продолжением предельных функций последовательностей полиномов из экспонент. Этот круг задач восходит к следующей задаче А. Ф. Леонтьева, поставленной им в 1956 году: при каких условиях $\sup_{\theta\neq 0,\pi} H(\theta) < \infty$, где $H(\theta)$ — индикатриса (индикатор) функции $W^{-1}(\lambda)$, $\lambda = re^{i\theta}$. В работах А. Ф. Леонтьева и Э. Байет были получены некоторые оценки для этого индикатора, однако они оказались очень грубыми. Для произвольных целых функций уточненного порядка И. Ф. Красичковым в 1965 году была доказана теорема, дающая ответ на вопрос А. Ф. Леонтьева. Как было показано, необходимым и достаточным условием конечности индикатора $H(\theta)$ является конечность индекса концентрации последовательности Λ нулей целой функции W, подсчитываемого через соответствующую функцию сравнения при данном уточненном порядке. Особый интерес представляет случай, когда последовательность Λ является интерполяционной. В этом случае, как показал Б. Берндсон, функцией сравнения служит некоторая вогнутая мажоранта ω из класса сходимости. Однако эта функция (вес) не обязана иметь правильное изменение в бесконечности. Поэтому случай веса такого типа и рассматривается в настоящей статье. Основной результат: для того, чтобы весовой нижний индикатор $H(\omega,\theta)$ функции W был равномерно ограничен по $\theta \in (0,\pi)$ снизу, необходимо и достаточно, чтобы весовой индекс концентрации $I_\Lambda(\omega,\mathbb{R})$ был конечен.

Ключевые слова: целая функция, нижний индикатор, коиндикатриса, максимальная плотность, весовой индекс концентрации.

AMS Subject Classification: 30D20.

Образец цитирования: *Гайсин А. М., Гайсин Р. А.* Весовой индекс концентрации // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 21–35. DOI: 10.46698/y0305-5846-4678-h.

1. Введение

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, имеет конечную верхнюю плотность:

$$D = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} < \infty.$$

Тогда произведение Вейерштрасса

$$W(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right) \tag{1}$$

— целая функция экспоненциального типа. Наряду с индикатрисой роста (индикатором)

$$h(\theta)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{\ln|W(re^{i\theta})|}{r},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

в ряде работ рассматривалась и следующая характеристика (см. [1])

$$H(\theta)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{1}{r}\ln\left|\frac{1}{W(re^{i\theta})}\right|,\quad \theta\neq 0,\pi.$$

Если последовательность Λ измерима (т. е. имеет плотность $D_0=\lim_{n\to\infty}(n/\lambda_n)$), то $H(\theta)=-h(\theta)$. В общем случае функция $H(\theta)$ неограничена при $\theta\to 0$ (или $\theta\to\pi$) (см. [2, гл. I, § 3, п. 5]).

Если $D<\infty$, то $H(\theta)=-h_-(\theta)$, где $h_-(\theta)$ — нижний индикатор функции $W(\lambda)$, т. е.

$$h_-(\theta)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{\ln|W(re^{i\theta})|}{r}.$$

Все эти характеристики роста — $h(\theta)$, $h_-(\theta)$ и $H(\theta)$ — имеют смысл для любой целой функции конечного порядка ρ, $0<\rho<\infty$, а также уточненного порядка[1] $\rho(r)$, $\rho(r)\to\rho$ (см. [4, 5]).

Как известно, решение ряда задач комплексного анализа, связанных с интерполяцией и продолжением функций, аппроксимируемых полиномами Дирихле (полиномами из экспонент), зависит от поведения функции $H(\theta)$ на семействе лучей $R_\theta=\{z\colon\ \arg z=\theta,\ 0<\theta<\pi\}$.

Рассматривая случай $\rho=1$, А. Ф. Леонтьев получил оценку (см. [1]): для любого $\varepsilon>0$ при достаточно малом $\theta\neq 0$

$$H(\theta)<(D+\varepsilon)\ln\frac{1}{|\theta|}.$$

В терминах индекса насыщенности

$$L=\lim_{\xi\to 1-}\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{n(r)-n(r\xi)}{r},\quad n(r)=\sum_{\lambda_n\leqslant r}1,$$

Э. Байет уточнила эту оценку А. Ф. Леонтьева. Она показала (см. [6, 7]), что для любого $\varepsilon>0$ при достаточно малых $\theta\neq 0$ справедливо двойное неравенство

$$(L-\varepsilon)\ln\frac{1}{|\theta|}<H(\theta)<(L+\varepsilon)\ln\frac{1}{|\theta|}. \tag{2}$$

В [2, гл. I, § 3, п. 5] показано, что $0\leqslant L\leqslant D$, причем $L<\infty$ тогда и только тогда, когда $D<\infty$. Если же последовательность Λ имеет конечную максимальную плотность Полиа (см. [8])

$$P(\Lambda)=\lim_{\xi\to 1-}\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{n(r)-n(r\xi)}{r(1-\xi)},$$

то $L=0$. В частности, если Λ измерима, то, очевидно, $P(\Lambda)=L=0$.

---

[1]Уточненным порядком называется положительная непрерывно дифференцируемая на $(0,\infty)$ функция $\rho(r)$, удовлетворяющая условиям: $\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$, $\lim_{r\to\infty}r\rho'(r)\ln r=0$ (см. [3]).

Отметим, что доказательства оценок (2) приведены и в [2]. Однако эти оценки оказались слишком грубыми для приложений. В частности, они не дают ответа на следующий вопрос, поставленный А. Ф. Леонтьевым (см. [1]): при каких условиях

$$\sup_{\theta\neq 0,\pi} H(\theta) < \infty? \tag{3}$$

В терминах нижнего индикатора соотношение (3) означает, что

$$\inf_{\theta\neq 0,\pi} h_-(\theta) > -\infty.$$

В статье [4] доказана следующая теорема, содержащая ответ на сформулированный выше вопрос А. Ф. Леонтьева (см. [4, теорема 3])[2]. *Пусть $W(\lambda)$ — целая функция уточненного порядка $\rho(r)$, $\rho(r)\to\rho$, $\rho>0$, т. е.*

$$0 < \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_W(r)}{r^{\rho(r)}} < \infty,$$

где $M_W(r) = W(ir)$ — максимум модуля. Положим

$$H_W(\theta) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln|W(re^{i\theta})|}{V(r)}, \quad V(r) = r^{\rho(r)}.$$

Для того чтобы

$$\inf_{\theta\neq 0,\pi} H_W(\theta) > -\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность Λ имела конечный индекс концентрации, т. е.

$$I_\Lambda(V,\mathbb{R}_+) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{x\to\infty} \frac{1}{V(x)} \int_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(x)}{\sigma}\, d\sigma < \infty.$$

Здесь $n_\sigma(x)$ — число точек λ_n из отрезка $n_\sigma(x) = \{t:\ |t-x|\leqslant \sigma x\}$, $x>0$.

Отметим, что данный результат И. Ф. Красичкова из [4] является ключевым в задаче продолжения в полуплоскость функций, аппроксимируемых в некоторой выпуклой области полиномами Дирихле (см. [1]).

Существует и другая мера концентрации последовательности Λ, а именно, максимальная $\rho(r)$-плотность (см. [5])

$$P_V(\Lambda) = \lim_{\xi\to 1-} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r)-n(r\xi)}{V(r)(1-\xi^\rho)}.$$

Известно, что из условия $P_V(\Lambda)<\infty$ следует, что $I_\Lambda(V,\mathbb{R}_+)<\infty$, но обратное неверно (см. [4, 5]).

В монографии [9] В. Бернштейн для измеримых последовательностей Λ использовал понятие индекса конденсации

$$\delta(\Lambda) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln\left|\frac{1}{W'(\lambda_n)}\right|.$$

Позже в более общей ситуации эта характеристика исследовалась и нашла широкое применение в работах А. Ф. Леонтьева и других специалистов (более подробно об этом

[2]Формулировка приводится для четной функции $W(\lambda)$, определенной формулой (1).

см. в [10]). Так, в [2] показано, что если $\delta(\Lambda) < \infty$, то индикатриса $H(\theta)$ функции $1/W(re^{i\theta})$ ограничена, т. е. $\sup_{\theta\neq 0,\pi} H(\theta) < \infty$ (см. [2, гл. II, § 5, п. 4, замечание 1]). Обратное не верно, так как при $\rho(r) \equiv 1$ конечность индекса концентрации I_Λ, очевидно, имеет место для любой измеримой последовательности Λ (см. [11]), в том числе и в случае $\delta(\Lambda) = \infty$.

В статье [12] было введено понятие индекса ω-конденсации $\delta(\omega, \Lambda)$ (где $\omega(r)$ — положительная неубывающая на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ функция), которое потом систематически применялось и в других работах автора (см., например, [13]). Следуя [10], величину $\delta(\omega, \Lambda)$ будем называть весовым индексом конденсации. По определению,

$$\delta(\omega, \Lambda) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln \left| \frac{1}{W'(\lambda_n)} \right| .$$

Если в качестве $\omega(r)$ брать наименьшую неубывающую мажоранту последовательности $\{-\ln |W'(\lambda_n)|\}$ (см. [13]), то $\delta(\omega, \Lambda) = 1$. В некоторых задачах, связанных с интерполяцией, проблемами полноты системы экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ и квазианалитичности классов Карлемана на дугах, рассматривается вогнутый вес $\omega(r)$, принадлежащий классу сходимости, т. е. удовлетворяющий условию

$$\int_1^\infty \frac{\omega(x)}{x^2}\, dx < \infty.$$

Пусть L — класс положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+$ функций, а L_1 — множество функций ω из L, обладающих свойствами: $\omega(x) \geqslant 1$; для любого $A > 0$

$$B_A = \sup_{x>0} \frac{\omega(Ax)}{\omega(x)} < \infty. \tag{4}$$

Ясно, что условие (4) можно переписать и в форме

$$\sup_{x>0} \frac{\omega(2x)}{\omega(x)} < \infty.$$

Подкласс вогнутых функций ω из L_1 обозначим L_2. Если $\omega \in L_2$, то $\omega(2x) \leqslant 2\omega(x)$ при всех $x > 0$.

Пусть $\omega(r)$ — какая-то фиксированная функция, принадлежащая классу L_1, такая, что

$$0 < D^*_\omega = \sup_{r>0} \frac{\ln M_W(r)}{\omega(r)} < \infty. \tag{5}$$

Поскольку функция $\ln M_W(r)$ сама принадлежит классу L_1, то такая функция ω существует.

Введем в рассмотрение весовой индекс концентрации последовательности Λ

$$I_\Lambda(\omega, \mathbb{R}_+) = \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{\omega(x)} \int_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(x)}{\sigma} d\sigma, \quad x > 0. \tag{6}$$

Случай $\omega(x) = V(x) = x^{\rho(x)}$ был исследован в [4]. Обозначим

$$D_\omega = \sup_{x>0} \frac{n(x)}{\omega(x)}. \tag{7}$$

Легко убедиться в том, что $D_\omega < \infty$ (это следует из неравенства $n(x) \leqslant \ln M_W(ex)$ Иенсена и условий (5), (4)).

Пусть $W(\lambda)$ — целая функция (1), для которой условие (5) выполнено с некоторой вогнутой функцией $\omega(r)$. Важно отметить, что в отличие от $V(x)$, функция $\omega(x)$, $\omega \in L_2$, не обязана быть правильно меняющейся в бесконечности (см. [10]).

Положим

$$H_W(\omega, \theta) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln|W(re^{i\theta})|}{\omega(r)}, \quad \omega \in L_2.$$

Цель статьи — выяснить, будет ли справедливым аналог теоремы 3 из работы [4] для такого весового нижнего индикатора $H_W(\omega, \theta)$.

Основной результат настоящей заметки следующий[3]. *Пусть условие* (5) *выполнено для веса* $\omega \in L_2$. *Для того чтобы*

$$\inf_{\theta\neq 0,\pi} H_W(\omega, \theta) > -\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы $I_\Lambda(\omega, \mathbb{R}_+) < \infty$*, где* $I_\Lambda(\omega, \mathbb{R}_+)$ *— индекс концентрации последовательности* Λ*, определенный формулой* (6).

Далее вместо $H_W(\omega, \theta)$ будем писать просто $H_W(\theta)$.

2. Предварительные результаты

В основе главной теоремы из [4] лежит следующий общий факт. Сформулируем его применительно к функции (1).

Теорема 1 (см. [4])**.** *Пусть* $W(\lambda)$ *— целая функция* (1) *уточненного порядка* $\rho(r)$, $\rho(r) \to \rho$, $\rho > 0$. *Тогда для всех* $\lambda \neq 0$

$$\ln|W(\lambda)| = -\int_0^1 \frac{n_\sigma(\lambda)}{\sigma}\, d\sigma + R(|\lambda|), \tag{8}$$

где $n_\sigma(\lambda)$ *— число точек* λ_n *в круге* $\Delta_\sigma(\lambda) = \{t\colon\ |t-\lambda| \leqslant \sigma|\lambda|\}$, $R(|\lambda|) = O(1)V(|\lambda|)$, $V(|\lambda|) = |\lambda|^{\rho(|\lambda|)}$, *а* $O(1)$ *обозначает некоторую функцию, ограниченную вне любого круга* $\{z\colon\ |z| < r\}$, $r > 0$.

Пусть теперь $D^*_\omega < \infty$, $\omega \in L_2$ (эта величина определена в (5)). Покажем, что тогда в представлении (8)

$$R(|\lambda|) = O(1)\omega(|\lambda|). \tag{9}$$

Действительно, из рассуждений и выкладок, проделанных в статьях [4, 14], следует, что

$$|R(|\lambda|)| \leqslant 2n(2|\lambda|) + 2N(2|\lambda|) + U(|\lambda|),$$

где

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt, \quad U(r) = \int_2^\infty \frac{m(r\tau)}{\tau(\tau^2-1)}\, d\tau,$$

а $m(x)$ — непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция, $m(0) = 0$, $m(\lambda_n) = n$, $n \geqslant 1$; на отрезках $[0, \lambda_1]$, $[\lambda_n, \lambda_{n+1}]$, $n \geqslant 1$, эта функция линейна. Так как $\omega \in L_2$, учитывая (7), имеем:

[3]Основные результаты получены Р. А. Гайсиным, первому автору принадлежат постановка задачи и обзор литературы.

$n(2|\lambda|) \leqslant D_\omega \omega(2|\lambda|) \leqslant 2D_\omega \omega(|\lambda|)$. Далее, по формуле Иенсена (см., например, [15, § 2, 2.4. Примечания]), $N(2|\lambda|) \leqslant \ln M_W(2|\lambda|)$. Отсюда, учитывая (5), получим

$$N(2|\lambda|) \leqslant D^*_\omega \omega(2|\lambda|) \leqslant 2D^*_\omega \omega(|\lambda|), \quad \omega \in L_2.$$

Осталось оценить функцию $U(r)$, $r = |\lambda|$.

Имеем $m(x) \leqslant n(x) + 1$, $x \geqslant 0$. Отсюда, по неравенству Иенсена, если еще учесть (5), $m(x) \leqslant 1 + \ln M_W(ex) \leqslant 1 + eD^*_\omega \omega(x)$, $x \geqslant 0$. Следовательно,

$$U(r) \leqslant \frac{1}{3} + eD^*_\omega \int\limits_2^\infty \frac{\omega(r\tau)}{\tau(\tau^2-1)}\,d\tau \leqslant \frac{1}{3} + \frac{4}{3}eD^*_\omega \int\limits_2^\infty \frac{\omega(r\tau)}{\tau^3}\,d\tau.$$

Отсюда получаем

$$U(r) \leqslant \frac{1}{3} + 4D^*_\omega r^2 \int\limits_{2r}^\infty \frac{\omega(x)}{x^3}\,dx \leqslant 1 + 2D^*_\omega \omega(r).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\frac{\omega(x)}{x} \downarrow$ при $x \uparrow$. Таким образом,

$$R(|\lambda|) \leqslant 1 + 4\left(D_\omega + \frac{3}{2}D^*_\omega\right)\omega(|\lambda|), \quad |\lambda| \geqslant 1,$$

и, тем самым, соотношение (9) выполнено.

Пусть $D^*_\omega < \infty$, $\omega \in L_2$. Для любого неограниченного множества $G \subset \mathbb{C}$ положим (в [4] рассматривается случай веса $V(|z|)$)

$$H_W(G) = \varliminf_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G}} \frac{\ln|W(z)|}{\omega(|z|)},$$

$$H^*_W(G) = \sup_{E\in\mathscr{D}} H_W(G \setminus E),$$

где $\mathscr{D}$ — совокупность всех множеств кружков нулевой линейной плотности (см. [4]). Коиндикатрисой и обобщенной коиндикатрисой называются соответственно функции

$$H_W(\mathscr{E}) = \inf_{G\in\mathscr{E}} H_W(G),$$

$$H^*_W(\mathscr{E}) = \inf_{G\in\mathscr{E}} H^*_W(G),$$

где $\mathscr{E}$ — любое семейство неограниченных множеств. Следуя [4], индексом концентрации последовательности Λ на неограниченном множестве G назовем величину

$$I_\Lambda(G) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\,d\sigma, \quad I_\Lambda(G) = I_\Lambda(\omega, G).$$

Индекс концентрации Λ на семействе $\mathscr{E}$ неограниченных множеств — это величина

$$I_\Lambda(\mathscr{E}) = \sup_{G\in\mathscr{E}} I_\Lambda(G).$$

Пусть $\mathscr{E} = \{G\}$, G — неограниченное множество,

$$J_\Lambda(G) = \varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_0^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma, \quad J_\Lambda(\mathscr{E}) = \sup_{G\in\mathscr{E}} J_\Lambda(G),$$

$$J^*_\Lambda(G) = \inf_{E\in\mathscr{D}} J_\Lambda(G \setminus E), \qquad J^*_\Lambda(\mathscr{E}) = \sup_{G\in\mathscr{E}} J^*_\Lambda(G).$$

Из (8), (9) следует, что $H_W(G)$ и $J_W(G)$ конечны или бесконечны одновременно, а в случае их конечности

$$|H_W(G) + J_\Lambda(G)| \leqslant A_W < \infty. \tag{10}$$

Если одна из величин $H^*_W(G)$ или $J^*_\Lambda(G)$ конечна, то

$$|H^*_W(G) + J^*_\Lambda(G)| \leqslant A_W. \tag{11}$$

Из (10), (11) имеем также

$$|H_W(\mathscr{E}) + J_\Lambda(\mathscr{E})| \leqslant A_W, \quad |H^*_W(\mathscr{E}) + J^*_\Lambda(\mathscr{E})| \leqslant A_W. \tag{12}$$

Теперь ставится задача перейти от $J_\Lambda(\mathscr{E})$ и $J^*_\Lambda(\mathscr{E})$ к $I_\Lambda(\mathscr{E})$ в интересующем нас случае, т. е. когда

$$\mathscr{E} = \left\{G_\theta\colon\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}, \quad G_\theta = \left\{z\colon\ \theta \leqslant \arg z \leqslant \pi - \theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathscr{E} = \left\{G_\theta:\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$, $G_\theta = \left\{z:\ \theta \leqslant \arg z \leqslant \pi - \theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$. *Если* $D_\omega < \infty$, $\omega \in L_1$, *то верны равенства:*

I. $J^*_\Lambda(G_\theta) = I_\Lambda(G_\theta)$;

II. $J^*_\Lambda(\mathscr{E}) = I_\Lambda(\mathscr{E})$.

Замечание. Равенства I, II, как и в случае функции $V(|z|)$, верны и для семейства $\mathfrak{F} = \{\Gamma_\theta\}$, $\Gamma_\theta = \partial G_\theta$. Дело в том, что эти равенства на самом деле справедливы и для произвольного семейства так называемых линейно плотных множеств, а множества G_θ и Γ_θ линейно плотны (см. [4, теорема 2]).

$\lhd$ Достаточно доказать только равенство I, так как II есть следствие I.

Для G_θ имеем (для множеств Γ_θ рассуждения те же):

$$I_\Lambda(G_\theta) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G_\theta}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma,$$

$$J_\Lambda(G_\theta) = \varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G_\theta}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_0^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma.$$

Как и выше,

$$J^*_\Lambda(G_\theta) = \inf_{E\in\mathscr{D}} J_\Lambda(G_\theta \setminus E).$$

Доказательство равенства I теоремы 2, как и в случае уточненного порядка, по сути опирается только на леммы типа 3–5 из [4]. При этом лемма 3 справедлива для любого веса $\omega \in L$. Поэтому переформулируем леммы 4 и 5 в терминах веса $\omega \in L_2$, обозначая их как лемма 1 и лемма 2. $\rhd$

Лемма 1. *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, *удовлетворяет условию*

$$D_\omega = \sup_{t>0} \frac{n(t)}{\omega(t)} < \infty, \quad \omega \in L_2.$$

Тогда для любых фиксированных N, σ, $N > 1$, $0 < \sigma < 1$, *существует исключительное множество* E *кружков* $K_i = \{z\colon\ |z - h_i| < \rho_i\}$ *такое, что при* $z \notin E$

$$n_\sigma(z) < N\omega(|z|),$$

причем для любого $r > 0$ *переменная линейная плотность*

$$p_E(r) = \frac{1}{r} \sum_{|h_i| \leqslant r} \rho_i$$

не превосходит

$$\frac{4D_\omega}{N} \frac{\sigma}{1 - \sigma}.$$

◁ Доказательство почти ничем не отличается от доказательства леммы 4 из [4]. Требуется только уточнить оценку для линейной плотности множества E. В остальном, как и в случае $V(r) = r^{\rho(z)}$, используется только монотонность веса $\omega(r)$.

В [4] показано, что для любой точки $z \notin E$,

$$E = \bigcup_{h_i \in H} \Delta_\delta(h_i), \quad \delta = \frac{2\sigma}{1 - \sigma},$$

выполняется оценка

$$n_\sigma(z) < N|z|^{\rho(|z|)}.$$

Переменная плотность множества E равна

$$p_E(r) = \frac{\delta}{r} \sum_{|h_i| \leqslant r} |h_i| = \frac{\delta}{r} \int_0^r t\, d\nu(t), \tag{13}$$

где $H = \{h_i\}$ — некоторая последовательность, пронумерованная в порядке неубывания модулей (строится специальным образом), $\nu(t)$ — число точек $|h_i|$ из полуинтервала $(0, t]$, $\nu(t) \equiv 0$ при $t \leqslant \frac{q}{2}$, $q < \lambda_1$. В процессе построения множества $H = \{h_i\}$ строится и цепочка последовательностей Λ_k, $\Lambda = \Lambda_0 \supset \Lambda_1 \supset \ldots \supset \Lambda_k \supset \ldots$, такая, что каждый круг $\Delta_\sigma(h_i)$ содержит не менее $N|h_i|^{\rho(|h_i|)}$ точек из Λ_i. Учитывая это, в [4] выписаны очевидные неравенства

$$N \sum_{|h_i| \leqslant r} |h_i|^{\rho(|h_i|)} \leqslant \sum_{|h_i| \leqslant r} n_\sigma^{(i)}(h_i) \leqslant n(2r), \tag{14}$$

где $n_\sigma^{(i)}(h_i)$ — число точек из Λ_i, попавших в круг $\Delta_\sigma(h_i)$. В нашем случае вместо $V(r) = r^{\rho(r)}$ берется вес $\omega \in L_2$. Поэтому, если учесть (7), вместо (14) получим

$$N \sum_{|h_i| \leqslant r} \omega(|h_i|) \leqslant n(2r) \leqslant D_\omega \omega(2r) \leqslant 2D_\omega \omega(r)$$

(здесь учтено, что $n(2r)=0$ при $r\leqslant\frac{q}{2}$, а функция $\omega(r)$ вогнутая). Отсюда для функции

$$\Phi(r)=\int\limits_0^r\omega(t)\,d\nu(t)=\sum_{|h_i|\leqslant r}\omega(|h_i|)$$

будем иметь

$$\Phi(r)=0\quad\text{при}\quad r\leqslant\frac{q}{2};$$

$$\Phi(r)\leqslant\frac{2D_\omega}{N}\,\omega(r)\quad\text{при}\quad r>\frac{q}{2}.$$

Так как $\frac{t}{\omega(t)}\uparrow$ при $t\uparrow$, то отсюда имеем

$$\int\limits_0^r td\nu(t)=\int\limits_q^r\frac{t}{\omega(t)}\,\omega(t)\,d\nu(t)\leqslant\frac{2D_\omega}{N}r.$$

Таким образом, из (13) окончательно получаем, что

$$p_E(r)\leqslant\delta\frac{2D_\omega}{N}=4\frac{D_\omega}{N}\frac{\sigma}{1-\sigma}.$$

Лемма 1 доказана. $\triangleright$

Лемма 2. *Пусть $D_\omega<\infty$, $\omega\in L_2$, $0<\alpha<1$. Тогда каждому числу t, $0<t\leqslant\frac{1}{2}$, можно поставить в соответствие множество кружков Q_t таким образом, что выполняются условия:*

а) $Q_t\supset Q_s$ *при* $t>s$;

б) *при* $t\to 0$ *линейная плотность множества* Q_t *стремится к нулю;*

в) *при* $z\notin Q_t$ *верна оценка*

$$\sup_{0<\sigma\leqslant t}\frac{n_\sigma(z)}{\sigma^{1-\alpha}}\leqslant\omega(|z|).$$

Доказательство леммы 2 есть дословное повторение доказательства леммы 5 из [4] с той лишь разницей, что вместо $V(r)=r^{\rho(r)}$ используется вес $\omega(r)$ из L_2, только вместо леммы 4 из [4] применяется доказанная выше лемма 1. Поэтому доказательство леммы 2 не приводим.

Поясним теперь, как доказывается равенство I теоремы 2. Как и в статье [4], сначала показывается, что $I_\Lambda(G_\theta)\leqslant J^*_\Lambda(G_\theta)$. Для этого из неравенства $J^*_\Lambda(G_\theta)<K<\infty$ выводится оценка $I_\Lambda(G_\theta)\leqslant K$. При этом используется только то, что функция $\omega(r)$ принадлежит классу L_1, т. е. возрастающая и удовлетворяет условию (4). Противоположное неравенство $J^*_\Lambda(G_\theta)\leqslant I_\Lambda(G_\theta)$ по сути получается при помощи тех же рассуждений, что и в случае функции $V(r)$, но с применением лемм 1 и 2, приведенных выше.

Таким образом, равенство I в случае $\omega\in L_2$ почти очевидно.

Свойство II есть простое следствие равенства I.

3. Подготовительная теорема

Пусть $W(\lambda)$ — целая функция (1), для которой выполняется условие (5): $0 < D^*_\omega < \infty$, $\omega \in L_2$. Для формулировки основных теорем нам понадобятся следующие семейства неограниченных множеств: $\mathscr{E} = \left\{G_\theta\colon\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$, $\mathfrak{F} = \{\Gamma_\theta\}$, $\Gamma_\theta = \partial G_\theta$, где $G_\theta = \left\{z\colon\ \theta \leqslant \arg z \leqslant \pi - \theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$. Пусть $\mathfrak{R}$ — любое из семейств $\mathscr{E}$ или $\mathfrak{F}$.

Верна следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $0 < D^*_\omega < \infty, \omega \in L_2$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

А. *Если $H^*_W(\mathfrak{R}) < \infty$ или $I_\Lambda(\mathfrak{R}) < \infty$, то найдется постоянная $A_W < \infty$, не зависящая от $\mathfrak{R}$, такая, что*

$$|H^*_W(\mathfrak{R}) + I_\Lambda(\mathfrak{R})| \leqslant A_W; \tag{15}$$

Б. *Если $H^*_W(\mathfrak{R}) < \infty$ или $H_W(\mathfrak{R}) < \infty$, то найдется постоянная $B_W < \infty$, не зависящая от $\mathfrak{R}$, такая, что*

$$|H^*_W(\mathfrak{R}) - H_W(\mathfrak{R})| \leqslant B_W; \tag{16}$$

В. *Условия $H^*_W(\mathscr{E}) > -\infty$ и $H^*_W(\mathfrak{F}) > -\infty$ эквивалентны.*

Г. *Пусть $P = \{z\colon\ \pi \leqslant \arg z \leqslant 2\pi\}$, $\Gamma = \partial P = \mathbb{R}$. Тогда условия $H_W(\mathscr{E}) > -\infty$ и $I_\Lambda(\Gamma) < \infty$ эквиваленты.*

$\lhd$ Неравенство (15) в утверждении А вытекает из второй оценки в (12) и теоремы 2, если учесть замечание к этой теореме.

Докажем утверждение Б. Для любой точки $z \in G_\theta$

$$\min_{\lambda\in\Lambda} |z - \lambda| \geqslant d|z|,$$

где $d = \sin\theta > 0$ — «коэффициент удаления линейно плотного множества G_θ от множества Λ» (см. [4]). Ясно, что $n_\sigma(z) = 0$ при $z \in G_\theta$ и $\sigma < d$. Отсюда

$$I_\Lambda(G_\theta) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G_\theta}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma = \varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G_\theta}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_d^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma$$
$$= \varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G_\theta}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_0^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma = J_\Lambda(G_\theta).$$

С другой стороны, по теореме 2, $I_\Lambda(G_\theta) = J^*_\Lambda(G_\theta)$. Отсюда следует, что $J_\Lambda(G_\theta) = J^*_\Lambda(G_\theta)$. Так как все это верно и для Γ_θ, то

$$J_\Lambda(\mathfrak{R}) = J^*_\Lambda(\mathfrak{R}). \tag{17}$$

Воспользуемся оценками (12). В силу (17), указанные оценки имеют место, если хотя бы одна из величин $H_W(\mathfrak{R})$ или $H^*_W(\mathfrak{R})$ конечна. Тогда неравенство (16) следует из равенства

$$H^*_W(\mathfrak{R}) - H_W(\mathfrak{R}) = [H^*_W(\mathfrak{R}) + J^*_\Lambda(\mathfrak{R})] - [H_W(\mathfrak{R}) + I_\Lambda(\mathfrak{R})]$$

с постоянной $B_W = 2A_W$.

Утверждение Б доказано.

Доказательство утверждения В основано на следующей лемме, которая будет использована и при доказательстве утверждения Г.

Лемма 3. *Пусть G — произвольное множество, свободное от точек последовательности Λ, $\Gamma = \partial G$. Тогда из $I_\Lambda(\Gamma) < K$ следует $I_\Lambda(G) \leqslant \frac{3}{2}(K + 15D_\omega)$, где*

$$D_\omega = \sup_{t>0} \frac{n(t)}{\omega(t)}, \quad \omega \in L_2,$$

а ω — вес из теоремы 3.

$\lhd$ Доказательство леммы. Так как $I_\Lambda(\Gamma) < K$, то для любого $\varepsilon > 0$ при $z' \in \Gamma$, $|z'| \geqslant r_0(\varepsilon)$ имеем

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{n_\sigma(z')}{\sigma}\, d\sigma < K\omega(|z'|). \tag{18}$$

Пусть $z \in G$, $d(z) = \frac{\rho(z)}{|z|}$, $z \neq 0$, где $\rho(z) = \inf_{t\in\Gamma} |z - t| = |z - z'|$, $z' \in \Gamma$. Запишем $\rho(z) = d(z)|z|$. Если $d(z) > \frac{1}{2}$, то $n_\sigma(z) = 0$ при $\sigma \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma \leqslant n_1(z) \leqslant n(2|z|) \leqslant 2D_\omega \omega(|z|),$$

так как $\omega \in L_2$. Если же $d(z) \leqslant \frac{1}{2}$, то

$$\frac{1}{2}|z| \leqslant |z'| \leqslant \frac{3}{2}|z|. \tag{19}$$

Поэтому $|z'| > r_0(\varepsilon)$ при больших z, $z \in G$, и будет выполняться равенство (18). Далее, так как $\Delta_{4\sigma}(z') \supset \Delta_\sigma(z)$ при $\sigma \geqslant d(z)$, то $n_\sigma(z) \leqslant n_{4\sigma}(z')$. Тогда, полагая $d_\varepsilon = d_\varepsilon(z) = \max\,[d(z), \varepsilon]$, при $z \in G$, $|z| \geqslant R$ получим, что

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma = \int\limits_{d_\varepsilon}^{1} \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma \leqslant \int\limits_{d_\varepsilon}^{1} \frac{n_{4\sigma}(z')}{\sigma}\, d\sigma = \int\limits_{4d_\varepsilon}^{4} \frac{n_\sigma(z')}{\sigma}\, d\sigma$$
$$\leqslant \int\limits_{4\varepsilon}^{1} \frac{n_\sigma(z')}{\sigma}\, d\sigma + \int\limits_{1}^{4} \frac{n_\sigma(z')}{\sigma}\, d\sigma \leqslant \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{n_\sigma(z')}{\sigma}\, d\sigma + 3n_4(z').$$

Отсюда, учитывая (18), (19) и вогнутость функции ω, находим

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma \leqslant K\omega(|z'|) + 3n(5|z'|) \leqslant K\omega\left(\frac{3}{2}|z|\right) + 3n\left(\frac{15}{2}|z|\right) \leqslant \frac{3}{2}(K + 15D_\omega)\omega(|z|).$$

Отсюда следует, что

$$I_\Lambda(G) \leqslant \frac{3}{2}(K + 15D_\omega).$$

Лемма доказана. $\rhd$

Приступим теперь к доказательству предложения B. Согласно (15), достаточно доказать эквивалентность условий $I_\Lambda(\mathscr{E}) > -\infty$ и $I_\Lambda(\mathfrak{F}) < \infty$. Пусть $I_\Lambda(\mathfrak{F}) < K < \infty$. Убедимся, что тогда $I_\Lambda(\mathscr{E}) < \infty$. Очевидно, имеем: $I_\Lambda(\Gamma_\theta) < K$ для любого θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. По лемме 3, $I_\Lambda(G_\theta) \leqslant \frac{3}{2}(K + 15D_\omega)$. Отсюда

$$I_\Lambda(\mathscr{E}) = \sup_{0<\theta<\frac{\pi}{2}} I_\Lambda(G_\theta) < \infty.$$

Итак, из неравенства $I_\Lambda(\mathfrak{F}) < K$ следует, что $I_\Lambda(\mathscr{E}) < \infty$.

Обратное утверждение проверяется проще.

Пусть $I_\Lambda(\mathscr{E}) < K < \infty$, т. е. для любых $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\varlimsup_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G_\theta}} \frac{1}{\omega(|z|)} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma < K.$$

Отсюда при $z \in G_\theta$, $|z| \geqslant R$

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma < K\omega(|z|). \tag{20}$$

Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, $z' \in \Gamma_\theta$. В круге $\Delta_\varepsilon(z')$ найдется точка $z \in G_\theta$. Для этой точки при $\sigma \geqslant \varepsilon$ имеем $\Delta_{4\sigma}(z) \supset \Delta_\sigma(z')$, и $n_{4\sigma}(z) \geqslant n_\sigma(z')$. Отсюда, учитывая (20), получаем, что при $|z'| \geqslant R_1$

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z')}{\sigma}\, d\sigma \leqslant \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_{4\sigma}(z)}{\sigma}\, d\sigma \leqslant \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma + \int\limits_1^4 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma}\, d\sigma \leqslant K\omega(|z|) + 3n_4(z)$$
$$\leqslant K\omega((1+\varepsilon)|z'|) + 3n(5(1+\varepsilon)|z'|) \leqslant (1+\varepsilon)[K + 15D_\omega]\omega(|z'|).$$

Таким образом, при $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$ и $z' \in \Gamma_\theta$, $|z'| \geqslant R_1$, имеем

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(z')}{\sigma}\, d\sigma \leqslant \frac{3}{2}[K + 15D_\omega]\omega(|z'|),$$

т. е. $I_\Lambda(\Gamma_\theta) \leqslant \frac{3}{2}[K + 15D_\omega]$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Отсюда

$$I_\Lambda(\mathfrak{F}) = \sup_{0<\theta<\frac{\pi}{2}} I_\Lambda(\Gamma_\theta) < \infty.$$

Утверждение В доказано.

Наконец, докажем утверждение Г. Пусть P есть замкнутая нижняя полуплоскость $\overline{\Pi}_- = \{z\colon\ \mathrm{Im} z \leqslant 0\}$, границей которой является $\Gamma = \mathbb{R}$. Так что $\Lambda \subset P$. Требуется доказать, что условия $H_W(\mathscr{E}) > -\infty$ и $I_\Lambda(\mathbb{R}) < \infty$ эквивалентны. Здесь $\mathscr{E} = \{G_\theta\colon\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$.

В силу утверждения Б, достаточно показать эквивалентность условий $H^*_W(\mathscr{E}) > -\infty$ и $I_\Lambda(\mathbb{R}) < \infty$, а если учесть утверждение А, — равносильность условий $I_\Lambda(\mathscr{E}) < \infty$ и $I_\Lambda(\mathbb{R})$.

Пусть $I_\Lambda(\mathbb{R}) < K < \infty$, $\Pi_+ = \{z\colon\ \mathrm{Im} z > 0\}$. Так как $\Pi_+ \cap \Lambda = 0$, то, применяя к Π_+ лемму 3, получаем, что

$$I_\Lambda(\Pi_+) \leqslant \frac{3}{2}(K + 15D_\omega) < \infty.$$

Так как $G_\theta \subset \Pi_0$ для любого $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то $I_\Lambda(G_\theta) \leqslant \frac{3}{2}(K + 15D_\omega)$, а потому

$$I_\Lambda(\mathscr{E}) = \sup_{0<\theta<\frac{\pi}{2}} I_\Lambda(G_\theta) < \infty.$$

Осталось убедиться, что если $I_\Lambda(\mathbb{R}) = \infty$, то и $I_\Lambda(\mathscr{E}) = \infty$. Для случая веса $\omega(r) = V(r)$, $V(r) = r^{\rho(r)}$, это показано в [4]. При этом использовано только то, что $V \in L_1$, т. е. монотонность и выполнение условия типа (4). Так что это подавно верно и для веса $\omega \in L_2$, так как $L_2 \subset L_1$. $\triangleright$

4. Основная теорема

Теорема 4. *Пусть* $D_\omega^* < \infty$, $\omega \in L_2$. *Положим*

$$H_W(\theta) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln|W(re^{i\theta})|}{\omega(r)},$$

где $W(\lambda)$ — *целая функция* (1).

Для того чтобы

$$\inf_{\theta\neq 0,\pi} H_W(\theta) > -\infty, \tag{21}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$I_\Lambda(\omega, \mathbb{R}_+) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{1}{\omega(x)} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{n_\sigma(x)}{\sigma}\, d\sigma < \infty.$$

$\lhd$ В наших обозначениях $I_\Lambda(\omega, \mathbb{R}_+) = I_\Lambda(\mathbb{R}_+)$, а условие (21) можно записать таким образом:

$$H_W(\mathfrak{F}) > -\infty, \tag{22}$$

где

$$\mathfrak{F} = \left\{\Gamma_\theta\colon\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}, \quad \Gamma_\theta = \partial G_\theta, \quad G_\theta = \{z\colon\ \theta \leqslant \arg z \leqslant \pi - \theta\}.$$

Согласно утверждению Б теоремы 3 условие (22) равносильно условию $H_W^*(\mathfrak{F}) > -\infty$, которое, в свою очередь, эквивалентно неравенству $H_W^*(\mathscr{E}) > -\infty$ согласно свойству В, а значит, неравенству $H_W(\mathscr{E}) > -\infty$, если снова учесть утверждение Б теоремы 3. Таким образом, видим, что $H_W(\mathfrak{F}) > -\infty$ тогда и только тогда, когда $H_W(\mathscr{E}) > -\infty$. Осталось применить утверждение Г, согласно которому условие $H_W(\mathscr{E}) > -\infty$ для четной функции (1) равносильно условию $I_\Lambda(\mathbb{R}_+) < \infty$.

Итак, условия $H_W(\mathfrak{F}) > -\infty$ и $I_\Lambda(\mathbb{R}_+) < \infty$ равносильны, и все доказано. $\rhd$

Литература

1. *Леонтьев А. Ф.* О сходимости последовательности полиномов Дирихле // Докл. АН СССР.—1956.—Т. 108, № 1.—С. 23–26.
2. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент.—М.: Наука, 1980.—384 с.
3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.—632 с.
4. *Красичков И. Ф.* Оценки снизу для целых функций конечного порядка // Сиб. матем. журн.—1965.—Т. 6, № 4.—С. 840–861.
5. *Кондратюк А. А.* Целые функции с положительными нулями, имеющими конечную максимальную плотность // Теория функций, функциональный анализ и их приложения.—1968.—Вып. 7.—С. 37–52.
6. *Baillette A.* Approximation de fonctions par des sommes d'exponentielles // C. R. Acad. Sci.—1959.—Vol. 249, № 23.—P. 2470–2471.
7. *Baillette A.* Fonctions approchables par des sommes d'exponentielles // J. Anal. Math.—1962.—Vol. 10, № 2.—P. 91–115. DOI: 10.1007/BF02790304.
8. *Pólya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzeihen // Math. Z.—1929.—Vol. 29.—P. 549–640.
9. *Bernstein V.* Leçons sur les Progrès Récents de la Théorie des Séries de Dirichlet.—Paris: Gauthier-Villars.—1933.—320+xiv p.
10. *Шерстюков В. Б.* Распределение нулей канонических произведений и весовой индекс конденсации // Мат. сб.—2015.—Т. 206, № 9.—С. 139–180. DOI: 10.4213/sm8446.

11. *Красичков И. Ф.* О сходимости полиномов Дирихле // Сиб. матем. журн.—1966.—Т. 7, № 5.—С. 1039–1058.
12. *Гайсин А. М.* Об одной гипотезе Полиа // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1994.—Т. 58, № 2.—С. 73–92.
13. *Гайсин А. М.* Решение проблемы Пойа // Мат. сб.—2002.—Т. 193, № 6.—С. 39–60. DOI: 10.4213/sm659.
14. *Гайсин А. М.* Об одной теореме Хеймана // Сиб. матем. журн.—1998.—Т. 39, № 3.—С. 501–516.
15. *Гайсин А. М.* Целые функции: основы классической теории с приложениями по комплексному анализу.—Уфа.: РИЦ БашГУ, 2016.—160 с.

Статья поступила 29 октября 2024 г.

Гайсин Ахтяр Магазович
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
главный научный сотрудник, заведующий отделом
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: gaisinam@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-4579-9077

Гайсин Рашит Ахтярович
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
научный сотрудник
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: rashit.gajsin@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-4356-2842

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 21–35

WEIGHT INDEX OF CONCENTRATION

Gaisin, A. M.[1] and Gaisin, R. A.[1]

[1] Institute of Mathematics with Computing Centre
of the Ufa Federal Research Center of the RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia

E-mail: gaisinam@mail.ru, rashit.gajsin@mail.ru

Abstract. In terms of the concentration weight index, the behavior of the function $|W(re^{i\theta})|^{-1}$ is investigated as $\theta \to 0$, where W is an even entire function of exponential type that has only real zeros. This question is relevant in a number of problems of complex analysis related to the strongly nonspanning (strongly minimality) of a system of exponentials on a family of curves, Pavlov–Korevar–Dixon interpolation, and analytic continuation of limit functions of sequences of polynomials from exponentials. This circle of problems goes back to the following problem of A. F. Leontief posed in 1956: under what conditions $\sup_{\theta\neq 0,\pi} H(\theta) < \infty$, where $H(\theta)$ is the indicatrix (indicator) of the function $W^{-1}(\lambda)$, $\lambda = re^{i\theta}$. In the works of A. F. Leontief and A. Baillette, some estimates for this indicator were obtained, but they turned out to be very rough. For arbitrary entire functions of proximate order, I. F. Krasichkov in 1965 proved a theorem that answers A. F. Leontief's question. As was shown, a necessary and sufficient condition for the finiteness of the indicator $H(\theta)$ is the finiteness of the concentration index of the sequence Λ of zeros of the entire function W, calculated through the growth function for a given proximate order. Of particular interest is the case when the sequence Λ is an interpolation sequence. In this case, as shown by B. Berndtsson, the comparison function is some concave majorant from the convergence class. However, this function (i. e., the weight) does not have to have the regular variation at infinity. Therefore, this case is considered in the present paper. The main result: in order for the weight lower indicator $H(\omega,\theta)$ of the function W to be uniformly bounded below, it is necessary and sufficient that the concentration weight index $I_\Lambda(\omega,\mathbb{R})$ be finite.

Keywords: entire function, lower indicator, coindicatrix, maximum density, weight index of concentration.

AMS Subject Classification: 30D20.

For citation: *Gaisin, A. M. and Gaisin, R. A.* Weight Index of Concentration, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 21–35. (in Russian). DOI: 10.46698/y0305-5846-4678-h.

References

1. *Leont'ev, A. F.* On the Convergence of a Sequence of Dirichlet Polynomials, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1956, vol. 108, pp. 23–26. (in Russian).
2. *Leont'ev, A. F. Posledovatel'nosti polinomov iz e'ksponent* [Sequences of polynomials of exponentials], Moscow, Nauka, 1980, 384 p. (in Russian).
3. *Levin, B. Ja. Raspredelenie kornej cely'x funkcij* [Distribution o f zeros of entire functions], Moscow, Gastexizdat, 1956, 632 p.
4. *Krasichkov, I. F.* Lower Bound for Entire Functions of Finite Order, *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 1965, vol. 6, no. 4, pp. 840–861. (in Russian).
5. *Kondratyuk, A. A.* Entire Functions with Positive Zeros That Have Finite Maximum Density, *Teoriya funkcij, funkcional'nyj analiz i ih prilozheniya* [Theory of functions, functional analysis and their applications], 1968, vol. 7, pp. 37–52. (in Russian).
(in Russian).
6. *Baillette, A.* Approximation de Fonctions par des sommes d'Exponentielles, *C.R. Acad. Sci.*, 1959, vol. 249, no. 23, pp. 2470–2471.
7. *Baillette, A.* Fonctions Approchables par des Sommes d'Exponentielles, *Journal d'Analyse Mathématique*, 1962, vol. 10, no. 2, pp. 91–115. DOI: 10.1007/BF02790304.
8. *Pólya, G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzeihen, *Math. Z.*, 1929, vol. 29, pp. 549–640.
9. *Bernstein, V. Leçons sur les Progrès Récents de la Théorie des Séries de Dirichlet*, Paris, Gauthier-Villars, 1933, 320+xiv p.
10. *Sherstyukov, V. B.* Distribution of the Zeros of Canonical Products and Weighted Condensation Index, *Sbornik: Mathematics*, 2015, vol. 206, no. 9, pp. 1299–1339. DOI: 10.1070/SM2015v206n09ABEH004497.
11. *Krasichkov, I. F.* Convergence of Dirichlet Polynomials, *Siberian Mathematical Journal*, 1966, vol. 7, no. 5, pp. 826–842. DOI: 10.1007/BF01044487.
12. *Gaisin, A. M.* On a Conjecture of Polya, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1995, vol. 44, no. 2, pp. 281–299. DOI: 10.1070/IM1995v044n02ABEH001597.
13. *Gaisin, A. M.* Solution of the Polya Problem, *Sbornik: Mathematics*, 2002, vol. 193, no. 6, pp. 825–845. DOI: 10.1070/SM2002v193n06ABEH000659.
14. *Gaisin, A. M.* On a Theorem of Hayman, *Siberian Mathematical Journal*, 1998, vol. 39, no. 3, pp. 431–445. DOI: 10.1007/BF02673898.
15. *Gaisin, A. M. Cely'e funkcii: osnovy' klassicheskoj teorii s prilozheniyami po kompleksnomu analizu* [Entire functions: fundamentals of classical theory with applications to research in complex analysis], Ufa, RIC BashGU, 2016, 160 p. (in Russian).

Received October 29, 2024

Akhtyar M. Gaisin
Institute of Mathematics with Computing Centre
of the Ufa Federal Research Center of the RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Chief Scientific Officer
E-mail: `gaisinam@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-4579-9077

Rashit A. Gaisin
Institute of Mathematics with Computing Centre
of the Ufa Federal Research Center of the RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Scientific Officer
E-mail: `rashit.gajsin@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-4356-2842

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 36–43

УДК 517.98
DOI 10.46698/y6929-3405-2251-o

ON COLLECTIVELY σ-LEVI SETS OF OPERATORS[#]

E. Yu. Emelyanov[1]

[1] Sobolev Institute of Mathematics,
4 Ac. Koptyuga Ave., Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: emelanov@math.nsc.ru

Dedicated to Professor A. V. Abanin
on occasion of his 70th birthday

Abstract. The Levi operators are operator abstractions of the Levy property of Banach lattices. Such operators have been studied recently by several authors. The present paper deals with the collective properties of the Levi operators of several kinds: σ-Levi operators; quasi c-σ-Levi operators; and quasi σ-Levi operators. A notion of collectively σ-Levi set generalizes the notion of a single σ-Levi operator to the families of operators. Working with families of sequences of elements of a vector lattice requires the notion of the collective order convergence. This notion that is introduced and studied in the present paper may have its own interest and further possible applications. Various relations of the collectively quasi σ-Levi sets to the collectively compact sets are investigated. The domination problem for the collectively quasi σ-Levi sets is studied. In this study a special notion of a set of operators dominated by another set of operators is used.

Keywords: vector lattice, normed lattice, collective order convergence, collectively σ-Levi set, collectively compact set.

AMS Subject Classification: 46A40, 46B42, 47L05.

For citation: *Emelyanov, E. Yu.* On Collectively σ-Levi Sets of Operators, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 36–43. DOI: 10.46698/y6929-3405-2251-o.

1. Introduction

Several kinds of Levi operators were studied recently in [1–4] The present paper concerns collective properties of σ-Levi operators.

In what follows, vector spaces are real and operators are linear. The letters E and F stand for vector lattices, symbols $\mathrm{L}(E,F)$, $\mathrm{L}_{\mathrm{FR}}(E,F)$, and $\mathrm{K}(E,F)$ for the spaces of linear, finite rank, and compact operators from E to F, B_X for the closed unit ball of X, and I_X for the identity operator in X. We write $y_n \downarrow 0$, whenever $y_{n'} \leqslant y_n$ for all $n' \geqslant n$ and $\inf_E y_n = 0$.

Throughout the paper, we say that a sequence (x_n) in E is order convergent to $x \in E$ (briefly, $x_n \xrightarrow{\mathrm{o}} x$) if there exists a sequence (p_n) in E, $p_n \downarrow 0$ such that $|x_n - x| \leqslant p_n$ holds for all n. A sequence (x_n) in E is order Cauchy if, for some $p_n \downarrow 0$ in E, $|x_{n'} - x_{n''}| \leqslant p_n$

[#] The research was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics, project № FWNF-2022-0004.

whenever $n', n'' \geqslant n$. A vector lattice E is said to be sequentially order complete whenever each order Cauchy sequence in E is order convergent.

The following definition is an adopted version of [1, Definition 1.1] and [3, Definition 1].

Definition 1. An operator T from a normed lattice E to a vector lattice F is:

a) σ-Levi if, for every increasing bounded sequence (x_n) in E_+, there exists $x \in E$ with $Tx_n \xrightarrow{\mathrm{o}} Tx$. The set of such operators is denoted by $\mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{Levi}}(E,F)$.

b) quasi-c-σ-Levi if, for every increasing bounded sequence (x_n) in E_+, the sequence (Tx_n) is order convergent. The set of such operators is denoted by $\mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qcLevi}}(E,F)$.

c) quasi-σ-Levi if, for every increasing bounded sequence (x_n) in E_+, the sequence (Tx_n) is order Cauchy. The set of such operators is denoted by $\mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qLevi}}(E,F)$.

Clearly, $\mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{Levi}}(E,F) \subseteq \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qcLevi}}(E,F) \subseteq \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qLevi}}(E,F)$. The following example shows that both inclusions are proper in general (cf., [2, Example 1]).

Example 1. First we show that the inclusion $\mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{Levi}}(E) \subseteq \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qcLevi}}(E)$ can be proper. Define an operator T on $E = C[0,1] \oplus L_1[0,1]$, by $T\big((\phi,\psi)\big) := (0,\phi)$ for $\phi \in C[0,1]$ and $\psi \in L_1[0,1]$. Clearly, $T \in \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qcLevi}+}(E)$. Consider $\phi_n \in C[0,1]$ that equals to 1 on $\big[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\big]$, to 0 on $\big[\frac{1}{2}, 1\big]$, and is linear otherwise. Let $f_n := (\phi_n, 0)$. Then (f_n) is bounded and increasing in E_+, and $Tf_n \xrightarrow{\mathrm{o}} (0,g)$, where $g \in L_1[0,1]$ is the indicator function of $\big[0, \frac{1}{2}\big]$. Since $g \notin C[0,1]$, there is no such an $f \in E$ that $Tf = (0,g)$, and hence $T \notin \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{Levi}}(E)$.

For the second inclusion, consider the Banach lattice c of convergent real sequences and denote elements of c by $\sum_{n=1}^\infty a_n \cdot e_n$, where e_n is the n-th unit vector of c and (a_n) converges in $\mathbb{R}$. Since each bounded increasing sequence in c_+ is o-Cauchy, $I_c \in \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qLevi}}(c)$. However, a bounded increasing sequence $I_c f_n = f_n := \sum_{k=1}^n e_{2k-1}$ in c_+ is not order convergent. Thus, $I_c \notin \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qcLevi}}(c)$.

We shall use the following Lemma (cf., [2, Lemmas 1, 2]).

Lemma 1. *Let E be a normed lattice and let F be a vector lattice. The following holds.*

i) $\mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qcLevi}}(E,F)$ *and* $\mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qLevi}}(E,F)$ *are vector spaces.*

ii) $\mathrm{L}_{\mathrm{FR}}(E,F) \subseteq \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{Levi}}(E,F)$.

iii) *If F is a normed lattice then* $\mathrm{K}_+(E,F) \subseteq \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qcLevi}}(E,F)$.

$\lhd$ i) It is trivial.

ii) Let $T \in \mathrm{L}_{\mathrm{FR}}(E,F)$, say $T = \sum_{k=1}^n f_k \otimes y_k$ for $y_1, \dots, y_n \in T(E)$ and $f_1, \dots, f_n \in E'$. Denote

$$T_1 := \sum_{k=1}^n f_k^+ \otimes y_k, \quad T_2 := \sum_{k=1}^n f_k^- \otimes y_k.$$

Let (x_m) be an increasing bounded sequence in E_+. Then, for each k, the sequences $f_k^+(x_m)$ and $f_k^-(x_m)$ are increasing and bounded. Thus, $f_k^+(x_m) \to a_k$ and $f_k^-(x_m) \to b_k$ for some $a_k, b_k \in \mathbb{R}_+$. Since $\dim(T(E)) < \infty$,

$$T_1 x_m \xrightarrow{\mathrm{o}} \sum_{k=1}^n a_k y_k \in T(E), \quad T_2 x_m \xrightarrow{\mathrm{o}} \sum_{k=1}^n b_k y_k \in T(E).$$

Therefore,

$$Tx_m = \big(T_1 x_m - T_2 x_m\big) \xrightarrow{\mathrm{o}} \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) y_k \in T(E).$$

Take an $x \in E$, such that $Tx = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) y_k$. Then $Tx_m \xrightarrow{\mathrm{o}} Tx$. We conclude $T \in \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{Levi}}(E,F)$.

iii) Let $T \in \mathrm{K}_+(E,F)$ and let (x_m) be an increasing sequence in $(B_E)_+$. Then (Tx_m) has a subsequence (Tx_{m_j}) satisfying $\|Tx_{m_j} - y\| \to 0$ for some $y \in F$. Since $Tx_m \uparrow$ then $\|Tx_m - y\| \to 0$. As each norm convergent increasing sequence converges in order to the same limit then $Tx_m \xrightarrow{\mathrm{o}} y$, and consequently $T \in \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qcLevi}}(E,F)$. $\rhd$

The next example strengthens Example 1 by showing that the inclusion $\mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{Levi}}(E) \cap \mathrm{K}_+(E) \subseteq \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qcLevi}}(E) \cap \mathrm{K}_+(E)$ can be proper (cf., [2, Example 2]).

Example 2. Let (α_n) be a vanishing real sequence consisting of non-zero positive terms. Define an operator S from c to c_0 by $S\left(\sum_{n=1}^\infty a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^\infty (\alpha_n a_n) e_n$. Then $S \in \mathrm{K}_+(c, c_0)$, and hence $S \in \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qcLevi}}(c, c_0)$ by Lemma 1. Take a bounded increasing sequence $x_n = \sum_{k=1}^n e_{2k}$ in c_+. The sequence $(Sx_n) = \big(\sum_{k=1}^n \alpha_{2k} e_{2k}\big)$ converges in order to $\sum_{k=1}^\infty \alpha_{2k} e_{2k} \in c_0$, however there is no $x \in c$ with $Sx = \sum_{k=1}^\infty \alpha_{2k} e_{2k}$. Indeed, would such $x = \sum_{k=1}^\infty a_k e_k \in c$ with $Sx = S\big(\sum_{k=1}^\infty a_k e_k\big) = \sum_{k=1}^\infty \alpha_{2k} e_{2k}$ exist, it must satisfies $a_k = 1$ for even k-th and $a_k = 0$ for odd k-th, which is absurd. Therefore, $S \notin \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{Levi}}(c, c_0)$.

The operator S is also a counter-example to [1, Proposition 3.5].

Now, define a sequence (S_i) of operators in $\mathrm{L}_{\mathrm{FR}}(c, c_0)$ by $S_i\left(\sum_{n=1}^\infty a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^i (\alpha_n a_n) e_n$. Trivially, $S_i \xrightarrow{\|\cdot\|} S$. By Lemma 1, $S_i \in \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{Levi}}(c, c_0)$. Since $S \notin \mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{Levi}}(c, c_0)$ then the set $\mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{Levi}}(c, c_0)$ is not closed under the operator norm.

It is worth noting that, generally, $\mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{Levi}}(E,F)$ need not to be a vector space [2, Example 8].

The present paper is organized as follows. Section 2 is devoted to elementary properties of collective order convergence of families of sequences. Section 3 is devoted to collectively σ-Levi sets of operators, their relations to collectively compact sets, and for the domination problem.

For unexplained terminology and notation we refer to [5–8].

2. Collective Order Convergence

Working with families of sequences of elements of a vector lattice requires a certain notion of "collective" order convergence. In what follows, we identify E-valued sequences and elements of the vector lattice $E^{\mathbb{N}}$ equipped with the pointwise linear and lattice operations.

Definition 2. Let $\mathscr{A} \subseteq E^{\mathbb{N}}$. We say that $\mathscr{A}$ collective order converges to an indexed subset $\{c_a\}_{a \in \mathscr{A}}$ of E (briefly, $\mathscr{A} \xrightarrow{\text{c-o}} \{c_a\}_{a\in\mathscr{A}}$) whenever there exists a sequence (p_n) in E, $p_n \downarrow 0$ such that $|a_n - c_a| \leqslant p_n$ holds for all n and all $(a_n) \in \mathscr{A}$. We call $\mathscr{A}$ collective order-null if $\mathscr{A} \xrightarrow{\text{c-o}} \{0\}_{a\in\mathscr{A}}$.

In this section we give some elementary properties of collective order convergence which are used in Section 3. The following proposition is elementary and its proof is left to the reader.

Proposition 1. *Let $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ be nonempty collective order convergent subsets of $E^{\mathbb{N}}$, and let $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. The following sets are collective order convergent.*

i) $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$.

ii) $\alpha\mathscr{A} + \beta\mathscr{B} := \{(\alpha a_n + \beta b_n)\}_{a\in\mathscr{A}; b\in\mathscr{B}}$.

iii) $|\mathscr{A}| := \{(|a_n|)\}_{a\in\mathscr{A}}$.

iv) *The convex hull* $\mathrm{co}(\mathscr{A})$ *of* $\mathscr{A}$ *in* $E^{\mathbb{N}}$.

Moreover, v) *If* $\mathscr{A} \xrightarrow{\text{c-o}} \{c_a\}_{a\in\mathscr{A}}$ *and* $\mathscr{A} \xrightarrow{\text{c-o}} \{c'_a\}_{a\in\mathscr{A}}$ *then* $c_a = c'_a$ *for all* $a \in \mathscr{A}$.

vi) $\mathscr{A} \xrightarrow{\text{c-o}} \{c_a\}_{a\in\mathscr{A}}$ *iff* $\{(a_n - c_a)\}_{a\in\mathscr{A}} \xrightarrow{\text{c-o}} \{0\}_{a\in\mathscr{A}}$.

vii) *A sequence* (a_n) *in* E *order converges iff the set* $\{(a_n)\}$ *is collective order convergent.*

Note that the passing to solid hull does not preserve collective order convergence for any nontrivial E. Indeed, let $0 \neq x \in E$. Then the set $\mathscr{A} = \{(a_n) : a_n \equiv x\}$ of one constantly x sequence is collective order convergent, yet its solid hull $\mathrm{sol}(\mathscr{A})$ is not, as $\mathrm{sol}(\mathscr{A})$ contains a sequence $\left(\frac{1+(-1)^n}{2}x\right)$ that does not order converge. It should be clear that if E is an Archimedean vector lattice then, for each order convergent to zero sequence (a_n) in E possessing at least one non-zero term, the set $\{(\lambda a_n) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ is not collective order-null. Also, it is worth noting that the set $\{(\delta_k^n)_n : k \in \mathbb{N}\}$ consisting of order-null real sequences is not collective order-null.

The next theorem extends items ii) and iv) of Proposition 1 to the Banach lattice setting as follows.

Theorem 1. *Let E be a Banach lattice, let $(p_{i,n})_n$ be sequences in B_E satisfying $p_{i,n} \downarrow 0$ for each $i \in \mathbb{N}$, and let $\mathscr{A}_i$ be nonempty subsets of $E^{\mathbb{N}}$, such that $|a_{i,n}| \leqslant p_{i,n}$ holds for all $i, n \in \mathbb{N}$, and $(a_{i,n})_n \in \mathscr{A}_i$. Then, the set*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathscr{A}_i = \left\{ \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,n} \right) : \ (a_{i,n})_n \in \mathscr{A}_i, \ \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \leqslant 1 \right\}$$

is collective order-null. In particular, for every $M > 0$ and $\mathscr{A} \overset{\text{c-o}}{\to} \{0\}_{a \in \mathscr{A}}$ in $E^{\mathbb{N}}$, the set

$$\left\{ \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,n} \right) : \ (a_{i,n})_n \in \mathscr{A}, \ \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \leqslant M \right\}$$

is collective order-null.

$\lhd$ Passing to the norm-limit as $m \to \infty$ in the following inequality

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_{i,n} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i||a_{i,n}| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| p_{i,n} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| p_{i,n},$$

where $(a_{i,n})_n \in \mathscr{A}_i$, we obtain $\left| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,n} \right| \leqslant p_n := \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| p_{i,n}$ for all n. Clearly, (p_n) is decreasing. It remains to proof $p_n \downarrow 0$. Suppose in contrary $0 < a \leqslant p_n$ for all n. Fix an arbitrary $m \in \mathbb{N}$. Since $0 < a \leqslant \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| p_{i,n} + \sum_{i=m+1}^{\infty} |\alpha_i| p_{i,n}$ for all n, and since $\inf_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| p_{i,n} = 0$, we obtain that $0 < a \leqslant \sum_{i=m+1}^{\infty} |\alpha_i| p_{i,n}$ for all $m, n \in \mathbb{N}$. Therefore,

$$0 < \|a\| \leqslant \limsup_{m \to \infty} \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} |\alpha_i| p_{i,n} \right\| \leqslant \lim_{m \to \infty} \sum_{i=m+1}^{\infty} |\alpha_i| = 0,$$

which is absurd.

The rest of proof follows from the previous part by taking $\mathscr{A}_i = \mathscr{A}$ for all $i \in \mathbb{N}$. $\rhd$

We finish this section with the following notion of collective order Cauchy set of sequences.

Definition 3. A set $\mathscr{A} \subseteq E^{\mathbb{N}}$ is collective order Cauchy if, for some $p_n \downarrow 0$ in E, $|a_{n'} - a_{n''}| \leqslant p_n$ holds for all $a \in \mathscr{A}$ whenever $n', n'' \geqslant n$. A vector lattice E is sequentially collective order complete if each collective order Cauchy subset of $E^{\mathbb{N}}$ is collective order convergent.

The next elementary proposition shows that the sequential collective order completeness agrees with sequential order completeness.

Proposition 2. *Let E be a vector lattice. The following conditions are equivalent.*

i) *If a sequence (x_n) in E satisfies $|x_{n'} - x_{n''}| \leqslant p_n$, whenever $n', n'' \geqslant n$ for some $p_n \downarrow 0$ in E, then there exists $x \in E$ with $|x_n - x| \leqslant p_n$ for all n.*

ii) *If a subset $\mathscr{A}$ of $E^{\mathbb{N}}$ satisfies $|a_{n'} - a_{n''}| \leqslant p_n$ for all $a \in \mathscr{A}$ and some $p_n \downarrow 0$ in E, whenever $n', n'' \geqslant n$, then there exists an indexed subset $\{c_a\}_{a\in\mathscr{A}}$ of E, such that $|a_n - c_a| \leqslant p_n$ holds for all n and all $(a_n) \in \mathscr{A}$.*

iii) *E is sequentially collective order complete.*

iv) *E is sequentially order complete.*

$\lhd$ Implicationsi)$\Longrightarrow$ ii)$\Longrightarrow$ iii)$\Longrightarrow$ iv) are trivial.

iv)$\Longrightarrow$ i) Let $|x_{n'} - x_{n''}| \leqslant p_n$ for all $n', n'' \geqslant n$ and some $p_n \downarrow 0$ in E. Since E is sequentially order complete, $x_n \xrightarrow{\text{o}} x$ for some $x \in E$. Sending $n'' \to \infty$ and passing to the order limit in the inequality $|x_n - x_{n''}| \leqslant p_n$, where $n'' \geqslant n$, we obtain $|x_n - x| \leqslant p_n$ for all n. $\rhd$

3. Collectively σ-Levi Sets of Operators

Recall that a set A of operators between normed spaces X and Y is collectively compact whenever $\bigcup_{T\in A} T(B_X)$ is relatively compact in Y [6]. This section is devoted to collectively σ-Levi sets of operators, their relation to collectively compact sets, and the domination problem for collectively σ-Levi sets. We begin with the following collective version of Definition 1.

Definition 4. Let E be a normed lattice, F a vector lattice, and $A \subseteq \mathrm{L}(E, F)$. We say that A is:

a) a collectively σ-Levi set if, for every increasing bounded (x_n) in E_+, there exists an indexed subset $\{x_T\}_{T\in A}$ of E satisfying $\{(Tx_n) : T \in A\} \xrightarrow{\text{c-o}} \{Tx_T\}_{T\in A}$.

b) a collectively quasi-c-σ-Levi set if, for every increasing bounded (x_n) in E_+, there exists an indexed subset $\{y_T\}_{T\in A}$ of F satisfying $\{(Tx_n) : T \in A\} \xrightarrow{\text{c-o}} \{y_T\}_{T\in A}$.

c) a collectively quasi-σ-Levi set if, for every increasing bounded (x_n) in E_+, the set $\{(Tx_n) : T \in A\} \subseteq F^{\mathbb{N}}$ is collective order Cauchy.

Obviously, T lies in $\mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{Levi}}(E, F)$ ($\mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qcLevi}}(E, F)$, $\mathrm{L}^\sigma_{\mathrm{qLevi}}(E, F)$) iff the set $\{T\}$ is a collectively σ-Levi (resp., collectively quasi-c-σ-Levi, collectively quasi-σ-Levi) subset of $\mathrm{L}(E, F)$.

We continue with the question on which properties of σ-Levi, quasi-c-σ-Levi, and quasi-σ-Levi operators mentioned in Lemma 1 have collective versions. The properties described in Lemma 1 i) have the following extension.

Proposition 3. *Let E be a normed lattice, F a vector lattice, and $A, B \subseteq \mathrm{L}(E, F)$. The following holds.*

i) *If A and B are both collectively quasi-c-σ-Levi then the set $\{\alpha T + \beta S : |\alpha| + |\beta| \leqslant 1,\ T \in A,\ S \in B\}$ is also collectively quasi-c-σ-Levi.*

ii) *If A and B are both collectively quasi-σ-Levi then the set $\{\alpha T + \beta S : |\alpha| + |\beta| \leqslant 1,\ T \in A,\ S \in B\}$ is also collectively quasi-σ-Levi.*

$\lhd$ i) By the assumption, there exist sequences $p_n \downarrow 0$, $q_n \downarrow 0$ in F, and indexed subsets $\{y_T\}_{T\in A}$, $\{z_S\}_{S\in B}$ of F satisfying $|Tx_n - y_T| \leqslant p_n$, $|Sx_n - z_S| \leqslant q_n$ for all $T \in A$, $S \in B$, and $n \in \mathbb{N}$. The result follows from

$$|(\alpha T + \beta S)x_n - (\alpha y_T + \beta z_S)| \leqslant |\alpha| p_n + |\beta| q_n \leqslant (p_n + q_n) \downarrow 0.$$

ii) Let sequences (p_n), (q_n) in F satisfy $|Tx_{n'} - Tx_{n''}| \leqslant p_n \downarrow 0$ and $|Sx_{n'} - Sx_{n''}| \leqslant q_n \downarrow 0$ for all $T \in A$, $S \in B$, and $n', n'' \geqslant n$. The result follows from

$$|(\alpha T + \beta S)x_{n'} - (\alpha T + \beta S)x_{n''})| \leqslant (p_n + q_n) \downarrow 0,$$

for $n', n'' \geqslant n$. $\rhd$

The items ii) and iii) of Lemma 1 have no reasonable collective extension. To see this, define norm-one functionals T_k on c_0 by $T_k a = a_k$. Thus, $T_k \in \mathrm{L}_{\mathrm{FR}}(c_0, \mathbb{R})$, yet the set $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ is not even collectively quasi-σ-Levi. Indeed, for the increasing bounded sequence $x_n = \sum_{m=1}^{n} e_m$ in c_0, there is no sequence $p_n \downarrow 0$ in $\mathbb{R}$ with $|T_k x_{n'} - T_k x_{n''}| \leqslant p_n$ for all k and $n', n'' \geqslant n$, since $|T_{n+1}x_n - T_{n+1}x_{n+1}| = 1$ for every n. Moreover, $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ is a collectively compact subset of $\mathrm{L}_+(c_0, \mathbb{R})$ that is not collectively quasi-σ-Levi.

Now, we apply Theorem 1 for strengthening Proposition 3 in the Banach lattice setting as follows.

Theorem 2. *Let E be a normed lattice, F a Banach lattice, and let A be a bounded collectively quasi-c-σ-Levi subset of* $\mathrm{L}(E, F)$. *Then the set*

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T_i\right) : \ T_i \in A, \ \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \leqslant 1\right\}$$

is collectively quasi-c-σ-Levi, where $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T_i$ is the limit of partial sums $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i$ in the operator norm.

$\vartriangleleft$ Let $(x_n) \uparrow$ in $(B_E)_+$. Then $\{(Tx_n)\}_{T\in A} \overset{\text{c-o}}{\to} \{y_T\}_{T\in A}$ for some subset $\{y_T\}_{T\in A}$ of F. Proposition 1 vi) gives $\{(Tx_n - y_T)\}_{T\in A} \overset{\text{c-o}}{\to} \{0\}_{T\in A}$. By Theorem 1,

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (T_i x_n - y_{T_i})\right)\right\}_{\substack{T_i \in A,\\ \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \leqslant 1}} \overset{\text{c-o}}{\to} \{0\}_{\substack{T_i \in A,\\ \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \leqslant 1}}.$$

So, there exists a sequence $p_n \downarrow 0$ in F satisfying

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T_i\right) x_n - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_{T_i}\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (T_i x_n - y_{T_i})\right| \leqslant p_n$$

for all n, $T_i \in A$, and all α_i with $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \leqslant 1$, where the series $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T_i$ converges in the operator norm due to boundedness of A. The proof is complete. $\vartriangleright$

Since every Dedekind σ-complete vector lattice is sequentially order complete, the next corollary follows from Proposition 2 and Theorem 2.

Corollary 1. *Let E be a normed lattice, F be a Dedekind σ-complete Banach lattice, and A be a bounded collectively quasi-σ-Levi subset of* $\mathrm{L}(E, F)$. *Then the set*

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T_i\right) : \ T_i \in A, \ \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \leqslant 1\right\}$$

is collectively quasi-c-σ-Levi.

Now, we discuss of the "collective" domination problem for Levi sets of operators. First, recall some already known related results for Levi operators.

The quasi-σ-Levi operators do satisfy the domination property (cf. [1, Theorem 2.7], [3, Theorem 3]). We do not know where quasi-c-σ-Levi operators satisfy the domination property. In general, σ-Levi operators do not satisfy the domination property (cf. [2, Example 7]).

Example 3. Define operators $S, T \in \mathrm{L}(c)$ by

$$S\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} e_n; T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}\right) e_n.$$

Then $0 \leqslant S \leqslant T$. Operator T has rank one, and hence T is σ-Levi by Lemma 1 *ii*). However, $S \notin \mathrm{L}^{\sigma}_{\mathrm{Levi}}(c)$ due to Example 2.

We use the following "collective" notion of domination for sets of operators.

Definition 5. Let $A, B \subseteq \mathrm{L}_+(E,F)$. Then A is dominated by B if, for each $S \in A$, there exists $T \in B$ with $S \leqslant T$.

We conclude the paper with the following "collective" partial generalization of [1, Theorem 2.7] in the class of quasi-σ-Levi operators.

Theorem 3. *Let E be a normed lattice, F be a vector lattice, and $A, C \subseteq \mathrm{L}_+(E,F)$ be such that A is dominated by C. If C is collectively quasi-σ-Levi then A is also collectively quasi-σ-Levi.*

$\lhd$ Let (x_n) be an increasing sequence in $(B_E)_+$. By the assumption, C is collectively quasi-σ-Levi, and hence the set $\{(Tx_n) : T \in C\} \subseteq F^{\mathbb{N}}$ is collective order Cauchy. By Definition 3, for some $p_n \downarrow 0$ in F, $|Tx_{n'} - Tx_{n''}| \leqslant p_n$ holds for all $T \in C$ whenever $n', n'' \geqslant n$.

Let $S \in A$. Then $0 \leqslant S \leqslant T_S$ for some $T_S \in C$. Since $|T_S x_{n'} - T_S x_{n''}| \leqslant p_n$ for $n', n'' \geqslant n$,

$$\begin{gathered} |Sx_{n'} - Sx_{n''}| \leqslant |Sx_{n'} - Sx_n| + |Sx_{n''} - Sx_n| \\ = S(x_{n'} - x_n) + S(x_{n''} - x_n) \leqslant T_S(x_{n'} - x_n) + T_S(x_{n''} - x_n) \\ = |T_S x_{n'} - T_S x_n| + |T_S x_{n''} - T_S x_n| \leqslant 2p_n \end{gathered}$$

for all $n', n'' \geqslant n$. Because $S \in A$ is arbitrary and $2p_n \downarrow 0$, we conclude that A is collectively quasi-σ-Levi. $\rhd$

References

1. *Alpay, S., Emelyanov, E. and Gorokhova, S.* $o\tau$-Continuous, Lebesgue, KB, and Levi Operators Between Vector Lattices and Topological Vector Spaces, *Results in Mathematics*, 2022, vol. 77, no. 3, article no. 117, pp. 1–25. DOI: 10.1007/s00025-022-01650-3.
2. *Emelyanov, E.* On KB and Levi Operators in Banach Lattices, arXiv:2312.05685v2 [math.FA], 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2312.05685.
3. *Gorokhova, S. G. and Emelyanov, E. Y.* On Operators Dominated by Kantorovich–Banach Operators and Levy Operators in Locally Solid Lattices, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 3, pp. 55–61 (in Russian). DOI: 10.46698/f5525-0005-3031-h.
4. *Zhang, F. and Chen, Z.* Some Results of (σ-)Levi Operators in Banach Lattices, *Positivity*, 2022, vol. 26, article no. 49. DOI: 10.1007/s11117-022-00903-3.
5. *Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics: Second Edition, Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 105, Providence, RI, American Mathematical Society, 2003.
6. *Anselone, P. M. and Palmer, T. W.* Collectively Compact Sets of Linear Operators, *Pacific Journal of Mathematics*, 1968, vol. 25, no. 3, pp. 417–422.
7. *Kusraev, A. G. Dominated Operators*, Dordrecht, Kluwer, 2000.
8. *Meyer-Nieberg, P. Banach Lattices*, Berlin, Springer-Verlag, Universitext, 1991.

Received May 22, 2024

Eduard Yu. Emelyanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Ac. Koptyuga Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
Leading Researcher
E-mail: emelanov@math.nsc.ru
https://orcid.org/0000-0002-8828-0398

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 36–43

СОВМЕСТНО σ-ЛЕВИ МНОЖЕСТВА ОПЕРАТОРОВ

Емельянов Э. Ю.[1]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Россия, 630090, Новосибирск, пр-т Академика Коптюга, 4

E-mail: emelanov@math.nsc.ru

Аннотация. Операторы Леви являются операторной абстракцией соответствующего свойства банаховых решеток, известного как свойство Леви. Операторы такого рода в последнее время стали объектом пристального внимания нескольких авторов. В настоящей статье нами рассмотрены так называемые совместные свойства операторов Леви некоторых типов, а именно σ-Леви операторы, квази c-σ-Леви операторы, а также квази σ-Леви операторы. Понятие совместно σ-Леви множества операторов распространяет понятие одного σ-Леви оператора на целое семейство таких операторов. При работе с семействами последовательностей, составленных из элементов векторной решетки, нам требуется понятие совместной порядковой сходимости. Это понятие, которое мы вводим и рассматриваем в данной статье, может представлять самостоятельный интерес и, возможно, даже имеет некоторые новые приложения в теории векторных решеток и теории операторов. В работе также исследуются вопросы существования различных взаимосвязей, которые возникают между множествами квази σ-Леви операторов и компактных операторов. Изучается вопрос мажорирования для совместно квази σ-Леви операторных множеств. В рамках этого исследования нами использовано понятие множества операторов, мажорируемого некоторым другим множеством операторов.

Ключевые слова: векторная решетка, нормированная решетка, совместная порядковая сходимость, совместно σ-Леви множество, совместно компактное множество.

AMS Subject Classification: 46A40, 46B42, 47L05.

Образец цитирования: *Emelyanov E. Yu.* On Collectively σ-Levi Sets of Operators // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 1.—С. 36–43 (in English). DOI: 10.46698/y6929-3405-2251-o.

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 44–55

УДК 517.982.274, 517.983.22
DOI 10.46698/r2980-5208-7458-m

ПРОСТРАНСТВО ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА КАК ЛОКАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

О. А. Иванова[1], С. Н. Мелихов[1,2]

[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: neo_ivolga@mail.ru, snmelihov@yandex.ru, snmelihov@sfedu.ru

Посвящается 70-летию профессора А. В. Абанина

Аннотация. Пусть G — область в комплексной плоскости, звездная относительно точки 0, $H^{-\infty}(G)$ — пространство голоморфных в G функций полиномиального роста вблизи границы G. В нем вводится произведение Дюамеля $*$. Оно используется в операционном и операторном исчислениях, при решении дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в спектральной теории, в задаче о спектральной кратности линейного оператора, в краевых задачах. Показано, что $H^{-\infty}(G)$ с указанным умножение является унитальной ассоциативной и коммутативной топологической алгеброй. Оператор интегрирования $J(f)(z) = \int_0^z f(t)\,dt$ линейно и непрерывно действует в $H^{-\infty}(G)$. Установлено, что все линейные непрерывные в $H^{-\infty}(G)$ операторы, перестановочные с J, представляются в виде $S_g(f) = f * g$, где g — фиксированная функция из $H^{-\infty}(G)$. В случае, когда G является строго звездной относительно точки 0, доказаны критерий обратимости элемента алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$ и критерий того, что оператор S_g имеет линейный непрерывный обратный. Показано, что всякий ненулевой оператор из коммутанта J является композицией степени оператора J и некоторого изоморфизма из упомянутого коммутанта. При доказательстве $*$-обратимости привлекается ряд Неймана, обычно применяющийся в банаховых пространствах. В ненормируемых локально выпуклых пространствах функций ранее он использовался Л. Living Бергом, Н. Уигли и М. Т. Караевым. Описаны все замкнутые идеалы алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$, замкнутые инвариантные подпространства и циклические векторы J в $H^{-\infty}(G)$. Из полученных результатов следует, что оператор J является одноклеточным, а алгебра $(H^{-\infty}(G), *)$ локальна. Единственным максимальным идеалом в ней является множество всех $*$-необратимых элементов.

Ключевые слова: произведение Дюамеля, оператор интегрирования, пространство голоморфных функций полиномиального роста.

AMS Subject Classification: 46A10, 47B91, 46H10.

Образец цитирования: *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Пространство голоморфных функций полиномиального роста как локальная алгебра // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 44–55. DOI: 10.46698/r2980-5208-7458-m.

1. Введение

В данной работе изучается произведение Дюамеля $*$ в пространстве $H^{-\infty}(G)$ голоморфных в области $G \subset \mathbb{C}$ функций полиномиального роста вблизи границы G. При этом предполагается, что G является звездной относительно точки 0. В пространстве

Фреше $H(G)$ всех голоморфных в G функций это произведение было введено и исследовано Н. Уигли [1]. С умножением $*$ пространство $H^{-\infty}(G)$ является ассоциативной и коммутативной топологической алгеброй с единицей — функцией, тождественно равной 1. В последние десятилетия алгебры голоморфных функций с таким умножением достаточно интенсивно исследуются (см., например, статью М. Т. Караева [2]). Оно находит приложения в операционном и операторном исчислениях, к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, в обобщенной спектральной теории в смысле А. Бисваса, А. Ламберта и С. Петровича [3], в задаче о спектральной кратности линейного непрерывного оператора, в краевых задачах. Умножение $*$ тесно связано с оператором интегрирования $J(f)(z) = \int_0^z f(t)\,dt$. В статье показано, что линейными непрерывными в $H^{-\infty}(G)$ операторами, перестановочными с J, являются операторы Дюамеля $S_g(f) = f * g$ (функция $g \in H^{-\infty}(G)$ фиксирована), и только они. Для пространств всех голоморфных функций в областях $\mathbb{C}$ подобные результаты ранее были получены И. С. Райчиновым [4], Н. И. Нагнибидой [5, теорема 1] (см. также исторический обзор в монографии Ю. Ф. Коробейника [6, § 13]), для пространств непрерывных $C(\Delta)$ и локально интегрируемых $\mathscr{L}(\Delta)$ функций (Δ — промежуток в $\mathbb{R}$, содержащий точку 0) — И. Димовским [7, теорема 1.1.2], для пространства $C^\infty[0,1]$ — Р. Тапдигоглу и Б. Т. Торебеком [8]. Здесь используется подход, предложенный М. Т. Караевым: отмеченная связь оператора J и произведения $*$ позволяет одновременно описывать замкнутые идеалы алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$ и замкнутые инвариантные подпространства оператора J. Ключевым при этом является следующий результат (теорема 3): элемент g алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$ обратим тогда и только тогда, когда $g(0) \neq 0$. Последнее равносильно также тому, что оператор S_g является топологическим изоморфизмом $H^{-\infty}(G)$. Для пространства Фреше всех функций, непрерывно дифференцируемых на $[0, +\infty)$, такой критерий был доказан Л. Бергом [9, гл. 5, § 26], для $H(G)$ — в [1], для $C^\infty[0,1]$ — в [8], для пространств бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций на интервале или отрезке в $\mathbb{R}$, содержащем точку 0, — в [10, следствие 4.1]. При $*$-обращении g используется ряд Неймана, применяемый, как правило, в банаховых пространствах. Ранее в ненормируемых пространствах для доказательства аналогичного критерия он привлекался Л. Бергом [9, гл. 5, § 26], Н. Уигли [1] , М. Т. Караевым [11]. Структура $H^{-\infty}(G)$ отличается от структуры пространств, рассмотренных в этом направлении ранее: $H^{-\infty}(G)$ является ненормируемым счетным индуктивным пределом весовых банаховых пространств. Возможность привлечения ряда Неймана в рассматриваемой ситуации дают характер непрерывности свертки $*$, выявленный теоремой 1 для области G, строго звездной относительно точки 0, и сужения $*$ на банаховы пространства, образующие данный индуктивный предел. Используя аргументы Н. Уигли [1], М. Т. Караева [11], с помощью этого результата мы описываем все замкнутые идеалы алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$. Множество $I_0 = \{f \in H^{-\infty}(G) : f(0) = 0\}$ всех необратимых элементов в $(H^{-\infty}(G), *)$ является единственным максимальным идеалом этой алгебры, а значит, она локальная. Взаимосвязь умножения $*$ и оператора J и плотность множества всех многочленов в $H^{-\infty}(G)$ позволяют также показать, что множество всех замкнутых идеалов алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$ совпадает с множеством всех замкнутых J-инвариантных подпространств $H^{-\infty}(G)$. Отсюда следует, что $H^{-\infty}(G) \backslash I_0$ является множеством всех циклических векторов оператора J в $H^{-\infty}(G)$.

Одними из первых работ, в которых изучалось пространство $H^{-\infty}(G)$, являются статьи Б. Коренблюма [12, 13] (в случае, когда G — открытый единичный круг). В них исследованы нулевые множества функций из $H^{-\infty}(G)$, изучен соответствующий класс мероморфных функций, получено аналитическое описание замкнутых идеалов алгебры

$H^{-\infty}(G)$ с поточечным умножением. Интерес к этому пространству вызван, в частности, и тем, что его аналоги для областей в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) используются в проблеме граничных значений в смысле распределений (см. статью Э. Дж. Штраубе [14]). Цикл исследований, связанных с пространством $H^{-\infty}(G)$ для области G в $\mathbb{C}^n$ при $n \geqslant 1$ проведен А. В. Абаниным, Ле Хай Хоем и Р. Ишимурой (см., например, [15–19] и библиографию в этих работах). Он связан с описанием сопряженного пространства, изучением разложений в ряды экспонент, с достаточными множествами, с операторами свертки.

2. Основные пространства, произведение Дюамеля и его свойства

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$. Через $H(G)$ будем обозначать пространство всех функций, голоморфных в G, с топологией равномерной сходимости на компактах в G. Полагаем $\overline{B}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant r\}$, $a \in \mathbb{C}$, $r \geqslant 0$; $d(z) = \inf_{t \in \partial G} |z-t|$, $z \in G$. Здесь ∂G — граница области G. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим банахово пространство

$$H^{-n}(G) := \left\{ f(z) \in H(G) : \|f\|_n := \sup_{z \in G} |f(z)|(d(z))^n < +\infty \right\}$$

с нормой $\|\cdot\|_n$. Введем в пространстве $H^{-\infty}(G) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H^{-n}(G)$ голоморфных в G функций полиномиального роста вблизи границы G топологию индуктивного предела последовательности пространств $H^{-n}(G)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в $H^{-\infty}(G)$.

Следующий результат получен в [20].

Лемма 1. *Оператор дифференцирования $f \mapsto f'$ непрерывно отображает $H^{-n}(G)$ в $H^{-n-1}(G)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, а значит, $H^{-\infty}(G)$ в $H^{-\infty}(G)$.*

Далее предполагается, что G — ограниченная область, звездная относительно точки 0, т. е. для любого $z \in G$ отрезок $[0, z]$ содержится в G. Для $f, g \in H(G)$ произведение Дюамеля $f * g$ определяется равенством (интеграл берется по отрезку $[0, z]$)

$$(f * g)(z) := \frac{d}{dz} \int_0^z f(t) g(z-t)\, dt, \quad z \in G.$$

Это произведение можно представить и в таком виде:

$$(f * g)(z) = g(0) f(z) + \int_0^z f(t) g'(z-t)\, dt, \quad z \in G.$$

Полагаем

$$(f \circledast g)(z) := \int_0^z f(t) g(z-t) dt, \quad z \in G,\ f, g \in H^{-\infty}(G).$$

Функции $f * g$ и $f \circledast g$ голоморфны в G.

Далее $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f_n(z) := \frac{1}{n!} z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, $J(f)(z) := \int_0^z f(t)\, dt$, $f \in H^{-\infty}(G)$, $z \in G$. Оператор интегрирования J линеен и непрерывен в $H^{-\infty}(G)$ (см. следствие 1). Отметим выполняющиеся в G равенства

$$J(f * g) = f \circledast g, \quad J(f) * g = f \circledast g, \quad f, g \in H^{-\infty}(G), \tag{1}$$

$$f_m * f_n = f_{m+n}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0, \tag{2}$$

$$J^n(f) = f_n * f, \quad f \in H^{-\infty}(G),\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{3}$$

Следующий результат доказан в [21, лемма 3].

Лемма 2. *Если G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, звездная относительно точки 0, то $d(qz) \geqslant qd(z)$ для любых $z \in G$, $q \in [0, 1]$.*

Лемма 3. *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, звездная относительно точки 0; $r_0 > 0$ такое, что $\overline{B}(0, r_0) \subseteq G$. Тогда существует $q_0 \in (0, 1)$, для которого для любых $z \in G \setminus \overline{B}(0, r_0)$ и $t \in [0, z] \setminus \overline{B}(0, r_0)$, выполняется неравенство $d(t) \geqslant q_0 d(z)$.*

$\lhd$ Так как область G ограниченная, то существует $R > r_0$, для которого $G \subseteq \overline{B}(0, R)$. Для любой точки $z \in G \setminus \overline{B}(0, r_0)$, любого $t \in G \setminus \overline{B}(0, r_0)$, лежащего на отрезке $[0, z]$, выполняется неравенство

$$\frac{|t|}{|z|} \geqslant \frac{r_0}{R} =: q_0.$$

Значит, $t = qz$, где $q \geqslant q_0$. По лемме 2 $d(t) \geqslant q_0 d(z)$. $\rhd$

Ниже будут использоваться области, обладающие усиленным свойством звездности. Ограниченная область G в $\mathbb{C}$ является строго звездной относительно точки 0, если для любого $q \in [0, 1)$ множество $q\overline{G}$ содержится в G. При этом $\overline{G}$ — замыкание G в $\mathbb{C}$. Ясно, что ограниченная область G в $\mathbb{C}$, строго звездная относительно 0, является звездной относительно 0. Если G строго звездная относительно точки 0, то любой луч с началом в 0 пересекает границу ∂G области G в единственной точке и выполняются равенства

$$G = \bigcup_{w \in \partial G} [0, w), \quad \overline{G} = \bigcup_{w \in \partial G} [0, w].$$

Теорема 1. *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область, звездная относительно точки 0.*

(i) *Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $f \in H^{-m}(G)$, $g \in H^{-n}(G)$*

$$\|f \circledast g\|_{m+n} \leqslant C \|f\|_m \|g\|_n,$$

а если G строго звездная относительно точки 0, то

$$\|f \circledast g\|_{\max\{m,n\}} \leqslant C \|f\|_m \|g\|_n.$$

(ii) *Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ существует постоянная $B > 0$ такая, что для всех $f \in H^{-m}(G)$, $g \in H^{-n}(G)$*

$$\|f * g\|_{m+n+1} \leqslant B \|f\|_m \|g\|_n,$$

а если G строго звездная относительно точки 0, то

$$\|f * g\|_{\max\{m,n\}+1} \leqslant B \|f\|_m \|g\|_n.$$

$\lhd$ Докажем утверждение (i). Выберем r_0, r_1 так, что $0 < r_0 < r_1$ и $\overline{B}(0, r_1) \subset G$. Определим $q_0 \in (0, 1)$ по лемме 3. Пусть $t \in [0, z]$, $z \in G$. Если $|t| \geqslant r_0$, то $d(t) \geqslant q_0 d(z)$. Если $|t| < r_0$, то

$$d(t) \geqslant r_1 - r_0 \geqslant \frac{r_1 - r_0}{R}\, d(z)$$

для $R > 0$ такого, что $G \subset \overline{B}(0, R)$. Значит, для любых $z \in G$, $t \in [0, z]$ выполняется неравенство

$$d(t) \geqslant \gamma_0 d(z), \tag{4}$$

где $\gamma_0 := \min\left\{q_0; \frac{r_1 - r_0}{R}\right\}$. Возьмем $m, n \in \mathbb{N}$, $f \in H^{-m}(G)$, $g \in H^{-n}(G)$. Для $z \in G$

$$|(f \circledast g)(z)| = \left| \int_0^z f(t)g(z-t)\,dt \right| \leqslant \|f\|_m \|g\|_n \, |z| \sup_{t \in [0,z]} \frac{1}{(d(t))^m (d(z-t))^n}. \tag{5}$$

Неравенства (4) и (5) влекут, что

$$|(f \circledast g)(z)| (d(z))^{m+n} \leqslant \frac{R}{(\gamma_0)^{m+n}} \|f\|_m \|g\|_n, \quad z \in G,$$

а значит,

$$\|f \circledast g\|_{m+n} \leqslant \frac{R}{(\gamma_0)^{m+n}} \|f\|_m \|g\|_n.$$

Предположим теперь, что область G строго звездная относительно точки 0. Как и выше, выберем $R \geqslant 1$, для которого $G \subseteq \overline{B}(0, R)$. Введем компакт $K := \frac{1}{2}\overline{G}$. Он содержится в G, 0 является его внутренней точкой и

$$0 < \inf_{\substack{u \in K, \\ v \in \partial G}} |u - v| =: \delta.$$

Выполняется равенство $K := \bigcup_{w \in \partial G} [0, \frac{w}{2}]$. Возьмем $\rho > 0$, для которого $\overline{B}(0, \rho) \subseteq K$.

Если $z \in [0, w)$ и $z \notin \left[0, \frac{w}{2}\right]$ для $w \in \partial G$, то для любой точки $t \in [0, z]$ не более одной точки t и $z - t$ лежит в $\left(\frac{w}{2}, w\right)$. Действительно, если обе эти точки лежат в $\left(\frac{w}{2}, w\right)$, то $z = t + (z - t)$ не принадлежит G.

Пусть $z \in G$, $z \in [0, w)$, $w \in \partial G$, и $z \notin \left[0, \frac{w}{2}\right]$. Предположим, что $t \in [0, z]$ и $t \in \left(\frac{w}{2}, w\right)$. Тогда $z - t \in K$ и $d(z - t) \geqslant \delta$. Поскольку $t = qz$ для некоторого $q \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, то $d(t) \geqslant \frac{1}{2} d(z)$ по лемме 2. Если $t \in [0, z]$, $t \in K$ и $z - t \in \left(\frac{w}{2}, wb\right)$, то $d(t) \geqslant \delta$ и $d(z - t) \geqslant \frac{1}{2}\, d(z)$. Если обе точки t и $z - t$ находятся в K, то $d(t) \geqslant \delta$ и $d(z - t) \geqslant \delta$. В случае $z \in \left[0, \frac{w}{2}\right]$ для $t \in [0, z]$ также выполняются неравенства $d(t) \geqslant \delta$ и $d(z - t) \geqslant \delta$. Поэтому для любых $z \in G$, $t \in [0, z]$

$$(d(t))^m \ (d(z-t))^n \geqslant \min\left\{ \frac{(d(z))^m}{2^m} \delta^n; \, \delta^m \frac{(d(z))^n}{2^n}; \, \delta^{m+n} \right\} =: \alpha(z). \tag{6}$$

Положим

$$\beta = \beta(m, n) := \min\left\{ \frac{\delta^n}{2^m}; \, \frac{\delta^m}{2^n}; \, \delta^{m+n} \right\}.$$

Пусть $s := \max\{m; n\}$. Тогда, если $d(z) \in (0, 1]$,

$$\alpha(z) \geqslant \beta \, (d(z))^s \, .$$

Пусть $d(z) \geqslant 1$. Поскольку $d(\xi) \leqslant R$ для любого $\xi \in G$, то

$$\alpha(z) = (d(z))^s \min\left\{ \frac{\delta^n}{2^m} (d(z))^{m-s}; \, \frac{\delta^m}{2^n} (d(z))^{n-s}; \, \frac{\delta^{m+n}}{(d(z))^s} \right\} \geqslant \omega (d(z))^s,$$

где

$$\omega = \omega(m, n) := \min\left\{ \frac{\delta^n}{2^m R^{s-m}}; \, \frac{\delta^m}{2^n R^{s-n}}; \, \frac{\delta^{m+n}}{R^s} \right\} > 0$$

и $\omega \leqslant \beta$. Значит, для любого $z \in G$ выполняется неравенство

$$\alpha(z) \geqslant \omega \big(d(z)\big)^s. \tag{7}$$

Итак, вследствие неравенств (5)–(7)

$$|(f \circledast g)(z)| \leqslant \|f\|_m \|g\|_n \frac{|z|}{\omega\,(d(z))^s}, \quad z \in G. \tag{8}$$

Поэтому

$$\|f \circledast g\|_s = \sup_{z\in G} |(f \circledast g)(z)|\,(d(z))^s \leqslant \frac{R}{\omega}\|f\|_m\|g\|_n.$$

Утверждение (ii) следует из (i) и леммы 1. ▷

Для $g \in H^{-\infty}(G)$ введем оператор Дюамеля

$$S_g(f) := f * g, \quad f \in H^{-\infty}(G).$$

Следствие 1. *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область, звездная относительно точки* 0; $g \in H^{-\infty}(G)$.

(i) *Линейный оператор S_g непрерывно отображает $H^{-\infty}(G)$ в $H^{-\infty}(G)$.*

(ii) *Оператор интегрирования J линеен и непрерывен в $H^{-\infty}(G)$.*

Из теоремы 1, равенств (2) и плотности множества всех многочленов в $H^{-\infty}(G)$ вытекает

Следствие 2. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, звездная относительно точки* 0. *Тогда $(H^{-\infty}(G), *)$ — ассоциативная и коммутативная топологическая алгебра. Функция, тождественно равная* 1, *является ее единицей.*

При этом используются следующие понятия. *Алгебра* — это локально выпуклое пространство $\mathscr{A}$ над $\mathbb{C}$, в котором введено умножение, т. е. билинейное отображение $\cdot$ из $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$ в $\mathscr{A}$. Алгебра $(\mathscr{A}, \cdot)$ называется *топологической*, если отображение $\cdot : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ непрерывно.

3. Описание коммутанта оператора интегрирования

Пусть $\{J\}'$ — коммутант J в алгебре $\mathscr{L}(H^{-\infty}(G))$ всех линейных непрерывных в $H^{-\infty}(G)$ операторов с умножением — композицией операторов:

$$\{J\}' = \bigl\{A \in \mathscr{L}(H^{-\infty}(G)) : \; AJ = JA \;\text{ в }\; H^{-\infty}(G)\bigr\}.$$

Множество $\{J\}'$ является подалгеброй $\mathscr{L}(H^{-\infty}(G))$. Опишем его. Далее $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная 1.

Теорема 2. *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, звездная относительно точки* 0.

(i) *Если $A \in \{J\}'$, то существует единственная функция $g \in H^{-\infty}(G)$, для которой $A = S_g$.*

(ii) *Для любой функции $g \in H^{-\infty}(G)$ оператор S_g принадлежит $\{J\}'$.*

◁ Утверждение (ii) вытекает из следствия 1 и равенств (1).

(i): Положим $g := A(\mathbf{1})$. Тогда $A(\mathbf{1}) = \mathbf{1} * g$. Рассуждая по индукции, для любого $n \in \mathbb{N}$ получим:

$$A(f_n) = nA(J(f_{n-1})) = nJ(A(f_{n-1})) = nJ(f_{n-1} * g) = n(J(f_{n-1}) * g) = f_n * g.$$

Из плотности множества всех многочленов в $H^{-\infty}(G)$ и следствия 2 вытекает, что $A(f) = f * g$ для любой функции $f \in H^{-\infty}(G)$. Поскольку $\mathbf{1} * h = h$ для всех $h \in H^{-\infty}(G)$, то такая функция g единственна. ▷

Утверждения подобного рода для других пространств хорошо известны. И. Райчинов [4] доказал такое представление для операторов из коммутанта J для пространства всех функций, голоморфных в звездной относительно точки 0 области в $\mathbb{C}$, Н. И. Нагнибида [5, теорема 1] — для оператора $f \mapsto \int_\alpha^z f(t)\,dt$ в пространстве $H(G)$ для области G в $\mathbb{C}$, звездной относительно точки α, И. Димовски [7, теорема 1.1.2] — для пространств функций, непрерывных и локально интегрируемых на промежутке Δ в $\mathbb{R}$, содержащем точку 0.

Теорема 2 и ассоциативность умножения $*$ влекут

Следствие 3. *Отображение $g \mapsto S_g$ является изоморфизмом алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$ на алгебру $\{J\}'$.*

4. Обратимые элементы алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$ и обратимость оператора Дюамеля

В этой части идет речь об $*$-обратимости и обратимости S_g в $H^{-\infty}(G)$. Ниже будем использовать метод, идущий от [9, гл. 5, § 26], [1, теорема, с. 212].

Лемма 4. *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{G}$, строго звездная относительно точки 0; $h \in H^{-\infty}(G)$, $h(0) = 0$. Тогда функция $f = \mathbf{1} - h$ является $*$-обратимой.*

$\lhd$ Покажем, что существует функция $u \in H^{-\infty}(G)$, для которой $f * u = \mathbf{1}$. Пусть $h \in H^{-n}(G),\ n \in \mathbb{N}$. По лемме 1 $h' \in H^{-n-1}(G)$. Положим

$$h^{[0]} := \mathbf{1}, \quad h^{[s+1]} := h^{[s]} * h, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

При этом $h^{[1]} = h$. Для $s \in \mathbb{N}_0$, $z \in G$

$$h^{[s+1]}(z) = h(0)h^{[s]}(z) + \int\limits_0^z h^{[s]}(t)h'(z-t)\,dt = \int\limits_0^z h^{[s]}(t)h'(z-t)\,dt.$$

Пусть $\omega = \omega(n+1, n+1) > 0$ такое, как при доказательстве теоремы 1. Вследствие неравенства (8) для любого $z \in G$

$$\left|h^{[2]}(z)\right| = \left|\int\limits_0^z h(t)h'(z-t)\,dt\right| \leqslant \|h\|_{n+1}\|h'\|_{n+1}\frac{|z|}{\omega\left(d(z)\right)^{n+1}}.$$

Покажем по индукции, что для $s \geqslant 2$

$$\left|h^{[s]}(z)\right| \leqslant \|h\|_{n+1}\left(\|h'\|_{n+1}\right)^{s-1}\frac{|z|^{s-1}}{\omega^{s-1}(s-1)!\left(d(z)\right)^{n+1}}, \quad z \in G. \tag{9}$$

При $s = 2$ это верно. Пусть (9) верно для некоторого $s \geqslant 2$. Тогда $h^{[s]} \in H^{-n-1}(G)$. Вследствие неравенств (6) и (7) для любых $z \in G$, $t \in [0, z]$

$$\begin{aligned}|h^{[s]}(t)h'(z-t)| &\leqslant \|h\|_{n+1}\left(\|h'\|_{n+1}\right)^{s-1}\frac{|t|^{s-1}}{\omega^{s-1}(s-1)!}\|h'\|_{n+1}\frac{1}{\left(d(t)\right)^{n+1}\left(d(z-t)\right)^{n+1}} \\ &\leqslant \|h\|_{n+1}\left(\|h'\|_{n+1}\right)^{s}\frac{1}{\omega^{s}(s-1)!\left(d(z)\right)^{n+1}}|t|^{s-1}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\left|h^{[s+1]}(z)\right| = \left|\int\limits_0^z h'(z-t)\,h^{[s]}(t)\,dt\right|$$

$$\leqslant \|h\|_{n+1}\left(\|h'\|_{n+1}\right)^s \frac{1}{\omega^s(s-1)!(d(z))^{n+1}}\int\limits_0^{|z|} r^{s-1}dr = \|h\|_{n+1}\left(\|h'\|_{n+1}\right)^s \frac{|z|^s}{\omega^s s!\,(d(z))^{n+1}}.$$

Значит, неравенство (9) выполняется и для $s+1$. Из него вытекает, что

$$\|h^{[s]}\|_{n+1} \leqslant \|h\|_{n+1}\bigl(\|h'\|_{n+1}\bigr)^{s-1}\frac{R^s}{\omega^{s-1}s!}, \quad s \geqslant 2,$$

где $R \in [1,+\infty)$ такое, что $G \subseteq \overline{B}(0,R)$. Поэтому ряд $\sum_{s=0}^{\infty} h^{[s]}$ абсолютно сходится в банаховом пространстве $H^{-n-1}(G)$ к функции u такой, что $(1-h)*u = \mathbf{1}$. $\rhd$

Теорема 3. *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, строго звездная относительно точки 0. Функция $g \in H^{-\infty}(G)$ обратима в $(H^{-\infty}(G),*)$ тогда и только тогда, когда $g(0) \neq 0$.*

$\lhd$ Если $g(0) \neq 0$, то элемент g обратим в $(H^{-\infty}(G),*)$ по лемме 4.

Пусть $g(0)=0$. Тогда $f*g = f \circledast g'$ и $(f*g)(0)=0$ для любой функции $f \in H^{-\infty}(G)$. Это влечет $*$-необратимость g. $\rhd$

Следствие 4. *Пусть G — ограниченная строго звездная относительно точки 0 область в $\mathbb{C}$, $g \in H^{-\infty}(G)$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *Оператор $S_g : H^{-\infty}(G) \to H^{-\infty}(G)$ имеет линейный непрерывный обратный.*

(ii) *Оператор $S_g : H^{-\infty}(G) \to H^{-\infty}(G)$ сюръективен.*

(iii) $g(0) \neq 0$.

$\lhd$ (iii)$\Rightarrow$(i): Пусть $g(0) \neq 0$. По лемме 4 существует функция $v \in H^{-\infty}(G)$, для которой $g*v = \mathbf{1}$. Поэтому по следствию 3 $S_{\mathbf{1}} = S_{g*v} = S_g S_v$. Так как $S_{\mathbf{1}}$ — тождественный оператор, то S_v — линейный непрерывный обратный к $S_g : H^{-\infty}(G) \to H^{-\infty}(G)$.

Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) очевидна.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Пусть $g(0)=0$. Тогда для $f \in H^{-\infty}(G)$

$$S_g(f)(z) = \int\limits_0^z f(t)g'(z-t)\,dt.$$

Значит, $S_g(f)(0) = 0$ для любой функции $f \in H^{-\infty}(G)$. Поэтому оператор $S_g : H^{-\infty}(G) \to H^{-\infty}(G)$ не является сюръективным. $\rhd$

Теорема 3 ранее была доказана Л. Бергом [9, гл. 5, § 26] для пространства всех непрерывно дифференцируемых функций на $[0,+\infty)$, Н. Уигли [1] — для $H(G)$ в случае, когда область $G \subset \mathbb{C}$ звездна относительно точки 0, следствие 4 — Р. Тапдигоглу и Б. Т. Торебеком [8] для $C^\infty[0,1]$, в [10, следствие 4.1] для пространств бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций на интервале или отрезке в $\mathbb{R}$, содержащем 0 (здесь отмечены результаты для ненормируемых пространств).

Следствие 5. *Пусть G — ограниченная строго звездная относительно точки 0 область в $\mathbb{C}$, $g \in H^{-\infty}(G)$, $n \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}(0) = 0$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $g^{(n)}(0) \neq 0$. Тогда $S_g = J^n S_h$, где $h = g^{(n)}$ и S_h — изоморфизм $H^{-\infty}(G)$.*

$\lhd$ Поскольку $g = J^n(h)$, то $g = f_n * h$ в силу равенства (3). Учитывая следствие 3, получим, что $S_g = S_{f_n} S_h = J^n S_h$. По следствию 4 оператор S_h является изоморфизмом $H^{-\infty}(G)$. $\rhd$

5. Идеалы алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$, инвариантные подпространства и циклические векторы оператора интегрирования

Ниже предполагается, что G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, строго звездная относительно точки 0.

Теорема 4. *Для любого $m \in \mathbb{N}_0$ множество*

$$I_m := \left\{ f \in H^{-\infty}(G) : \, f^{(k)}(0) = 0, \; 0 \leqslant k \leqslant m \right\}$$

является собственным замкнутым идеалом алгебры $(H^{-\infty}(G), *)$.

Любой собственный замкнутый идеал $(H^{-\infty}(G), *)$ совпадает с некоторым множеством I_m.

$\lhd$ Для любой функции $f \in I_m$, для $h \in H^{-\infty}(G)$ вследствие теоремы 2

$$f * h = J^{m+1}\left(f^{(m+1)}\right) * h = J^{m+1}\left(f^{(m+1)} * h\right),$$

а значит, $f * h \in I_m$. Кроме того, I_m — собственное замкнутое подпространство $H^{-\infty}(G)$. Следовательно, каждое множество I_m, $m \in \mathbb{N}_0$, является собственным замкнутым идеалом $(H^{-\infty}(G), *)$.

Пусть I — собственный замкнутый идеал $(H^{-\infty}(G), *)$. Поскольку каждый элемент I $*$-необратим, то $I \subseteq I_0$ по теореме 3. Выберем наименьшее $m \in \mathbb{N}_0$, для которого $f^{(k)}(0) = 0$, $0 \leqslant k \leqslant m$, для любой функции $f \in I$, и функцию $h \in I$ такую, что $h^{(m+1)}(0) \neq 0$. Пусть $f \in H^{-\infty}(G)$. Вследствие теоремы 3 существует функция $v \in H^{-\infty}(G)$, для которой $f = h^{(m+1)} * v$. Поэтому

$$J^{m+1}(f) = J^{m+1}\left(h^{(m+1)}\right) * v = h * v \in I.$$

Значит, $I_m = J^{m+1}\left(H^{-\infty}(G)\right) = I$. $\rhd$

Теорема 5. *Семейство $\{I_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ совпадает с множеством всех собственных замкнутых J-инвариантных подпространств $H^{-\infty}(G)$.*

$\lhd$ Пусть H — собственное замкнутое J-инвариантное подпространство $H^{-\infty}(G)$, $f \in H$. Поскольку $f_n * f = J^n(f) \in H$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$ и множество всех многочленов плотно в $H^{-\infty}(G)$, то $g * f \in H$ для каждой функции $g \in H^{-\infty}(G)$. Значит, H — собственный замкнутый идеал $(H^{-\infty}(G), *)$.

Ясно, что любое I_m, $m \in \mathbb{N}_0$, является собственным замкнутым J-инвариантным подпространством $(H^{-\infty}(G)$. $\rhd$

Структура решетки замкнутых J-инвариантных подпространств $H^{-\infty}(G)$, описанная в теореме 5, позволяет определить и множество циклических векторов J. При этом элемент x локально выпуклого пространства E называется *циклическим вектором* линейного непрерывного в E оператора L, если замыкание линейной оболочки орбиты $\{L^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ совпадает с E. Ненулевой элемент $x \in E$ является циклическим вектором L в том и только в том случае, когда x не принадлежит ни одному замкнутому собственному L-инвариантному подпространству E. Этот факт и теорема 5 влекут

Следствие 6. *Функция $f \in H^{-\infty}(G)$ является циклическим вектором оператора J в $H^{-\infty}(G)$ тогда и только тогда, когда $f(0) \neq 0$.*

Литература

1. *Wigley N.* The Duhamel product of analytic functions // Duke Math. J.—1974.—Vol. 41.—P. 211–217. DOI: 10.1215/S0012-7094-74-04123-4.
2. *Караев М. Т.* Алгебры Дюамеля и их приложения // Функц. анализ и его прил.—2018.—Т. 52, вып. 1.—С. 3–12. DOI: 10.4213/faa3481.
3. *Biswas A., Lambert A., Petrovic S.* Extended eigenvalues and the Volterra operator // Glasgow Math. J.—2002.—Vol. 44.—P. 521–534. DOI: 10.1017/S001708950203015X.
4. *Райчинов И.* О линейных операторах, перестановочных с операцией интегрирования // Математический анализ и его приложения. Т. 2.—Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1970.—С. 63–72.
5. *Нагнибида Н. И.* К вопросу об описании коммутантов оператора интегрирования в аналитических пространствах // Сибирский матем. журн.—1981.—Т. 22, № 5.—С. 127–131.
6. *Коробейник Ю. Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах.—Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1983.—160 с.
7. *Dimovski I.* Convolutional Calculus.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990.—184 p.
8. *Tapdigoglu R., Torebek B. T.* Commutant and Uniqueness of Solutions of Duhamel Equations // Bull. Malays. Math. Sci. Soc.—2021.—Vol. 44, issue 2.—P. 705–710. DOI: 10.1007/s40840-020-00972-1.
9. *Berg L.* Einführung in die Operatorenrechnung.—Berlin: VEB Duetscher Verlag der Wissenschaften, 1965.—274 p.
10. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об обратимости оператора Дюамеля в пространствах ультрадифференцируемых функций // Уфимск. матем. журн.—2023.—Т. 15, № 4.—С. 61–74.
11. *Karaev M. T.* New proof of Nagnibida's theorem // J. of Function Spaces and Appl.—2006.—Vol. 4, № 1.—P. 85–90. DOI: 10.1155/2006/524947.
12. *Korenblum B.* An extension of the Nevanlinna theory // Acta Math.—1975.—Vol. 135.—P. 187—219. DOI: 10.1007/BF02392019.
13. *Korenblum B.* A Beurling-type theorem // Acta Math.—1977.—Vol. 138.—P. 265—293. DOI: 10.1007/BF02392318.
14. *Straube E. J.* Harmonic and analytic functions admitting a distribution boundary value // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.—1989.—Vol. 11, № 4.—P. 559–591.
15. *Abanin A. V., Khoi Le Hai.* Dual of the function algebra $A^{-\infty}(D)$ and representation of functions in Dirichlet series // Proc. Amer. Math. Soc.—2010.—Vol. 138.—P. 3623–3635. DOI: 10.1090/S0002-9939-10-10383-9.
16. *Abanin A. V., Khoi Le Hai.* Pre-dual of the Function Algebra $A^{-\infty}(D)$ and Representation of Functions in Dirichlet Series // Complex Anal. Oper. Theory.—2011.—Vol. 5.—P. 1073–1092. DOI: 10.1007/s11785-010-0047-8.
17. *Abanin A. V., Ishimura R., Khoi Le Hai.* Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains // Ark. Mat.—2012.—Vol. 50.—P. 1–22. DOI: 10.1007/s11512-011-0146-4.
18. *Abanin A. V., Ishimura R., Khoi Le Hai.* Extension of solutions of convolution equations in spaces of holomorphic functions with polynomial growth in convex domains // Bull. Sci. Math.—2012.—Vol. 136, Issue 1.—P. 96–110. DOI: 10.1016/j.bulsci.2011.06.002.
19. *Абанин А. В., Хой Ле Хай.* Линейный непрерывный правый обратный оператор для оператора свертки в пространствах голоморфных функций полиномиального роста // Изв. вузов. Математика.—2015.—№ 1.—С. 3–13.
20. *Melikhov S. N.* (DFS)-spaces of holomorphic functions invariant under differentiation // J. Math. Anal. Appl.—2004.—Vol. 297, issue 2.—P. 577—586. DOI: 10.1016/j.jmaa.2004.03.030.
21. *Варзиев В. А., Мелихов С. Н.* О сопряженном к пространству аналитических функций полиномиального роста вблизи границы // Владикавк. матем. журн.—2008.—Т. 10, № 4.—С. 17—22.

Статья поступила 31 октября 2024 г.

Иванова Ольга Александровна
Южный федеральный университет,
доцент кафедры математического анализа и геометрии
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `neo_ivolga@mail.ru`

Мелихов Сергей Николаевич
Южный федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики,
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: snmelihov@yandex.ru, snmelihov@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0002-5895-9607

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 44–55

SPACE OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS OF POLYNOMIAL GROWTH AS LOCAL ALGEBRA

Ivanova, O. A.[1] and Melikhov, S. N.[1,2]
[1] Southern Federal University,
8 a Mil'chakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: neo_ivolga@mail.ru, snmelihov@yandex.ru, snmelihov@sfedu.ru

Abstract. Let G be a domain in the complex plane, star-shaped with respect to the point 0, $H^{-\infty}(G)$ be the space of holomorphic functions in G of polynomial growth near the boundary of G. The Duhamel product $*$ is introduced in it. This product is used in operational and operator calculus, in the spectral theory, in the problem of the spectral multiplicity of a linear operator, in boundary value problems. It is shown that $H^{-\infty}(G)$ with it is a unital topological algebra. The integration operator $J(f)(z) = \int_0^z f(t)\,dt$ acts linearly and continuously in $H^{-\infty}(G)$. It is proved that all linear continuous operators in $H^{-\infty}(G)$ that commute with J, are represented as $S_g(f) = f * g$, where g is a fixed function from $H^{-\infty}(G)$. In the case where G is strictly star-shaped with respect to zero, a criterion for the invertibility of an element of the algebra $H^{-\infty}(G)$ and a criterion for the operator S_g to have the continuous linear inverse are proved. It is shown that every nonzero operator from the commutator subgroup J is a composition of the power of the operator J and some isomorphism from the aforementioned commutator subgroup. In the proving of $*$-invertibility the Neumann series is used, usually applied in Banach spaces. In non-normable locally convex spaces of functions it was previously used by L. Berg, N. Wigley, and M. T. Karaev. All closed ideals of the algebra $(H^{-\infty}(G), *)$, closed invariant subspaces and cyclic vectors of J in $H^{-\infty}(G)$ are described. From the obtained results it follows that the operator J is unicellular and the algebra $(H^{-\infty}(G), *)$ is local. The only maximal ideal in it is the set of all $*$-irreversible elements.

Keywords: Duhamel product, integration operator, space of holomorphic functions of polynomial growth.

AMS Subject Classification: 46A10, 47B91, 46H10.

For citation: *Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N.* Space of Holomorphic Functions of Polynomial Growth as Local Algebra, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 44–55 (in Russian). DOI: 10.46698/r2980-5208-7458-m.

References

1. *Wigley, N.* The Duhamel Product of Analytic Functions, *Duke Mathematical Journal*, 1974, vol. 41, pp. 211–217. DOI: 10.1215/S0012-7094-74-04123-4.
2. *Karaev, M. T.* Duhamel Algebras and Applications, *Functional Analysis and Its Applications*, 2018, vol. 52, pp. 1–8. DOI: 10.1007/s10688-018-0201-z.
3. *Biswas, A., Lambert, A. and Petrovic, S.* Extended Eigenvalues and the Volterra Operator, *Glasgow Mathematical Journal*, 2002, vol. 44, pp. 521–534. DOI: 10.1017/S001708950203015X.
4. *Raichinov, I.* On Linear Operators Commuting with the Integration Operation, *Matematicheskii analiz i ego prilozheniya. T. 2* [Mathematical Analysis and its Applications. Vol. 2], Rostov-on-Don, RSU, 1970, pp. 63–72 (in Russian).

5. *Nagnibida, N. I.* On the Question of the Description of the Commutants of an Integration Operator in Analytic Spaces, *Siberian Mathematical Journal*, 1981, vol. 22, no. 5, pp. 748–752. DOI: 10.1007/BF00968071.
6. *Korobeinik, Yu. F. Operatory sdviga na chislovykh semeystvakh* [Shift Operators on Numerical Families], Rostov-on-Don, RSU, 1983, 160 p. (in Russian).
7. *Dimovski, I. Convolutional Calculus*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1990, 184 p.
8. *Tapdigoglu, R. and Torebek, B. T.* Commutant and Uniqueness of Solutions of Duhamel Equations, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2020, vol. 44, no. 2, pp. 705–710. DOI: 10.1007/s40840-020-00972-1.
9. *Berg, L. Einführung in die Operatorenrechnung*, Berlin, VEB Duetscher Verlag der Wissenschaften, 1965, 274 p.
10. *Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N.* On Invertibility of Duhamel Operator in Spaces of Ultradifferentiable Functions, *Ufa Mathematical Journal*, 2023, vol. 15, no. 4, pp. 62–75. DOI: 10.13108/2023-15-4-62.
11. *Karaev, M. T.* New Proof of Nagnibida's Theorem, *Journal of Function Spaces and Applications*, 2008, vol. 4, no. 1, pp. 85–90. DOI: 10.1155/2006/524947.
12. *Korenblum, B.* An Extension of the Nevanlinna Theory, *Acta Mathematica*, 1975, vol. 135, pp. 187—219. DOI: 10.1007/BF02392019.
13. *Korenblum, B.* A Beurling-Type Theorem, *Acta Mathematica*, 1977, vol. 138, pp. 265—293. DOI: 10.1007/BF02392318.
14. *Straube, E. J.* Harmonic and Analytic Functions Admitting a Distribution Boundary Value, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa–Classe di Scienze*, 1989, vol. 11, no. 4, pp. 559–591.
15. *Abanin, A. V. and Khoi, Le Hai.* Dual of the function Algebra $A^{-\infty}(D)$ and Representation of Functions in Dirichlet Series, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2010, vol. 138, pp. 3623–3635. DOI: 10.1090/S0002-9939-10-10383-9.
16. *Abanin, A. V. and Khoi, Le Hai.* Pre-Dual of the Function Algebra $A^{-\infty}(D)$ and Representation of Functions in Dirichlet Series, *Complex Analysis and Operator Theory*, 2011, vol. 5, pp. 1073–1092. DOI: 10.1007/s11785-010-0047-8.
17. *Abanin A. V., Ishimura R. and Khoi Le Hai.* Convolution Operators in $A^{-\infty}$ for Convex Domains, *Arkiv för Matematik*, 2012, vol. 50, pp. 1–22. DOI: 10.1007/s11512-011-0146-4.
18. *Abanin, A. V., Ishimura, R. and Khoi, Le Hai.* Extension of Solutions of Convolution Equations in Spaces of Holomorphic Functions with Polynomial Growth in Convex Domains, *Bulletin des Sciences Mathematiques*, 2012, vol. 136, no. 1, pp. 96–110. DOI: 10.1016/j.bulsci.2011.06.002.
19. *Abanin, A. V. and Khoi, Le Hai.* Linear Continuous Right Inverse Operator for Convolution Operator in Spaces of Holomorphic Functions of Polynomial Growth, *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, no. 1, pp. 1–10. DOI: 10.3103/S1066369X15010016.
20. *Melikhov, S. N.* (DFS)-Spaces of Holomorphic Functions Invariant Under Differentiation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, vol. 297, no. 2, pp. 577–586. DOI: 10.1016/j.jmaa.2004.03.030.
21. *Varziev, V. A. and Melikhov, S. N.* On the Dual Space of the Space of Analytic Functions of Polynomial Growth Near the boundary, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2008, vol. 10, no. 4, pp. 17–22 (in Russian).

Received October 31, 2024

Olga A. Ivanova
Southern Federal University,
8 a Mil'chakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis and Geometry
E-mail: `neo_ivolga@mail.ru`

Sergey N. Melikhov
Southern Federal University,
8 a Mil'chakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Professor of the Department of Algebra and Discrete Mathematics;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Leading Researcher of the Department of Mathematical Analysis
E-mail: `snmelihov@yandex.ru`, `snmelihov@sfedu.ru`
https://orcid.org/0000-0002-5895-9607

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 56–69

УДК 517.53
DOI 10.46698/k4349-9424-9818-w

О ТИПЕ ПОЛИА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ[#]

К. Г. Малютин[1]

[1] Курский государственный университет,
Россия, 305000, Курск, ул. Радищева, 33
E-mail: malyutinkg@gmail.com

Посвящается 70-летию профессора
Абанина Александра Васильевича

Аннотация. Пусть f — целая функция, $M(r,f) = \max_{|z|=r}|f(z)|$ — максимум модуля функции f в круге $|z| \leqslant r$. В статье рассматриваются функции плотности максимума модуля функции f, которые вычисляются по формулам $M(\alpha) = \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{M(r+\alpha r,f)-M(r,f)}{r^{\rho(r)}}$, $\underline{M}(\alpha) = \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{M(r+\alpha r,f)-M(r,f)}{r^{\rho(r)}}$, $\alpha \geqslant 0$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Валирона, $\lim_{r\to+\infty}\rho(r) = \varrho \geqslant 0$. Доказывается, что $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$ являются ϱ-полуаддитивными функциями. Вводится определение типа $\sigma_p(f)$ и минимального типа $\underline{\sigma}_p(f)$ в смысле Полиа функции f по формулам $\sigma_p(f) = \lim_{\alpha\to+0}\frac{M(\alpha)}{\alpha}$, $\underline{\sigma}_p(f) = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\underline{M}(\alpha)}{\alpha}$, которые дают большую информацию о поведении функции, чем ее тип и нижний тип в классическом смысле. Это определение является распространением понятий максимальной и минимальной плотности последовательности положительных чисел, введенных Полиа, который доказал их существование, если рост считающей функции последовательности чисел имеет нормальный тип относительно r. Доказывается существование величин $\sigma_p(f)$ и $\underline{\sigma}_p(f)$, если рост $\ln|f|$ имеет тип не выше чем нормальный относительно $r^{\rho(r)}$ в классическом смысле, т. е. $\ln M(r,f) \leqslant Kr^{\rho(r)}$ при некотором $K > 0$. Рассматриваются некоторые свойства функций $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$.

Ключевые слова: целая функция, функция плотности, полуаддитивная функция, теорема Полиа, максимальный тип, минимальный тип.

AMS Subject Classification: 30D15, 30D20.

Образец цитирования: *Малютин К. Г.* О типе Полиа целой функции // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 56–69. DOI: 10.46698/k4349-9424-9818-w.

Введение

В теории роста целых и субгармонических функций и в других разделах математики часто используются функции плотности. Важной и часто цитируемой является теорема Полиа о существовании максимальной и минимальной плотности последовательности положительных чисел, полученная им в работе [1]. Функции плотности обладают некоторыми свойствами полуаддитивности. Теория полуаддитивных функций достаточно широко изложена в книге Хилле и Филлипс «Функциональный анализ и полугруппы» [2]. Поэтому естественно возникает вопрос о свойствах общих функций плотности

[#]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00006.

и связанных с ними полуаддитивных функциях. Одному из таких вопросов посвящено наше исследование.

Пусть $\rho(r)$, $r \in (0, +\infty)$, $\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \varrho$, $\varrho \in (-\infty, +\infty)$, — уточненный порядок в смысле Валирона. Число ϱ может быть произвольным вещественным числом. При изучении роста целых функций обычно ограничиваются условием $\varrho \geqslant 0$. Мы будем обозначать $V(r) = r^{\rho(r)}$. Пусть $L(r) = r^{-\varrho}V(r)$. Известно, например, из [3], что для любого $t \in (0, \infty)$ выполняется равенство

$$\lim_{r\to\infty} \frac{L(rt)}{L(r)} = 1. \tag{1}$$

Если для некоторой функции L выполняется равенство (1), то функция L называется *правильно меняющейся порядка ноль в смысле Караматы*. Теории медленно меняющихся функций посвящены книги [4, 5].

Зафиксируем некоторый уточненный порядок. Пусть $f(z)$ — целая функция,

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Тогда для нее по формулам

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{M(r,f)}{V(r)} := \sigma \in [0, \infty), \quad \varliminf_{r\to\infty} \frac{M(r,f)}{V(r)} := \underline{\sigma} \in [0, \infty)$$

можно определить тип σ и нижний тип $\underline{\sigma}$. Конечно, для произвольной целой функции f можно только утверждать, что $\sigma, \underline{\sigma} \in [0, \infty]$. Тип функции f — важная характеристика роста этой функции. Однако, значительно большую информацию о поведении f дают ее верхняя функция плотности $M(\alpha)$ и нижняя функция плотности $\underline{M}(\alpha)$, которые вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} M(\alpha) &= \varlimsup_{r\to\infty} \frac{M(r+\alpha r, f) - M(r,f)}{V(r)}, \quad \alpha \geqslant 0, \\ \underline{M}(\alpha) &= \varliminf_{r\to\infty} \frac{M(r+\alpha r, f) - M(r,f)}{V(r)}, \quad \alpha \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Из свойств верхнего и нижнего пределов и равенства (1) следует лемма.

Лемма 1. *Справедливы соотношения*

$$M(\alpha+\beta) \leqslant M(\alpha) + (1+\alpha)^{\varrho} M\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right), \tag{3}$$

$$M(\alpha+\beta) \geqslant M(\alpha) + (1+\alpha)^{\varrho} \underline{M}\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right), \tag{4}$$

$$\underline{M}(\alpha+\beta) \geqslant \underline{M}(\alpha) + (1+\alpha)^{\varrho} \underline{M}\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right), \tag{5}$$

$$\underline{M}(\alpha+\beta) \leqslant \underline{M}(\alpha) + (1+\alpha)^{\varrho} M\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right). \tag{6}$$

◁ Докажем, например, неравенство (4). Имеем

$$
\begin{aligned}
M(\alpha+\beta) &= \varlimsup_{r\to\infty} \frac{M((1+\alpha+\beta)\,r),f) - M(r,f)}{V(r)} \\
&= \varlimsup_{r\to\infty} \left\{ \frac{M((1+\alpha+\beta)\,r,f) - M((1+\alpha)\,r),f)}{V(r)} + \frac{M((1+\alpha)\,r,f) - M(r,f)}{V(r)} \right\} \\
&\geqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{M((1+\alpha+\beta)\,r,f)) - (M((1+\alpha)\,r,f))}{V(r)} + \varlimsup_{r\to\infty} \frac{M((1+\alpha)\,r,f) - M(r,f)}{V(r)} \\
&= \varliminf_{r\to\infty} \left\{ \frac{M\Big((1+\alpha)\left(1+\frac{\beta}{1+\alpha}\right)r,f\Big) - M((1+\alpha)\,r,f)}{V((1+\alpha)\,r)} \right. \\
&\qquad \left. \times \frac{V((1+\alpha)\,r)}{V(r)} \right\} + M(\alpha) = M(\alpha) + (1+\alpha)^{\varrho}\underline{M}\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right). \ \triangleright
\end{aligned}
$$

Функции, удовлетворяющие неравенствам (3) или (5), называются *ϱ-полуаддитивными.* Заметим еще, что $\underline{M}(\alpha) \leqslant M(\alpha)$. Обычно предполагается, что выполняется неравенство $\ln|f(r)| \leqslant KV(r)$ с некоторой константой $K > 0$. В этом случае функции $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$ ограничены на любом сегменте $[a,b] \subset [0,\infty)$. По различным причинам временами приходится отказываться от априорной оценки $\ln|f(r)| \leqslant KV(r)$. В этом случае необходимо считать, что функции $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$ принимают значения из расширенной вещественной полуоси $[0,\infty]$. При действиях с величинами из расширенной вещественной прямой в нашей работе предполагается, что соотношения $x = \infty - \infty$, $x \leqslant \infty - \infty$, $x \geqslant \infty - \infty$, справедливы для любого $x \in [-\infty,\infty]$. Неравенство (3) по своей структуре напоминает неравенство

$$\varphi(\alpha+\beta) \leqslant \varphi(\alpha) + \varphi(\beta). \tag{7}$$

Функции, удовлетворяющие неравенству (7), называются полуаддитивными. Полуаддитивные функции часто встречаются в различных вопросах математики. Они активно изучались, и их теория изложена в [2], где приведены многочисленные ссылки. В книге [2] рассматриваются измеримые полуаддитивные функции. Это ограничение естественно и не столь обременительно, если полуаддитивные функции рассматривать как первичные объекты, исходя из которых вести дальнейшие построения. Однако, в рассматриваемом нами случае требование измеримости $M(\alpha)$ не столь безобидно. Дело в том, что мы рассматриваем функцию $M(\alpha)$ как функцию плотности. А из измеримости функции $M(r,f)$ не следует, что ее функция плотности $M(\alpha)$ будет измеримой.

Верхняя функция плотности $M(\alpha)$ удовлетворяет условиям $M(0) = 0$ и (3). Однако, далеко не всякая функция $M(\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$, удовлетворяющая этим условиям, будет функцией плотности. Дело в том, что равенством (2) функцию $M(\alpha)$ можно определить при $\alpha > -1$, причем неравенство (3) будет выполняться и при таких α. Таким образом, всякая функция плотности $M(\alpha)$ продолжается как ϱ-полуаддитивная на полуось $(-1,\infty)$. Нетрудно подсчитать, что функция $M(\alpha)$ при отрицательных α определяется следующим образом:

$$M(\alpha) = -(1+\alpha)^{\varrho}\underline{M}\left(-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right), \quad \alpha \in (-1,0).$$

Аналогично,

$$\underline{M}(\alpha) = -(1+\alpha)^{\varrho}M\left(-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right), \quad \alpha \in (-1,0).$$

Вопросы, связанные с продолжением полуаддитивных функций, обсуждаются в [2] (см., например, теорему 7.6.4).

Изучение свойств функций плотности модуля целой функции — тема нашей работы. Близкие понятия — функции концентрации изучаются в работах [6–8]. Кроме этого нас интересуют вопросы равномерности. Пусть $\psi(\alpha)$ — непрерывная функция на полуоси $[0,\infty)$, $\psi(0)=0$, и пусть выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{M((1+\alpha)\,r,f)-M(r,f)}{V(r)}\leqslant\psi(\alpha). \tag{8}$$

Нас интересует, при каких условиях на функцию f функция

$$\varepsilon(r,\alpha)=\left(\frac{M((1+\alpha)\,r,f)}{V(r)}-\psi(\alpha)\right)^{+} \tag{9}$$

равномерно относительно $\alpha\in[0,\alpha_0]$ стремится к нулю при $r\to\infty$ (здесь $(x)^+=\max\{0;x\}$). В теореме 2 мы показываем, что для любой целой функции f справедливо равномерное по α стремление к нулю функции ε при $r\to\infty$.

Наше изложение больше ориентировано на применения к теории роста целых функций. Изложение теории субаддитивных функций в [2] ориентировано на применение в различных вопросах анализа, но более всего — в теории полугрупп операторов. Только в случае $\varrho=0$ ϱ-полуаддитивные функции с точностью до замены переменной $\alpha=e^t-1$ совпадают с полуаддитивными. Специалисты по теории моста целых и субгармонических функций знают, что случай $\varrho=0$ всегда требует отдельного исследования. Исключительность случая $\varrho=0$ будет видна и в нашей работе.

1. Теорема о равномерности

Начнем этот раздел с простого критерия непрерывности функций $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$.

Теорема 1. *Пусть функции* $M(\alpha)$, $\underline{M}(\alpha)$, $\alpha\geqslant0$, *удовлетворяют равенствам*

$$M(0)=\underline{M}(0)=0.$$

Для того чтобы обе функции были конечными, непрерывными функциями на полуоси $[0,\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\lim_{\alpha\to+0}M(\alpha)=\lim_{\alpha\to+0}\underline{M}(\alpha)=0.$$

Доказательство простое и мы его опускаем. Далее мы переходим к одному из важных результатов этого раздела — доказательству теоремы о равномерности.

Теорема 2. *Пусть f — целая функция, $\psi(\alpha)$ — непрерывная функция на всей оси* $[0,\infty)$, *причем* $\psi(0)=0$. *Пусть для любого* $\alpha\in[0,\infty)$ *выполняется неравенство* (8). *Тогда это неравенство выполняется равномерно по α на любом сегменте* $[a,b]\subset(0,\infty)$. *Если для некоторого* $\eta>0$ *неравенство* (8) *выполняется на полуоси* $(-\eta,\infty)$, *то оно выполняется равномерно на любом сегменте* $[0,b]$.

$\lhd$ Обозначим $r=e^x$, $1+\alpha=e^\tau$, $\varphi(x)=M(e^x,f)$, $\Phi(x)=V(e^x)$, $a_1=\ln(1+a)$, $b_1=\ln(1+b)$, $\psi_1(\tau)=\psi(e^\tau-1)$. В новых обозначениях неравенство (8) будет иметь вид

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\varphi(x+\tau)-\varphi(x)}{\Phi(x)}\leqslant\psi_1(\tau). \tag{10}$$

Нам нужно доказать, что это соотношение выполняется равномерно на сегменте $[a_1, b_1]$. Если это не так, то существуют строго положительное число ε, последовательности $x_n \to \infty$, $\tau_n \in [a_1, b_1]$, такие, что

$$\varphi(x_n + \tau_n) - \varphi(x_n) \geqslant (\psi_1(\tau_n) + \varepsilon)\Phi(x_n). \tag{11}$$

Пусть $\delta \in (0, a_1/2)$, $\varepsilon_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, а в остальном — произвольные числа. Определим множество

$$U_n = \Big\{\alpha \in [0, \delta] : \varphi(x_m + \alpha) - \varphi(x_m) < (\psi_1(\alpha) + \varepsilon_1)\,\Phi(x_m)\ \ \forall\, m \geqslant n\Big\}.$$

Имеем $U_{n+1} \supset U_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = [0, \delta]$. Из измеримости функции φ (это так, поскольку, $M(r, f)$ — непрерывная функция) следует измеримость множеств U_n. Далее определяем множество

$$V_n = \Big\{\beta \in [a_1 - \delta, b_1] : \varphi(x_m + \tau_m) - \varphi(x_m + \tau_m - \beta) < (\psi_1(\beta) + \varepsilon_1)\Phi(x_m + \tau_m - \beta)\ \forall\, m \geqslant n\Big\}.$$

Множества V_n — измеримы, $V_n \subset V_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = [a_1 - \delta, b_1]$. Из свойств непрерывности меры следует, что для любого $\delta_1 > 0$ и всех достаточно больших p будут справедливы соотношения

$$\operatorname{mes} U_p > \delta - \delta_1, \quad \operatorname{mes} V_p > b_1 - a_1 + \delta - \delta_1.$$

Пусть $V'_p = \tau_p - V_p$, и пусть $\delta_1 < \delta/2$. Легко проверяются соотношения

$$U_p \subset [0, \delta] \subset [\tau_p - b_1, \tau_p - a_1 + \delta], \quad V'_p \subset [\tau_p - b_1, \tau_p - a_1 + \delta],$$
$$\operatorname{mes} U_p > \delta - \delta_1 > \frac{1}{2}\,\delta, \quad \operatorname{mes} V'_p > b_1 - a_1 + \delta - \delta_1 > b_1 - a_1 + \frac{1}{2}\,\delta.$$

Из этого следует, что $U_p \cap V'_p \neq \varnothing$. Пусть $\alpha \in U_p \cap V'_p$. Тогда $\alpha \in [0, \delta]$, $\alpha = \tau_p - \beta$, $\beta \in V_p$, $\varphi(x_p + \alpha) - \varphi(x_p) < (\psi_1(\alpha) + \varepsilon_1)\Phi(x_p)$, $\varphi(x_p + \tau_p) - \varphi(x_p + \alpha) < (\psi_1(\tau_p - \alpha) + \varepsilon_1)\Phi(x_p + \alpha)$.

Складывая два последних неравенства, получим

$$\varphi(x_p + \tau_p) - \varphi(x_p) < \psi_1(\tau_p)\Phi(x_p) + (\psi_1(\alpha) + \varepsilon_1)\Phi(x_p) + \varepsilon_1 \frac{\Phi(x_p + \alpha)}{\Phi(x_p)}\Phi(x_p)$$
$$+ \psi_1(\tau_p - \alpha)\left[\frac{\Phi(x_p + \alpha)}{\Phi(x_p)} - 1\right]\Phi(x_p)AA + [\psi_1(\tau_p - \alpha) - \psi_1(\tau_p)]\Phi(x_p).$$

Напомним, что $\alpha \in [0, \delta]$. При достаточно малых ε_1 и δ и достаточно больших p это неравенство противоречит неравенству (22). Тем самым мы доказали, что соотношение (10) выполняется равномерно на сегменте $[a_1, b_1]$. Первое утверждение теоремы доказано. В случае если неравенство 10) выполняется на полуоси $(-\nu, \infty)$, мы можем повторить предыдущие рассуждения с $a = 0$. $\rhd$

Замечание 1. Равномерная выполнимость неравенства (10) на некотором сегменте по определению означает, что функция $\varepsilon(r, \alpha)$, определенная равенством (9), равномерно по α на этом сегменте стремится к нулю при $r \to \infty$.

Замечание 2. Пусть $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$ — функции плотности целой функции f. Для того, чтобы обе эти функции были непрерывными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{\substack{r \to \infty \\ \alpha \to +0}} \frac{M(r + \alpha r, f) - M(r, f)}{V(r)} = 0. \tag{12}$$

◁ Если выполняется равенство (12), то

$$\lim_{\alpha\to+0} M(\alpha) = \lim_{\alpha\to+0} \underline{M}(\alpha) = 0.$$

Теперь из теоремы 1 следует непрерывность функций $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$. Обратно, если функции $M(\alpha)$ и $\underline{M}(\alpha)$ непрерывны (можно считать на полуоси $(-1,\infty)$), то из теоремы 2 следует существование функции $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to \infty$ такой, что будут справедливы неравенства

$$(\underline{M}(\alpha) - \varepsilon(r))V(r) \leqslant M(r+\alpha r, f) - M(r,f) \leqslant (M(\alpha)+\varepsilon(r))V(r), \quad \alpha \in [0,1].$$

Из этих неравенств вытекает равенство (12). ▷

Замечание 3. Если неравенство (10) выполняется на полуоси $[0,\infty)$, то из этого не следует, что оно выполняется равномерно на любом сегменте $[0,b]$.

2. Свойства функций плотности

Формулируемая ниже теорема принадлежит Штейнгаузу [9, теорема 7].

Теорема 3. *Арифметическая сумма $A+B$ измеримых множеств положительной меры на вещественной оси содержит в себе некоторый сегмент $[\alpha,\beta]$, $\alpha<\beta$.*

Простейшие из функций плотности — это те, для которых в неравенствах (3) или (5) стоит знак равенства. Они называются ϱ-аддитивными функциями плотности. К этому классу принадлежат функции плотности регулярно растущих целых функций f, т. е. таких функций, для которых существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M(r+\alpha r, f) - M(r,f)}{V(r)}.$$

Теорема 4. *Пусть функция плотности $M(\alpha)$ на полуоси $(0,\infty)$, принимающая значения из расширенной вещественной полуоси $[0,\infty]$, удовлетворяет равенству*

$$M(\alpha+\beta) = M(\alpha) + (1+\alpha)^{\varrho} M\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right), \quad \varrho \in [0,\infty)\,. \tag{13}$$

Пусть $\varrho \neq 0$ и функция $M(\alpha)$ конечна на множестве положительной меры. Тогда

$$M(\alpha) = K\frac{(1+\alpha)^{\varrho}-1}{\varrho},$$

где $K>0$ — некоторое число.

Пусть $\varrho = 0$ и функция $M(\alpha)$ удовлетворяет хотя бы одному из двух условий:
1) $M(\alpha)$ — измеримая функция, которая конечна на множестве положительной меры;
2) $M(\alpha)$ — ограниченная функция на некотором множестве положительной меры.
Тогда $M(\alpha) = K\ln(1+\alpha)$.

◁ Обозначим $\varphi(t) = M(e^t-1)$. Для функции φ получается уравнение

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + e^{\varrho u}\varphi(v), \quad u,v>0. \tag{14}$$

В частности,

$$\varphi(2u) = (1+e^{\varrho u})\varphi(u). \tag{15}$$

Пусть $A = \{x > 0 : |\varphi(x)| < \infty\}$. Из условия теоремы следует, что множество A содержит в себе множество положительной меры. Из равенства (14) следует, что $A + A \subset A$. Из теоремы 3 следует, что $\operatorname{Int} A \neq \varnothing$ ($\operatorname{Int} A$ — внутренность A). Из равенства (15) следует, что $\frac{1}{2}A \subset A$. Поэтому $\inf\{\operatorname{Int} A\} = 0$. Если теперь $\operatorname{Int} A \neq (a, \infty)$, то существует интервал $(\alpha, \beta) \subset \operatorname{Int} A$ такой, что $\beta \notin \operatorname{Int} A$. Пусть теперь $\gamma \in A$, $\gamma \in (0, \beta - \alpha)$. Так как $\gamma + A \subset A$, то интервал $(\alpha + \gamma, \beta + \gamma) \subset A$. Но тогда $\beta \in \operatorname{Int} A$. Мы получаем противоречие. Таким образом, $\operatorname{Int} A = (a, \infty)$. Из равенства $\inf\{\operatorname{Int} A\} = 0$ следует, что $a = 0$. Таким образом, функция $\varphi(t)$ конечна на всей полуоси $(0, \infty)$. Пусть $\rho \neq 0$. Тогда, меняя в равенстве (14) местами u и v, получим

$$\varphi(u + v) = \varphi(v) + e^{\rho v}\varphi(u), \quad \frac{\varphi(u)}{e^{\varrho u} - 1} = \frac{\varphi(v)}{e^{\rho v} - 1}.$$

Т. е. функция $\Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{e^{\varrho x} - 1} = \mathrm{const} := \frac{K}{\varrho}$, $x > 0$, где $K > 0$.

Тогда

$$\varphi(u) = K\frac{e^{\varrho u} - 1}{\varrho}, \quad M(\alpha) = K\frac{(1 + \alpha)^{\varrho} - 1}{\varrho}.$$

Пусть теперь $\varrho = 0$. Имеем $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$, причем φ конечная на полуоси функция. Если φ — измеримая функция и $U_n = \{u \in [1, 2] : |\varphi(u)| < n\}$, то U_n — возрастающая последовательность измеримых множеств, причем $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = [1, 2]$. Тогда для некоторого n $\operatorname{mes} U_n > 0$. Таким образом, из условия теоремы следует в случае $\rho = 0$, что существует множество B положительной меры, на котором функция $|\varphi|$ ограничена, скажем, константой b. Тогда на множестве $B + B$ она ограничена константой $2b$. По теореме 3 множество $B + B$ содержит в себе сегмент $[\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$. Пусть $\varphi(1) = K$. Тогда из равенства $\varphi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v)$ следует, что для положительных рациональных u выполняется равенство $\varphi(u) = Ku$. Рассмотрим функцию $\varphi_1(u) = \varphi(u) - Ku$. Эта функция удовлетворяет уравнению $\varphi_1(u + v) = \varphi_1(u) + \varphi_1(v)$, $u, v > 0$, ограничена на сегменте $[\alpha, \beta]$, равна нулю в положительных рациональных точках. Пусть теперь x — произвольное число на полуоси $(0, \infty)$. Всегда существует рациональное число r такое, что $x + r = y$, где $y \in [\alpha, \beta]$. Тогда, используя равенство $x + r = y$, если $r > 0$, равенство $x = y - r$, если $r < 0$, функциональное уравнение для φ_1 и то, что φ_1 обращается в ноль в положительных рациональных точках, получим $\varphi_1(x) = \varphi_1(y)$. Из этого следует, что функция φ_1 ограничена на всей полуоси $(0, \infty)$. Если теперь для некоторого $x_0 > 0$ $\varphi_1(x_0) \neq 0$, то равенство $\varphi_1(nx_0) = n\varphi_1(x_0)$ приводит к противоречию. Таким образом, $\varphi_1(u) = 0$, $\varphi(u) = Ku$, $N(\alpha) = K\ln(1 + \alpha)$. $\rhd$

Для доказательства следующей теоремы мы предварительно сформулируем две леммы. В этих леммах $[x]$ означает целую часть x.

Лемма 2. *Пусть заданы сегмент $[t_1, t_2] \subset (0, \infty)$ и целое положительное число p такие, что $\left[t_1, \frac{p+1}{p}t_1\right] \subset [t_1, t_2]$. Тогда любое $x \geqslant pt_1$ представляется в виде $x = pt + kt_1$, где $k = \left[\frac{x - pt_1}{t_1}\right]$, $t \in [t_1, t_2]$.*

$\lhd$ Доказательство очевидно. $\rhd$

Лемма 3. *Пусть заданы число $s > 0$, сегмент $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, \infty)$ и целое число A такие, что $A(\tau_2 - \tau_1) > 2s$. Тогда любое число $x \geqslant \left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right] + 1\right)^2 s$ представляется в виде $x = n\tau + ms$, где $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, $n = A\left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right] + 1\right)$, $m = k\left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right] + 1\right)$, $k = \left[\frac{x - ([A\tau_1/s] + 1)^2 s}{s([A\tau_1/s] + 1)}\right]$.*

$\lhd$ Неравенство $A(\tau_2 - \tau_1) > 2s$ гарантирует включение

$$\left[\left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right] + 1\right)s, \left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right] + 2\right)s\right] \subset [A\tau_1, A\tau_2]. \tag{16}$$

Теперь применение леммы 2 с параметрами $t_1 = \left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right]+1\right)s$, $p = \left[\frac{A\tau_1}{s}\right]+1$ и соотношения (16) доказывают лемму 3. $\rhd$

Замечание 4. Если взять $A = \left[x^{1/3}\right]$, то для представления $x = n(x)\tau + m(x)s$ будут справедливы соотношения $n(x) \sim \tau_1 x^{2/3}/s$, $m(x) \sim x/s$. Варьируя величину A, можно добиться, чтобы выполнялось любое из соотношений

$$\lim_{x\to\infty}\frac{m(x)}{n(x)} = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{n(x)}{m(x)} = 0$$

при выполнении условий $\lim_{x\to\infty} n(x) = \lim_{x\to\infty} m(x) = \infty$.

Далее формулируется основная теорема о свойствах функций плотности (мы считаем $\frac{\varrho}{(1+\alpha)^\varrho - 1}\Big|_{\varrho=0} = \frac{1}{\ln(1+\alpha)}$).

Теорема 5. *Пусть $M(\alpha)$ — функция плотности целой функции f, которая удовлетворяет неравенству* (3) *при некотором $\varrho \geqslant 0$.*

1. *Если выполняется хотя бы одно из условий:*

a) функция $M(\alpha)$ измерима и удовлетворяет неравенству $M(\alpha) < \infty$ на множестве положительной меры;

b) функция $M(\alpha)$ ограничена сверху на множестве положительной меры, то существует предел

$$H = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{\varrho M(\alpha)}{(1+\alpha)^\varrho - 1} = \inf_{\alpha>0}\frac{\varrho M(\alpha)}{(1+\alpha)^\varrho - 1}\,.$$

2. *Для любой точки $x > 0$ справедливы неравенства*

$$\frac{\varrho}{(1+x)^\varrho - 1}\,\overline{\lim_{\alpha\to x+0}}\, M(\alpha) \leqslant \overline{\lim_{\alpha\to+0}}\,\frac{M(\alpha)}{\alpha}\,,$$

$$\frac{\varrho}{(1+x)^\varrho - 1}\,\underline{\lim_{\alpha\to x-0}}\, M(\alpha) \leqslant \underline{\lim_{\alpha\to+0}}\,\frac{M(\alpha)}{\alpha}\,.$$

3. *Существуют пределы*

$$\sigma_p(f) = \lim_{\alpha\to+0}\frac{M(\alpha)}{\alpha} = \sup_{\alpha>0}\frac{\varrho M(\alpha)}{(1+\alpha)^\varrho - 1}, \quad \underline{\sigma}_p(f) = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\underline{M}(\alpha)}{\alpha} = \inf_{\alpha>0}\frac{\varrho \underline{M}(\alpha)}{(1+\alpha)^\varrho - 1}.$$

$\lhd$ Обозначим $\varphi(t) = M(e^t - 1)$. Тогда неравенство (3) преобразуется в неравенство

$$\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u) + e^{\varrho u}\varphi(v)\,. \tag{17}$$

Используя метод математической индукции, можно доказать неравенства

$$\frac{\varrho\,\varphi(nu)}{e^{\varrho nu} - 1} \leqslant \frac{\varrho\,\varphi(u)}{e^{\varrho u} - 1}\,, \tag{18}$$

$$\varphi(nu+mv) \leqslant \frac{e^{\varrho nu} - 1}{e^{\varrho u} - 1}\varphi(u) + e^{\varrho nu}\frac{e^{\varrho mv} - 1}{e^{\varrho v} - 1}\varphi(v), \quad \varrho \neq 0\,, \tag{19}$$

$$\varphi(nu+mv) \leqslant n\varphi(u) + m\varphi(v), \quad \varrho = 0\,. \tag{20}$$

Пусть выполняется условие a) теоремы. Так как при отображении $t = \ln(1+\alpha)$ измеримость сохраняется и множество положительной меры переходит в множество положительной меры, то при принятом предположении функция φ будет измеримой и конечной на некотором множестве E положительной меры. Обозначим $E_n = \{t \in E : \varphi(t) \leqslant n\}$. Тогда E_n — возрастающая последовательность измеримых множеств, причем $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Для некоторого n множество E_n имеет положительную меру. На множестве E_n функция φ ограничена сверху. Заметим, что условие б) прямо гарантирует существование такого множества. Вдобавок, мы, без ограничения общности, можем считать, что множество E_n ограничено. Теперь из (17) следует, что функция φ ограничена сверху на множестве $E_n + E_n$. По теореме 3 это множество содержит некоторый сегмент $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, \infty)$. Таким образом, как из условия а) так и из условия б) вытекает существование сегмента $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, \infty)$, на котором функция φ ограничена сверху. Пусть

$$H = \inf_{t>0} \frac{\rho\varphi(t)}{e^{\rho t} - 1}.$$

По условию теоремы $H < \infty$. Пусть H_1 — произвольное вещественное число строго большее чем H. Тогда существует число $\alpha_0 > 0$, что

$$\frac{\rho\varphi(\alpha_0)}{e^{\rho\alpha_0} - 1} < H_1.$$

Пусть вначале $\varrho > 0$. Применим неравенство (19) с $n = n(x)$, $u = \tau$, $m = m(x)$, $v = \alpha_0$. Мы получим

$$\frac{\varrho\,\varphi(x)}{e^{\varrho\,x} - 1} \leqslant \frac{e^{\varrho\,n(x)\tau} - 1}{e^{\varrho\,x} - 1}\,\frac{\varrho\,\varphi(\tau)}{e^{\varrho\,\tau} - 1} + \frac{e^{\varrho\,x} - e^{\varrho\,n(x)\tau}}{e^{\varrho\,x} - 1}\,\frac{\varrho\,\varphi(\alpha_0)}{e^{\varrho\,\alpha_0} - 1}\,.$$

Так как $\varrho\,x - \varrho\,n(x)\tau = \varrho\,m(x)\alpha_0$, и так как по замечанию 4 к лемме 3 можно считать, что $\lim_{x\to\infty} m(x) = \infty$, то $\lim_{x\to\infty}(e^{\varrho\,n(x)\tau} - 1)/(e^{\varrho\,x} - 1) = 0$. Мы получаем, что

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\varrho\,\varphi(x)}{e^{\varrho\,x} - 1} \leqslant H.$$

Используя определение H, легко получить, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varrho\,\varphi(x)}{e^{\varrho\,x} - 1} = H\,. \tag{21}$$

Пусть теперь $\varrho = 0$. Подставляя в неравенство (20) $n = n(x)$, $u = \tau$, $m = m(x)$, $v = \alpha_0$, получим

$$\frac{\varphi(x)}{x} \leqslant \frac{n(x)}{x}\varphi(\tau) + \frac{m(x)}{x}\varphi(\alpha_0) = \frac{n(x)}{x}\left(\varphi(\tau) - \frac{\tau}{\alpha_0}\varphi(\alpha_0)\right) + \frac{\varphi(\alpha_0)}{\alpha_0}\,. \tag{22}$$

Мы можем считать, согласно замечанию 4 к лемме 3, что $\lim_{x\to\infty} n(x)/m(x) = 0$. Тогда из (22) следует, что

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \leqslant \frac{\varphi(\alpha_0)}{\alpha_0} < H_1\,.$$

Отсюда следует (21) и при $\rho = 0$. Утверждение 1 теоремы доказано.

Далее будем доказывать утверждение 2. Обозначим

$$N_1 = \varliminf_{\alpha\to+0} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}.$$

Пусть $\{\tau_k\}$, $\lim_{k\to\infty} \tau_k = 0$, — такая последовательность, что

$$N_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(\tau_k)}{\tau_k}\,.$$

Обозначим $t_{n,k} = n\tau_k$. Тогда из неравенства (18) следует, что

$$\frac{\varrho\,\varphi(t_{n,k})}{e^{\varrho\, t_{n,k}}-1} \leqslant \frac{\varrho\,\varphi(\tau_k)}{e^{\varrho\,\tau_k}-1}\,. \tag{23}$$

Пусть t — произвольное строго положительное число. Так как $\lim_{k\to\infty}\tau_k = 0$, то существует функция $n = n(k)$ такая, что $\lim_{k\to\infty} t_{n(k),k} = t$. Причем функцию $n = n(k)$ мы можем выбивать таким образом, чтобы гарантировать выполнение любого из неравенств $t_{n(k),k} < t$, $t_{n(k),k} > t$. Выберем $n = n(k)$ одним из указанных способов и подставим в (23) вместо n величину $n(k)$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\frac{\varrho}{e^{\varrho\, t}-1}\,\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\varphi(t_{n(k),k}) \leqslant N_1\,. \tag{24}$$

Если теперь $n(k)$ выбрано так, что выполняется неравенство $t_{n(k),k} > t$, то из (24) следует, что

$$\frac{\varrho}{e^{\varrho\, t}-1}\,\underline{\lim}_{u\to t+0}\,\varphi(u) \leqslant \frac{\varrho}{e^{\varrho\, t}-1}\,\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\varphi(t_{n(k),k}) \leqslant N_1\,. \tag{25}$$

Аналогично, получаем

$$\frac{\varrho}{e^{\varrho t}-1}\,\underline{\lim}_{u\to t-0}\,\varphi(u) \leqslant N_1\,.$$

Из этого следует утверждение 2 теоремы.

Осталось доказать утверждение 3 теоремы. Предыдущие рассуждения показывают, что достаточно установить аналогичный результат для функции φ. Функция $M(\alpha)$ — возрастающая функция. А любая возрастающая функция полунепрерывна снизу справа. Поэтому функция φ полунепрерывна снизу справа в точке t. Это означает, что выполняется неравенство

$$\varphi(t) \leqslant \underline{\lim}_{u\to t+0}\,\varphi(u).$$

Теперь из (25) следует, что

$$\frac{\varrho\,\varphi(t)}{e^{\varrho\, t}-1} \leqslant N_1\,. \tag{26}$$

Функция $-\underline{M}(\alpha)$ убывающая, поэтому полунепрерывна снизу слева в точке α. Аналогичными рассуждениями можно показать, что неравенство (26) с использованием (5) выполняется и для функции $\varphi(t) = \underline{M}(e^t - 1)$.

Из неравенства (26) легко следует утверждение 3 теоремы.

Теорема полностью доказана. $\rhd$

Замечание 5. Как уже отмечалось во введении теория ϱ-полуаддитивных функций параллельна хорошо разработанной теории полуаддитивных функций, причем для случая $\rho = 0$ функция $M(\alpha)$ с помощью замены $\alpha = e^t - 1$ превращается в полуаддитивную функцию. Аналогом утверждения 1 теоремы является теорема 7.6.1 из [2]. Аналогом утверждения 3 является теорема 7.11.1 из этой же книги.

Замечание 6. Пусть a_n — последовательность положительных чисел, а $n(r) = \sum_{a_n\leqslant r} 1$ — считающая функция последовательности a_n. Пусть $N(\alpha)$, $\underline{N}(\alpha)$ — функции плотности функции $n(r)$ относительно уточненного порядка $\rho(r) \equiv 1$. Обе функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ — возрастающие. Тогда по теореме 5, если ее применять к функциям $N(\alpha)$ и $-\underline{N}(\alpha)$, получим, что существуют пределы

$$N = \lim_{\alpha\to+0}\frac{N(\alpha)}{\alpha}, \quad \underline{N} = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\underline{N}(\alpha)}{\alpha}\,.$$

Эти утверждения совпадают с теоремой Полиа [1] о существовании минимальной и максимальной плотностей. Правда, Полиа доказывал свою теорему при некотором дополнительном предположении о последовательности a_n. Затем А. А. Кондратюк [10] показал, что дополнительные предположения не нужны. Он также рассмотрел случай произвольного уточненного порядка. Таким образом, утверждение 3 теоремы 5 можно рассматривать как распространение теоремы Полиа на максимум модуля целой функции.

В пункте 3 теоремы 5 приведены достаточные условия существования предела

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{M(\alpha)}{\alpha} \tag{27}$$

для функции плотности. Эти условия выражены в терминах свойств функции $M(\alpha)$. Можно привести условия существования предела и в других терминах. Обозначим

$$N_1=\varliminf_{\alpha\to+0}\frac{M(\alpha)}{\alpha}. \tag{28}$$

Тогда существует множество $E\subset(0,\infty)$, для которого ноль является предельной точкой, и такое, что

$$\lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \alpha\in E}}\frac{M(\alpha)}{\alpha}=N_1. \tag{29}$$

Если существует предел (27), то тогда в качестве E можно взять всю полуось $(0,\infty)$. Мы покажем, что если в равенстве (29) множество E достаточно «массивное», то существует предел (27). Нам нужно несколько новых определений. Мы будем пользоваться терминологией из [2]. Множество E в абелевой полугруппе называется модулем, если из соотношений $x\in E$, $y\in E$, следует, что $x+y\in E$. Всюду в дальнейшем в качестве абелевой полугруппы у нас будет выступать вещественная полуось $(0,\infty)$ со сложением в качестве полугрупповой операции. Множество $E\subset(0,\infty)$ называется L-модулем, если из соотношений $x\in E$, $y\in E$, следует, что $x+y+xy\in E$. Легко видеть, что если E — модуль, $\alpha(t)=e^t-1$, то $\alpha(E)$ есть L-модуль и, обратно, если E есть L-модуль и $t(\alpha)=\ln(1+\alpha)$, то $t(E)$ есть модуль. Пусть E — произвольное множество на полуоси $(0,\infty)$. Через $S(E)$ мы будем обозначать наименьший модуль, содержащий множество E. Легко видеть, что $x\in S(E)$ тогда и только тогда, когда $x=\sum_{k=1}^n u_k$, где $u_k\in E$. Число n и слагаемые u_k изменяются с изменением x. Аналогично, через $\hat S(E)$ обозначается наименьший L-модуль, содержащий E.

Теорема 6. *Пусть функция* $\varphi(t)$, $t\in(0,\infty)$, *удовлетворяет неравенству* (17),

$$N_1=\varliminf_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{t}.$$

Пусть $E\subset(0,\infty)$ *есть множество, для которого ноль является предельной точкой, причем*

$$\lim_{\substack{t\to+0\\ t\in E}}\frac{\varphi(t)}{t}=N_1.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{t\to+0\\ t\in S(E)}}\frac{\varphi(t)}{t}=N_1.$$

◁ Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta_0 \in (0,1)$ — суть произвольные числа. По условию теоремы существует $\delta \in (0,\delta_0)$ такое, что для любого $t \in (0,\delta) \cap E$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{\varphi(t)}{t} - N_1\right| < \varepsilon,$$

и, в частности, неравенство $\varphi(t) < (N_1+\varepsilon)t$. Пусть теперь $t \in (0,\delta) \cap S(E)$. Тогда $t = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, где $u_k \in E$. Очевидно также, что $u_k \in (0,\delta)$. Поэтому $\varphi(u_k) < (N_1+\varepsilon)u_k$. Тогда, используя неравенство (17), получим

$$\begin{aligned} \varphi(t) = \varphi(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) &\leqslant \varphi(u_1) + e^{\rho u_1}\varphi(u_2) + \cdots + e^{\rho(u_1+u_2+\cdots+u_{n-1})}\varphi(u_n) \\ &< (N_1+\varepsilon)(u_1 + e^{\rho u_1}u_2 + \cdots + e^{\rho(u_1+u_2+\cdots+u_{n-1})}u_n. \end{aligned} \tag{30}$$

Из неравенства (30) следует, что

$$\varphi(t) < (N_1+\varepsilon)\left(1 + \operatorname{sign}(N_1+\varepsilon)\sup_{x\in[0,\delta]}|e^{\rho x} - 1|\right)t.$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{\substack{t\to+0,\\ t\in S(E)}} \frac{\varphi(t)}{t} \leqslant N_1\,.$$

Из этого следует утверждение теоремы в случае $N_1 \in (-\infty,\infty)$.

Случай $N_1 = -\infty$ исследуется аналогично. В случае $N_1 = +\infty$ теорема тривиальна. ▷

Теорема 7. *Пусть функция $\varphi(t)$, $t \in (0,\infty)$, удовлетворяет неравенству (17) и*

$$\varliminf_{t\to+0} \frac{\varphi(t)}{t} = N_1.$$

Пусть $E \subset (0,\infty)$ — множество, для которого 0 является предельной точкой, и такое, что

$$\lim_{\substack{t\to+0,\\ t\in E}} \frac{\varphi(t)}{t} = N_1.$$

Тогда, если для любого $\delta > 0$ множество $(0,\delta) \cap S(E)$ содержит в себе множество положительной меры, то существует

$$\lim_{t\to+0} \frac{\varphi(t)}{t}.$$

◁ Из теоремы 3 следует, что для любого $\delta > 0$ множество $(0,\delta) \cap S(E)$ содержит в себе интервал. Поэтому существует открытое множество E_1, для которого ноль является предельной точкой, такое, что $E_1 \subset S(E)$. Тогда $S(E_1) \subset S(S(E)) = S(E)$. По теореме 8 из [2] $S(E_1) = (0,\infty)$. Таким образом, $S(E) = (0,\infty)$. Теперь применение теоремы 7 заканчивает доказательство теоремы. ▷

Сформулируем теперь соответствующие результаты для ϱ-полуаддитивных функций.

Теорема 8. *Пусть $M(\alpha)$, $\alpha \in (0,\infty)$, есть функция плотности и пусть*

$$N_1 = \varliminf_{\alpha\to+0} \frac{M(\alpha)}{\alpha}.$$

Пусть $E \subset (0,\infty)$ — множество, для которого 0 есть предельная точка, и такое, что

$$\lim_{\substack{\alpha\to+0,\\ \alpha\in E}} \frac{M(\alpha)}{\alpha} = N_1.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{\alpha\to+0,\\ \alpha\in \hat{S}(E)}} \frac{M(\alpha)}{\alpha} = N_1.$$

Теорема 9. *Пусть $M(\alpha)$, $\alpha \in (0,\infty)$, есть функция плотности и пусть*

$$N_1 = \underline{\lim}_{\alpha\to+0} \frac{M(\alpha)}{\alpha}.$$

Пусть $E \subset (0,\infty)$ — множество, для которого 0 есть предельная точка, и такое, что

$$\lim_{\substack{\alpha\to+0,\\ \alpha\in E}} \frac{M(\alpha)}{\alpha} = N_1.$$

Тогда, если для любого $\delta > 0$ множество $(0,\delta)\cap\hat{S}(E)$ содержит внутри себя множество положительной меры, то существует предел

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{M(\alpha)}{\alpha}.$$

Литература

1. *Polya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen // Math. Zeit.—1929.—Vol. 29.—P. 549–640.
2. *Хилле Е. Р., Филлипс С.* Функциональный анализ и полугруппы.—М.: Изд. иностр. лит-ры, 1962.—829 с.
3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.— 632 с.
4. *Seneta E.* Regularly Varying Functions.—Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag, 1976.—112 p.
5. *Bingham N. H.* Regular Variation.—N. Y.: Cambridge University Press, 1987.—491 p.
6. *Hengartner W., Theodorescu R.* Concentration functions.—London: Academic Press, 1973.—139 p.
7. *Гайсин А. М.* Об одной гипотезе Полиа // Изв. РАН. Сер. матем.—1994.—Т. 58, № 2.—С. 73–92.
8. *Шерстюков В. Б.* Распределение нулей канонических произведений и весовой индекс конденсации // Матем. сб.—2015.—Т. 206, № 9.—С. 139–180.
9. *Steinhaus H.* Sur les distances des points de mesure positive // Fund. Math.—1949.—Vol. 1.—P. 93–104.
10. *Кондратюк А. А.* Целые функции с положительными нулями, имеющими конечную максимальную плотность // Респ. сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения».—1968.—Т. 7.—С. 37–52.

Статья поступила 29 ноября 2024 г.

Малютин Константин Геннадьевич
Курский государственный университет,
профессор
РОССИЯ, 305000, Курск, ул. Радищева, 33
E-mail: malyutinkg@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5480-0722

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 56–69

ON THE POLYA TYPE OF AN ENTIRE FUNCTION

Malyutin, K. G.[1]

[1] Kursk State University,
33 Radishchev St., Kursk 305000, Russia
E-mail: malyutinkg@gmail.com

Abstract. Let f be an entire function and let $M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ be maximum of the modulus of the function f in disk $|z|\leqslant r$. The article considers the density functions of the maximum modulus of the function f, which are calculated using the formulas $M(\alpha)=\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{M(r+\alpha r,f)-M(r,f)}{r^{\rho(r)}}$, $\underline{M}(\alpha)=\underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{M(r+\alpha r,f)-M(r,f)}{r^{\rho(r)}}$, $\alpha\geqslant 0$, where $\rho(r)$ is proximate order in the sense of Valiron, $\lim_{r\to+\infty}\rho(r)=\varrho\geqslant 0$. It is proved, that $M(\alpha)$ and $\underline{M}(\alpha)$ are ϱ-semi-additive functions. The definition of the type $\sigma_p(f)$ and the minimum type $\underline{\sigma}_p(f)$ in the sense of Polia of the function f is introduced by the formulas $\sigma_p(f)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{M(\alpha)}{\alpha}$, $\underline{\sigma}_p(f)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\underline{M}(\alpha)}{\alpha}$. These quantities give more information about the behavior of the function than its type and lower type in the classical sense. This definition is an extension of the concepts of maximum and minimum density of a sequence of positive numbers introduced by Polya, who proved their existence if the growth of the counting function of a sequence of numbers has normal type with respect to r. The existence of the quantities $\sigma_p(f)$ and $\underline{\sigma}_p(f)$ is proved if the growth $\ln|f|$ has type not higher than normal type with respect to $r^{\rho(r)}$ in the classical sense, i. e. $\ln M(r,f)\leqslant Kr^{\rho(r)}$ for some $K>0$. Some properties of functions $M(\alpha)$ and $\underline{M}(\alpha)$ are considered.

Keywords: entire function, density function, semi-additive function, Polya theorem, maximum type, minimum type.

AMS Subject Classification: 30D15, 30D20.

For citation: *Malyutin, K. G.* On the Polya Type of an Entire Function, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 56–69 (in Russian). DOI: 10.46698/k4349-9424-9818-w.

References

1. *Polya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, *Mathematische Zeitschrift*, 1929, vol. 29, pp. 549–640.
2. *Hille, E. and Phillips, R. S. Functional Analysis and Semi-Groups*, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1996, 808 p.
3. *Levin, B. Ya. Distribution of Zeros of Entire Functions*, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1994, 523 p.
4. *Seneta, E. Regularly Varying Functions*, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1976, 112 p.
5. *Bingham, N. H. Regular Variation*, New York, Cambridge University Press, 1987, 491 p.
6. *Hengartner, W. and Theodorescu, R. Concentration Functions*, London, Academic Press, 1973 139 p.
7. *Gaisin, A. M.* On a Conjecture of Polya, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1995, vol. 44, no. 2, pp. 281–299. DOI: 10.1070/IM1995v044n02ABEH001597.
8. *Sherstyukov, V. B.* Distribution of the Zeros of Canonical Products and Weighted Condensation Index, *Sbornik: Mathematics*, 2015, vol. 206, no. 9, pp. 1299–1339. DOI: 10.1070/SM2015v206n09ABEH004497.
9. *Steinhaus, H.* Sur les Distances des Points de Mesure Positive, *Fundamenta Mathematicae*, 1949, vol. 1, pp. 93–104.
10. *Kondratyuk, A. A.* Entire Functions with Positive Zeros Possessing Maximal Finite Density, *Function Theory, Functional Analysis, and Their Applications*, 1968, vol 7, pp. 37–52 (in Russian).

Received November 29, 2024

Konstantin G. Malyutin
Kursk State University,
33 Radishchev St., Kursk 305000, Russia,
Professor
E-mail: malyutinkg@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5480-0722

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 70–86

УДК 517.53
DOI 10.46698/p1426-1765-3037-f

ON A NEW CLASS OF MEROMORPHIC FUNCTIONS ASSOCIATED WITH MITTAG-LEFFLER FUNCTION

G. Murugusundaramoorthy[1] and K. Vijaya[1]

[1] School of Advanced Sciences, Vellore Institute of Technology,
Vellore 632014, TN, India

E-mail: gmsmoorthy@yahoo.com, kvijaya@vit.ac.in

Abstract. The Mittag-Leffler function arises naturally in solving differential and integral equations of fractional order and especially in the study of fractional generalization of kinetic equation, random walks, Lévy flights, super-diffusive transport and in the study of complex systems. In the present investigation, the authors define a new class $\mathfrak{M}^{\tau;\kappa}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta,\wp)$ of meromorphic functions defined in the punctured unit disk $\Delta^* := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ based on Mittag-Leffler. We discuss extensively its characteristic properties like coefficient inequalities, growth and distortion inequalities, as well as closure results for $f \in \mathfrak{M}^{\tau;\kappa}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta,\wp)$. Properties of a certain integral operator and its inverse defined on the new class $\mathfrak{M}^{\tau;\kappa}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta,\wp)$ are also discussed. Coefficient inequalities, growth and distortion inequalities, as well as closure results are obtained. We also establish some results concerning neighborhoods and the partial sums of meromorphic functions in this new class. We also state some new subclasses and their characteristic properties by specializing the parameters which are new and not studied before in association with Mittag-Leffler functions.

Keywords: meromorphic functions, starlike function, convolution, positive coefficients, coefficient inequalities, integral operator, Mittag-Leffler function, Hilbert space operator.

AMS Subject Classification: 30C45, 30C50.

For citation: *Murugusundaramoorthy, G. and Vijaya, K.* On a New Class of Meromorphic Functions Associated with Mittag-Leffler Function, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 70–86. DOI: 10.46698/p1426-1765-3037-f.

1. Introduction

Let Σ denote the class of normalized meromorphic functions f of the form

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \tag{1.1}$$

defined on the unit disk

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$

and which are analytic except for a set of poles of finite order on $\mathbf{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Denoted by Σ_P and be of the form

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \geqslant 0. \tag{1.2}$$

The Hadamard product or convolution of two functions $f(z)$ given by (1.2) and

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n \tag{1.3}$$

is defined by

$$(f * g)(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n z^n.$$

The function $f \in \Sigma$ with $f(0) \neq 0$ is called meromorphic starlike of order ϑ $(0 \leqslant \vartheta < 1)$, if

$$\operatorname{Re}\left(-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \vartheta \quad (z \in \Delta). \tag{1.4}$$

The function $f \in \Sigma$ with $f'(0) \neq 0$ is called meromorphic convex of order ϑ $(0 \leqslant \vartheta < 1)$ if

$$\operatorname{Re}\left(-\frac{(zf'(z))'}{f'(z)}\right) > \vartheta \quad (z \in \Delta). \tag{1.5}$$

The class of all such functions are denoted by $\Sigma_K(\vartheta)$. Further, we denote $\Sigma_P^*(\vartheta) = \Sigma^*(\vartheta) \cap \Sigma_P$ and $\Sigma_K^*(\vartheta) = \Sigma_K(\vartheta) \cap \Sigma_P$.

Lemma 1 [1]**.** *Suppose that $\vartheta \in [0,1)$, $r \in (0,1]$ and the function f is of the form*

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \quad 0 < |z| < r, \tag{1.6}$$

with $b_n \geqslant 0$. Then the condition

$$\operatorname{Re}\left(-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \vartheta \quad \text{for } |z| < r \tag{1.7}$$

is equivalent to the condition

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+\vartheta) b_n r^{n+1} \leqslant 1 - \vartheta. \tag{1.8}$$

The condition (1.4) and the above lemma with $r = 1$ give the following corollary.

Corollary 1 [1]**.** *Let $f \in \Sigma_P$ be given by* (1.2)*. Then $f \in \Sigma_P^*(\vartheta)$ if and only if*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+\vartheta) a_n \leqslant 1 - \vartheta. \tag{1.9}$$

Various subclasses of Σ have been studied rather extensively by Clunie [2], Nehari and Netanyahu [3], Pommerenke [4, 5], Royster [6], and others (cf., e.g., Bajpai [7], Mogra et al. [8], Uralegaddi and Ganigi [9], Cho et al. [10], Aouf [11], and Uralegaddi and Somanatha [12]); see also Duren [13, pp. 29 and 137], and Srivastava and Owa ([14, pp. 86 and 429], also see [11]).

Complex analysis (complex function theory) initiated in the 18th century and has since become one of the important topics in mathematics. Because of its effective applicability to a wide range of concepts and problems, this domain has significantly wedged a wide range of research areas, including engineering, physics, and mathematics. Researchers exposed some unexpected connections between ostensibly disparate study fields. Mittag-Leffler function (M-LF) research is an unusual and fascinating combination of geometry and complex analysis that deals with the structure of analytic functions in the complex domain and other domains related to sciences and engineering, has been a topic that has inspired several researchers. It was first proposed in by Mittag-Leffler [15] function ascends naturally in the solution of fractional order differential and integral equations, and exclusively in the studies of fractional generalizing of kinetic equation, random walks, Lévy flights, super-diffusive transport and in the study of complex systems. Let $\mathbf{E}_\varsigma$ be the function defined by

$$\mathbf{E}_\varsigma(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\varsigma n+1)}, \quad z \in \mathbb{C},\ \varsigma \in \mathbb{C} \quad \text{with } \operatorname{Re}\varsigma > 0,$$

that was introduced by Mittag-Leffler [15] and commonly known as the *Mittag-Leffler function*. Wiman [16] defined a more general function $\mathbf{E}_{\varsigma,\varrho}$ generalizing the $\mathbf{E}_\varsigma$ Mittag-Leffler function, that is

$$\mathbf{E}_{\varsigma,\varrho}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\varsigma n+\varrho)}, \quad z \in \mathbb{C},\ \varsigma,\varrho \in \mathbb{C}, \quad \text{with } \operatorname{Re}\varsigma > 0,\ \operatorname{Re}\varrho > 0.$$

When $\varrho = 1$, it is abbreviated as $\mathbf{E}_\varsigma(z) = \mathbf{E}_{\varsigma,1}(z)$. Observe that the function $\mathbf{E}_{\varsigma,\varrho}$ contains many well-known functions as its special case, for example,

$$\mathbf{E}_{1,1}(z) = e^z, \quad \mathbf{E}_{1,2}(z) = \frac{e^z-1}{z}, \quad \mathbf{E}_{2,1}\left(z^2\right) = \cosh z,$$
$$\mathbf{E}_{2,1}\left(-z^2\right) = \cos z, \quad \mathbf{E}_{2,2}\left(z^2\right) = \frac{\sinh z}{z}, \quad \mathbf{E}_{2,2}\left(-z^2\right) = \frac{\sin z}{z},$$
$$\mathbf{E}_4(z) = \frac{1}{2}\left(\cos z^{\frac{1}{4}} + \cosh z^{\frac{1}{4}}\right), \quad \mathbf{E}_3(z) = \frac{1}{2}\left[e^{z^{\frac{1}{3}}} + 2e^{-\frac{1}{2}z^{\frac{1}{3}}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z^{\frac{1}{3}}\right)\right].$$

Numerous properties of Mittag-Leffler function and generalized Mittag-Leffler function can be originated, for example in [17–22]. We note that the above generalized Mittag-Leffler function $\mathbf{E}_{\varsigma,\varrho}$ does not belongs to the family $\mathscr{A}$, where $\mathscr{A}$ represents the class of functions whose members are of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbf{U}, \tag{1.10}$$

which are analytic in the open unit disk Δ and normalized by the conditions $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Let $\mathscr{S}$ be the subclass of $\mathscr{A}$ whose members are univalent in Δ. Thus, it is expected to define the following normalization of Mittag-Leffler function as below, due to Bansal and Prajapat [18]:

$$E_{\varsigma,\varrho}(z) := z\Gamma(\varrho)\,\mathbf{E}_{\varsigma,\varrho}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\varsigma(n-1)+\varrho)} z^n, \tag{1.11}$$

that holds for the parameters $\varsigma, \varrho \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re}\varsigma > 0$, $\operatorname{Re}\varrho > 0$, and $z \in \mathbb{C}$.

Moreover, Srivastava and Tomovski [23] introduced the generalized the Mittag-Leffler function, $E^{\tau,\kappa}_{\varsigma,\varrho}(z)(z \in \mathbb{C})$ in the form

$$E^{\tau,\kappa}_{\varsigma,\varrho}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau)_{n\kappa}}{\Gamma(\varsigma n+\varrho)\ n!} z^n,$$

($\varrho, \varsigma, \tau \in \mathbb{C}$; $\mathrm{Re}(\varsigma) > \max\{0, \mathrm{Re}(\kappa) - 1\}$; $\mathrm{Re}(\kappa) > 0$) and proved that it is an entire function in the complex z-plane, where

$$(\tau)_\theta = \frac{\Gamma(\tau+\theta)}{\Gamma(\tau)} \begin{cases} \tau(\tau+1)\cdots(\tau+\theta-1), & \theta \neq 0; \\ 1, & \theta = 0 \end{cases}$$

is well known Pochammer symbol. Lately, Aouf and Mostafa [24] defined

$$\mathbf{M}^{\tau,\kappa}_{\varsigma,\varrho}(z) = \Gamma(\varrho)\left(z^{-1}E^{\tau,\kappa}_{\varsigma,\varrho}(z) - \frac{\Gamma(\tau+\kappa)}{\Gamma(\tau)\Gamma(\varsigma+\varrho)}\right)$$

with ($\varrho, \tau \in \mathbb{C}$; $\mathrm{Re}(\varsigma) > \max\{0, \mathrm{Re}(\kappa) - 1\}$; $\mathrm{Re}(\kappa) > 0$; $\mathrm{Re}(\varsigma) = 0$ when $\mathrm{Re}(\kappa) = 1$ with $\varrho \neq 0$) and introduced a new linear operator for $f \in \Sigma$ and discussed differential inequalities for meromorphic univalent functions. Now we define a new linear operator $\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} : \Sigma_P \to \Sigma_P$ by

$$\begin{aligned} \mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(z) &= \mathbf{M}^{\tau,\kappa}_{\varsigma,\varrho}(z) * f(z), \\ \mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\tau+(n+1)\kappa)\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\tau)\Gamma((n+1)\varsigma+\varrho)\ (n)!} a_n z^n, \quad z \in \Delta, \end{aligned}$$

where the symbol $(*)$ denotes the Hadamard product (or convolution). We define a new operator $\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} : \Sigma \to \Sigma$ in terms of Hadamard product, as follows:

$$\begin{aligned} \mathscr{I}^{\tau,\kappa,0}_{\varsigma,\varrho} &= \mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(z), \\ \mathscr{I}^{\tau,\kappa,1}_{\varsigma,\varrho} &= (1-\ell)\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(z) + \ell(\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(z))', \\ &\vdots \\ \mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} &= \mathscr{I}^{\tau,\kappa,1}_{\varsigma,\varrho}\left(\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m-1}_{\varsigma,\varrho}(\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(z))\right). \end{aligned}$$

Thus,

$$\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (1+(n-1)\ell)^m \ \frac{\Gamma(\tau+(n+1)\kappa)\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\tau)\Gamma((n+1)\varsigma+\varrho)\ (n)!} a_n z^n, \quad z \in \Delta. \tag{1.12}$$

Shortly, we let

$$\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \mho_n a_n z^n, \tag{1.13}$$

where

$$\mho_n = \frac{\Gamma(\tau+(n+1)\kappa)\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\tau)\Gamma((n+1)\varsigma+\varrho)\ (n)!}\left(1+(n-1)\ell\right)^m, \tag{1.14}$$

$$\mho_1 = \frac{\Gamma(\tau+2\kappa)\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\tau)\Gamma(2\varsigma+\varrho)}. \tag{1.15}$$

One can see that $\mathscr{I}^{1,1,0}_{0,\varrho} f(z) = zf'(z) + f(z) + z^{-1}$.

Let $\mathbb{H}$ be a complex Hilbert space and let $\mathscr{L}(\mathbb{H})$ denote the algebra of all bounded linear operators on $\mathbb{H}$. For a complex-valued function $f$analytic in a domain $\mathbb{E}$ of the complex z-plane containing the spectrum $\sigma(\mathbb{P})$ of the bounded linear operator $\mathbb{P}$, let $f(\mathbb{P})$ denote the operator on $\mathbb{H}$ defined by [25, p. 568]

$$f(\mathbb{P}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} (z\mathbb{I} - \mathbb{P})^{-1} f(z)\,dz, \tag{1.16}$$

where $\mathbb{I}$ is the identity operator on $\mathbb{H}$ and $\mathscr{C}$ is a positively-oriented simple rectifiable closed contour containing the spectrum $\sigma(\mathbb{P})$ in the interior domain. The operator $f(\mathbb{P})$ can also be defined by the following series:

$$f(\mathbb{P}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\mathbb{P}^n$$

which converges in the normed topology (cf. [26]).

Motivated by earlier works on meromorphic functions by function theorists (see [2, 9, 10, 12, 15, 27–30], and certain studies on Hilbert space operators [31–33] in this paper we made an attempt to define the new subclass $\mathfrak{M}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta,\wp)$ of Σ_P, as given in Definition 1, related with the generalized operator $\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho}$.

Definition 1. For $0 \leqslant \vartheta < 1$ and $0 \leqslant \wp < 1$, a function $f \in \Sigma_p$ be given by (1.2) is said to be in the class $\mathfrak{M}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta,\wp)$, if

$$\left\| \frac{\mathscr{J}_{\wp}(\mathbb{P}) - 1}{\mathscr{J}_{\wp}(\mathbb{P}) + (1-2\vartheta)} \right\| < 1, \tag{1.17}$$

where

$$\mathscr{J}_{\wp}(\mathbb{P}) = \frac{\mathbb{P}(\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(\mathbb{P}))'}{(\wp-1)\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(\mathbb{P}) + \wp\mathbb{P}(\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(\mathbb{P}))'}. \tag{1.18}$$

By fixing $\wp = 0$, we also define a new class of functions in Definition 2 and denote it by $\mathfrak{S}^{\tau,\kappa}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta,\wp)$.

Definition 2. For $0 \leqslant \vartheta < 1$ and $0 \leqslant \wp < 1$, a function $f \in \Sigma_p$ be given by (1.2) is said to be in the class $\mathfrak{S}^{\tau,\kappa}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta,\wp)$, if

$$\left\| \frac{\frac{\mathbb{P}(\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(\mathbb{P}))'}{\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(\mathbb{P})} - 1}{\frac{\mathbb{P}(\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(\mathbb{P}))'}{\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(\mathbb{P})} + (1-2\vartheta)} \right\| < 1. \tag{1.19}$$

The present paper aims to provide a systematic investigation of the various interesting properties like coefficient inequalities, growth and distortion inequalities, as well as closure results for f in the class $\mathfrak{M}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta,\wp)$ extensively. Properties of a certain integral operator and its inverse defined on the new class $\mathfrak{M}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta,\wp)$ are also discussed.

2. Coefficients Inequalities

Our first theorem gives a necessary and sufficient condition for a function $f \in \mathfrak{M}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta,\wp)$.

Theorem 1. *Let $f \in \Sigma_P$ be given by (1.2). Then $f \in \mathfrak{M}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta,\wp)$ if and only if*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)\}\, \mho_n a_n \leqslant 1 - \vartheta. \tag{2.1}$$

$\lhd$ Suppose f satisfies (2.1). Then for $\|z\| = \mathbb{P} = r\mathbb{I}$ we have

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathbb{P}(\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(\mathbb{P}))' - \{(\wp-1)\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(\mathbb{P}) + \wp\mathbb{P}(\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(\mathbb{P}))'\}\right\| \\
&- \left\|\mathbb{P}f'(\mathbb{P}) + (1-2\vartheta)\left\{(\wp-1)\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(\mathbb{P}) + \wp\mathbb{P}(\mathscr{I}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho} f(\mathbb{P}))'\right\}\right\| \\
&= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(1-\wp)(n+1)\mho_n a_n \mathbb{P}^{n+1}\right\|
\end{aligned}$$

$$-\left\|-2(1-\vartheta)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\{1+(1-2\vartheta)\wp\}n+(1-2\vartheta)(\wp-1)\Big]\mho_n a_n \mathbb{P}^{n+1}\right\|$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(1-\wp)(n+1)\mho_n a_n\|\mathbb{P}^{n+1}\|$$

$$-2(1-\vartheta)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\{1+(1-2\vartheta)\wp\}n+(1-2\vartheta)(\wp-1)\Big]\mho_n a_n\|\mathbb{P}^{n+1}\|$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\{n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\}\,\mho_n a_n r^{n+1}-2(1-\vartheta)\leqslant 0, \quad \text{by (2.1)}.$$

Hence, f satisfies (1.17), and $f \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$. Now to prove the converse, let $f \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$. We need only to show that each function f of the class $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$ satisfies the coefficient inequality (2.1). Since $f \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$, we have by definition

$$\left\|\frac{\frac{\mathbb{P}(\mathscr{I}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}f(\mathbb{P}))'}{(\wp-1)\mathscr{I}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}f(\mathbb{P})+\wp\mathbb{P}(\mathscr{I}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}f(z))'}-1}{\frac{\mathbb{P}f'(\mathbb{P})}{(\wp-1)\mathscr{I}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}f(\mathbb{P})+\wp\mathbb{P}(\mathscr{I}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}f(\mathbb{P}))'}+(1-2\vartheta)}\right\|<1, \quad z\in\Delta.$$

That is

$$\left\|\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(1-\wp)(n+1)\mho_n a_n\mathbb{P}^{n+1}}{-2(1-\vartheta)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\{1+(1-2\vartheta)\wp\}n+(1-2\vartheta)(\wp-1)\right]\mho_n a_n\mathbb{P}^{n+1}}\right\|\leqslant 1.$$

Since $|\operatorname{Re}(z)|\leqslant|z|=r$ for $z\in\mathbb{C}$ thus by taking $\mathbb{P}=r\mathbb{I}$ $(0<r<1)$, from the above inequality we have

$$\left[\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(1-\wp)(n+1)\mho_n a_n r^{n+1}}{2(1-\vartheta)-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\{1+(1-2\vartheta)\wp\}n+(1-2\vartheta)(\wp-1)\right]\mho_n a_n r^{n+1}}\right]\leqslant 1,$$

and letting $r\to 1^-$, yields the assertion (2.1) of Theorem 1. $\triangleright$

Fixing $\wp=0$, we get the following.

Corollary 2. *Let $f\in\Sigma_P$ be given by (1.2). Then $f\in\mathfrak{S}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa}(\vartheta,\wp)$ if and only if*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+\vartheta)\mho_n a_n\leqslant 1-\vartheta.$$

Our next result gives the coefficient estimates for functions in $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$.

Theorem 2. *If $f\in\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$, then*

$$a_n\leqslant\frac{1-\vartheta}{\{n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\}\,\mho_n}, \qquad n=1,2,3,\ldots$$

The result is sharp for the functions $F_n(z)$ given by

$$F_n(z)=\frac{1}{z}+\frac{1-\vartheta}{\{n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\}\,\mho_n}z^n, \qquad n=1,2,3,\ldots$$

$\triangleleft$ If $f\in\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$, then for each n we have

$$\{n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\}\,\mho_n a_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\{n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\}\,a_n\leqslant 1-\vartheta.$$

Therefore, we have

$$a_n\leqslant\frac{1-\vartheta}{\{n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\}\,\mho_n}.$$

Since

$$F_n(z) = \frac{1}{z} + \frac{1-\vartheta}{\{n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)\}\,\mho_n} z^n$$

satisfies the conditions of Theorem 1, $F_n(z) \in \mathfrak{M}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta, \wp)$ and the equality is attained for this function. ▷

For $\wp = 0$, we have the following corollary.

Corollary 3. *If $f \in \mathfrak{S}^{\tau,\kappa}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta, \wp)$, then*

$$a_n \leqslant \frac{1-\vartheta}{(n+\vartheta)\mho_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

Theorem 3. *If $f \in \mathfrak{M}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta, \wp)$, then*

$$\frac{1}{r} - \frac{1-\vartheta}{(1+\vartheta-2\vartheta\wp)\mho_1} r \leqslant \|f(\mathbb{P})\| \leqslant \frac{1}{r} + \frac{1-\vartheta}{(1+\vartheta-2\vartheta\wp)\mho_1} r, \quad \mathbb{P} = r \ (0 < r < 1).$$

The result is sharp for

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1-\vartheta}{(1+\vartheta-2\vartheta\wp)\mho_1} z, \tag{2.2}$$

where $\mho_1$ as given in (1.15).

◁ Since $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, we have

$$\|f(\mathbb{P})\| \leqslant \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \leqslant \frac{1}{r} + r \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Taking into account the inequality

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \frac{1-\vartheta}{(1+\vartheta-2\vartheta\wp)\mho_1}$$

we arrive at an estimate

$$\|f(\mathbb{P})\| \leqslant \frac{1}{r} + \frac{1-\vartheta}{(1+\vartheta-2\vartheta\wp)\mho_1} r.$$

Similarly

$$\|f(\mathbb{P})\| \geqslant \frac{1}{r} - \frac{1-\vartheta}{(1+\vartheta-2\vartheta\wp)\mho_1} r.$$

The result is sharp for $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1-\vartheta}{(1+\vartheta-2\vartheta\wp)\mho_1} z$. ▷

Similarly we have the following:

Theorem 4. *If $f \in \mathfrak{M}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta, \wp)$, then*

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1-\vartheta}{(1+\vartheta-2\vartheta\wp)\mho_1} \leqslant \|f'(\mathbb{P})\| \leqslant \frac{1}{r^2} + \frac{1-\vartheta}{(1+\vartheta-2\vartheta\wp)\mho_1}, \quad \mathbb{P} = r \ (0 < r < 1).$$

The result is sharp for the function given by (2.2).

3. Radius of Starlikeness

The radii of starlikeness and convexity are given by the following theorems for the class $\mathfrak{M}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta, \wp)$.

Theorem 5. *Let the function f belong to the class $\mathfrak{M}^{\tau,\kappa,m}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta, \wp)$. Then f is meromorphically starlike of order ρ $(0 \leqslant \rho < 1)$ in $|z| < r_1(\vartheta, \wp, \rho)$, where*

$$r_1(\vartheta, \wp, \rho) = \inf_n \left[\frac{(1-\rho)[n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)]\mho_n}{(n+\rho)(1-\vartheta)} \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad n \geqq 1. \tag{3.1}$$

$\lhd$ Let the function $f \in M_m^l(\wp, \vartheta)$ be of the form (1.2). If $0 < r \leqslant r_1(\vartheta, \wp, \rho)$, then by (3.1)

$$r^{n+1} \leqslant \frac{(1-\rho)\big[n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\big]\mho_n}{(n+\rho)(1-\vartheta)} \tag{3.2}$$

for all $n \in \mathbb{N}$. From (3.2) we get $\frac{n+\rho}{1-\rho} r^{n+1} \leqslant \frac{\big[n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\big]\mho_n}{1-\vartheta}$ for all $n \in \mathbb{N}$, thus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\rho}{1-\rho} a_n r^{n+1} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big[n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\big]\mho_n}{1-\vartheta} a_n \leqslant 1 \tag{3.3}$$

because of (2.1). If $f \in \Sigma_P$, then by Lemma 1 the function f is meromorphically starlike of order ρ in $|z| < r$ if and only if

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+\rho) a_n r^{n+1} \leqslant 1-\rho. \tag{3.4}$$

Therefore, (3.3) and (3.4) give that f is meromorphically starlike of order ρ in $|z| < r \leqslant r_1(\vartheta, \wp, \rho)$. $\rhd$

Suppose that there exists a number $\widetilde{r}$, $\widetilde{r} > r_1(\vartheta, \wp, \rho)$, such that each $f \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa}(\wp, \vartheta)$ is meromorphically starlike of order ρ in $|z| < \widetilde{r} \leqslant 1$. The function

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1-\vartheta}{[n-\vartheta(n\wp+\wp-1)]\mho_n} z^n$$

is in the class $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa}(\wp, \vartheta)$, thus it should satisfy (3.4) with $\widetilde{r}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+\rho) a_n \widetilde{r}^{n+1} \leqslant 1-\rho, \tag{3.5}$$

while the left–hand side of (3.5) becomes

$$\begin{aligned} (n+\rho)\frac{(1-\vartheta)}{[n-\vartheta(n\wp+\wp-1)]\mho_1}\widetilde{r}^{n+1} &> (n+\rho)\frac{(1-\vartheta)}{[n-\vartheta(n\wp+\wp-1)]\mho_1} \\ &\times \frac{(1-\rho)[n-\vartheta(n\wp+\wp-1)]\mho_n}{(n+\rho)(1-\vartheta)} = 1-\rho \end{aligned}$$

which contradicts (3.5). Therefore, the number $r_1(\vartheta, \wp, \rho)$ in Theorem 5 cannot be replaced with a grater number. This means that $r_1(\vartheta, \wp, \rho)$ is so called radius of meromorphically starlikness of order ρ for the class $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa}(\wp, \vartheta)$.

Remark 1. The above results give an improvement or better bound for order of starlikeness for $f \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,\gamma}(\vartheta, \wp)$ compared to the results given in [32, 33].

4. Neighborhoods for the Class $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,\gamma}(\vartheta, \wp)$

In this section, we determine the neighborhood for the class $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,\gamma}(\vartheta, \wp)$, which we define as follows:

Definition 3. A function $f \in \Sigma_p$ is said to be in the class $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,\gamma}(\vartheta, \wp)$ if there exists a function $g \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta, \wp)$ such that

$$\left\| \frac{f(\mathbb{P})}{g(\mathbb{P})} - 1 \right\| < 1-\gamma, \qquad (z \in \Delta,\ 0 \leqslant \gamma < 1). \tag{4.1}$$

Following the earlier works on neighborhoods of analytic functions by Goodman [34] and Ruscheweyh [35], we define the δ-neighborhood of a function $f \in \Sigma_p$ by

$$N_\delta(f) := \left\{ g \in \Sigma_p : \ g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n - b_n| \leqslant \delta \right\}. \tag{4.2}$$

Theorem 6. *If $g \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$ and*

$$\gamma = 1 - \frac{\delta(1+\vartheta-2\vartheta\wp)\mho_1}{2\vartheta(1-\wp)}, \tag{4.3}$$

then $N_\delta(g) \subset \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,\gamma}(\vartheta,\wp)$.

$\lhd$ Let $f \in N_\delta(g)$. Then we find from (4.2) that

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n - b_n| \leqslant \delta, \tag{4.4}$$

which implies the coefficient inequality

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n| \leqslant \delta, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Since $g \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$, we have (cf. equation (2.1))

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \frac{1-\vartheta}{(1+\vartheta-2\vartheta\wp)\mho_1}, \tag{4.6}$$

so that

$$\left\| \frac{f(\mathbb{P}))}{g(\mathbb{P})} - 1 \right\| < \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n} = \frac{\delta(1+\vartheta-2\vartheta\wp)\mho_1}{2\vartheta(1-\wp)} = 1 - \gamma,$$

provided γ is given by (4.3). Hence, by definition, $f \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,\gamma}(\vartheta,\wp)$ for γ given by (4.3), which completes the proof. $\rhd$

5. Closure Theorems

Let the functions $F_k(z)$ be given by

$$F_k(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k} z^n, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.1}$$

We shall prove the following closure theorems for the class $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$.

Theorem 7. *Let the function $F_k(z)$ defined by (5.1) be in the class $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$ for every $k = 1, 2, \ldots, m$. Then the function $f(z)$ defined by*

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \geqslant 0$$

belongs to the class $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$, whenever $a_n = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_{n,k}$, $n = 1, 2, \ldots$

◁ Since $F_n(z) \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$, it follows from Theorem 1 that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)\} \mho_n f_{n,k} \leqslant 1 - \vartheta \tag{5.2}$$

for every $k = 1, 2, \dots, m$. Hence

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)\} \mho_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \{n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)\} \mho_n \left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_{n,k}\right)$$
$$= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \{n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)\} \mho_n f_{n,k}\right) \leqslant 1 - \vartheta.$$

By Theorem 1 we arrive at the required conclusion $f(z) \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$. ▷

Theorem 8. *The class $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$ is closed under convex linear combination.*

◁ Let the function $F_k(z)$ given by (5.1) be in the class $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$. Then it is enough to show that the function

$$H(z) = \nu F_1(z) + (1-\nu)F_2(z), \quad 0 \leqslant \wp \leqslant 1,$$

is also in the class $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$. Since for $0 \leqslant \nu \leqslant 1$,

$$H(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\nu f_{n,1} + (1-\nu) f_{n,2}\right] z^n,$$

we observe that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)\} \mho_n [\nu f_{n,1} + (1-\nu) f_{n,2}]$$
$$= \nu \sum_{n=1}^{\infty} \{n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)\} \mho_n f_{n,1} + (1-\nu)\sum_{n=1}^{\infty} \{n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)\} \mho_n f_{n,2} \leqslant 1 - \vartheta.$$

By Theorem 1, we have $H(z) \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$. ▷

Theorem 9. *Let $F_0(z) = \frac{1}{z}$ and $F_n(z) = \frac{1}{z} + \frac{1-\vartheta}{\{n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\}\mho_n} z^n$ for $n = 1, 2, \dots$ Then $f(z) \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$ if and only if $f(z)$ can be expressed in the form $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n F_n(z)$, where $\nu_n \geqslant 0$ and $\sum_{n=0}^{\infty} \nu_n = 1$.*

◁ Let

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n F_n(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n(1-\vartheta)}{\{n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)\} \mho_n} z^n.$$

Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \frac{1-\vartheta}{\{n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)\} \mho_n} \frac{\{n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)\} \mho_n}{(1-\vartheta)} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n = 1 - \nu_0 \leqslant 1.$$

By Theorem 1, we have $f(z) \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$.

Conversely, let $f(z) \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$. In view of Theorem 2, we have

$$a_n \leqslant \frac{1-\vartheta}{\{n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)\} \mho_n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

and we may take

$$\nu_n = \frac{\{n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)\}\,\mho_n}{1-\vartheta} a_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

and $\nu_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n$. Then $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n F_n(z)$. $\triangleright$

6. Partial Sums

Silverman [36] determined sharp lower bounds on the real part of the quotients between the normalized starlike or convex functions and their sequences of partial sums. As a natural extension, it would be interesting to look for results similar to those by Silverman for meromorphic univalent functions. In this section, motivated essentially by the work of Silverman [36] and Cho and Owa [10] we will investigate the ratio of a function of the form

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \tag{6.1}$$

to its sequence of partial sums

$$f_1(z) = \frac{1}{z} \text{ and } f_k(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{k} a_n z^n, \tag{6.2}$$

when the coefficients are sufficiently small to satisfy the condition analogous to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)\}\,\mho_n\ a_n \leqslant 1 - \vartheta.$$

For the sake of brevity we rewrite it as

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n |a_n| \leqslant 1 - \vartheta, \tag{6.3}$$

where

$$\Lambda_n := [n - \vartheta(n\wp + \wp - 1)]\mho_n. \tag{6.4}$$

More precisely we will determine sharp lower bounds for $\mathrm{Re}\{f(z)/f_k(z)\}$ and $\mathrm{Re}\{f_k(z)/f(z)\}$. In this connection we make use of the well known results that $\mathrm{Re}\left\{\frac{1+w(z)}{1-w(z)}\right\} > 0$ $(z \in \Delta)$ if and only if

$$\omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

satisfies the inequality $|\omega(z)| \leqslant |z|$. Unless otherwise stated, we will assume that f is of the form (1.2) and its sequence of partial sums is denoted by

$$f_k(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{k} a_n z^n.$$

Theorem 10. *Let $f(z) \in \Sigma_P(\vartheta, \wp)$ given by* (6.1) *satisfiy condition* (2.1). *Then*

$$Re\left\{\frac{f(z)}{f_k(z)}\right\} \geqslant \frac{\Lambda_{k+1}(\wp, \vartheta) - 1 + \vartheta}{\Lambda_{k+1}(\wp, \vartheta)}, \quad z \in U, \tag{6.5}$$

where

$$\Lambda_n(\wp,\vartheta) \geqslant \begin{cases} 1-\vartheta, & n=1,2,3,\dots,k\,; \\ \Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta), & n=k+1,k+2,\dots \end{cases} \tag{6.6}$$

The result (6.5) *is sharp with the function given by*

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1-\vartheta}{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)}z^{k+1}. \tag{6.7}$$

$\lhd$ Define the function $w(z)$ by

$$\frac{1+w(z)}{1-w(z)}=\frac{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)}{1-\vartheta}\left[\frac{f(z)}{f_k(z)}-\frac{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)-1+\vartheta}{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)}\right]$$

$$=\frac{1+\sum\limits_{n=1}^{k}a_nz^{n+1}+\left(\frac{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)}{1-\vartheta}\right)\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}a_nz^{n+1}}{1+\sum\limits_{n=1}^{k}a_nz^{n+1}}. \tag{6.8}$$

It suffices to show that $|w(z)|\leqslant 1$. Now, from (6.8) we can write

$$w(z)=\frac{\left(\frac{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)}{1-\vartheta}\right)\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}a_nz^{n+1}}{2+2\sum\limits_{n=1}^{k}a_nz^{n+1}+\left(\frac{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)}{1-\vartheta}\right)\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_nz^{n+1}}.$$

Next we estimate

$$|w(z)|\leqslant\frac{\left(\frac{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)}{1-\vartheta}\right)\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|a_n|}{2-2\sum\limits_{n=1}^{k}|a_n|-\left(\frac{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)}{1-\vartheta}\right)\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}|a_n|}.$$

Now $\|w(\mathbb{P})\|\leqslant 1$, if

$$2\left(\frac{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)}{1-\vartheta}\right)\sum_{n=k+1}^{\infty}|a_n|\leqslant 2-2\sum_{n=1}^{k}|a_n|$$

or, equivalently,

$$\sum_{n=1}^{k}|a_n|+\frac{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)}{1-\vartheta}\sum_{n=k+1}^{\infty}|a_n|\leqslant 1.$$

Due to the condition (2.1), it is sufficient to show that

$$\sum_{n=1}^{k}|a_n|+\frac{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)}{1-\vartheta}\sum_{n=k+1}^{\infty}|a_n|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda_n(\wp,\vartheta)}{1-\vartheta}|a_n|$$

which is equivalent to

$$\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{\Lambda_n(\wp,\vartheta)-1+\vartheta}{1-\vartheta}\right)|a_n|+\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{\Lambda_n(\wp,\vartheta)-\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)}{1-\vartheta}\right)|a_n|\geqslant 0.$$

To see that the function given by (6.7) gives the sharp result, we observe that for $z = re^{i\pi/k}$

$$\frac{f(z)}{f_k(z)} = 1 + \frac{1-\vartheta}{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)} z^n \to 1 - \frac{1-\vartheta}{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)} = \frac{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta) - 1 + \vartheta}{\Lambda_{k+1}(\wp,\vartheta)}, \quad \text{when } r \to 1^-,$$

which shows the bound (6.5) is the best possible for each $k \in \mathbb{N}$. $\triangleright$

7. Integral Operators

In this section, we consider integral transforms of functions in the class $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$.

Theorem 11. *Let the function $f(z)$ given by (1) be in $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$. Then the integral operator*

$$F(z) = c\int_0^1 u^c f(uz)\,du, \quad 0 < u \leqslant 1,\ 0 < c < \infty,$$

is in $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa}(\delta,\wp)$, where

$$\delta = \frac{(c+2)\{1+\vartheta-2\vartheta\wp\} - c(1-\vartheta)}{c(1-\vartheta)\{1-2\wp\} + (1+\vartheta)\{1-2\wp\}(c+2)}.$$

The result is sharp for the function $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1-\vartheta}{\{1+\vartheta-2\vartheta\wp\}\mho_1} z$.

$\triangleleft$ Let $f(z) \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$. Then

$$F(z) = c\int_0^1 u^c f(uz)\,du = c\int_0^1 \left(\frac{u^{c-1}}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n u^{n+c} z^n\right) du = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{c+n+1} f_n z^n.$$

It is sufficient to show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c\{n-\delta(n\wp+\wp-1)\}\mho_n}{(c+n+1)(1-\delta)} a_n \leqslant 1. \tag{7.1}$$

Since $f \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\}}{1-\vartheta} \mho_n a_n \leqslant 1.$$

Note that (7.1) is satisfied, if

$$\frac{c\{n-\delta(n\wp+\wp-1)\}\mho_n}{(c+n+1)(1-\delta)} \leqslant \frac{\{n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\}\mho_n}{(1-\vartheta)}.$$

Rewriting the inequality, we have

$$c\{n-\delta(n\wp+\wp-1)\}(1-\vartheta) \leqslant (c+n+1)(1-\delta)\{n+\vartheta-\vartheta\wp(1+n)\}\mho_n.$$

Solving for δ, we have

$$\delta \leqslant \frac{(c+n+1)\{n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\} - cn(1-\vartheta)}{c(1-\vartheta)\{1-\wp(1+n)\} + \{(n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\}(c+n+1)} = F(n).$$

A simple computation will show that $F(n)$ is increasing and $F(n) \geqslant F(1)$. Using this, the results follows. $\triangleright$

For the choice of $\wp = 0$, we have the following result of Uralegaddi and Ganigi [9].

Corollary 4. *Let the function $f(z)$ defined by (1) be in $\Sigma_p^*(\vartheta)$. Then the integral operator*

$$F(z) = c\int_0^1 u^c f(uz)\,du, \quad 0 < u \leqslant 1,\ 0 < c < \infty,$$

is in $\Sigma_p^*(\delta)$, where $\delta = \frac{1+\vartheta+c\vartheta}{1+\vartheta+c}$. The result is sharp for the function

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1-\vartheta}{1+\vartheta}z.$$

Also we have the following:

Theorem 12. *Let $f(z)$, given by (1), be in $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$,*

$$F(z) = \frac{1}{c}\big[(c+1)f(z) + zf'(z)\big] = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c+n+1}{c}f_n z^n, \qquad c > 0. \tag{7.2}$$

Then $F(z)$ is in $\mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$ for $|z| \leqslant r(\vartheta,\wp,\beta)$, where

$$r(\vartheta,\wp,\beta) = \inf_n\left(\frac{c(1-\beta)\left\{n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\right\}}{(1-\vartheta)(c+n+1)\left\{n-\beta(n\wp+\wp-1)\right\}}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad n = 1,2,3,\dots$$

The result is sharp for the function $f_n(z) = \frac{1}{z} + \frac{1-\vartheta}{\{n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\}}z^n, \quad n = 1,2,3,\dots$

$\lhd$ Let $w = \frac{zf'(z)}{(\wp-1)f(z)+\wp zf'(z)}$. Then it is sufficient to show that

$$\left\|\frac{w-1}{w+1-2\beta}\right\| < 1.$$

A computation shows that this is satisfied, if

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{n-\beta(n\wp+\wp-1)\}(c+n+1)}{(1-\beta)c}a_n\mho_n\|\mathbb{P}\|^{n+1} \leqslant 1. \tag{7.3}$$

Since $f \in \mathfrak{M}_{\varsigma,\varrho}^{\tau,\kappa,m}(\vartheta,\wp)$, by Theorem 1, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-\vartheta(n\wp+\wp-1))\,\mho_n}{1-\vartheta}a_n \leqslant 1.$$

The equation (7.3) is satisfied, if

$$\frac{\{n-\beta(n\wp+\wp-1)\}(c+n+1)}{(1-\beta)c}\mho_n a_n|z|^{n+1} \leqslant \frac{\{n-\vartheta(n\wp+\wp-1)\}\mho_n a_n}{1-\vartheta}.$$

Solving for $|z|$, we get the result. $\rhd$

For the choice of $\wp = 0$, we have the following result of Uralegaddi and Ganigi [9].

Corollary 5. *Let the function $f(z)$ defined by (1) be in $\Sigma_p^*(\vartheta)$ and $F(z)$ given by (7.2). Then $F(z)$ is in $\Sigma_p^*(\vartheta)$ for $|z| \leqslant r(\vartheta,\beta)$, where*

$$r(\vartheta,\beta) = \inf_n\left(\frac{c(1-\beta)(n+\vartheta)}{(1-\vartheta)(c+n+1)(n+\beta)}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad n = 1,2,3,\dots$$

The result is sharp for the function $f_n(z) = \frac{1}{z} + \frac{1-\vartheta}{n+\vartheta}z^n$, $n = 1,2,3,\dots$

Conclusion. The interplay of geometry and analysis signifies a vital aspect of the research in the complex functions theory. The rapid progress in this area is directly related to the relationship that exists between the analytic structure and the geometric behavior of functions. In the current study, we introduced a new class of meromorphic functions that is related to the Mittag-Leffler function based on the Hilbert space operator, and we found some sufficient and necessary conditions regarding the properties of this subclass. For further research we are intended to study certain classes related to functions with respect to fixed second coefficients associated with Mittag-Leffler functions and majorization results.

References

1. *Dziok, J., Murugusundaramoorthy, G. and Sokół, J.* On Certain Class of Meromorphic Functions with Positive Coefficients, *Acta Mathematica Scientia*, 2012, vol. 32, no. 4, pp. 1376–1390. DOI: 10.1016/S0252-9602(12)60106-4.
2. *Clunie, J.* On Meromorphic Schlicht Functions, *Journal of the London Mathematical Society*, 1959, vol. s1-34, no. 2, pp. 215–216. DOI: 10.1112/jlms/s1-34.2.215.
3. *Nehari, Z. and Netanyahu, E.* On the Coefficients of Meromorphic Schlicht Functions, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1957, vol. 8, pp. 15–23. DOI: 10.1090/S0002-9939-1957-0083038-0.
4. *Pommerenke, Ch.* Über Einige Klassen Meromorpher Schlichter Funktionen, *Mathematische Zeitschrift*, 1962, vol. 78, pp. 263–284. DOI: 10.1007/BF01195174.
5. *Pommerenke, Ch.* On Meromorphic Starlike Functions, *Pacific Journal of Mathematics*, 1963, vol. 13, pp. 221–235.
6. *Royster, W. C.* Meromorphic Starlike Multivalent Functions, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1963, vol. 107, pp. 300–308. DOI: 10.2307/1993896.
7. *Bajpai, S. K.* A Note on a Class of Meromorphic Univalent Functions, *Revue Roumaine de Mathéematiques Pures et Appliquées*, 1997, vol. 22, pp. 295–297.
8. *Mogra, M. L., Reddy, T. R. and Juneja, O. P.* Meromorphic Univalent Functions with Positive Coefficients, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1985, vol. 32, no. 2, pp. 161–176. DOI: 10.1017/S0004972700009874.
9. *Uralegaddi, B. A. and Ganigi, M. D.* A Certain Class of Meromorphically Starlike Functions with Positive Coefficients, *Pure and Applied Mathematika Sciences*, 1987, vol. 26, pp. 75–81.
10. *Cho, N. E., Lee, S. H. and Owa, S.* A Class of Meromorphic Univalent Functions with Positive Coefficients, *Kobe Journal of Mathematics*, 1987, vol. 4, no. 1, pp. 43–50.
11. *Aouf, M. K.* On a Certain Class of Meromorphic Univalent Functions with Positive Coefficients, *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni*, 1991, ser. 11, no. 2, pp. 209–219.
12. *Uralegaddi, B. A. and Somanatha, C.* Certain Differential Operators for Meromorphic Functions, *Houston Journal of Mathematics*, 1991, vol. 17, no. 2, pp. 279–284.
13. *Duren, P. L. Univalent Functions, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, vol. 259, Springer-Verlag, New York, 1983.
14. *Srivastava, H. M. and Owa, S. Current Topics in Analytic Function Theory*, New Jersey, World Scientific Publishing, 1992.
15. *Mittag-Leffler, G. M.* Sur la Nouvelle Fonction $\mathbf{E}(x)$, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, 1903, vol. 137, pp. 554–558.
16. *Wiman, A.* Über den Fundamentalsatz in der Teorie der Funktionen $\mathbf{E}_a(x)$, *Acta Mathematica*, 1905, vol. 29, pp. 191–201. DOI: 10.1007/BF02403202.
17. *Attiya, A. A.* Some Applications of Mittag-Leffler Function in the Unit Disk, *Filomat*, 2016, vol. 30, no. 7, pp. 2075–2081. DOI: 10.2298/FIL1607075A.
18. *Bansal, D. and Prajapat, J. K.* Certain Geometric Properties of the Mittag-Leffler Functions, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2016, vol. 61, no. 3, pp. 338–350. DOI: 10.1080/17476933.2015.1079628.
19. *Frasin, B. A.* An Application of an Operator Associated with Generalized Mittag-Leffler Function, *Konuralp Journal of Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 1, pp. 199–202.
20. *Frasin, B. A., Tariq Al-Hawary, and Yousef, F.* Some Properties of a Linear Operator Involving Generalized Mittag-Leffler Function, *Studia Universitatis Babeş-Bolyai. Chemia*, 2020, vol. 65, no. 1, pp. 67–75. DOI: 10.24193/subbmath.2020.1.06.
21. *Haubold, H. J., Mathai, A. M. and Saxena, R. K.* Mittag-Leffler Functions and Their Applications, *Journal of Applied Mathematics*, 2011. DOI: 10.1155/2011/298628.

22. *Kiryakova, V. Generalized Fractional Calculus and Applications, Pitman Research Notes in Mathematics Series*, 301. Longman Scientific & Technical, Harlow; co-published in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.
23. *Srivastava, H. M. and Tomovski, Z.* Fractional Calculus with an Itegral Operator Containing Generalized Mittag-Leffler Function in the Kernal, *Applied Mathematics and Computation*, 2009, vol. 211, no. 1, pp. 198–210.
24. *Aouf, M. K. and Mostafa, A.* Certain Inequalities of Meromorphic Univalent Functions Associated with the Mittag-Lefer Function, *Journal of Applied Analysis*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 173–178. DOI: 10.1515/jaa-2019-0018.
25. *Bao, G. J. and Ling, Y.* On Some Classes of Analytic Functions with Negative Coefficients, *Journal of Harbin Institute of Technology*, 1991, no. 23, pp. 100–103.
26. *Dunford, N. and Schwartz, J. T. Linear Operators. Part I: General Theory* (*Reprinted from the 1958 original*), A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, New York, 1988.
27. *Auof, M. K. and Murugusundaramoorthy, G.* On a Subclass of Uniformly Convex Functions Defined by the Dziok-Srivastava Operator, *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, vol. 5, no. 1, article 3, pp. 1–17.
28. *Liu, J.-L. and Srivastava, H. M.* Classes of Meromorphically Multivalent Functions Associated with the Generalized Hypergeometric Function, *Mathematical and Computer Modelling*, 2004, vol. 39, no. 1, pp. 21–34. DOI: 10.1016/S0895-7177(04)90503-1.
29. *Liu, J.-L. and Srivastava, H. M.* Subclasses of Meromorphically Multivalent Functions Associated with a Certain Linear Operator, *Mathematical and Computer Modelling*, 2004, vol. 39, no. 1, pp. 35–44. DOI: 10.1016/S0895-7177(04)90504-3.
30. *Owa, S. and Pascu, N. N.* Coefficient Inequalities for Certain Classes of Meromorphically Starlike and Meromorphically Convex Functions, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 2003, vol. 4, no. 1, article 17, pp. 1–6.
31. *Murugusundaramoorthy, G. and Rosy, T.* Subclass of Analytic Functions Associated with Fox-Wright's Generalized Hypergeometric Functions Based on Hilbert Space Operator, *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Math.*, 2011, vol. 56, no. 3, pp. 61–72.
32. *Akgul, A.* A New Subclass of Meromorphic Functions Defined by Hilbert Space Operator, *Honam Mathematical Journal*, 2016, vol. 38, no. 3, pp. 495–506. DOI: 10.5831/HMJ.2016.38.3.495.
33. *Akgul, A. and Bulut, S.* On a Certain Subclass of Meromorphic Functions Defined by Hilbert Space Operator, *Acta Universitatis Apulensis*, 2016, no. 45, pp. 1–9. DOI: 10.17114/j.aua.2016.45.01.
34. *Goodman, A. W.* Univalent Functions and Nonanalytic Curve, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1957, vol. 8, no. 3, pp. 598–601. DOI: 10.2307/2033525.
35. Ruscheweyh, S. Neighborhoods of Univalent Funtions, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1981, vol. 81, no. 4, pp. 521–527.
36. *Silverman, H.* Partial Sums of Starlike and Convex Functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1997, vol. 209, no. 1, pp. 221–227. DOI: 10.1006/jmaa.1997.5361.

Received February 10, 2023

Gangadharan Murugusundaramoorthy
School of Advanced Sciences, Vellore Institute of Technology,
Vellore 632014, TN, India,
Professor
E-mail: gmsmoorthy@yahoo.com
https://orcid.org/0000-0001-8285-6619

Kaliappan Vijaya
School of Advanced Sciences, Vellore Institute of Technology,
Vellore 632014, TN, India,
Professor
E-mail: kvijaya@vit.ac.in
https://orcid.org/0000-0002-3216-7038

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 70–86

О НОВОМ КЛАССЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, АССОЦИИРОВАННОМ С ФУНКЦИЕЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

Муругусундарамурти Г.[1] и Виджая К.[1]

[1] Технологический институт Веллора, Школа передовых наук,
Индия, 632014, Теннесси, Веллор
E-mail: gmsmoorthy@yahoo.com, kvijaya@vit.ac.in

Аннотация. Функция Миттаг-Леффлера естественным образом возникает при решении дифференциальных и интегральных уравнений дробного порядка, и особенно, при изучении дробного обобщения кинетического уравнения, случайных блужданий, полетов Леви, супердиффузионного переноса и при изучении сложных систем. В настоящем исследовании авторы определяют новый класс $\mathfrak{M}^{\tau,\kappa}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta,\wp)$ мероморфных функций, определенных в проколотом единичном круге $\Delta^* := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ на основе функции Миттаг-Леффлера. Подробно обсуждаются его характерные свойства, такие как коэффициентные неравенства, неравенства роста и искажения, а также результаты замыкания для $f \in \mathfrak{M}^{\tau,\kappa}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta,\wp)$. Рассматриваются свойства некоторого интегрального оператора и его обратного, определенного на классе $\mathfrak{M}^{\tau,\kappa}_{\varsigma,\varrho}(\vartheta,\wp)$. Получены коэффициентные неравенства, неравенства роста и искажения, а также результаты замыкания. Установлены также некоторые результаты, касающиеся окрестностей и частичных сумм мероморфных функций в этом новом классе. Указаны некоторые новые подклассы и характеристические их свойства, специализируя параметры, которые являются новыми и не изучались ранее в связи с функциями Миттаг-Леффлера.

Ключевые слова: мероморфные функции, звездообразная функция, свертка, положительные коэффициенты, коэффициентные неравенства, интегральный оператор, функция Миттаг-Леффлера, оператор Гильбертова пространства.

AMS Subject Classification: 30C45, 30C50.

Образец цитирования: *Murugusundaramoorthy G. and Vijaya K.* On a New Class of Meromorphic Functions Associated with Mittag-Leffler Function // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 1.—С. 70–86 (in English). DOI: 10.46698/p1426-1765-3037-f.

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 87–100

УДК 517.55
DOI 10.46698/w6732-0632-5795-v

О ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬФАНДА — ШИЛОВА ТИПА S

И. Х. Мусин[1]

[1] Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: `musin_ildar@mail.ru`

Посвящается профессору Александру Васильевичу Абанину
по случаю его 70-летнего юбилея

Аннотация. В теории обобщенных функций, теории дифференциальных уравнений значительный интерес представляют пространства быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций. Это связано с тем, что при решении различных задач анализа в таких пространствах можно воспользоваться богатыми возможностями, которые представляет преобразование Фурье или преобразование Лапласа. Одним из таких пространств являются пространства Гельфанда — Шилова типа S. Они возникли в середине 1950-х годов в работах И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова в ходе изучения проблемы единственности решения задач Коши для уравнений в частных производных. В знаменитой серии книг И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова по обобщенным функциям конца 1950-х — начала 1960-х гг. детально описаны свойства функций этих пространств и проведен тщательный анализ Фурье в них. К настоящему времени пространства типа S нашли многочисленные применения также в теории псевдодифференциальных операторов, частотно-временном анализе. В настоящей работе помощью двух счетных семейств φ и ψ раздельно радиальных весовых функций в $\mathbb{R}^n$ введено пространство $\mathscr{S}_{\varphi}^{\psi}$ функций типа S более общее, чем пространство Гельфанда — Шилова S_{α}^{β}. Получено описание пространства $\mathscr{S}_{\varphi}^{\psi}$ в терминах преобразования Фурье функций и рассмотрен вопрос о его нетривиальности. Исследование оператора периодизации на одном из рассматриваемых пространств типа S оказалось связанным с задачей описания функций пространства периодических ультрадифференцируемых функций типа Румье в терминах убывания их коэффициентов Фурье.

Ключевые слова: пространства Гельфанда — Шилова, преобразование Фурье, ряд Фурье.

AMS Subject Classification: 46F05, 42B05.

Образец цитирования: *Мусин И. Х.* О пространствах Гельфанда — Шилова типа S // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 87–100. DOI: 10.46698/w6732-0632-5795-v.

Введение

В теории обобщенных функций, теории дифференциальных уравнений значительный интерес представляют пространства быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций. Это связано с тем, что при решении различных задач анализа в таких пространствах можно воспользоваться богатыми возможностями, которые представляет преобразование Фурье. Одним из таких пространств являются пространства Гельфанда — Шилова типа S [1]. Они возникли в середине 1950-х годов в работах И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова в ходе изучения проблемы единственности решения задач Коши для уравнений в частных производных. К настоящему времени пространства типа S нашли многочисленные применения также в теории псевдодифференциальных операторов, частотно-временном анализе. Достаточно общий подход к определению двух классов пространств Гельфанда — Шилова типа S (в настоящей работе это пространства $\mathscr{S}_\varphi$ и $\mathscr{S}^\psi$), частными случаями которых являются как классические пространства Гельфанда — Шилова S_α и S^β, так и их обобщения (см., например, [2]), построенные с помощью некоторых неубывающих последовательностей положительных чисел, был предложен в заметке [3]. Данная работа продолжает начатые в [3] исследования пространств Гельфанда — Шилова типа S более общего вида и линейных операторов на них и имеет своей целью подготовку необходимых сведений для дальнейшего перехода к изучению задач теории (псевдо)дифференциальных операторов и вейвлет-анализа в этих пространствах. В частности, для этого с помощью двух счетных семейств φ и ψ раздельно радиальных весовых функций в $\mathbb{R}^n$ введено пространство $\mathscr{S}_\varphi^\psi$, более общее, чем пространство S_α^β [1, гл. 4]. Рассмотрен вопрос о его нетривиальности и дано его описание в терминах преобразования Фурье функций (раздел 2). При определенных условиях на семейство φ показано, что оператор периодизации непрерывным образом переводит пространство $\mathscr{S}^\varphi$ в пространство периодических ультрадифференцируемых функций типа Румье (раздел 4). Изучение оператора периодизации потребовало описания функций последнего пространства в терминах убывания их коэффициентов Фурье (раздел 3).

Статья посвящена юбилею Александра Васильевича Абанина в знак восхищения широтой его научных интересов, красотой полученных им результатов и признания его большого вклада в тесное взаимодействие ростовской и уфимской школ по комплексному анализу и теории функций.

1. Обозначения и определения

Для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ полагаем $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ обозначение $\alpha \leqslant \beta$ означает, что $\alpha_j \leqslant \beta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. В этом случае $C_\beta^\alpha := \prod_{j=1}^n C_{\beta_j}^{\alpha_j}$.

Для $t \geqslant 0$ $t^+ = \max(t, 1)$, $\ln^+ t = \ln t^+$.

По произвольной функции $g : X \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{Z}^n \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^n$, определим функцию $g^* : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ по правилу: $g^*(x) = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (\langle \alpha, x \rangle - g(\alpha))$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Преобразование Юнга — Фенхеля функции $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ есть функция $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, определяемая по формуле $\tilde{g}(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - g(y))$.

Придерживаемся следующего определения преобразования Фурье $\hat{f}$ функции $f \in S(\mathbb{R}^n)$: $\hat{f}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle}\, d\xi$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Через Ω обозначена совокупность всех семейств $\omega = \{\omega_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, состоящих из функций $\omega_\nu : \mathbb{Z}_+^n \to [0, \infty)$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

i_1) существуют зависящие от ω_ν числа $a_1 \geqslant 0$, $a_2 > 0$ такие, что $\omega_\nu(\alpha) \geqslant a_1 + a_2|\alpha|$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$;

i_2) $\omega_{\nu+1}(\alpha) \geqslant \omega_\nu(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\lim_{|\alpha| \to +\infty} (\omega_{\nu+1}(\alpha) - \omega_\nu(\alpha)) = +\infty$.

Через Ω_1 обозначим подмножество Ω, семейства $\omega = \{\omega_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ которого удовлетворяют условию

i_3) для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует число $b_\nu > 0$ такое, что

$$\omega_\nu(\alpha + \beta) \leqslant b_\nu + \omega_{\nu+1}(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \ \beta \in \mathbb{Z}_+^n \cap [0, 1]^n.$$

2. О пространствах Гельфанда — Шилова типа S более общего вида и свойствах им принадлежащих функций

2.1. Определение пространств $\mathscr{S}_\varphi$, $\mathscr{S}^\psi$ и $\mathscr{S}_\varphi^\psi$. Пусть $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega$. Для любых $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$\mathscr{S}_{m,\varphi_\nu} = \left\{ f \in C^m(\mathbb{R}^n) : \ \|f\|_{m,\nu} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\, \beta\in\mathbb{Z}_+^n, \\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n : |\alpha|\leqslant m}} \frac{\left|x^\beta (D^\alpha f)(x)\right|}{e^{\varphi_\nu(\beta)}} < \infty \right\}.$$

Положим $\mathscr{S}_{\varphi_\nu} := \bigcap_{m=0}^\infty \mathscr{S}_{m,\varphi_\nu}$. Снабдим $\mathscr{S}_{\varphi_\nu}$ топологией, определяемой семейством норм $\|\cdot\|_{m,\nu}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$). Очевидно, пространство $\mathscr{S}_{\varphi_\nu}$ непрерывно вложено в $\mathscr{S}_{\varphi_{\nu+1}}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Пусть $\mathscr{S}_\varphi = \varinjlim \mathscr{S}_{\varphi_\nu}$ — внутренний индуктивный предел [4] пространств $\mathscr{S}_{\varphi_\nu}$.

По семейству $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega$ определим пространство $\mathscr{S}^\psi$. Вначале по $\nu \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ введем пространство

$$\mathscr{S}_m^{\psi_\nu} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \ \rho_{m,\nu}(f) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n, \\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n}} \frac{(1+\|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)|}{e^{\psi_\nu(\alpha)}} < \infty \right\}.$$

Эквивалентная топология в $\mathscr{S}_m^{\psi_\nu}$ может быть задана с помощью норм

$$q_{m,\nu}(f) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\, \alpha\in\mathbb{Z}_+^n, \\ \beta\in\mathbb{Z}_+^n : |\beta|\leqslant m}} \frac{\left|x^\beta (D^\alpha f)(x)\right|}{e^{\psi_\nu(\alpha)}}.$$

Пусть $\mathscr{S}^{\psi_\nu} := \bigcap_{m=0}^\infty \mathscr{S}_m^{\psi_\nu}$. Наделим $\mathscr{S}^{\psi_\nu}$ топологией, определяемой семейством норм $\rho_{m,\nu}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$). Пусть $\mathscr{S}^\psi = \varinjlim \mathscr{S}^{\psi_\nu}$ — внутренний индуктивный предел пространств $\mathscr{S}^{\psi_\nu}$.

По семействам $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty, \psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega$ определим пространство $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ как внутренний индуктивный предел нормированных пространств

$$\mathscr{S}_{\varphi_\nu}^{\psi_\nu} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \ \|f\|_\nu = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n, \\ \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n}} \frac{\left|x^\alpha (D^\beta f)(x)\right|}{e^{\varphi_\nu(\alpha)+\psi_\nu(\beta)}} < \infty \right\}.$$

Пространства $\mathscr{S}_\varphi$, $\mathscr{S}^\psi$, $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ построены по аналогии с пространствами Гельфанда — Шилова S_α, S^β, S_α^β, соответственно [1].

Замечание. Если положить $\mathscr{M}_\nu(\alpha) = e^{\varphi_\nu(\alpha)}$ для $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\mathscr{M} = \{\mathscr{M}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, то получим, что $\mathscr{S}_\varphi$ ($\mathscr{S}^\varphi$) не что иное, как пространство $\mathscr{S}_\mathscr{M}$ ($\mathscr{S}^\mathscr{M}$). Однако обозначения $\mathscr{S}_\mathscr{M}$ и $\mathscr{S}^\mathscr{M}$ представляются более громоздкими.

2.2. О некоторых свойствах пространств $\mathscr{S}_\varphi$, $\mathscr{S}^\psi$, $\mathscr{S}_\varphi^\psi$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty, \psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega$. Пусть функции семейства φ не убывают по каждой переменной и $\lim_{|\alpha|\to\infty} \frac{\varphi_\nu(\alpha)}{|\alpha|} = +\infty$ для каждого $\nu \in \mathbb{N}$.*

Функция $f \in S(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ тогда и только тогда, когда существуют числа $\nu \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\left|(D^\beta f)(x)\right| \leqslant C e^{-\varphi_\nu^*(\ln^+|x_1|,\ldots,\ln^+|x_n|)+\psi_\nu(\beta)}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

$\lhd$ Пусть $f \in \mathscr{S}_{\varphi}^{\psi}$. Тогда $f \in \mathscr{S}_{\varphi_\nu}^{\psi_\nu}$ при некотором $\nu \in \mathbb{N}$. Значит, для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\left|x^\alpha (D^\beta f)(x)\right| \leqslant \|f\|_\nu e^{\varphi_\nu(\alpha)+\psi_\nu(\beta)}. \tag{2}$$

Отметим, что благодаря неубыванию φ_ν по каждой переменной

$$\left|x^\gamma (D^\beta f)(x)\right| \leqslant \|f\|_\nu e^{\varphi_\nu(\alpha)+\psi_\nu(\beta)}, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n, \ \gamma \leqslant \alpha. \tag{3}$$

Поставим в соответствие точке $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ точку $x^+ = (|x_1|^+, \dots, |x_n|^+)$. Тогда, с учетом (3), из (2) следует, что

$$\left|(D^\beta f)(x)\right| \leqslant \|f\|_\nu \inf_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{e^{\varphi_\nu(\alpha)}}{(x^+)^\alpha} e^{\psi_\nu(\beta)} = \|f\|_\nu e^{-\varphi_\nu^*(\ln^+|x_1|, \dots, \ln^+|x_n|)+\psi_\nu(\beta)}.$$

Обратно, пусть функция $f \in S(\mathbb{R}^n)$ такова, что при некоторых $\nu \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ выполнено неравенство (1). Тогда для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\left|(D^\beta f)(x)\right| \leqslant C e^{-\alpha_1 \ln^+|x_1| - \dots - \alpha_n \ln^+|x_n| + \varphi_\nu(\alpha)} e^{\psi_\nu(\beta)}.$$

Т. е.

$$\left(|x_1|^+\right)^{\alpha_1} \cdots \left(|x_n|^+\right)^{\alpha_n} \left|(D^\beta f)(x)\right| \leqslant C e^{\varphi_\nu(\alpha)+\psi_\nu(\beta)}.$$

Тогда тем более справедливо неравенство

$$\left|x^\alpha (D^\beta f)(x)\right| \leqslant C e^{\varphi_\nu(\alpha)+\psi_\nu(\beta)}.$$

Значит, $f \in \mathscr{S}_{\varphi}^{\psi}$. $\rhd$

В доказательстве ряда последующих утверждений точку $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ обозначаем для краткости через $\mathbf{1}$.

Предложение 1. *Пусть семейства* $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega_1$. *Тогда функция* $f \in S(\mathbb{R}^n)$ *принадлежит пространству* $\mathscr{S}_{\varphi}^{\psi}$ *тогда и только тогда, когда найдутся числа* $\nu \in \mathbb{N}$ *и* $C > 0$ *такие, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha (D^\beta f)(x)\right|^2 dx \leqslant C e^{2(\varphi_\nu(\alpha)+\psi_\nu(\beta))}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{4}$$

$\lhd$ Пусть $f \in S(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $\mathscr{S}_{\varphi}^{\psi}$. Тогда найдутся числа $p \in \mathbb{N}$ и $K > 0$ такие, что

$$|x^\alpha (D^\beta f)(x)| \leqslant K e^{\varphi_p(\alpha)+\psi_p(\beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{5}$$

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ произвольны. Представим интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta f)(x)|^2\, dx$ в виде суммы 2^n интегралов по непересекающимся подмножествам $\mathbb{R}^n$, описываемых n неравенствами вида $|x_k| \leqslant 1$ или $|x_k| > 1$. В интегралах по множествам, в описании которых участвует неравенство $|x_k| > 1$, умножаем и делим подынтегральное выражение на x_k^2. Тогда из (5) с учетом условий i_3) и i_2) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha (D^\beta f)(x)\right|^2 dx \leqslant K_1 e^{2(\varphi_{p+1}(\alpha)+\psi_{p+1}(\beta))}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

где K_1 — некоторое положительное число. Итак, неравенство (4) выполнено с $\nu = p + 1$, $C = K_1$.

Пусть теперь имеет место неравенство (4) и $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ произвольны. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left|x^\alpha (D^\beta f)(x)\right|^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^n \left(\xi^\alpha \left(D^\beta f\right)(\xi)\right)^2}{\partial \xi_1 \ldots \partial \xi_n} \right| d\xi \leqslant \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n :\, j \leqslant \mathbf{1}} C_{\mathbf{1}}^j \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \left(D^j \left(\xi^{2\alpha}\right)\right) \left(D^{\mathbf{1}-j} \left(D^\beta f\right)^2 (\xi)\right) \right| d\xi.$$

Согласно [2], если $u \in S(\mathbb{R}^n)$, то при любых $\mu, j \in \mathbb{Z}_+^n$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|D^j (x^\mu)\right| |u(x)|\, dx \leqslant \sqrt{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x^\mu| \left|(D^j u)(x)\right| dx. \qquad (6)$$

Таким образом, с учетом неравенства (6) и пользуясь неравенством Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned}
\left|x^\alpha (D^\beta f)(x)\right|^2 &\leqslant 2^n \sqrt{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\xi^{2\alpha}\right| \left| \left(D^{\mathbf{1}} \left(D^\beta f\right)^2 (\xi)\right)\right| d\xi \\
&\leqslant 2^n \sqrt{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n :\, s \leqslant \mathbf{1}} C_{\mathbf{1}}^s \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\xi^\alpha \left(D^{\beta+s} f\right)(\xi)\right| \left|\xi^\alpha \left(D^{\beta+\mathbf{1}-s} f\right)(\xi)\right| d\xi \\
&\leqslant 2^n \sqrt{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n :\, s \leqslant \mathbf{1}} C_{\mathbf{1}}^s \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\xi^\alpha \left(D^{\beta+s} f\right)(\xi)\right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\xi^\alpha \left(D^{\beta+\mathbf{1}-s} f\right)(\xi)\right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant 2^n \sqrt{2} C \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n :\, s \leqslant \mathbf{1}} C_{\mathbf{1}}^s e^{2\varphi_\nu(\alpha)} e^{\psi_\nu(\beta+s)} e^{\psi_\nu(\beta+\mathbf{1}-s)}.
\end{aligned}$$

Отсюда, благодаря условиям $i_3)$, $i_2)$, получим, что при некотором $C_2 > 0$

$$|x^\alpha (D^\beta f)(x)|^2 \leqslant C_2 e^{2\varphi_{\nu+1}(\alpha)} e^{2\psi_{\nu+1}(\beta)}.$$

Следовательно, $f \in \mathscr{S}_\varphi^\psi$. $\triangleright$

Точно теми же рассуждениями, что и в предложении 1, доказываются следующие два утверждения.

Предложение 2. *Пусть семейство* $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega_1$. *Тогда функция* $f \in S(\mathbb{R}^n)$ *принадлежит пространству* $\mathscr{S}_\varphi$ *тогда и только тогда, когда существует число* $\nu \in \mathbb{N}$ *такое, что для любого* $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ *найдется число* $C_\beta > 0$ *такое, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta f)(x)|^2\, dx \leqslant C_\beta e^{2\varphi_\nu(\alpha)}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Предложение 3. *Пусть семейство* $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega_1$. *Тогда функция* $f \in S(\mathbb{R}^n)$ *принадлежит пространству* $\mathscr{S}^\psi$ *тогда и только тогда, когда найдется число* $\nu \in \mathbb{N}$ *такое, что каким бы ни было* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, *найдется число* $C_\alpha > 0$ *такое, что для любого* $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta f)(x)|^2\, dx \leqslant C_\alpha e^{2\psi_\nu(\beta)}.$$

Доказательство следующего утверждения проводится по схеме доказательства теоремы 3.3 из [5]. Поэтому считаем возможным не приводить его. Отметим лишь, что оно по существу использует предложения 2 и 3.

Теорема 2. *Пусть семейства* $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \in \Omega_1$. *Пусть для любого* $\nu \in \mathbb{N}$ *выполнены условия:*

i_4) *при некотором* $d_\nu > 0$

$$\varphi_\nu(\alpha+\beta) \geqslant \varphi_\nu(\alpha) + \varphi_\nu(\beta) - d_\nu,$$
$$\psi_\nu(\alpha+\beta) \geqslant \psi_\nu(\alpha) + \psi_\nu(\beta) - d_\nu;$$

i_5) *при некоторых* $A_\nu, B_\nu > 0$

$$e^{\varphi_\nu(\alpha)+\psi_\nu(\alpha)} \geqslant A_\nu B_\nu^{|\alpha|}\alpha!, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n;$$

i_6) *существуют числа* $s = s_\nu \in \mathbb{N}$ *и* $b_\nu > 0$ *такие, что для всех* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\varphi_\nu(2\alpha) \leqslant b_\nu + 2\varphi_{\nu+s}(\alpha),$$
$$\psi_\nu(2\alpha) \leqslant b_\nu + 2\psi_{\nu+s}(\alpha).$$

Пусть также выполнено условие

i_7) *существует число* $\sigma > 1$ *такое, что для каждого* $\nu \in \mathbb{N}$ *найдется число* $l_\nu > 0$, *что для любого* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$l_\nu + \sigma|\alpha| + \varphi_\nu(\alpha) \leqslant \varphi_{\nu+1}(\alpha),$$
$$l_\nu + \sigma|\alpha| + \psi_\nu(\alpha) \leqslant \psi_{\nu+1}(\alpha).$$

Тогда функция $f \in S(\mathbb{R}^n)$ *принадлежит пространству* $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ *тогда и только тогда, когда* $f \in \mathscr{S}_\varphi \cap \mathscr{S}^\psi$.

2.3. О (не)квазианалитичности II пространства $\mathscr{S}_\varphi^\psi$. В работах [6, 7] класс функций назван квазианалитическим II, если в нем отсутствует нетривиальная финитная функция, т. е. функция, отличная от тождественного нуля и равная нулю всюду вне какой-нибудь ограниченной области.

Пусть L — некоторая (достаточно быстро растущая) положительная функция на $\mathbb{Z}_+^n$. Она порождает класс $C_D(L)$ всех бесконечно дифференцируемых в области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ функций f таких, что для любого компакта $K \subset D$ найдутся положительные числа A и C такие, что

$$|(D^\alpha f)(x)| \leqslant CA^{|\alpha|}L(\alpha), \quad x \in K, \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

По L образуем последовательность чисел

$$\overline{L}_m = \sup_{t>0} \inf_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} t^{m-|\alpha|}L_\alpha, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Определим еще функцию

$$\theta(r) = \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \big(|\alpha|\ln r - \ln L(\alpha)\big), \quad r > 0.$$

Известен следующий результат [8–11].

Теорема B. *Класс* $C_D(L)$ *является квазианалитическим* II *тогда и только тогда, когда* $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{L}_m}{\overline{L}_{m+1}} = \infty$, *или, тогда и только тогда, когда* $\int_0^\infty \frac{\theta(r)}{1+r^2}\,dr = \infty$.

В следующем утверждении через $(\exp\psi_\nu)$ обозначено отображение, сопоставляющее каждому $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ число $e^{\psi_\nu(\alpha)}$.

Предложение 4. *Пусть семейства* $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega$ *удовлетворяют условию* i_7) *и пространство* $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ *является квазианалитическим* II. *Тогда для каждого* $\nu \in \mathbb{N}$ *расходится ряд*

$$\sum_{m=1}^\infty \frac{\overline{(\exp\psi_\nu)}_m}{\overline{(\exp\psi_\nu)}_{m+1}}. \tag{7}$$

$\triangleleft$ Пусть в пространстве $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ отсутствует нетривиальная финитная функция. Допустим, что при некотором $\nu \in \mathbb{N}$ ряд (7) сходится. Тогда найдется отличная от тождественного нуля и равная нулю всюду вне какой-нибудь ограниченной области $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^n$ бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n$ функция f такая, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдутся положительные числа A_K и B_K такие, что

$$\left|\left(D^\beta f\right)(x)\right| \leqslant A_K B_K^{|\beta|} e^{\psi_\nu(\beta)}, \quad x \in K, \ \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

В частности, это неравенство справедливо и при $K = \overline{\Omega}$. Поэтому, с учетом условия i_1), при некотором $R > 0$, зависящем от Ω, для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left|x^\alpha\left(D^\beta f\right)(x)\right| \leqslant C_1 \left(\frac{R}{e^{a_2(\nu)}}\right)^{|\alpha|} e^{\varphi_\nu(\alpha)} B_{\overline{\Omega}}^{|\beta|} e^{\psi_\nu(\beta)},$$

где $C_1 = \frac{A_{\overline{\Omega}}}{e^{a_1(\nu)}}$. Отсюда, с учетом условия i_7), получим, что при некоторых $s \in \mathbb{N}$ и $C_2 > 0$

$$\left|x^\alpha\left(D^\beta f\right)(x)\right| \leqslant C_2 e^{\varphi_{\nu+s}(\alpha)+\psi_{\nu+s}(\beta)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Значит, $f \in \mathscr{S}_\varphi^\psi$. Но по условию в пространстве $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ отсутствует нетривиальная финитная функция. Таким образом, допущение неверно и ряд (7) расходится. $\triangleright$

Предложение 5. *Пусть для каждого* $\nu \in \mathbb{N}$ *расходится ряд* (7). *Тогда пространство* $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ *является квазианалитическим* II.

$\triangleleft$ Пусть для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ расходится ряд (7). Допустим, что пространство $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ не является квазианалитическим II. Это означает, что существует нетривиальная бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n$ функция f, обращающаяся в ноль вне некоторой ограниченной области $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^n$, и такая, что при некоторых $\nu \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x^\alpha(D^\beta f)(x)| \leqslant C e^{\varphi_\nu(\alpha)} e^{\psi_\nu(\beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$|(D^\beta f)(x)| \leqslant C e^{\varphi_\nu(0)} e^{\psi_\nu(\beta)}, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Но тогда по теореме B $f(x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, что противоречит допущению. $\triangleright$

Из предложений 4 и 5 имеем

Следствие 1. *Пусть семейства* $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega$ *удовлетворяют условию* i_7). *Тогда пространство* $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ *не является квазианалитическим* II *тогда и только тогда, когда при некотором* $\nu \in \mathbb{N}$ *сходится ряд* (7).

2.4. О преобразовании Фурье в пространстве $\mathscr{S}_\varphi^\psi$.

Теорема 3. *Пусть семейства* $\varphi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega_1$ *удовлетворяют условию* i_7). *Тогда отображение* $\mathscr{F} : f \in \mathscr{S}_\varphi^\psi \to \hat{f}$ *устанавливает изоморфизм между пространствами* $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ *и* $\mathscr{S}_\psi^\varphi$.

◁ Покажем вначале, что отображение $\mathscr{F}$ действует из $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ в $\mathscr{S}_\psi^\varphi$. Пусть $g \in \mathscr{S}_\varphi^\psi$. Тогда $g \in \mathscr{S}_{\varphi_\nu}^{\psi_\nu}$ для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$. Поэтому для всех $\gamma, \mu \in \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|x^\mu (D^\gamma g)(x)| \leqslant \|g\|_\nu e^{\varphi_\nu(\mu)+\psi_\nu(\gamma)}. \tag{8}$$

Далее, пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ произвольны. Положим $\kappa_s := \min(\alpha_s, \beta_s)$ для $s = 1, \dots, n$ и $\kappa := (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$. Так как

$$(i\xi)^\beta \big(D^\alpha \hat{g}\big)(\xi) = \frac{(-1)^{|\beta|}}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^n:\, j\leqslant\kappa} C_\beta^j \big(D^{\beta-j} g\big)(x) \big(D^j (ix)^\alpha\big) e^{i\langle x,\xi\rangle}\, dx,$$

то

$$\big|\xi^\beta \big(D^\alpha \hat{g}\big)(\xi)\big| \leqslant \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^n:j\leqslant\kappa} C_\beta^j \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|\big(D^{\beta-j} g\big)(x)\big| \big|D^j\big(x^\alpha\big)\big|\, dx.$$

Отсюда, пользуясь неравенством (6), получим, что

$$\big|\xi^\beta \big(D^\alpha \hat{g}\big)(\xi)\big| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^n:\, j\leqslant\kappa} C_\beta^j \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|x^\alpha \big(D^\beta g\big)(x)\big|\, dx.$$

Продолжим эту оценку, следуя [2, с. 371] (как и в предложении 1). А именно:

1) представляем $\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta g)(x)|\, dx$ в виде суммы 2^n интегралов по непересекающимся подмножествам $\mathbb{R}^n$, описываемых n неравенствами вида $|x_k| \leqslant 1$ или $|x_k| > 1$;

2) в интегралах по множествам, в описании которых участвует неравенство $|x_k| > 1$, умножаем и делим подынтегральное выражение на x_k^2.

Тогда, пользуясь неравенством (8), получим, что

$$\big|\xi^\beta \big(D^\alpha \hat{g}\big)(\xi)\big| \leqslant \frac{(\sqrt{2})^{3n+1}}{(\sqrt{\pi})^n} 2^{|\beta|} \|g\|_\nu e^{\psi_\nu(\beta)} \sup_{\substack{\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\mathbb{Z}_+^n:\\ \omega_j\leqslant 2,\, j=1,\dots,n}} e^{\varphi_\nu(\alpha+\omega)}.$$

Отсюда, благодаря дополнительному условию на семейство ψ и условию i_3) на φ, имеем при некоторых $m_\nu \in \mathbb{N}$ и $C_3 > 0$

$$\big|\xi^\beta \big(D^\alpha \hat{g}\big)(\xi)\big| \leqslant C_3 \|g\|_\nu e^{\psi_{\nu+m_\nu}(\beta)} e^{\varphi_{\nu+2}(\alpha)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Пусть $n_\nu = \max(m_\nu, 2)$. Тогда при некотором $C_4 > 0$

$$|\xi^\beta (D^\alpha \hat{g})(\xi)| \leqslant C_4 \|g\|_\nu e^{\psi_{\nu+n_\nu}(\beta)} e^{\varphi_{\nu+n_\nu}(\alpha)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{9}$$

Следовательно, $\hat{g} \in \mathscr{S}_{\psi_{\nu+n_\nu}}^{\varphi_{\nu+n_\nu}}$. Итак, $\hat{g} \in \mathscr{S}_\psi^\varphi$. Обозначим норму в $\mathscr{S}_{\psi_\nu}^{\varphi_\nu}$ через $\|\cdot\|_{(\nu)}$. Тогда из неравенства (9)

$$\|\hat{g}\|_{(\nu+n_\nu)} \leqslant C_4 \|g\|_\nu, \quad g \in \mathscr{S}_{\varphi_\nu}^{\psi_\nu}.$$

Отсюда следует, что отображение $\mathscr{F}$ действует из $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ в $\mathscr{S}_\psi^\varphi$ непрерывно.

Точно такими же рассуждениями показывается, что отображение $\mathscr{F}^{-1}$ действует из $\mathscr{S}_\psi^\varphi$ в $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ и является непрерывным. Кроме того, очевидно, линейное отображение $\mathscr{F}$ действует из $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ в $\mathscr{S}_\psi^\varphi$ инъективно. Таким образом, отображение $\mathscr{F}$ осуществляет изоморфизм между пространствами $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ и $\mathscr{S}_\psi^\varphi$. ▷

3. Пространство периодических ультрадифференцируемых функций типа Румье в $\mathbb{R}^n$ и его характеризация

Пусть $C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ — пространство 2π-периодических по каждой переменной непрерывных в $\mathbb{R}^n$ функций f, $C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n) = C_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \cap C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Каждой функции $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ ставим в соответствие ее ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_{\alpha} e^{i\langle \alpha, x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где коэффициент Фурье $\hat{f}_{\alpha}$ задается формулой

$$\hat{f}_{\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{[0,2\pi]^n} f(x) e^{-i\langle \alpha, x\rangle}\, dx.$$

Пусть $\mathscr{H} = \{h_{\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ — произвольное семейство выпуклых функций $h_{\nu} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ с $h_{\nu}(0) = 0$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

$j_1)$ $h_{\nu}(x) = h_{\nu}(|x_1|, \ldots, |x_n|)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

$j_2)$ $\lim_{x\to\infty} \frac{h_{\nu}(x)}{\|x\|} = +\infty$;

$j_3)$ $h_{\nu+1}(x) \geqslant h_{\nu}(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и $\lim_{x\to\infty}(h_{\nu+1}(x) - h_{\nu}(x)) = +\infty$;

$j_4)$ $\tau_{\nu} := \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n} e^{h^*_{\nu+1}(\ln^+|\alpha_1|,\ldots,\ln^+|\alpha_n|) - h^*_{\nu}(\ln^+|\alpha_1|,\ldots,\ln^+|\alpha_n|)} < \infty$.

Определим пространство $J(\mathscr{H})$ как внутренний индуктивный предел нормированных пространств

$$J(h_{\nu}) = \left\{ f \in C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n) : \mathscr{N}_{\nu}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, \alpha\in\mathbb{Z}^n_+} \frac{|(D^{\alpha}f)(x)|}{e^{h_{\nu}(\alpha)}} < \infty \right\}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Следуя определениям теории ультрадифференцируемых функций (см, например, [10, 12–16]), пространство $J(\mathscr{H})$ можно отнести к классу пространств ультрадифференцируемых функций типа Румье в $\mathbb{R}^n$, нашедших многочисленные применения в теории дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [17] и библиографию там) и теории операторов свертки [18–20].

Далее, следующим образом введем пространство $\mathscr{C}(\mathscr{H})$. Для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ пусть $\mathscr{C}(h_{\nu})$ — пространство, состоящее из функций $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, коэффициенты Фурье которых $\hat{f}_{\alpha}$ при некотором $a_{\nu}(f) > 0$ удовлетворяют оценке

$$|\hat{f}_{\alpha}| \leqslant a_{\nu}(f) e^{-h^*_{\nu}(\ln^+|\alpha_1|,\ldots,\ln^+|\alpha_n|)}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Так как (благодаря условию $j_2)$) для любого $\nu \in \mathbb{N}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{h^*_{\nu}(x)}{\|x\|} = +\infty$, то функции из $\mathscr{C}(h_{\nu})$ бесконечно дифференцируемы. Наделим $\mathscr{C}(h_{\nu})$ нормой

$$p_{\nu}(f) = \sup_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n} \left(\big|\hat{f}_{\alpha}\big| e^{h^*_{\nu}(\ln^+|\alpha_1|,\ldots,\ln^+|\alpha_n|)} \right).$$

Далее, поскольку $h^*_{\nu}(x) \geqslant h^*_{\nu+1}(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, то $p_{\nu+1}(f) \leqslant p_{\nu}(f)$ для произвольной функции $f \in C(h_{\nu})$. Значит, пространство $\mathscr{C}(h_{\nu})$ вложено в $\mathscr{C}(h_{\nu+1})$ непрерывно. При этом $\mathscr{C}(h_{\nu})$ — собственное подпространство пространства $\mathscr{C}(h_{\nu+1})$. Действительно, имеются функции из $\mathscr{C}(h_{\nu+1})$, не принадлежащие $\mathscr{C}(h_{\nu})$. Например, такова будет функция

$$f_{\nu+1}(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} e^{-h^*_{\nu+1}(\ln^+|\alpha_1|,\ldots,\ln^+|\alpha_n|)} e^{i\langle\alpha,x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Для нее $p_{\nu+1}(f_\nu) = 1$, а $p_\nu(f_\nu) = +\infty$, поскольку благодаря условиям $j_2)$ и $j_3)$ $\lim_{x\to\infty}(h_\nu^*(x) - h_{\nu+1}^*(x)) = +\infty$. Пусть $\mathscr{C}(\mathscr{H}) = \bigcup_{\nu=1}^\infty \mathscr{C}(h_\nu)$. Линейное пространство $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ снабдим топологией индуктивного предела пространств $\mathscr{C}(h_\nu)$.

Справедлива следующая теорема, доказательство которой проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.1 в [21], и приводится здесь для полноты изложения.

Теорема 4. *Пространства $J(\mathscr{H})$ и $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ совпадают.*

$\lhd$ Пусть $f \in J(\mathscr{H})$. Покажем, что $f \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$. Так как $f \in J(h_\nu)$ для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$, то

$$\big|\big(D^\beta f\big)(x)\big| \leqslant \mathscr{N}_\nu(f) e^{h_\nu(\beta)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Отсюда и из представления

$$\hat{f}_\alpha (i\alpha)^\beta = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{[0,2\pi]^n} \big(D^\beta f\big)(x) e^{-i\langle\alpha,x\rangle}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

получим, что для любых $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|\hat{f}_\alpha| \leqslant \mathscr{N}_\nu(f) \frac{e^{h_\nu(\beta)}}{(|\alpha_1|^+)^{\beta_1} \cdots (|\alpha_n|^+)^{\beta_n}}.$$

Отсюда следует, что

$$|\hat{f}_\alpha| \leqslant \mathscr{N}_\nu(f) e^{-h_\nu^*(\ln^+ |\alpha_1|, \ldots, \ln^+ |\alpha_n|)}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Следовательно, $f \in \mathscr{C}(h_\nu)$ и, значит, $f \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$. Кроме того, из последнего неравенства следует, что $p_\nu(f) \leqslant \mathscr{N}_\nu(f)$ для $f \in J(h_\nu)$. Значит, пространство $J(h_\nu)$ вложено в $\mathscr{C}(h_\nu)$ непрерывно. Но тогда и $J(\mathscr{H})$ вложено в $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ непрерывно.

Пусть теперь $f \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$. Тогда $f \in \mathscr{C}(h_\nu)$ для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$. Значит,

$$|\hat{f}_\alpha| \leqslant p_\nu(f) e^{-h_\nu^*(\ln^+ |\alpha_1|, \ldots, \ln^+ |\alpha_n|)}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n. \tag{10}$$

Таким образом, при любых $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|\hat{f}_\alpha| \leqslant p_\nu(f) \frac{e^{h_\nu(\beta)}}{(|\alpha_1|^+)^{\beta_1} \cdots (|\alpha_n|^+)^{\beta_n}}.$$

Эта оценка означает, что $f \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Далее, пользуясь неравенством (10), условием $j_4)$, для произвольных $x \in \mathbb{R}^n$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$\begin{aligned}
|(D^\beta f)(x)| &\leqslant \sum_{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}_\alpha| (|\alpha_1|^+)^{\beta_1} \cdots (|\alpha_n|^+)^{\beta_n} \\
&\leqslant p_\nu(f) \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n} e^{-h_\nu^*(\ln^+ |\alpha_1|, \ldots, \ln^+ |\alpha_n|)} (|\alpha_1|^+)^{\beta_1} \cdots (|\alpha_n|^+)^{\beta_n} \\
&\leqslant \tau_\nu p_\nu(f) e^{\sup\limits_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n} \left(\beta_1 \ln^+ |\alpha_1| + \cdots + \beta_n \ln^+ |\alpha_n| - h_{\nu+1}^*(\ln^+ |\alpha_1|, \ldots, \ln^+ |\alpha_n|)\right)} \\
&\leqslant \tau_\nu p_\nu(f) e^{\sup\limits_{t \in \mathbb{R}^n} (\langle\beta,t\rangle - h_{\nu+1}^*(t))}.
\end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись предложением 1 из [21], получим, что

$$|(D^\beta f)(x)| \leqslant \tau_\nu p_\nu(f) e^{h_{\nu+1}(\beta)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{11}$$

Итак, $f \in J(h_{\nu+1})$ и, значит, $f \in J(\mathscr{H})$. Из неравенства (11) следует, что

$$\mathscr{N}_{\nu+1}(f) \leqslant \tau_\nu p_\nu(f), \quad f \in \mathscr{C}(h_\nu).$$

Но тогда и вложение $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ в $J(\mathscr{H})$ непрерывно.

Из доказанных утверждений следует совпадение пространств $J(\mathscr{H})$ и $\mathscr{C}(\mathscr{H})$. $\rhd$

4. Об операторе периодизации в $\mathscr{S}^\varphi$

Отметим, что если $f \in S(\mathbb{R}^n)$, то для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ряд $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}(D^\beta f)(x+2\pi\alpha)$ сходится равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}^n$. Поэтому его сумма принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и, очевидно, является 2π-периодической по каждой переменной функцией.

Определение. Пусть $\psi = \{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in \Omega$. Определим на $\mathscr{S}^\psi$ оператор периодизации P, полагая

$$(Pf)(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} f(x+2\pi\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 5. *Пусть семейство* $\mathscr{H} = \{h_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ *выпуклых функций* $h_\nu : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ *с* $h_\nu(0) = 0$, *помимо условий* $j_1)$*–*$j_4)$, *удовлетворяет дополнительным условиям:*

$j_5)$ *для любого* $\nu \in \mathbb{N}$ *существует число* $c_\nu > 0$ *такое, что*

$$h_\nu(\alpha+\beta) \leqslant c_\nu + h_{\nu+1}(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n \cap [0,1]^n;$$

$j_6)$ *для любых* $\nu, m \in \mathbb{N}$ *найдется число* $c_{\nu,m} > 0$ *такое, что*

$$h_{\nu+1}(\alpha) \geqslant c_{\nu,m} + h_\nu(\alpha) + \sum_{k=1}^n m\ln(1+\alpha_k), \quad \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Пусть семейство φ *состоит из функций* $\varphi_\nu := h_{\nu|\mathbb{Z}_+^n}$, $\nu = 1,2,\dots$

Тогда оператор P *действует из* $\mathscr{S}^\varphi$ *в* $J(\mathscr{H})$ *и является непрерывным.*

$\lhd$ Согласно следствию 1 из теоремы 1 в [3] отображение $\mathscr{F} : f \in \mathscr{S}^\varphi \to \hat{f}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathscr{S}^\varphi$ и $\mathscr{S}_\varphi$. В частности, отображение $\mathscr{F}$ действует непрерывно из $\mathscr{S}^\varphi$ в $\mathscr{S}_\varphi$. Причем, как следует из концовки доказательства теоремы 1 в [3], каково бы ни было $\nu \in \mathbb{N}$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ при некотором $C_{m,\nu} > 0$

$$\|\hat{f}\|_{m,\nu+1} \leqslant C_{m,\nu}\rho_{m+2n,\nu}(f), \quad f \in \mathscr{S}^{\varphi_\nu}. \tag{12}$$

Далее, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n$

$$\widehat{(Pf)}_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{[0,2\pi]^n}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} f(x+2\pi\alpha)e^{-i\langle\alpha,x\rangle}\,dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\int\limits_{[0,2\pi]^n} f(x+2\pi\alpha)e^{-i\langle\alpha,x\rangle}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle\alpha,x\rangle}\,dx = \frac{\hat{f}(-\alpha)}{(\sqrt{2\pi})^n}.$$

Следовательно,

$$(Pf)(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\hat{f}(-\alpha)e^{i\langle\alpha,x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что в силу неравенства (12), в частности,

$$\left|x^\beta\hat{f}(x)\right| \leqslant C_{m,\nu}\rho_{m+2n,\nu}(f)e^{\varphi_{\nu+1}(\beta)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \beta \in \mathbb{Z}^n.$$

Из этой оценки следует, что

$$\left|\hat{f}(-\alpha)\right| \leqslant C_{m,\nu}\rho_{m+2n,\nu}(f)e^{-\varphi^*_{\nu+1}(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)}.$$

Отсюда, с учетом того, что $\varphi_{\nu+1} = h_{\nu+1|\mathbb{Z}_+^n}$, имеем

$$\left|\widehat{(Pf)}_\alpha\right| \leqslant K_{m,\nu}\rho_{m+2n,\nu}(f)e^{-h^*_{\nu+1}(\ln^+|\alpha_1|,\dots,\ln^+|\alpha_n|)},$$

где $K_{m,\nu} = \frac{C_{m,\nu}}{(\sqrt{2\pi})^n}$. Следовательно, $\left(\widehat{(Pf)}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \in \mathscr{C}(h_{\nu+1})$ и

$$p_{\nu+1}\left(\left(\widehat{(Pf)}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\right) \leqslant K_{m,\nu}\rho_{m+2n,\nu}(f), \quad f \in \mathscr{S}^{\varphi_\nu}.$$

Но тогда согласно концовке доказательства теоремы 4 $Pf \in J(h_{\nu+2})$ (и, значит, $Pf \in J(\mathscr{H})$), причем, при любом $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathscr{N}_{\nu+2}(Pf) \leqslant \tau_{\nu+1}K_{m,\nu}\rho_{m+2n,\nu}(f), \quad f \in \mathscr{S}^{\varphi_\nu}.$$

Из этого неравенства следует, что линейный оператор P действует из $\mathscr{S}^\varphi$ в $J(\mathscr{H})$ непрерывно. $\rhd$

Благодарность. Благодарю рецензента за ценные замечания.

Литература

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Т. 2: Пространства основных и обобщенных функций.—М.: Физматгиз, 1958.—308 с.
2. *Соловьев М. А.* Пространственно-подобная асимптотика вакуумных средних в нелокальной теории поля // Теорет. и матем. физика.—1982.—Т. 52, № 3.—С. 363–374.
3. *Луценко А. В., Мусин И. Х., Юлмухаметов Р. С.* О пространствах Гельфанда — Шилова // Уфимск. матем. журн.—2023.—Т. 15, № 3.—С. 91–99.
4. *Эдвардс Р. Е.* Функциональный анализ. Теория и приложения.— М.: Мир, 1969.—1070 с.
5. *Chung J., Chung S-Y, Kim D.* Equivalence of the Gelfand–Shilov Spaces // J. Math. Anal. Appl.—1996.—Vol. 203, № 3.—P. 828–839. DOI: 10.1006/jmaa.1996.0414.
6. *Мацаев В. И., Ронкин Л. И.* Квазианалитические классы функций от нескольких переменных // Зап. матем. отд. физ-матем. фак. и Харьковск. матем. общ.—1961.—Т. 27, № 4.—С. 49–57.
7. *Ронкин Л. И.* О квазианалитических классах функций нескольких переменных // Докл. АН СССР.—1962.—Т. 146, № 3.—С. 546–549.
8. *Lelong P.* Sur une propriété de quasi-analyticité des fonctions de plusieurs variables // C. R. Acad. Sci. Paris.—1951.—Vol. 232.—P. 1178–1180.
9. *Lelong P.* Extension d'un théoréme de Carleman // Ann. Inst. Fourier, Grenoble.—1962.—Vol. 12.—P. 627–641.
10. *Roumieu C.* Ultra-distribution définis sur $\mathbb{R}^n$ et sur certaines classes de variétés differentiables // J. Analyse Math.—1962.—Vol. 10.—P. 153–192. DOI: 10.1007/BF02790307.
11. *Thu Pham-Gia.* On a theorem of Lelong // Canad. Math. Bull.—1976.—Vol. 19, № 4—P. 505–506. DOI: 10.4153/CMB-1976-077-x.
12. *Roumieu C.* Sur quelques extensions de la notion de distribution // Ann. Sci. École Norm. Sup. Ser. 3.—1960.—Vol. 77, № 1.—P. 41–121. DOI: 10.24033/asens.1087.
13. *Komatsu H.* Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA, Math.—1973.—Vol. 20, № 1.—P. 25–105.
14. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results Math.—1990.—Vol. 17, № 3–4.—P. 206–237. DOI: 10.1007/BF03322459.
15. *Абанин А. В.* Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения.— М.: Наука, 2007.—222 с.
16. *Абанин А. В.* Ω-ультрараспределения // Изв. РАН. Сер. матем.—2008.—Т. 72, № 2.—С. 3–38. DOI: 10.4213/im1147.
17. *Boiti C., Jornet D., Oliaro A.* Regularity of partial differential operators in ultradifferentiable spaces and Wigner type transforms // J. Math. Anal. Appl.—2017.—Vol. 446, № 1.—P. 920–944. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.09.029.

18. *Meise R.* Sequence Space Representations For Zero-Solutions of Convolution Equations on Ultradifferentiable Functions of Roumieu Type // Stud. Math.—1989.—Vol. 92.—P. 211–230. DOI: 10.4064/sm-92-3-211-230.
19. *Полякова Д. А.* Об образе оператора свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций // Алгебра и анализ.—2024.—Т. 36, № 2.—С. 108–130.
20. *Полякова Д. А.* Описание ядра оператора свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Румье // Владикавк. матем. журн.—2024.—Т. 26, № 3.—С. 72–85. DOI: 10.46698/f8294-3012-1428-w.
21. *Луценко А. В., Мусин И. Х., Юлмухаметов Р. С.* О классе периодических функций в $\mathbb{R}^n$ // Уфимск. матем. журн.—2022.—Т. 14, № 4.—С. 73–79.

Статья поступила 8 ноября 2024 г.

Мусин Ильдар Хамитович
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: musin_ildar@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-2659-1147

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 87–100

ON GELFAND–SHILOV SPACES OF TYPE S

Musin, I. Kh.[1]

[1] Institute of Mathematics with Computing Centre
of the Ufa Federal Research Centre of RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia

E-mail: musin_ildar@mail.ru

Abstract. In the theory of generalized functions and the theory of differential equations spaces of rapidly decreasing infinitely differentiable functions are of considerable interest. This is due to the fact that when solving various problems of analysis in such spaces one can use the rich possibilities provided by the Fourier transform or the Laplace transform. One of such spaces is the Gelfand–Shilov spaces of type S. They arose in the mid-1950s in the works of I. M. Gelfand and G. E. Shilov during the study of the problem of uniqueness of the solution of Cauchy problems for partial differential equations. In the famous series of books by I. M. Gelfand and G. E. Shilov on generalized functions of the late 1950s – early 1960s the properties of the functions of these spaces are described in detail and a thorough Fourier analysis is carried out in them. By now, spaces of type S have found numerous applications also in the theory of pseudodifferential operators, time-frequency analysis. In the present paper, using two countable families φ and ψ of separately radial weight functions in $\mathbb{R}^n$, we introduce a space $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ of functions of type S that is more general than the Gelfand–Shilov space S_α^β. We obtain a description of the space $\mathscr{S}_\varphi^\psi$ in terms of the Fourier transform of functions and consider the question of its non-triviality. The study of the periodization operator on one of the spaces of type S under consideration turned out to be related to the problem of describing the functions of the space of periodic ultradifferentiable functions of Roumieu type in terms of the decrease of their Fourier coefficients.

Keywords: Gelfand–Shilov spaces, Fourier transform, Fourier series.

AMS Subject Classification: 46F05, 42B05.

For citation: *Musin, I. Kh.* On Gelfand–Shilov Spaces of Type S, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 87–100 (in Russian). DOI: 10.46698/w6732-0632-5795-v.

References

1. *Gelfand, I. M. and Shilov, G. E.* Generalized Functions. Vol. 2. Spaces of Fundamental and Generalized Functions, New York, Academic Press, 1968.
2. *Soloviev, M. A.* Spacelike Asymptotic Behavior of Vacuum Expectation Values in Nonlocal Field Theory, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1982, vol. 52, no. 3, pp. 854–862. DOI: 10.1007/BF01038079.
3. *Lutsenko, A. V., Musin, I. Kh. and Yulmukhametov, R. S.* On Gelfand–Shilov Spaces, *Ufa Mathematical Journal*, 2023, vol. 15, no. 3, pp. 88–96. DOI: 10.13108/2023-15-3-88.
4. *Edwards, R. E. Functional Analysis. Theory and Applications*, New York–Toronto–London, Holt, Pineart and Winston, 1965.
5. *Chung, J., Chung, S.-Y. and Kim, D.* Equivalence of the Gelfand–Shilov Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1996, vol. 203, no. 3, pp. 828–839. DOI: 10.1006/jmaa.1996.0414.
6. *Matsaev V. I., Ronkin L. I.* Quasi-Analytic Classes of Functions of Several Variables, *Notes of the Mathematical Department of the Physics and Mathematics Faculty and the Kharkov Mathematical Society*, 1961, vol. 27, no. 4, pp. 49–57.
7. *Ronkin, L. I.* On Quasi-Analytic Classes of Functions of Several Variables, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1962, vol. 146, no. 3, pp. 546–549.
8. *Lelong, P.* Sur une Propriété de Quasi-Analyticité des Fonctions de Plusieurs Variables, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 1951, vol. 232, pp. 1178–1180.
9. *Lelong, P.* Extension d'un Théoréme de Carleman, *Annales de l'Institut Fourier*, 1962, vol. 12, pp. 627–641.
10. *Roumieu, C.* Ultra-Distribution Définis sur $\mathbb{R}^n$ et sur Certaines Classes de Variétés Differentiables, *Journal d'Analyse Mathematique*, 1962, vol. 10, pp. 153–192. DOI: 10.1007/BF02790307.
11. *Thu Pham-Gia.* On a Theorem of Lelong, *Canadian Mathematical Bulletin*, 1976, vol. 19, no. 4, pp. 505–506. DOI: 10.4153/CMB-1976-077-x.
12. *Roumieu, C.* Sur Quelques Extensions de la Notion de Distribution, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, Serie* 3, 1960, vol. 77, no. 1, pp. 41–121. DOI: 10.24033/asens.1087.
13. *Komatsu, H.* Ultradistributions, I. Structure Theorems and a Characterization, *Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect.* 1A, *Mathematics*, 1973, vol. 20, no. 1, pp. 25–105.
14. *Braun, R. W., Meise, R. and Taylor, B. A.* Ultradifferentiable Functions and Fourier Analysis, *Results in Mathematics*, 1990, vol. 17, no. 3–4, pp. 206–237. DOI: 10.1007/BF03322459.
15. *Abanin, A. V. Ultradifferentiable Functions and Ultradistributions*, Moscow, Nauka, 2007, 222 p. (in Russian).
16. *Abanin, A. V.* Ω-ultradistributions, *Izvestiya: Mathematics*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 207–240. DOI: 10.1070/IM2008v072n02ABEH002398.
17. *Boiti, C., Jornet, D. and Oliaro, A.* Regularity of Partial Differential Operators in Ultradifferentiable Spaces and Wigner Type Transforms, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2017, vol. 446, no. 1, pp. 920–944. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.09.029.
18. *Meise, R.* Sequence Space Representations for Zero-Solutions of Convolution Equations on Ultradifferentiable Functions of Roumieu Type, *Studia Mathematica*, 1989, vol. 92, pp. 211–230. DOI: 10.4064/sm-92-3-211-230.
19. *Polyakova, D. A.* On the Range of a Convolution Operator in Spaces of Ultradifferentiable Functions, *Algebra i Analiz*, 2024, vol. 36, no. 2, pp. 108–130 (in Russian).
20. *Polyakova, D. A.* On Kernels of Convolution Operators in the Roumieu Spaces of Ultradifferentiable Functions, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2024, vol. 26, no. 3, pp. 72–85 (in Russian). DOI: 10.46698/f8294-3012-1428-w
21. *Lutsenko, A. V., Musin, I. Kh. and Yulmukhametov, R. S.* On a Class of Periodic Functions in $\mathbb{R}^n$, *Ufa Mathematical Journal*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 69–75. DOI: 10.13108/2022-14-4-69.

Received November 8, 2024

Ildar Kh. Musin
Institute of Mathematics with Computing Centre
of the Ufa Federal Research Centre of RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Leading Researcher
E-mail: `musin_ildar@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2659-1147

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 101–111

УДК 517.982
DOI 10.46698/s1056-5701-7829-j

О ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[#]

П. Р. Орынбаев[1], **Б. Б. Тасоев**[2,3]

[1] Каракалпакское отделение Института математики
им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
Узбекистан, 230100, Нукус, ул. Абдирова 2;
[2] Владикавказский научный центр РАН,
Россия, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса 1;
[3] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: `paraxatorinbaev@gmail.com`, `tasoevbatradz@yandex.ru`

Посвящается 70-летию профессора А. В. Абанина

Аннотация. В данной заметке получен критерий частично интегральной представимости положительных L^∞-однородных операторов, действующих в идеальных пространствах измеримых действительных функций, определенных на произведении измеримых пространств с σ-конечными мерами. Полученный результат является аналогом критерия Бухвалова об интегральной представимости линейных операторов, действующих в идеальных пространствах измеримых действительных функций, определенных на измеримых пространствах с σ-конечными мерами. Отметим, что при определенных условиях из полученного в данной работе результата выводится упомянутый ше критерий Бухвалова. Следовательно, полученный результат служит обобщением критерия Бухвалова. Основными инструментами данного исследования являются методы теории векторных решеток и идеальных функциональных пространств.

Ключевые слова: идеальное пространство, частично интегральный оператор, положительный оператор, интегральный оператор.

AMS Subject Classification: 46B42, 46B04.

Образец цитирования: *Орынбаев П. Р., Тасоев Б. Б.* О частично интегральном представлении линейных положительных операторов // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 101–111. DOI: 10.46698/s1056-5701-7829-j.

1. Введение

Теория частично интегральных операторов имеет многочисленные приложения в различных областях математики (см. [1–4]). Различные свойства этих операторов изучались в работах [5–8]. Следуя монографии [2], приведем наиболее общее определение частично интегрального оператора. *Частично интегральным оператором* называется оператор вида $P = C + L + M + N$, где

$$Cx(t,s) := c(t,s)x(t,s),$$
$$Lx(t,s) := \int\limits_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\mu(\tau),$$

[#]Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-71-10094 (https://rscf.ru/project/24-71-10094/).

$$Mx(t,s) := \int\limits_T m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\nu(\sigma), \tag{1}$$

$$Nx(t,s) := \int\limits_{T\times S} n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\mu\otimes\nu(\tau,\sigma).$$

Здесь $(T,\mathfrak{A}(\mathfrak{T}),\mu)$, $(S,\mathfrak{A}(\mathfrak{S}),\mu)$ — измеримые пространства с сепарабельными мерами μ и ν соответственно, $\mu\otimes\nu$ — произведение мер μ и ν. Коэффициент $c=c(t,s)$, а также ядра $l=l(t,s,\tau)$, $m=m(t,s,\sigma)$ и $n=(t,s,\tau,\sigma)$ — измеримые функции, а интеграл понимается в смысле Лебега. Бухвалов в своей работе [10] привел критерий интегральной представимости линейных операторов, действующих в идеальных функциональных пространствах. Целью данной работы является доказать аналогичный критерий представимости положительного оператора в виде частично интегрального оператора вида (1). Необходимые сведения теории векторных решеток и положительных операторов можно найти в монографиях [10–12].

Всюду далее (Ω,Σ,μ), $(S,\mathscr{F},m)$ — измеримые пространства с σ-конечными полными мерами μ и m соответственно, $(\Omega\times S,\Sigma\otimes\mathscr{F},\mu\otimes m)$ — произведение этих пространств. Символом $\mathscr{L}^0(\mu):=\mathscr{L}^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ будем обозначать пространство всех действительных измеримых μ-почти всюду конечных функций, $L^0(\mu):=L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ — пространство классов эквивалентности функций из $\mathscr{L}^0(\Omega,\Sigma,\mu)$. Как обычно, функции $f,g\in\mathscr{L}^0(\mu)$ называются эквивалентными, если они равные μ-почти всюду.

2. Основной результат

Всюду далее E и F — идеальные пространства в $L^0(\Omega\times S,\Sigma\otimes\mathscr{F},\mu\otimes m)$, $E_+:=\{x\in E: x\geqslant 0\}$ и $T:\ E\to F$ — линейный оператор. Оператор T называется *положительным* и пишут $T\geqslant 0$, если $Tf\in F_+$ для всех $f\in E_+$, $L^\infty(\mu)$-*однородным*, если $T(hf)=hT(f)$ для всех $f\in E$ и $h\in L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$. Положительный оператор $T:E\to F$ называется *порядково σ-непрерывным*, если для любой последовательности $(f_n)_{n=1}^\infty\subset E$ такой, что $f_1\geqslant f_2\geqslant\ldots$ и $\inf_n f_n=\lim_n f_n=0$ следует $Tf_1\geqslant Tf_2\geqslant\ldots$ и $\inf_n Tf_n=0$. Символически, из условия $f_n\downarrow 0$ следует $Tf_n\downarrow 0$. Напомним, что порядковые и алгебраические операции в E и F вычисляются почти всюду поточечно. Таким образом, запись $f_n\downarrow 0$ означает, что $f_n(\omega,t)\geqslant f_{n+1}(\omega,t)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $\inf_n f_n(\omega,t)=\lim_n f_n(\omega,t)=0$ для $\mu\otimes m$-почти всех $(\omega,t)\in\Omega\times S$. Аналогично, запись $f_n\uparrow f$ будет означать, что $f_n(\omega,t)\leqslant f_{n+1}(\omega,t)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $\sup_n f_n(\omega,t)=\lim_n f_n(\omega,t)=f(\omega,t)$ для $\mu\otimes m$-почти всех $(\omega,t)\in\Omega\times S$.

Определение 1. Будем говорить, что оператор $T:E\to F$ является *частично интегральным*, если существует измеримая функция $k\in\mathscr{L}^0(\Omega\times S\times S,\Sigma\otimes\mathscr{F}\otimes\mathscr{F},\mu\otimes m\otimes m)$ такая, что справедливо представление

$$(Tf)(\omega,t)=\int\limits_S k(\omega,t,s)f(\omega,s)\,dm(s)$$

для всех $f\in E$ и для $\mu\otimes m$-почти всех $(\omega,t)\in\Omega\times S$.

Из определения видно, что частично интегральный оператор является $L^\infty(\mu)$-однородным.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ *сходится к нулю по мере* μ и при этом писать $f_n \to 0$ *по мере* μ, если $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю по мере μ на любом подмножестве в Ω конечной меры.

Лемма 1. *Пусть* (Ω, Σ, μ) *— пространство с* σ*-конечной мерой,* $k, f \in \mathscr{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$*,* $kf \in \mathscr{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *и последовательность* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ *такая, что* $0 \leqslant f_n \leqslant f$ μ*-почти всюду. Если* $f_n \to 0$ *по мере* μ*, то справедливо соотношение*

$$\int\limits_{\Omega} k(\omega) f_n(\omega)\ d\mu(\omega) \to 0.$$

$\lhd$ Предположим сначала, что $\mu(\Omega) < \infty$. Введем множества Ω_m по формуле $\Omega_m := \{\omega \in \Omega : |k(\omega)| \leqslant m\}$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\chi_{\Omega_m}|kf| \uparrow |kf| \in \mathscr{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ и в силу теоремы Леви справедливо равенство

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega_m} \bigl|k(\omega) f(\omega)\bigr|\, d\mu(\omega) = \int\limits_{\Omega} \bigl|k(\omega) f(\omega)\bigr|\, d\mu(\omega).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_m} \bigl|k(\omega) f(\omega)\bigr|\, d\mu(\omega) \leqslant \varepsilon$$

для всех $m \geqslant m(\varepsilon)$. Зафиксируем $m \geqslant m(\varepsilon)$. Так как на множестве Ω_m выполняется неравенство $|kf_n| \leqslant m|f_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то из условия леммы следует, что $kf_n \to 0$ по мере на множестве Ω_m. Следовательно, в виду теоремы Лебега выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\Omega} k(\omega) f_n(\omega)\, d\mu(\omega)\right| &\leqslant \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_m} \bigl|k(\omega) f(\omega)\bigr|\, d\mu(\omega) + \int\limits_{\Omega_m} \bigl|k(\omega) f_n(\omega)\bigr|\, d\mu(\omega) \\ &\leqslant \varepsilon + \int\limits_{\Omega_m} \bigl|k(\omega) f_n(\omega)\bigr|\, d\mu(\omega) \to \varepsilon\end{aligned}$$

при $n \to \infty$. Таким образом, в силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{\Omega} k(\omega) f_n(\omega)\, d\mu(\omega) \to 0 \tag{2}$$

при условии, что $\mu(\Omega) < \infty$.

Рассмотрим общий случай. Пусть $\Omega = \bigcup_{p=1}^{\infty} \Omega_p$, где $\mu(\Omega_p) < \infty$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Тогда $\chi_{\Omega_p}|kf| \uparrow |kf|$ всюду на Ω, и так как $kf \in \mathscr{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, то по теореме Леви выполняется соотношение

$$\lim_{p\to\infty} \int\limits_{\Omega_p} \bigl|k(\omega) f(\omega)\bigr|\, d\mu(\omega) = \int\limits_{\Omega} \bigl|k(\omega) f(\omega)\bigr|\, d\mu(\omega).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $p(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_p} \bigl|k(\omega) f(\omega)\bigr|\, d\mu(\omega) \leqslant \varepsilon$$

для всех $p \geqslant p(\varepsilon)$. Следовательно, в виду формулы (2) справедливы соотношения

$$\Bigl|\int\limits_{\Omega} k(\omega) f_n(\omega)\, d\mu(\omega)\Bigr| \leqslant \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_p} \bigl|k(\omega) f_n(\omega)\bigr|\, d\mu(\omega) + \int\limits_{\Omega_p} \bigl|k(\omega) f_n(\omega)\bigr|\, d\mu(\omega)$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_p} \bigl|k(\omega) f(\omega)\bigr|\, d\mu(\omega) + \int\limits_{\Omega_p} \bigl|k(\omega) f_n(\omega)\bigr|\, d\mu(\omega) \to \varepsilon$$

при $n \to \infty$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим требуемое. $\triangleright$

Лемма 2. *Пусть (Ω, Σ, μ), $(S, \mathscr{F}, m)$ — пространства с σ-конечными мерами и $k \in \mathscr{L}^0(\Omega \times S, \Sigma \otimes \mathscr{F})$. Тогда $k \geqslant 0$ $(k = 0)$ $\mu \otimes m$-почти всюду в том и только в том случае, когда $k(\omega, t) \geqslant 0$ $(k(\omega, t) = 0)$ для μ-почти всех $\omega \in \Omega$ при m-почти всех $t \in S$.*

$\triangleleft$ Пусть $k \geqslant 0$ $\mu \otimes m$-почти всюду и $A := \{(\omega, t) \in \Omega \times S : k(\omega, t) < 0\}$. Тогда выполняются равенства

$$0 = \mu \otimes m(A) = \int\limits_S \mu(A_t)\, dm(t),$$

где $A_t := \{\omega \in \Omega : (\omega, t) \in A\}$ $(t \in S)$. Следовательно, $\mu(A_t) = 0$ при m-почти всех $t \in S$. Последнее означает, что $k(\omega, t) \geqslant 0$ для μ-почти всех $\omega \in \Omega$ при m-почти всех $t \in S$.

Обратно. Пусть $k(\omega, t) \geqslant 0$ для μ-почти всех $\omega \in \Omega$ при m-почти всех $t \in S$. Тогда

$$\mu \otimes m(A) = \int\limits_S \mu(A_t)\, dm(t) = 0.$$

Следовательно, $k \geqslant 0$ $\mu \otimes m$-почти всюду. Случай $k = 0$ доказывается аналогично. $\triangleright$

Лемма 3. *Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с σ-конечной мерой μ и X — идеальное пространство в $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда существует последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X_+$ такая, что $f_i \wedge f_j = 0$ для всех $i \neq j$, и всякий элемент $g \in X_+$ имеет представление*

$$g = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n,$$

где g_n из полосы B_{f_n} в X, порожденной элементом f_n, $n \in \mathbb{N}$.

$\triangleleft$ В виду [14, лемма IV.7.1, теоремы IV.5.2 и IV.5.3] существует семейство $\{f_\xi : \xi \in \Xi\} \subset X_+$ такое, что $f_i \wedge f_j = 0$ для всех $i \neq j$ $(i, j \in \Xi)$ и всякий элемент $g \in E_+$ имеет представление

$$g = \sup_{\xi \in \Xi} g_\xi,$$

где g_ξ принадлежит полосе B_{f_ξ} в X, порожденной элементом f_ξ для всех $\xi \in \Xi$. Остается показать, что множество Ξ не более, чем счетно.

Предположим сначала, что мера μ конечна. Пусть $\mathscr{C}(\mathbf{1})$ обозначает полную булеву алгебру классов эквивалентности характеристических функций множеств из σ-алгебры Σ. Тогда в силу [12, §1.1.6(1)] $\mathscr{C}(\mathbf{1})$ имеет счетный тип. Следовательно, в виду [14, теорема VI.2.3] и замечания, следующего за ней, подмножество $\{f_\xi : \xi \in \Xi\}$ не более, чем счетное подмножество в $X \subset L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Рассмотрим общий случай, когда мера μ является σ-конечной. Пусть $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, $0 < \mu(\Omega_n) < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Введем новую меру

$\mu_1 : \Sigma \to [0,1]$ по формуле

$$\mu_1(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A \cap \Omega_n)}{\mu(\Omega_n)2^n}$$

для всех $A \in \Sigma$. Тогда μ_1 — конечная мера, эквивалентная μ, т. е. $\mu_1(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(A) = 0$ $(A \in \Sigma)$. Следовательно, $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $L^0(\Omega, \Sigma, \mu_1)$ совпадают как векторные решетки и, как было показано выше, $\{f_\xi : \xi \in \Xi\}$ не более чем счетное подмножество в $L^0(\Omega, \Sigma, \mu_1) = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Таким образом, множество Ξ не более чем счетно. Можно считать, что $\Xi = \mathbb{N}$. Равенство $\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ следует из того, что $g_i \wedge g_j = 0$ для всех $i \neq j$. $\rhd$

Теорема 1. *Пусть (Ω, Σ, μ) и $(S, \mathscr{F}, m)$ — пространства с σ-конечными мерами, E и F — идеальные пространства в $L^0(\Omega \times S, \Sigma \otimes \mathscr{F}, \mu \otimes m)$, $T : E \to F$ — положительный $L^\infty(\mu)$-однородный оператор. Тогда равносильны следующие утверждения.*

(1) *Существует измеримая функция $k \in \mathscr{L}^0(\Omega \times S \times S, \Sigma \otimes \mathscr{F} \otimes \mathscr{F})$ такая, что $k \geqslant 0$ $\mu \otimes m \otimes m$-почти всюду и справедливо представление*

$$(Tf)(\omega, t) = \int\limits_S k(\omega, t, s) f(\omega, s)\, dm(s) \tag{3}$$

для всех $f \in E$ и $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega, t) \in \Omega \times S$.

(2) *Для любой последовательности $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ такой, что $0 \leqslant f_n \leqslant f \in E$, $f_n \to 0$ по мере $\mu \otimes m$ и любого множества $C \in \Sigma \otimes \mathscr{F}$ такого, что выполняется условие $\chi_C Tf \in L^1(\Omega \times S, \Sigma \otimes \mathscr{F}, \mu \otimes m)$, справедливо соотношение*

$$\int\limits_\Omega \chi_C(\omega, t) Tf_n(\omega, t)\, d\mu(\omega) \to 0$$

для m-почти всех $t \in S$.

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ такая, что $0 \leqslant f_n \leqslant f \in E$, $f_n \to 0$ по мере $\mu \otimes m$. Возьмем произвольное множество $C \in \Sigma \otimes \mathscr{F}$ такое, что $\chi_C Tf \in L^1(\Omega \times S, \Sigma \otimes \mathscr{F}, \mu \otimes m)$. По лемме 2 $k(\omega, t, s) \geqslant 0$ для $\mu\otimes m$-почти всех (ω, s) при m-почти всех $t \in S$. Тогда в виду теоремы Тонелли (см. [13, теорема I.6.12]) и леммы 1 справедливы соотношения

$$\int\limits_\Omega \chi_C(\omega, t) Tf_n(\omega, t)\, d\mu(\omega) = \int\limits_\Omega \left(\int\limits_S \chi_C(\omega, t) k(\omega, t, s) f_n(\omega, s)\, dm(s) \right) d\mu(\omega)$$
$$= \int\limits_{\Omega\times S} \chi_C(\omega, t) k(\omega, t, s) f_n(\omega, s)\, d\mu \otimes m(\omega, s) \to 0$$

для m-почти всех $t \in S$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Покажем сначала, что оператор T является порядково σ-непрерывным. Пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ такая, что $f_n \downarrow 0$ и $g := \inf_n Tf_n = \lim_n Tf_n \in F_+$. В силу [13, следствие IV.3.1] существует неубывающая последовательность множеств $(C_i)_{i=1}^{\infty} \subset \Sigma \otimes \mathscr{F}$ такая, что $\chi_{C_i} Tf_1 \in L^1(\Omega \times S, \Sigma \otimes \mathscr{F}, \mu \otimes m)$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant \chi_{C_i} Tf_1 \uparrow Tf_1$. По теореме Лебега и заданному предположению справедливы соотношения

$$0 \leqslant \int\limits_\Omega \chi_{C_i}(\omega, t) g(\omega, t)\, d\mu(\omega) = \lim_n \int\limits_\Omega \chi_{C_i}(\omega, t) Tf_n(\omega, t)\, d\mu(\omega) = 0$$

для m-почти всех $t \in S$ и всех $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\chi_{C_i}(\omega,t)g(\omega,t) = 0$ для μ-почти всех $\omega \in \Omega$ при m-почти всех $t \in S$ и всех $i \in \mathbb{N}$. В силу леммы 2 последнее означает, что $\chi_{C_i}(\omega,t)g(\omega,t) = 0$ для $\mu\otimes m$-почти всех $(\omega,t) \in \Omega\times S$ и всех $i \in \mathbb{N}$. Так как $0 \leqslant \chi_{C_i} g \uparrow g$, то получим $g = 0$ $\mu\otimes m$-почти всюду. Таким образом, T является порядково σ-непрерывным.

Возьмем произвольный $f \in E_+$ и обозначим через I_f идеал в E, порожденный элементом f. В силу [13, следствие IV.3.1] для $Tf \geqslant 0$ существует неубывающая последовательность множеств $(C'_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma \otimes \mathscr{F}$ такая, что $\chi_{C'_n} Tf \in L^1(\Omega \times S, \Sigma \otimes \mathscr{F}, \mu \otimes m)$ и $\chi_{C'_n} Tf \uparrow Tf$. Введем множества $C_1 := C'_1$, $C_n := C'_n \setminus C'_{n-1}$ для всех $n = 2, 3, \dots$ Тогда $C_i \cap C_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$, и выполняется соотношение $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{C_n} Tf = Tf$, где сумма вычисляется $\mu \otimes m$-почти всюду. Так как для любой функции g из полосы B_f, порожденной функцией f, выполняется $\operatorname{supp}(g) \subset \operatorname{supp}(f)$, то последняя сумма справедлива для всех $g \in B_f$, т. е. имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{C_n} Tg = Tg \tag{4}$$

для всех $g \in B_f$.

Зафиксируем произвольный $n \in \mathbb{N}$. Так как $\chi_{C_n} Tg \in L^1(\mu \otimes m)$ для всех $g \in I_f$, то мы можем определить оператор $\overline{T}_n : I_f \to L^0(S, \mathscr{F}, m)$ по формуле

$$\big(\overline{T}_n g\big)(t) := \int_{\Omega} \chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t)\, d\mu(\omega)$$

для m-почти всех $t \in S$ и для всех $g \in I_f$. Тогда $\overline{T}_n \geqslant 0$ и удовлетворяет всем условиям теоремы Бухвалова [9, теорема 1]. Поэтому существует функция $\overline{k}_n \in \mathscr{L}^0(\Omega \times S \times S)$ такая, что выполняется равенство

$$\int_{\Omega} \chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t)\, d\mu(\omega) = \int_{\Omega\times S} \overline{k}_n(\omega,s,t) g(\omega,s)\, d\mu\otimes m(\omega,s)$$

для m-почти всех $t \in S$ и для всех $g \in I_f$. В виду [10, лемма 4] $\overline{k} \geqslant 0$ $\mu \otimes m \otimes m$-почти всюду. Применяя теорему Фубини к правой части последнего равенства, получим

$$\int_{\Omega} \chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t)\, d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \left(\int_{S} \overline{k}_n(\omega,s,t) g(\omega,s)\, dm(s) \right) d\mu(\omega)$$

для m-почти всех $t \in S$ и для всех $g \in I_f$. Следовательно, в силу $L^{\infty}(\mu)$-однородности оператора T выполняются равенства

$$\int_{A} \chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t)\, d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \chi_A(\omega)\chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t)\, d\mu(\omega)$$

$$= \int_{\Omega} \chi_{C_n}(\omega,t)(T\chi_A g)(\omega,t)\, d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \left(\int_S \overline{k}_n(\omega,s,t)\chi_A(\omega) g(\omega,t)\, dm(s) \right) d\mu(\omega)$$

$$= \int_{A} \left(\int_{S} \overline{k}_n(\omega,s,t) g(\omega,s)\, dm(s) \right) d\mu(\omega)$$

для всех $A \in \Sigma$, m-почти всех $t \in S$ и всех $g \in I_f$. Тогда равны подынтегральные выражения, т. е. имеет место равенство

$$\chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t) = \int\limits_S \overline{k}_n(\omega,s,t)g(\omega,s)\,dm(s) \tag{5}$$

для всех $g \in I_f$ и $\mu\otimes m$-почти всех $(\omega,t) \in \Omega\times S$ (т. е. равенство (5) выполняется m-почти всюду для μ-почти всех ω). Положим по определению

$$k_n(\omega,t,s) := \overline{k}_n(\omega,s,t)$$

для всех $(\omega,t,s) \in \Omega\times S\times S$. Тогда $k_n \in L^0(\Omega\times S\times S)$, и подставляя функцию k вместо $\overline{k}_n$ в формулу (5), получим

$$\chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t) = \int\limits_S k_n(\omega,t,s)g(\omega,s)\,dm(s) \tag{6}$$

для всех $g \in I_f$ и $\mu\otimes m$-почти всех $(\omega,t) \in \Omega\times S$.

Покажем, что формула (6) справедлива для любого элемента из полосы B_f в E, порожденной элементом $f \in E$. Достаточно показать справедливость формулы (6) для положительных элементов. Пусть $0 \leqslant g \in B_f$. Тогда последовательность $g_i := g \wedge if$ $(i \in \mathbb{N})$ содержится в I_f и удовлетворяет условию $0 \leqslant g_i \uparrow g$. Кроме того, в виду (6) имеет место неравенство

$$\int\limits_S k_n(\omega,t,s)g_i(\omega,s)\,dm(s) \leqslant \chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t)$$

для $\mu\otimes m$-почти всех $(\omega,t) \in \Omega\times S$ и для всех $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, в виду порядково σ-непрерывности T и теоремы Леви справедливы равенства

$$\chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t) = \lim_{i\to\infty}\chi_{C_n}(\omega,t)(Tg_i)(\omega,t) = \int\limits_S k_n(\omega,s,t)g(\omega,s)\,dm(s)$$

для $\mu\otimes m$-почти всех $(\omega,t) \in \Omega\times S$. Таким образом, мы получили, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует функция $k_n \in \mathscr{L}^0(\Omega\times S\times S)_+$ такая, что справедливо представление

$$\chi_{C_n}(\omega,t)(Tg)(\omega,t) = \int\limits_S k_n(\omega,t,s)g(\omega,s)\,dm(s) \tag{7}$$

для всех $g \in B_f$ и $\mu\otimes m$-почти всех $(\omega,t) \in \Omega\times S$. В силу формулы (4), следствия из теоремы Леви и порядково σ-непрерывности T выполняются равенства

$$\begin{aligned} Tg(\omega,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(\chi_{C_n}Tg)(\omega,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_S k_n(\omega,t,s)g(\omega,s)\,dm(s) \\ &= \int\limits_S \sum_{n=1}^{\infty} k_n(\omega,t,s)g(\omega,s)\,dm(s) \end{aligned} \tag{8}$$

для всех $g \in B_f$ и $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega, t) \in \Omega \times S$. Следовательно, для всех $g \in B_f$ существует $\sum_{n=1}^{\infty} k_n(\omega, t, s) g(\omega, s) < \infty$ $\mu \otimes m \otimes m$-почти всюду. Положим по определению

$$k_f(\omega, t, s) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n(\omega, t, s), & \text{если } (\omega, s) \in \operatorname{supp}(f), \\ 0, & \text{если } (\omega, s) \in \Omega \times S \setminus \operatorname{supp}(f), \end{cases} \tag{9}$$

для всех $(\omega, t, s) \in \Omega \times S \times S$. Тогда $0 \leqslant k_f \in \mathscr{L}^0(\Omega \times S \times S)$, и в виду формулы (8), а также соотношения $\operatorname{supp}(g) \subset \operatorname{supp}(f)$, получим

$$Tg(\omega, t) = \int\limits_S \sum_{n=1}^{\infty} k_n(\omega, t, s) g(\omega, s)\, dm(s) = \int\limits_S k_f(\omega, t, s) g(\omega, s)\, dm(s)$$

для всех $g \in B_f$ и $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega, t) \in \Omega \times S$. Таким образом, справедливо представление

$$Tg(\omega, t) = \int\limits_S k_f(\omega, t, s) g(\omega, s)\, dm(s) \tag{10}$$

для всех $g \in B_f$ и $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega, t) \in \Omega \times S$.

Так как мера $\mu \otimes m$ σ-конечна, то по лемме 3 существует последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset E_+$ такая, что $f_i \wedge f_j = 0$ для всех $i \neq j$, и всякий элемент $g \in E_+$ имеет представление

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n, \tag{11}$$

где $0 \leqslant g_n$ из полосы B_{f_n} в E, порожденной элементом f_n $(n \in \mathbb{N})$. Пусть $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \in E_+$, где $0 \leqslant g_n \in B_{f_n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда в виду формулы (10) найдется последовательность $(k_{f_n})_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}^0(\Omega \times S \times S)_+$ такая, что

$$Tg_n(\omega, t) = \int\limits_S k_{f_n}(\omega, t, s) g_n(\omega, s)\, dm(s) \tag{12}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Из определения (9) ясно, что $\operatorname{supp}(k_{f_n}(\cdot, t, \cdot)) \subset \operatorname{supp}(f_n)$ для всех $t \in S$ и $n \in \mathbb{N}$. Поэтому мы можем определить функцию k по формуле

$$k(\omega, t, s) = \begin{cases} k_{f_n}(\omega, t, s), & \text{если } (\omega, s) \in \operatorname{supp}(f_n) \\ 0, & \text{если } (\omega, s) \in \Omega \times S \setminus \Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}(f_n) \Big). \end{cases}$$

для всех $(\omega, t, s) \in \Omega \times S \times S$. Тогда $k = \sum_{n=1}^{\infty} k_{f_n} \in \mathscr{L}^0(\Omega \times S \times S)_+$ и в силу порядково σ-непрерывности T, следствия теоремы Леви и формул (11), (12) справедливы равенства

$$Tg(\omega, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (Tg_n)(\omega, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_S k_{f_n}(\omega, t, s) g_n(\omega, s)\, dm(s)$$

$$= \int\limits_S \sum_{n=1}^{\infty} k_{f_n}(\omega, t, s) g_n(\omega, s)\, dm(s) = \int\limits_S k(\omega, t, s) g(\omega, s)\, dm(s)$$

для всех $0 \leqslant g \in E$ и $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega, t) \in \Omega \times S$. Следовательно, в виду разложения $g = g^+ - g^-$ для любого $g \in E$ получим представление

$$Tg(\omega, t) = \int\limits_S k(\omega, t, s) g(\omega, s)\, dm(s)$$

для всех $g \in E$ и $\mu \otimes m$-почти всех $(\omega, t) \in \Omega \times S$. $\triangleright$

Литература

1. *Romanovsky V. I.* Sur une classe d'equations int'egrales lin'eaires // Acta Math.—1932.—Vol. 59.—P. 99–208. DOI: 10.1007/BF02546501.
2. *Appel J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations.—N. Y.: Marcel Dekker, 2000.—560 p.
3. *Appel J. M., Eletskikh I. A., Kalitvin A. S.* A note on the Fredholm property of partial integral equations of Romanovskij type // J. Integral Equ. Appl.—2004.—Vol. 16, № 1.—P. 25–32. DOI: 10.1216/jiea/1181075256.
4. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Линейные операторы и уравнения с частными интегралами // Соврем. матем. Фундам. направления.—2019.—Т. 65, № 3.—С. 390–433. DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433.
5. *Kudaybergenov K. K., Arziev A. D.* The spectrum of an element in a Banach–Kantorovich algebra over a ring of measurable functions // Adv. Oper. Theory.—2022.—Vol. 7, № 10.—P. 2–15. DOI: 10.1007/s43036-021-00176-9.
6. *Kudaybergenov K. K., Arziev A. D., Orinbaev P. R., Tanirbergen A. K.* The Mercer's theorem for partial integral operators // J. Math. Sci.—2023.—Vol. 271, № 6.—P. 749–761. DOI: 10.1007/s10958-023-06747-w.
7. *Арзиев А. Д., Кудайбергенов К. К., Орынбаев П. Р., Танирберген А. К.* Частично интегральные операторы на пространствах Банаха — Канторовича // Мат. заметки.—2023.—Т. 114, № 1.—С. 18–37. DOI: 10.4213/mzm13703.
8. *Eshkabilov Yu. Kh., Kucharov R. R.* Partial integral operators of Fredholm type on Kaplansky–Hilbert module over L_0 // Vladikavkaz Math. J.—2021.—Vol. 23, № 3.—P. 80–90. DOI: 10.46698/w5172-0182-0041-c.
9. Бухвалов А.В. Критерий интегральной представимости линейных операторов // Функцион. анализ и его прил.—1975.—Т. 9, № 1.—С. 51.
10. *Бухвалов А. В.* Об интегральном представлении линейных операторов // Зап. науч. сем. ЛОМИ.—1974.—Т. 47.—С. 5–14.
11. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—Dordrecht: Springer, 2006.—376 p. DOI: 10.1007/978-1-4020-5008-4.
12. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—624 с.
13. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.
14. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.—408 с.

Статья поступила 30 октября 2024 г.

Орынбаев Парахатдиин Рахман улы
Каракалпакское отделение Института математики
им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
младший научный сотрудник
УЗБЕКИСТАН, 230100, Нукус, ул. Абдирова 2;
E-mail: paraxatorinbaev@gmail.com

Тасоев Батрадз Ботазович
Владикавказский научный центр РАН,
старший научный сотрудник
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямся 1;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0001-8573-4721

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 101–111

ON PARTIAL INTEGRAL REPRESENTATION OF LINEAR POSITIVE OPERATORS

Orinbaev, P. R.[1] and Tasoev, B. B.[2,3]

[1] Karakalpak branch of V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Sciences,
2 Abdirov St., Nukus 230100, Uzbekistan;
[2] Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
1 Williams St., Village of Mikhailovskoye 363110, Russia;
[3] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: paraxatorinbaev@gmail.com, tasoevbatradz@yandex.ru

Abstract. In this paper, we obtain a criterion for partial integral representability of positive L^∞-homogeneous operators acting in ideal spaces of measurable real functions defined on the product of measurable spaces with σ-finite measures. The result obtained is a counterpart of Bukhvalov's criterion for integral representability of linear operators acting in ideal spaces of measurable real functions defined on measurable spaces with σ-finite measures. Note that under certain conditions, the above-mentioned Bukhvalov criterion can be derived from the result obtained in this paper. Consequently, the result obtained is a generalization of Bukhvalov's criterion. The main tools of this study are the above-mentioned Bukhvalov criterion and the methods of vector lattice theory.

Keywords: ideal space, partial integral operator, positive operator, integral operator.

AMS Subject Classification: 46B42, 46B04.

For citation: *Orinbaev, P. R. and Tasoev, B. B.* On Partial Integral Representation of Linear Positive Operators, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 101–111 (in Russian). DOI: 10.46698/s1056-5701-7829-j.

References

1. *Romanovsky, V. I.* Sur Une Classe d'Equations Int'egrales Lin'eaires, *Acta Mathematica*, 1932, vol. 59, pp. 99–208. DOI: 10.1007/BF02546501.
2. *Appel, J. M., Kalitvin, A. S. and Zabrejko, P. P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations*, New York, Marcel Dekker, 2000, 560 p.
3. *Appel, J. M., Eletskikh, I. A. and Kalitvin, A. S.* A Note on the Fredholm Property of Partial Integral Equations of Romanovskij Type, *Journal of Integral Equations and Applications*, 2004, vol. 16, no. 1, pp. 25–32. DOI: 10.1216/jiea/1181075256.
4. *Kalitvin, A. S. and Kalitvin, V. A.* Linear Operators and Partial Integral Equations, *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya* [Contemporary Mathematics. Fundamental Directions], 2019, vol. 65, no. 3, pp 390–433 (in Russian). DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433.
5. *Kudaybergenov, K. K. and Arziev A. D.* The Spectrum of an Element in a Banach–Kantorovich Algebra over a Ring of Measurable Functions, *Advances in Operator Theory*, 2022, vol. 7, no. 10, pp. 2–15. DOI: 10.1007/s43036-021-00176-9.
6. *Kudaybergenov, K. K., Arziev, A. D., Orinbaev, P. R. and Tanirbergen, A. K.* The Mercer's Theorem for Partial Integral Operators, *Journal of Mathematical Sciences*, 2023, vol. 271, no. 6, pp. 749–761. DOI: 10.1007/s10958-023-06747-w.
7. *Arziev, A. D., Kudaybergenov, K. K., Orinbaev, P. R. and Tangirbergen, A. K.* Partial Integral Operators on Banach–Kantorovich Spaces, *Mathematical Notes*, 2023, vol. 114, no. 1, pp. 15—29. DOI: 10.1134/S0001434623070027.
8. *Eshkabilov, Yu. Kh. and Kucharov, R. R.* Partial Integral Operators of Fredholm Type on Kaplansky–Hilbert Module over L_0, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2021, vol. 23, no. 3, pp. 80–90. DOI: 10.46698/w5172-0182-0041-c.

9. *Buhvalov, A. V.* Criterion for Integral Representability of Linear Operators, *Funkcional'nyj analiz i ego prilozhenija* [Functional Analysis and Its Applications], 1975, vol. 9, no. 1, pp. 51 (in Russian).
10. *Buhvalov, A. V.* On the Integral Representation of Linear Operators, *Zapiski Nauchnyh Seminarov LOMI*, 1974, vol. 47, pp. 5–14 (in Russian).
11. *Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. Positive Operators*, Dordrecht, Springer, 2006. DOI: 10.1007/978-1-4020-5008-4.
12. *Kusraev, A. G. Dominated Operators*, Dordrecht, Springer, 2000, 446 p. DOI: 10.1007/978-94-015-9349-6.
13. *Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. Funkcionalvnyy analiz* [Functional Analysis], Moscow, Nauka, 1984. (in Russian).
14. *Vulikh, B. Z. Vvedenie v teoriyu poluuporyadochennyh prostranstv* [Introduction to the Theory of Semi-Ordered Spaces], Moscow, Fizmatgiz, 1961, 408 p. (in Russian).

Received October 30, 2024

Parakhatdiin R. Orinbaev
Karakalpak branch of V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Sciences,
2 Abdirov St., Nukus 230100, Uzbekistan,
Junior Researcher
E-mail: `paraxatorinbaev@gmail.com`

Batradz B. Tasoev
Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
1 Williams St., Village of Mikhailovskoye 363110, Russia,
Senior Researcher;

Southern Mathematical Institute VSC RAS
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Senior Researcher
E-mail: `tasoevbatradz@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0001-8573-4721

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 112–126

УДК 517.538 : 517.574
DOI 10.46698/v3523-1431-1350-j

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С РАВНОМЕРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ИХ РОСТ[#]

Б. Н. Хабибуллин[1,2]

[1] Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112;
[2] Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
Россия, 450077, Уфа, ул. Октябрьской революции, 3 а

E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Посвящается 70-летию профессора А. В. Абанина

Аннотация. Пусть $M = M_{\mathsf{up}} - M_{\mathsf{low}}$ — разность субгармонических функций на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Сначала обсуждается следующая общая задача. Каковы условия на распределение точек Z на $\mathbb{C}$, при которых найдется целая ненулевая функция f, обращающаяся в нуль на Z и удовлетворяющая неравенству $|f| \leqslant e^M$ на $\mathbb{C}$? Из известных результатов для общей задачи приведен критерий из одной из наших работ с соавторами. Следующий шаг — обсуждение частной задачи, когда $M_{\mathsf{up}} = b|\mathrm{Im}|$ — модуль мнимой части с числовым множителем $b \geqslant 0$, а M_{low} — преобразование Пуассона положительной четной функции w на вещественной оси $\mathbb{R}$, возрастающей на положительной полуоси $\mathbb{R}^+$, и с конечным логарифмическим интегралом. Исследование распределений единственности для таких классов целых функций актуально, к примеру, в теории ультрадифференцируемых функций и ультрараспределений. Весьма значительный вклад в эту теорию содержится в ряде фундаментальных работ А. В. Абанина, включающих в себя и его известную монографию. Именно такие классы целых функций возникают после преобразования Фурье — Лапласа пробных функций на компактах. В этом направлении в статье обсуждаются пределы применимости теории Бёрлинга — Мальявена, а также приводится наш с соавторами критерий, но только для нулевой функции $w = 0$. Заключительный основной результат статьи распространяет последний критерий на случаи ненулевой функции $w \neq 0$.

Ключевые слова: целая функция, распределение точек, распределение корней, субгармоническая функция, распределение масс, класс Картрайт, логарифмический интеграл, интеграл Пуассона, ультрадифференцируемая функция, ультрараспределение.

AMS Subject Classification: 30D20, 30D15, 31A05.

Образец цитирования: *Хабибуллин Б. Н.* Распределения единственности для целых функций с равномерными ограничениями на их рост // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 112–126. DOI: 10.46698/v3523-1431-1350-j.

1. Введение. Постановки задач

1.1. Основные начальные определения, обозначения и соглашения. *Пустое множество* обозначаем символом $\emptyset$, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ — множество всех *натуральных чисел,* $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, а $\overline{\mathbb{N}}_0 := \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ — верхнее порядковое пополнение $\mathbb{N}_0$

[#] Исследование выполнено при поддержке Министерства Просвещения Российской Федерации (соглашение № 073-03-2025-039 от 16.01.2025 г.).

со стандартным отношением порядка $\leqslant$ и точной верхней гранью $+\infty := \sup \mathbb{N}_0 \notin \mathbb{N}_0$ с неравенствами $n \leqslant +\infty$ при всех $n \in \overline{\mathbb{N}}_0$. *Множества всех действительных чисел* $\mathbb{R}$ с отношением порядка $\leqslant$ рассматриваем и как *вещественную ось* в *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ с евклидовой нормой-модулем $|z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\Im z)^2}$ и *положительной полуосью* $\mathbb{R}^+ := \bigl\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\bigr\}$. Порядковое пополнение $\mathbb{R}$ верхней и нижней гранями $+\infty := \sup \mathbb{R} = \inf \varnothing \notin \mathbb{R}$ и $-\infty := \inf \mathbb{R} = \sup \varnothing \notin \mathbb{R}$ дает ее *расширение* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ с естественными операциями и исключениями вместе с соглашением $0 \cdot (\pm\infty) := 0 =: (\pm\infty) \cdot 0$, если не оговорено иное. Для величины $x \in \overline{\mathbb{R}}$ через $x^+ := \sup\{0, x\}$ и $x^- := (-x)^+$ обозначаем соответственно *положительную* и *отрицательную часть* x, $|x| := x^+ + x^-$. Кроме того, $\overline{\mathbb{R}}^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{C}_\infty$ — *расширенная* плоскость $\mathbb{C}$ с «бесконечно удаленной точкой» $\infty \notin \mathbb{C} \subset \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Через $D(r) := \bigl\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\bigr\} \subseteq \mathbb{C}$ и $\overline{D}(r) := \bigl\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\bigr\} \subseteq \mathbb{C}_\infty$ обозначаем соответственно *открытый* и *замкнутый круги радиуса* $r \in \overline{\mathbb{R}}$ *с центром в нуле.*

Величины c из $\overline{\mathbb{R}}$ или $\mathbb{C}_\infty$ рассматриваются одновременно и как постоянные функции, обозначаемые тем же символом c. Так, для функции f и некоторой величины c пишем $f = c$ на X, когда f принимает значение c на всем множестве X. Соответственно, $f \neq c$ на X, когда f не принимает значение c хотя бы на одном элементе из X.

Функция $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ на X *положительная* (соответственно *строго положительная*) на X, если $f(X) \subseteq \overline{\mathbb{R}}^+$ (соответственно $0 \notin f(X) \subseteq \overline{\mathbb{R}}^+$), и *отрицательная* (соответственно *строго отрицательная*) на X, если $f(X) \subseteq -\overline{\mathbb{R}}^+$ (соответственно $0 \notin f(X) \subseteq -\overline{\mathbb{R}}^+$). Функции $f^+ \colon x \underset{x \in X}{\longmapsto} (f(x))^+$ и $f^- := (-f)^+$ — соответственно *положительная* и *отрицательная части функции* $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Функция $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ на $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ *возрастающая* (соответственно *строго возрастающая*) на подмножестве $S \subseteq X$, если для любых $x_1, x_2 \in S$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) < f(x_2)$). И f (строго) *убывающая,* если $-f$ (строго) возрастающая.

Функцию $Z \colon S \to \overline{\mathbb{N}}_0$ называем *распределением точек на* множестве точек S с *кратностями* $Z(z) \in \overline{\mathbb{N}}_0$ *точек* $z \in S$ *в* Z. Распределение точек Z *сосредоточено на* некотором *подмножестве* из S, если кратность Z в любой точке вне этого множества равна нулю, и Z сосредоточено *вне* некоторого множества, если кратность Z в любой точке этого множества равна нулю. Если S наделено топологией, то *носитель* $\operatorname{supp} Z$ — замыкание множества точек, где Z сосредоточено, а Z *отделено от* $z \in S$, если $z \notin \operatorname{supp} Z$. Если f — голоморфная на *открытом множестве* $O \subseteq \mathbb{C}$ функция, то распределение точек

$$\operatorname{Zero}_f \colon z \underset{z \in O}{\longmapsto} \sup \left\{ p \in \mathbb{R} : \limsup_{z \neq w \to z} \frac{|f(w)|}{|w - z|^p} < +\infty \right\} \in \overline{\mathbb{N}}_0 \tag{1}$$

называем *распределением корней* функции f на O. Распределение корней нулевой функции на O — функция, равная $+\infty$. В случае, когда $D \subseteq \mathbb{C}$ — *область,* т. е. открытое связное множество, существование голоморфной функции $f \neq 0$ на D с распределением корней $\operatorname{Zero}_f = Z$ эквивалентно конечности $Z(D) \subseteq \mathbb{N}_0$ распределения точек Z и дискретности в D его носителя $\operatorname{supp} Z$.

Голоморфная на открытом множестве $O \subseteq \mathbb{C}$ функция f *обращается в нуль на* распределении точек Z на O, *если* $\operatorname{Zero}_f \geqslant Z$ *на* O. Распределение точек Z на O называем *распределением единственности для* некоторого *класса* H *голоморфных на* O *функций,* если любые две голоморфные на O функции $f \in H$ и $g \in H$ с обращающейся в нуль на Z разностью $f - g$ совпадают, т. е. $f = g$ на O. Распределение точек Z на O называем *распределением единственности по* некоторой *функции* $M \colon O \to \overline{\mathbb{R}}$ *на* O, если Z —

распределение единственности для класса всех голоморфных функций, удовлетворяющих неравенству $\ln|f| \leqslant M$ на O. В противном случае распределение точек Z называем соответственно *распределением неединственности* для класса H или по функции M. Так, Z — распределение неединственности по функции M на области D, если и только если найдется голоморфная на D функция $F \neq 0$, которая обращается в нуль на Z и удовлетворяет неравенству $\ln|F| \leqslant M$ на D.

Субгармонической функции $u\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ на области $D \subset \mathbb{C}$ при $u \neq -\infty$ соответствует борелевская конечная на компактах мера [1, гл. 3, п. 3.5], [2, гл. 3, п. 3.7]

$$\varDelta_u := \frac{1}{2\pi}\Delta u, \text{ где } \Delta — \textit{оператор Лапласа}, \tag{2}$$

действующий в смысле теории обобщенных функциях на D. Меру $\varDelta_u$ называем *риссовским распределением масс* функции u. По определению риссовское распределение масс субгармонической функции $u = -\infty$ на D — это внешняя мера, равная $+\infty$ на любом непустом подмножестве из D. Класс всех субгармонических на $D \subset \mathbb{C}$ функций обозначаем через $\mathsf{sbh}(D)$. Векторное пространство над $\mathbb{C}$ всех голоморфных на открытом подмножестве $O \subseteq \mathbb{C}$ функций обозначаем через $\mathsf{Hol}(O)$.

1.2. Постановка общей задачи и известные критерии для нее. В данной статье рассматривается только случай области $D := \mathbb{C}$ и распределений точек Z на $\mathbb{C}$. Соответственно голоморфные на $D = \mathbb{C}$ функции f *целые* и образуют класс $\mathsf{Hol}(\mathbb{C})$.

Обсуждаемая далее **задача в общей постановке** состоит в следующем. *При каких соотношениях между распределением точек Z на $\mathbb{C}$ и функцией $M\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ распределение точек Z — распределение* (*не*)*единственности по функции M на* $\mathbb{C}$? Саму функцию M в контексте этой общей задачи называем *мажорантой*.

Последние наиболее общие по сравнению с предшествующими решения этой задачи даны в нашей совместной с Ф. Б. Хабибуллиным статье [3] в терминах исключительно распределения точек Z, когда M — разность субгармонических на $\mathbb{C}$ функций. Критерий был получен нами для распределений (не)единственности по функциям

$$M := M_{\mathsf{up}} - M_{\mathsf{low}}, \quad M_{\mathsf{up}} \in \mathsf{sbh}(D), \quad M_{\mathsf{low}} \in \mathsf{sbh}(D), \quad \varDelta_M := \varDelta_{M_{\mathsf{up}}} - \varDelta_{M_{\mathsf{low}}}, \tag{3}$$

заданных или представимых в виде разности субгармонических функций $M_{\mathsf{up}} \neq -\infty$ и $M_{\mathsf{low}} \neq -\infty$ с риссовским распределением *зарядов* $\varDelta_M$. При этом значения $M(z)$ однозначно определены в каждой точке $z \in D$, где $M_{\mathsf{low}}(z) \neq -\infty$. При формулировке теоремы-критерия 1 ниже *удобно полагать* $M(z) := +\infty$ при $M_{\mathsf{low}}(z) = -\infty$.

В $\mathsf{sbh}(\mathbb{C})$ выделим класс всех *положительных субгармонических функций с единичной логарифмической полунормировкой сверху в бесконечно удаленной точке* $\infty \in \mathbb{C}_\infty$ *и нулевым значением в нуле,* обозначаемый и определяемый как

$$\mathsf{Pot}_0^{+1} := \left\{ p \in \mathsf{sbh}(\mathbb{C}) : \; p \geqslant 0 \text{ on } \mathbb{C}, \; \limsup_{z\to\infty} \frac{p(z)}{\ln|z|} \leqslant 1, \; p(0) = 0 \right\}. \tag{4}$$

Теорема 1 [3, теорема 3]**.** *Для любого распределения точек Z на $\mathbb{C}$, отделенного от нуля, и каждой функции M из* (3) *при условиях $M_{\mathsf{low}}(z)(0) \neq -\infty$ и*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \left(\int_0^{2\pi} M_{\mathsf{up}}\Bigl(z + \frac{1}{(1+P+|z|)^P} e^{i\theta}\Bigr)\, \mathrm{d}\theta - M_{\mathsf{up}}(z) \right) < +\infty \quad \textit{при некотором } P \in \mathbb{R}^+ \tag{5}$$

следующие три высказывания эквивалентны:

1) Z *— распределение единственности по функции* M.

2) *Для класса* Y *всех функций* $p \in \mathsf{Pot}_0^{+1}$, *для которых* $|\varDelta_M|$*-суммируема функция* $z \underset{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}{\longmapsto} p(1/\bar z)$, *имеет место равенство*

$$\sup_{p\in Y}\left(\sum_{z\in\mathbb{C}} Z(z)p\Bigl(\frac{1}{\bar z}\Bigr) - \int_{\mathbb{C}} p\Bigl(\frac{1}{\bar z}\Bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_M(z)\right) = +\infty. \tag{6}$$

3) *При некотором* $0 < R \in \mathbb{R}^+$ *при выборе в роли* Y *класса всех бесконечно дифференцируемых функций* $p \in \mathsf{Pot}_0^{+1}$, *гармонических в дополнении* $\mathbb{C}\setminus\overline{D}(R)$, *равных нулю на некоторой окрестности нуля и удовлетворяющих условию жесткой логарифмической единичной нормировки* $p(z) = \ln|z| + O\bigl(1/|z|\bigr)$ *при* $z\to\infty$ *вблизи бесконечно удаленной точки, имеет место равенство* (6).

1.3. Функции класса Картрайт и постановка частной задачи. Далее рассматриваются специальные виды функций-мажорант M из (3). Для *целой функции* f величина

$$\mathsf{type}_f := \limsup_{z\to\infty}\frac{\ln^+|f(z)|}{|z|} \in \overline{\mathbb{R}}^+ \tag{7}$$

— ее верхний тип при порядке 1, или просто *тип* целой функции f. Если $\mathsf{type}_f \in \mathbb{R}^+$, то функция f называется *целой функцией конечной степени* [4–5] или *целой функцией экспоненциального типа* [6–10]. Для произвольной функции $u\colon \mathbb{C}\to\overline{\mathbb{R}}$ на $\mathbb{C}$

$$\mathsf{type}[u] := \limsup_{z\to\infty}\frac{u^+(z)}{|z|} \in \overline{\mathbb{R}} \tag{8}$$

— (верхний) *тип* (роста) функции u *при порядке* 1 (около $+\infty$), или просто *тип* функции u без упоминания далее порядка 1 [4, 6, 10]. Функция u конечного типа, если $\mathsf{type}[u]\in\mathbb{R}^+$. Так, $\mathsf{type}_f \overset{(8)}{=} \mathsf{type}\bigl[\ln|f|\bigr]$ в обозначении (7), а f — целая функция экспоненциального типа, если и только если $u := \ln|f|$ — субгармоническая функция конечного типа. Интеграл от функции $v\colon\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ вида

$$J[v] := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

часто называют *логарифмическим интегралом* функции v [7–9]. *Субгармоническую на* $\mathbb{C}$ *функцию* u *конечного типа* $\mathsf{type}[u] < +\infty$ с *конечным логарифмическим интегралом* $J[u^+] \overset{(9)}{<} +\infty$ называем *субгармонической функцией класса Картрайт* [11–16]. Целая функция f экспоненциального типа называется *целой функцией класса Картрайт* [4–6], если $u := \ln|f|$ — функция класса Картрайт, т. е. $J\bigl[\ln^+|f|\bigr] \overset{(9)}{<} +\infty$.

Если для полунепрерывной сверху функции $w\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ конечен логарифмический интеграл $J\bigl[|w|\bigr] \overset{(9)}{<} +\infty$, то определено полунепрерывное сверху на $\mathbb{C}$ *преобразование Пуассона* $\mathsf{P}w$ такой функции [11–12; 14–16], определяемое как

$$\mathsf{P}w\colon z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\Im z|w(t)}{(\Im z)^2+(\operatorname{Re} z-t)^2}\,\mathrm{d}t & \text{при } z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\\ w(z) & \text{при } z\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{10}$$

Одну из ключевых ролей при исследовании ультрадифференцируемых функций на интервалах в $\mathbb{R}$ играют классы целых функций экспоненциального типа, определяемые при $-\infty < a < b < +\infty$ в обозначениях А. В. Абанина [17; п. 1.5.1], [18; § 4] как

$$\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([a,b]) := \left\{ f \in \mathsf{Hol}(\mathbb{C}) : \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\bigl(h_{[a,b]}(\Im z) - \mathsf{P}w(z)\bigr)} < +\infty \right\}, \tag{11}$$

$$h_{[a,b]}\colon y \underset{y\in\mathbb{R}}{\longmapsto} by^+ - ay^-, \quad h_{[a,b]}(\Im z) \underset{z\in\mathbb{C}}{=} b\Im^+ z - a\Im^- z, \tag{12}$$

$w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ — *положительная четная функция, возрастающая на* $\mathbb{R}^+$, с *конечным логарифмическим интегралом* $J[w] < +\infty$ и со свойством

$$\textit{суперпозиция } w \circ \exp\colon x \underset{x\in\mathbb{R}}{\longmapsto} w(e^x) \quad \textit{выпукла}. \tag{13}$$

Иные специальные свойства функции w из [17, подраздел 1.3] или [18, § 4] не потребуются.

В последующих параграфах решается **общая задача в частном случае**, когда *функция-мажоранта* M из (3) задана или представима в виде разности $M \overset{(3)}{=} M_{\mathsf{up}} - M_{\mathsf{low}}$ специальных субгармонических, как отмечается в леммах 1 и 3 ниже, функций

$$M_{\mathsf{up}} \overset{(12)}{:=} h_{[a,b]} \circ \Im, \quad M_{\mathsf{low}} \overset{(10)}{:=} \mathsf{P}w. \tag{14}$$

Именно такими весовыми функциями и характеризуются классы преобразований Фурье — Лапласа пробных функций — одного из ключевых объектов в теории ультрараспределений для пространств ультрадифференцируемых функций. Эта теория детально изложена и проработана в монографии А. В. Абанина [17] с богатой библиографией и обширным набором классических и его результатов сразу для нескольких переменных.

2. Распределения единственности в рамках теории Бёрлинга — Мальявена

Теория Бёрлинга — Мальявена, разработана в статьях А. Бёрлинга и П. Мальявена [19, 20]. Она развивалась в работах Ж.-П. Кахана [21] и Р. Редхеффера [22], в монографиях Л. де Бранжа [23], П. Кусиса [7–9], В. П. Хавина и Б. Ерикке [5], в нашей [10], а некоторые дополнения к ней — в статьях И. Ф. Красичкова-Терновского [24], нашей [25], Дж. Машреги, Ф. Назарова и В. П. Хавина [26], нашей с Е. Г. Кудашевой [14–16], а также многих других. Часть теории Бёрлинга — Мальявена, связанная с теоремой Бёрлинга — Мальявена о радиусе полноты, может трактоваться как исследование распределений единственности для классов $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([a,b])$ из (11)–(12).

Лемма 1. *Функция-суперпозиция* $h_{[a,b]} \circ \Im$ *обладает следующими свойствами:*

1) $h_{[a,b]} \circ \Im(z) \underset{z\in\mathbb{C}}{=} \sup_{s\in[ia,ib]} \operatorname{Re} s\bar{z}$ — *опорная функция на* $\mathbb{C}$ *отрезка* $[ia, ib] \subset i\mathbb{R}$.

2) $h_{[a,b]} \circ \Im$ — *субгармоническая функция конечного типа*

$$\mathsf{type}[h_{[a,b]} \circ \Im] = \max\{|a|, |b|\} \tag{15}$$

и принадлежит классу Картрайт, поскольку равна нулю на $\mathbb{R}$.

3) *Ее риссовское распределение масс* $\varDelta_{h_{[a,b]}\circ\Im}$ *из* (2) *сосредоточено на* $\mathbb{R}$ *и задается явной линейной функцией распределения на* $\mathbb{R}$

$$t \underset{t\in\mathbb{R}}{\longmapsto} \frac{b-a}{2\pi} t \quad \textit{и равенством} \quad \int\limits_{(c,d)} f \,\mathrm{d}\varDelta_{h_{[a,b]}\circ\Im} = \frac{b-a}{2\pi} \int\limits_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

для любой интегрируемой по Риману функции f *на промежутке* $(c, d) \subset \mathbb{R}$.

$\lhd$ Равенство в п. 1 следует из вида (12) функции $h_{[a,b]}$, которая изначально и определялась в [17, 18] как опорная функция компакта — в данном случае отрезка $[ia, ib] \subset i\mathbb{R}$. Опорная функция компакта — выпуклая функция, а следовательно, и субгармоническая на $\mathbb{C}$, что дает п. 2, где (15) следует из определения (8) типа функции и ее вида (12) в данном случае. В силу гармоничности функции $h_{[a,b]} \circ \Im \overset{(12)}{=} \Im^+ - a\Im^-$ на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ из второй формулы Грина легко следует, что носитель риссовское распределение масс $\varDelta_{h_{[a,b]}\circ\Im}$ лежит на вещественной оси с плотностью, равной согласно (2) деленной на 2π сумме производных по внутренним нормалям к верхней и нижней полуплоскостям на $\mathbb{R}$. Вычисление этих производных по внутренним нормалям, являющихся здесь частными производными по мнимой части комплексного числа, дают (16) из п. 3. $\rhd$

Для функции w на $\mathbb{R}$ можно различными способами определить субгармоническую на $\mathbb{C}$ функцию, сужения которой на $\mathbb{R}$ совпадают с w. Отметим два самых рапространенных. Радиальный вариант такого распространения тривиален.

Лемма 2 [27, предложение 1]**.** *Для четной функции* $w\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *функция* $z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} w(|z|)$ *субгармоническая, если и только если* w *возрастающая на* $\mathbb{R}^+$ *и имеет место* (13).

Замечание 1. Функции с выпуклой суперпозицией (13), особенно в контексте леммы 2, часто называют функциями, выпуклыми относительно логарифма ln. Последние можно определять как всевозможные суперпозиции выпуклых функций с функцией ln. Из элементарных свойств выпуклых функций следует, что функция w при условии (13) обладает всюду левыми и правыми производными и существует такое счетное $N_w \subset \mathbb{R}$, что функция w дифференцируема на $\mathbb{R} \setminus N_w$.

Лемма 3 ([17, п. 1.4], [18, § 4], [12, теорема 4])**.** *Если* $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *— четная функция, равная нулю в окрестности нуля, возрастающая на* $\mathbb{R}^+$*, с выпуклой функцией-суперпозицией* $w \circ \exp$ *из* (13) *и конечным логарифмическим интегралом* $J[w] < +\infty$*, то преобразование Пуассона* $\mathsf{P}w$ *этой функции* w *обладает следующими свойствами:*

1) $\mathsf{P}w$ *— субгармоническая на* $\mathbb{C}$ *функция, гармоническая на* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
2) $\mathsf{P}w$ *нулевого типа* $\mathsf{type}[\mathsf{P}w] = 0$.
3) *Симметричность* $\mathsf{P}w(\pm z) \underset{z\in\mathbb{C}}{=} \mathsf{P}w(\bar z)$ *относительно* $\mathbb{R}$ *и* $i\mathbb{R}$.
4) *Риссовское распределение масс* $\varDelta_{\mathsf{P}w}$ *сосредоточено на* $\mathbb{R}$ *с функцией распределения*

$$\varDelta_w^{\mathbb{R}}\colon x \longmapsto \frac{x}{\pi^2}\mathsf{PV}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{t(t-x)}\,\mathrm{d}t \quad \text{в каждой точке } x \in \mathbb{R} \setminus N_w, \tag{17}$$

где главное значение $\mathsf{PV}\int$ *определено всюду на* $\mathbb{R} \setminus N_w$ *для счетного* $N_w \subset \mathbb{R}$,

$$\varDelta_w^{\mathbb{R}}(x) := \inf_{x<t\in\mathbb{R}\setminus N_w} \varDelta_w^{\mathbb{R}}(t) \quad \text{в каждой точке } x \in N_w, \tag{18}$$

а функция распределения $\varDelta_w^{\mathbb{R}}$ *возрастающая непрерывная справа нечетная на* $\mathbb{R}$.

Распределение точек Z на $\mathbb{C}$ удовлетворяет *условию Бляшке вне* $\mathbb{R}$ [10–16], если

$$\sum_{|z|\geqslant 1} Z(z)\Bigl|\Im\frac{1}{z}\Bigr| < +\infty. \tag{19}$$

Распределению точек Z *на* $\mathbb{C}$ сопоставим возрастающую на $\mathbb{R}$ *функцию* ее *распределения*

$$Z^{\mathbb{R}}\colon x \underset{0\neq x\in\mathbb{R}}{\longmapsto} \frac{x}{|x|}\sum_{\left|z-\frac{x}{2}\right|\leqslant\frac{|x|}{2}} Z(z) + \frac{x^+}{|x|}Z(0), \quad Z^{\mathbb{R}}(0) := Z(0),$$

на $\mathbb{R}$ *по расширяющимся кругам с центрами на* $\mathbb{R}$ *и касающимся мнимой оси в нуле.*

Следуя аналогии с [20], [19, предложение 3.4], распределение точек Z на $\mathbb{C}$ *внешней плотности Кахана не больше* $c\in\mathbb{R}^+$, если выполнено *условию Бляшке* (19) *вне* $\mathbb{R}$ и найдется *возрастающая липшицева функция* $k\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с липшицевой постоянной

$$\sup_{\substack{x_1,x_2\in\mathbb{R},\\ x_1\neq x_2}}\frac{k(x_2)-k(x_1)}{x_2-x_1}<+\infty$$

не большей, чем c, для которой *конечен логарифмический интеграл* $J\bigl[|Z^{\mathbb{R}}-k|\bigr]<+\infty$. Точная нижняя грань таких c — это *внешняя плотность Кахана* $\overline{\mathrm{Kah}}(Z)$ для Z.

Если распределение точек Z на $\mathbb{C}$ сосредоточено на счетном носителе $\operatorname{supp}Z$ и конечно в каждой точке, то оно допускает *нумерацию,* а именно: сначала выбор подмножества целых чисел $N\subset\mathbb{Z}:=\mathbb{N}_0\cup(-\mathbb{N})$, а затем конструкция специальной функции из N в $\mathbb{C}$ в виде построения *последовательности* $(z_n)_{n\in N}$ *комплексных чисел,* где каждое число $z\in\mathbb{C}$ повторяется ровно $Z(z)$ раз. Мощность выбора таких нумераций даже континуум, если носитель $\operatorname{supp}Z$ бесконечен. При этом для каждой нумерации Z и всякого $S\subset\mathbb{C}$ и функции $f\colon S\to\overline{\mathbb{R}}$ или $f\colon S\to\mathbb{C}$ имеет место равенство

$$\sum_{z\in S}Z(z)f(z)=\sum_{z_n\in S}f(z_n), \tag{20}$$

когда сумма справа или слева в (20) корректно определена. Если для Z существует некоторая нумерация $(z_n)_{n\in N}$ на $\mathbb{C}$, для которой можно подобрать число $c\in\mathbb{R}^+$ и *последовательность попарно различных целых чисел* $(m_n)_{n\in N}$ с конечной суммой

$$\sum_{n\in N}\left|\frac{1}{z_n}-\frac{c}{m_n}\right|<+\infty,$$

то *внешняя плотность Редхеффера от Z вдоль* $\mathbb{R}$ не превышает числа c [10, 16, 22, 24, 25], а сама она равна точной нижней грани таких чисел $c\in\mathbb{R}^+$. *Внешнюю плотность Р. Редхеффера для Z* далее обозначаем как $\overline{\mathrm{Red}}(Z)$.

Лемма 4 [16, 21, 22, 25]**.** *Внешние плотности Кахана и Редхеффера совпадают.*

Теорема 2. *Если длина $b-a$ отрезка $[a,b]$ строго меньше $2\pi\overline{\mathrm{Kah}}(Z)=2\pi\overline{\mathrm{Red}}(Z)$, то Z — распределение единственности для класса $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([a,b])$, а если $b-a$ строго больше $2\pi\overline{\mathrm{Kah}}(Z)=2\pi\overline{\mathrm{Red}}(Z)$, то Z — распределение неединственности для класса $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([a,b])$.*

$\lhd$ Распределение (не)единственности Z для $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([a,b])$ остается таковым при любом сдвиге отрезка $[a,b]$ вдоль вещественной оси. Поэтому достаточно рассматривать лишь случай $b>0$, т. е. $a=-b$ и $b-a=2b$. Докажем сначала вторую часть.

Пусть $2b>2\pi\overline{\mathrm{Kah}}(Z)=2\pi\overline{\mathrm{Red}}(Z)$. По теореме Бёрлинга — Малявена о радиусе полноты [7–10, 20–26], сформулированной в терминах целых функций, это означает существование целой ненулевой функции $f\neq0$ эспоненциального типа $\mathsf{type}_f<b$, ограниченной на $\mathbb{R}$ и обращающейся в нуль на Z. При этом по субгармонической версии [14–15, теорема 1] теоремы Бёрлинга — Малявена о мультипликаторе [7–9, 20, 26] для субгармонической функции $\mathsf{P}w$ нулевого типа $\mathsf{type}[\mathsf{P}w]=0$ найдется целая функция h экспоненциального типа $\mathsf{type}_h<b-\mathsf{type}_f$, ограниченная на $\mathbb{R}$, для которой ограничена сверху на $\mathbb{R}$ субгармоническая функция $\mathsf{P}w+\ln|h|$ типа $\mathsf{type}\bigl[\mathsf{P}w+\ln|h|\bigr]\leqslant\mathsf{type}[\mathsf{P}w]+\mathsf{type}\bigl[\ln|h|\bigr]<b-\mathsf{type}_f$. Следовательно, сумма трех субгармонических функций $\ln|f|+\mathsf{P}w+\ln|h|$ ограничена сверху на $\mathbb{R}$ и представляет собой функцию класса Картрайт типа

$$\mathsf{type}\bigl[\ln|f|+\mathsf{P}w+\ln|h|\bigr]\leqslant\mathsf{type}\bigl[\ln|f|\bigr]+\mathsf{type}\bigl[\mathsf{P}w+\ln|h|\bigr]<\mathsf{type}_f+(b-\mathsf{type}_f)=b.$$

Отсюда для субгармонической функции $\ln|f|+\mathsf{P}w+\ln|h|$ класса Картрайт в силу ограниченности сверху этой суммы на $\mathbb{R}$ для некоторой постоянной $C\in\mathbb{R}$ имеет место неравенство $\ln|f|+\mathsf{P}w+\ln|h|\leqslant b|\Im|+C$ на $\mathbb{C}$. Следовательно, для целой функции $F:=fh\neq 0$, обращающейся в нуль на $\mathrm{Zero}_f\geqslant Z$, имеем $\ln|F|+\mathsf{P}w\leqslant b|\Im|+C$. Таким образом, сконструирована ненулевая целая функция $F\in\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([-b,b])$, обращающаяся в нуль на Z. Это значит, что Z — распределение неединственности для $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([-b,b])$.

Пусть теперь $2b<2\pi\overline{\mathrm{Kah}}(Z)=2\pi\overline{\mathrm{Red}}(Z)$ и целая функция $f\in\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([-b,b])$ обращается в нуль на Z. Тогда тем более $f\in\mathscr{H}_0([-b,b])$ с нулевой вместо исходной w функцией. По упоминавшейся выше классической теореме Бёрлинга — Малявена о радиусе полноты целая функция f — нулевая. Следовательно, Z — распределение неединственности для пространства $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([-b,b])$ в этом рассматриваемом случае $b<\pi\overline{\mathrm{Kah}}(Z)$. $\rhd$

Замечание 2. В случае совпадения длины $b-a$ с умноженными на 2π внешними плотностями Кахана $\overline{\mathrm{Kah}}(Z)$, Редхеффера $\overline{\mathrm{Red}}(Z)$ или иными, равными им из [7–9], [20–25], возможна любая ситуация, даже при нулевой функции $w=0$, поскольку эти плотности не меняются при изменении значений распределения точек Z на конечные натуральные числа в конечном числе точек. Более того, эти внешние плотности не меняются даже при прибавлении к Z любого распределения точек Z_0 с конечной суммой

$$\sum_{z\in\mathbb{C}}\frac{Z_0(z)}{|z|}<+\infty, \tag{21}$$

как и при вычитании из Z распределения точек $Z_0\leqslant Z$ с ограничением (21). Следовательно, такие внешние плотности распределений точек Z не могут дать полное описание распределений (не)единственности даже для пространства $\mathscr{H}_0([a,b])$ с нулевой функцией $w=0$ на $\mathbb{R}$. Поэтому необходимо привлечение иных, уже гораздо более тонких характеристик распределений точек Z, которые должны «чувствовать» изменение значений распределения точек Z на единицу даже в одной точке. Этот пробел был ликвидирован в наших работах [11, 12]. Результаты их полностью решают частную задачу для пространства $\mathscr{H}_0([a,b])$ с нулевой функцией $w=0$ на $\mathbb{R}$ и соответственно $\mathsf{P}w=0$ на $\mathbb{C}$. Пространства $\mathscr{H}_0([a,b])$ часто назывались *пространствами Бернштейна,* представляющими собой вариант равномерных пространств Пэли — Винера.

3. Случай субгармонической мажоранты класса Картрайт и критерий для пространств Бернштейна

Будут приведены критерии распределения единственности для пространств $\mathscr{H}_0([a,b])$ и, более общо, по субгармоническим функциям-мажорантам M класса Картрайт, когда в $M\overset{(3)}{:=}M_{\mathsf{up}}-M_{\mathsf{low}}$ вычитаемая функция M_{low} *нулевая на* $\mathbb{C}$, а функция M_{up} — субгармоническая функция класса Картрайт. Для формулировки этих критериев потребуются специальные классы тестовых, или пробных, функций на $\mathbb{R}$. В [12, п. 1.3.2] класс тестовых функций $\mathscr{P}_0$ определяется как множество всех *полунепрерывных сверху на* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *положительных функций* $v\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^+$ со следующими тремя свойствами:

1) *Финитность,* состоящая в существовании для каждой из функций v какого-нибудь отрезка $[-R_v,R_v]\subset\mathbb{R}$, для которого v равна нулю на его дополнении $\mathbb{R}\setminus[-R_v,R_v]$.

2) *Логарифмическая единичная полунормировка сверху вблизи нуля*

$$\limsup_{0\neq x\to 0}\frac{v(x)}{-\ln|x|}\leqslant 1. \tag{22}$$

3) При любом $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ найдется число $r_x \in \bigl(0,|x|\bigr]$, для которого выполнено *неравенство об интегральном логарифмическом среднем*

$$v(x) \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(x+t)\ln\Bigl|\frac{t+r}{t-r}\Bigr|\frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \text{при всех } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ и } r\in(0,r_x). \tag{23}$$

В [12, п. 1.3.2] класс $\mathscr{P}_0$ обозначался как $R\mathscr{P}_0$.

Для определения более узких классов тестовых функций напомним определение преобразования Гильберта функций в необходимой нам форме.

Если для непрерывно дифференцируемой функции v на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ с возможной единственной логарифмической особенностью в нуле сходится (суммируем) интеграл

$$J_1\bigl[v|\bigr] := \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\bigl|v(t)\bigr|}{1+|t|}\mathrm{d}t,$$

то *прямое преобразование Гильберта* $\mathsf{H}v$ функции v определяется как

$$\mathsf{H}v\colon x \underset{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}{\longmapsto} \frac{1}{\pi}\,\mathsf{PV}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{x-t}\mathrm{d}t := \frac{1}{\pi}\lim_{0<\varepsilon\to 0}\int\limits_{\{t\in\mathbb{R}\colon\, |t-x|>\varepsilon\}}\frac{v(t)}{x-t}\mathrm{d}t, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{24}$$

где в промежуточном равенстве $\mathsf{PV}\int$ — *главное значение интеграла в смысле Коши. Обратное преобразование Гильберта* отличается от прямого (24) только знаком:

$$(\mathsf{H}^{-1}v)(x) := \frac{1}{\pi}\,\mathsf{PV}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{t-x}\mathrm{d}t = (-\mathsf{H}v)(x), \quad \text{для всех } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{25}$$

Как обычно, для открытого $O\subseteq\mathbb{R}$ и $1\leqslant m\in\overline{\mathbb{N}}_0$ через $C^m(O)$ обозначаем класс всех m раз непрерывно дифференцируемых на O функций.

При $2\leqslant m\in\overline{\mathbb{N}}_0$ через $\mathscr{P}_0^m$ обозначаем, несколько упрощая обозначение из [11, определение 1], класс всех положительных функций $v\in C^m\bigl(\mathbb{R}\setminus\{0\}\bigr)$, финитных в отмеченном выше в п. 1 смысле и с логарифмической единичной нормировкой вблизи нуля (22), для которых *обратное преобразование Гильберта* (25) *возрастает как на положительной открытой полуоси* $\mathbb{R}^+\setminus 0$, *так и на отрицательной* $-\mathbb{R}^+\setminus 0$. Для этих тестовых классов имеет место равенство и цепочка включений [12; предложение 1]

$$\mathscr{P}_0\cap C^\infty\bigl(\mathbb{R}\setminus\{0\}\bigr) = \mathscr{P}_0^\infty\subset\cdots\subset\mathscr{P}_0^3\subset\mathscr{P}_0^2\subset\mathscr{P}_0. \tag{26}$$

Теорема 3 (**[11, теорема 1], [12, основная теорема]**)**.** *Пусть M — субгармоническая функция класса Картрайт типа* $\mathsf{type}[M]$, *гармоническая на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, равная нулю на некоторой окрестности нуля, а также $M(z)=M(\bar z)$ при всех $z\in\mathbb{C}$. Если для некоторого положительного числа $\varepsilon>0$ конечна точная верхняя грань*

$$\sup_{|\Im z|\leqslant\varepsilon}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}M(z+\varepsilon e^{i\theta})\mathrm{d}\theta - M(z)\right) < +\infty,$$

то для любого распределения точек Z с $0\notin\operatorname{supp}Z$ равносильны три высказывания:

1) *Z — распределение единственности по функции M.*

2) *Для самого широкого в (26) тестового класс $X := \mathscr{P}_0$ выполняется соотношение*

$$\sup_{v\in X}\left(\sum_{z\in\mathbb{C}} Z(z)\mathsf{P}v(z) - c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathbb{R}}(t)\right) = +\infty, \tag{27}$$

где $\varDelta_M^{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — возрастающая непрерывная справа функция распределения на $\mathbb{R}$ риссовского распределения масс $\varDelta_M$, сосредоточенного на $\mathbb{R}$, определяемая по правилу (см. [12, теорема 4, модификация п. 3ii])

$$\varDelta_M^{\mathbb{R}}\colon x \longmapsto \frac{\mathsf{type}[M]}{\pi}x + \frac{x}{\pi^2}\mathsf{PV}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{M(t)}{t(t-x)}\,\mathrm{d}t \quad \text{в каждой точке } x\in\mathbb{R}\setminus N_M, \tag{28}$$

где главное значение $\mathsf{PV}\int$ определено всюду на $\mathbb{R}\setminus N_M$ для счетного $N_M\subset\mathbb{R}$,

$$\varDelta_M^{\mathbb{R}}(x) := \inf_{x<t\in\mathbb{R}\setminus N_M} \varDelta_M^{\mathbb{R}}(t) \quad \text{в каждой точке } x\in N_M. \tag{29}$$

3) *Для самого узкого тестового класса $X := \mathscr{P}_0^\infty$ из (26) выполнено (27).*

Пример 1. Функция $M := h_{[-b,b]}\circ\Im$ из леммы 1 удовлетворяет условиям теоремы 3. В частности, из теоремы 3, используя зависимость распределений единственности для пространств $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}([a,b])$ только от длины $b-a$ отрезка $[a,b]$ и лемму 1 с п. 2 и формулой (16), соответствующей формулам (28)–(29), легко получаем

Следствие 1. *Для любого распределения точек Z при $0\notin \operatorname{supp} Z$ равносильны следующие три высказывания:*

1) *Z — распределение единственности для пространства $\mathscr{H}_0([a,b])$.*

2) *Для наибольшего по включению в (26) класса $X := \mathscr{P}_0$ выполняется соотношение*

$$\sup_{v\in X}\left(\sum_{z\in\mathbb{C}} Z(z)\mathsf{P}v(z) - \frac{b-a}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}t\right) = +\infty. \tag{30}$$

3) *Для наименьшего по включению в (26) класса $X := \mathscr{P}_0^\infty$ выполнено (30).*

Замечание 3. В нашей краткой обзорной заметке [16] заключительный результат [16; теорема 9] и вытекающее из него [16; следствие 10] сформулированы некорректно. Приведенное здесь следствие 1 исправляет эту погрешность. При этом заключительная пара некорректных утверждений из [16] формулировалась как некоторая трактовка верных основных результатов наших работ [15–16]. В переводной версии [28] краткого обзора [16] эти заключительные результаты из [16] также будут скорректированы.

4. Критерий распределения единственности для пространств $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}\bigl([a,b]\bigr)$

Теорема 4. *Если Z — распределение точек на $\mathbb{C}$, отделенное от нуля, выбраны $-\infty < a < b < -\infty$ и $w\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ — четная функция, возрастающая на $\mathbb{R}^+$ и равная нулю в окрестности нуля, с выпуклой суперпозицией $w\circ\exp$ из (13) и конечным логарифмическим интегралом $J[w] < +\infty$, то равносильны следующие три высказывания:*

1) *Z — распределение единственности для пространства $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}\bigl([a,b]\bigr)$.*

2) *Для более широкого, чем класс* $\mathscr{P}_0$, *класса* X *положительных полунепрерывных сверху на* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *функций* v *с предельным значением* $\lim_{|t|\to\infty} v(t)=0$, *с логарифмическая единичной полунормировкой* (22) *вблизи нуля, удовлетворяющих неравенству об интегральном логарифмическом среднем* (23) *на* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *с функцией распределения* $\varDelta^{\mathbb{R}}_{\mathsf{P}w}$, *определенной равенствами* (17)–(18), *выполнено соотношение*

$$\sup_{v\in X}\left(\sum_{z\in\mathbb{C}} Z(z)\mathsf{P}v(z)-\frac{b-a}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}t+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}\varDelta^{\mathbb{R}}_{\mathsf{P}w}(t)\right)=+\infty, \tag{31}$$

где точная верхняя грань рассматривается только по тем функциям $v\in X$, *для которых конечны оба интеграла в левой части* (31).

3) *Для более узкого, чем класс* $\mathscr{P}_0^\infty$, *класса* X *всех положительных на* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *бесконечно дифференцируемых функций* v, *равных нулю вне некоторого отрезка* $[-R_v,R_v]$, *с жесткой логарифмическая единичной нормировкой вблизи нуля*

$$\bigl|v(x)+\ln|x|\bigr|=O(1)\quad \textit{при } 0\neq|x|\to 0 \tag{32}$$

и с обратным преобразованием Гильберта $\mathsf{H}^{-1}v \overset{(25)}{=} -\mathsf{H}v$, *возрастающим как на положительной* $\mathbb{R}^+\setminus 0$, *так и на отрицательной* $-\mathbb{R}^+\setminus 0$ *полуосях, выполнено* (31).

$\lhd$ Очевидно, функция $M_{\mathsf{up}}:=h_{[a,b]}\circ\Im=b\Im^+-a\Im^-$ удовлетворяет условию (5) теоремы 1 при выборе, к примеру, $P:=1$. Распределения масс субгармонических функций $M_{\mathsf{up}}:=h_{[a,b]}\circ\Im$ и $M_{\mathsf{low}}:=\mathsf{P}w$ задаются функциям распределений на $\mathbb{R}$, явно определенными соответственно в (16) и (17)–(18). При этом для функций V на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ имеют место равенства

$$\int\limits_{\mathbb{C}} V\,\mathrm{d}\varDelta_{M_{\mathsf{up}}} \overset{(16)}{=} \frac{b-a}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} V(t)\,\mathrm{d}t,\qquad \int\limits_{\mathbb{C}} V\,\mathrm{d}\varDelta_{\mathsf{P}w} \overset{(17)}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} V(t)\,\mathrm{d}\varDelta^{\mathbb{R}}_{\mathsf{P}w}(t), \tag{33}$$

когда интегралы от функции V корректно определены и конечны.

Преобразование инверсии переменной $z\mapsto 1/\bar z$ сохраняет субгармоничность. В теореме 1 от функций p перейдем к функциям $V\colon z\mapsto p(1/\bar z)$. При этом суммируемость по полной вариации $|\varDelta_M|$ риссовского распределения зарядов разности M субгармонических на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функций V обеспечивается конечностью суммы интегралов

$$\frac{b-a}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} V(t)\,\mathrm{d}t+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} V(t)\,\mathrm{d}\varDelta^{\mathbb{R}}_{\mathsf{P}w}(t)<+\infty. \tag{34}$$

Тогда эквивалентности $1\Leftrightarrow 2\Leftrightarrow 3$ теоремы 1 при $M_{\mathsf{up}}:=h_{[a,b]}\circ\Im$ и $M_{\mathsf{low}}:=\mathsf{P}w$ запишутся с учетом равенств (33) как равносильность следующих трех высказываний:

1) Z — распределение единственности для пространства $\mathscr{H}_{\mathsf{P}w}\bigl([a,b]\bigr)$.

2) Для класса Y всех субгармонических положительных на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функций V с логарифмической единичной полунормировкой сверху вблизи нуля

$$\limsup_{0\neq z\to 0}\frac{V(z)}{-\ln|z|}\leqslant 1,$$

для которых конечна сумма двух интегралов (34), имеет место равенство

$$\sup_{V\in Y}\left(\sum_{z\in\mathbb{C}} Z(z)V(z)-\frac{b-a}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}V(t)\,\mathrm{d}t+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}V(t)\,\mathrm{d}\Delta^{\mathbb{R}}_{\mathsf{P}w}(t)\right)=+\infty. \tag{35}$$

3) При некотором $0<r\in\mathbb{R}^+$ при выборе в роли Y класса всех бесконечно дифференцируемых субгармонических на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функций $V\geqslant 0$, гармонических в проколотом круге $D(r)\setminus\{0\}$, равных нулю вне некоторого круга радиуса, зависящего от V, с жесткой логарифмической единичной нормировкой вблизи нуля, определяемой как $\sup_{0<|z|<r}\bigl|V(z)+\ln|z|\bigr|<+\infty$, имеет место равенство (35).

В этой частной версии теоремы 1 в п. 2–3 используются лишь сужения функций V на вещественную ось. В наших работах [11, 12], и прежде всего в части [12, §§ 3–4], дается детальное полное описанию сужений на $\mathbb{R}$ субгармонических функций класса Картрайт и потенциалов Йенсена с полюсом в нуле, определения которых здесь не приводим. Отметим лишь, что функции V из п. 2 — это пределы возрастающих последовательностей потенциалов Йенсена с полюсом в нуле, а функции V из п. 3 — это частные случаи таких потенциалов Йенсена. На этой основе простой анализ такого соответствия между классами функций V из п. 2–3 показывает, что сужения на $\mathbb{R}$ функций V из классов Y в п. 2 — это в точности функции v из класса X в п. 2 теоремы 4, а сужения на $\mathbb{R}$ функций V из класса Y в п. 3 образуют даже более узкий класс, нежели класс X из п. 3 теоремы 4. Это соответствие и завершает доказательство теоремы 4. $\rhd$

Замечание 4. Для используемых в теореме 1 классов функций v конечность первого интеграла в (34) уже влечет конечность второго. Доказательство этого факта здесь опускаем, поскольку он представляет собой очень частный случай довольно общего результата об интегралах по риссовским распределениям масс субгармонических функций класса Картрайт и других классов, который будет рассмотрен в ином месте. Следовательно, в заключающей части п. 2 точную верхнюю грань допускается рассматривать по тем функциям $v\in X$, для которых суммируем первый интеграл в левой части (31).

Замечание 5. При $w=0$ теорема 4 также развивает и усиливает следствие 1, расширяя класс тестовых функций v в п. 2 следствия 1 и сужая его в п. 3 следствия 1.

Благодарность. В заключение выражаю глубокую признательность рецензенту за ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению изложения и уточнению отдельных деталей.

Литература

1. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции.—М.: Мир, 1980.—304 с.
2. *Ransford Th.* Potential Theory in the Complex Plane.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.—232 p.
3. *Khabibullin B. N., Khabibullin F. B.* Necessary and sufficient conditions for zero subsets of holomorphic functions with upper constraints in planar domains // Lobachevskii J. Math.—2021.—Vol. 42, № 4.—P. 800–810. DOI: 10.1134/S1995080221040120.
4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: ГИТТЛ, 1956.—632 с.
5. *Havin V., Jöricke B.* The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis.—Berlin: Springer-Verlag, 1994.—xii+543 p.
6. *Levin B. Ja.* Lectures on Entire Functions.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996.—248 p.—(Translations of Mathematical Monographs; Vol. 150).
7. *Koosis P.* The Logarithmic Integral. I.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.—574 p.—(Cambridge Stud. Adv. Math.; Vol. 12).
8. *Koosis P.* The Logarithmic Integral. II.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.—606 p.—(Cambridge Stud. Adv. Math.; Vol. 21).

9. *Koosis P.* Leçons sur le Théorème de Beurling et Malliavin.—Montréal, QC: Les Publications CRM, 1996.—230 p.
10. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности.—Уфа. РИЦ БашГУ, 2012.—192 с.—URL: matem.anrb.ru/sites/default/files/userfiles/u35721/expkhbn.pdf.
11. *Хабибуллин Б. Н., Талипова Г. Р., Хабибуллин Ф. Б.* Подпоследовательности нулей для пространств Бернштейна и полнота систем экспонент в пространствах функций на интервале // Алгебра и анализ.—2014.—Т. 26, № 2.—С. 185–215.
12. *Байгускаров Т. Ю., Талипова Г. Р., Хабибуллин Б. Н.* Подпоследовательности нулей для классов целых функций экспоненциального типа, выделяемых ограничениями на их рост // Алгебра и анализ.—2016.—Т. 28, № 2.—С. 1–33.
13. *Хабибуллин Б. Н., Шмелева А. В.* Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей. I. Классический случай // Алгебра и анализ.—2019.—Т. 31, № 1.—С. 156–210.
14. *Хабибуллин Б. Н., Кудашева Е. Г.* Субгармонические дополнения к теоремам Бёрлинга — Мальявена. I. О мультипликаторе // Математика и теоретические компьютерные науки.—2023.—Т. 1, № 3.—С. 59–76.
15. *Khabibullin B. N., Kudasheva E. G.* Subharmonic Additions to the Beurling–Malliavin Theorems. I. On the Multiplier // Lobachevskii J. Math.—2024.—Vol. 45, № 4.—P. 1866–1874. DOI:10.1134/S1995080224601395.
16. *Хабибуллин Б. Н., Кудашева Е. Г.* Субгармонические дополнения к теоремам Бёрлинга — Мальявена. II. О радиусе полноты // Математика и теоретические компьютерные науки.—2023.—Т. 1, № 4.—P. 105–117. DOI: 10.26907/2949-3919.2023.4.105-117.
17. *Абанин А. В.* Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения.—М.: Наука, 2007.—222 с.
18. *Абанин А. В.* Ω-ультрараспределения // Изв. РАН. Сер. матем.—2008.—Т. 72, № 2.—С. 3–38. DOI: 10.4213/im1147.
19. *Beurling A., Malliavin P.* On Fourier transforms of measures with compact support // Acta Math.—1962.—Vol. 107.—P. 291–309. DOI: 10.1007/BF02545792.
20. *Beurling A., Malliavin P.* On the closure of characters and the zeros of entire functions // Acta Math.—1967.—Vol. 118.—P. 79–93. DOI: 10.1007/BF02392477.
21. *Kahane J.-P.* Travaux de Beurling et Malliavin // Séminaire Bourbaki (14e année, 1961/62, exposés 223–240, Talk no. 225).—1962.—№ 7.— P. 27–39.
22. *Redheffer R. M.* Completeness of sets of complex exponentials // Adv. Math.—1977.—Vol. 24.—P. 1–62.
23. *de Branges L.* Hilbert Spaces of Entire Functions.—Englewood Cliffs. N. J.: Prentice-Hall, 1968.
24. *Красичков-Терновский И. Ф.* Интерпретация теоремы Бёрлинга — Мальявена о радиусе полноты // Матем. сборник.—1989.—Т. 180, № 3.—С. 397–423.
25. *Хабибуллин Б. Н.* Неконструктивные доказательства теоремы Бёрлинга — Мальявена о радиусе полноты и теоремы неединственности для целых функций // Известия РАН. Серия матем.—1994.—Т. 58, № 4.—С. 125–148.
26. *Машреги Дж., Назаров Ф. Л., Хавин В. П.* Теорема Бёрлинга — Мальявена о мультипликаторе: седьмое доказательство // Алгебра и анализ.—2005.—Т. 17, № 5.—С. 3–68.
27. *Khabibullin B. N., Tamindarova N. R.* Subharmonic test functions and the distribution of zero sets of holomorphic functions // Lobachevskii J. Math.—2017.—Т. 38, № 1.—С. 38–43. DOI: 10.1134/S1995080217010115.

Статья поступила 24 октябрь 2024 г.

Хабибуллин Булат Нурмиевич
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112;
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
профессор кафедры математики и статистики
РОССИЯ, 450077, Уфа, ул. Октябрьской революции, 3 а
E-mail: khabib-bulat@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-1308-4461

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 112–126

UNIQUENESS DISTRIBUTIONS FOR ENTIRE FUNCTIONS WITH UNIFORM CONSTRAINTS ON THEIR GROWTH

Khabibullin, B. N.[1,2]

[1] Institute of Mathematics with Computing Centre
of the Ufa Federal Research Centre of RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia;
[2] Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla,
3 a October Revolution St., Ufa 450077, Russia

E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Abstract. Let $M = M_{\mathsf{up}} - M_{\mathsf{low}}$ be the difference of subharmonic functions on the complex plane $\mathbb{C}$. First, we discuse the following general problem: What are the conditions for the distribution of points Z on $\mathbb{C}$, under which there is an entire nonzero function f that vanishes on Z and satisfies the inequality $|f| \leqslant e^M$ on $\mathbb{C}$? We formulate some known results for the general problem from one of our papers with co-authors. The next step is to discuss a specific problem of when $M_{\mathsf{up}} = b|\mathrm{Im}|$ is the module of the imaginary part with a numerical multiplier $b \geqslant 0$, and M_{low} is the Poisson transformation of a positive even function w on the real axis $\mathbb{R}$, increasing on the positive semi-axis $\mathbb{R}^+$, and with a finite logarithmic integral. A very significant contribution to this theory is contained in a number of fundamental works by A. V. Abanin, including his known monograph. It is precisely such classes of entire functions that arise after the Fourier–Laplace transform of test functions on compacts. In this direction, the article discusses the limits of applicability of the Beurling–Malliavin theory, and also provides our criterion with co-authors, but only for the zero function $w = 0$. The final main result of the article extends the last criterion to the cases of a nonzero function $w \neq 0$.

Keywords: entire function, point distribution, zero distribution, subharmonic function, mass distribution, Cartwright class, logarithmic integral, Poisson integral, ultradifferentiable function, ultradistribution.

AMS Subject Classification: 30D20, 30D15, 31A05.

For citation: *Khabibullin, B. N.* Uniqueness Distributions for Entire Functions with Uniform Constraints on Their Growth, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 112–126. (in Russian). DOI: 10.46698/v3523-1431-1350-j.

References

1. *Hayman, W. and Kennedy, P. Subharmonic Functions, Vol.* 1, London Mathematical Society Monographs, no. 9, London, Academic Press, 1976, xvii+284 p.
2. *Ransford, Th. Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge, Cambridge University Press, 1995, 232 p.
3. *Khabibullin, B. N. and Khabibullin, F. B.* Necessary and Sufficient Conditions for Zero Subsets of Holomorphic Functions with Upper Constraints in Planar Domains, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, no. 4, pp. 800–810. DOI: 10.1134/S1995080221040120.
4. *Levin, B. Ja. Distribution of Zeros of Entire Functions*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 5, Providence, RI, American Mathematical Society, 1980.
5. *Havin, V. and Jöricke, B. The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*, Berlin, Springer-Verlag, 1994, xii+543 p.
6. *Levin, B. Ja. Lectures on Entire Functions*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 150, Providence, RI, American Mathematical Society, 1996, 248 p.
7. *Koosis, P. The Logarithmic Integral. I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 12, Cambridge, Cambridge University Press, 1988, 574 p.
8. *Koosis, P. The Logarithmic Integral. II*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 21, Cambridge, Cambridge University Press, 1992, 606 p.
9. *Koosis, P. Leçons sur le Théorème de Beurling et Malliavin*, Montréal, QC, Les Publications CRM, 1996, 230 p.

10. *Khabibullin, B. N. Polnota sistem e'ksponent i mnozhestva edinstvennosti* [Completeness of exponential systems and sets of uniqueness], Ufa, Bashkir State University, 2012, 192 p. (in Russian).
11. *Khabibullin, B. N., Talipova, G. R. and Khabibullin, F. B.* Zero Subsequences for Bernsteins Spaces and the Completeness of Exponential Systems in Spaces of Functions on an Interval, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2015, vol. 26, no. 2, pp. 319–340. DOI: 10.1090/S1061-0022-2015-01340-X.
12. *Bayguskarov, T. Yu., Talipova, G. R. and Khabibullin, B. N.* Subsequences of Zeros for Classes of Entire Functions of Exponential Type, Allocated by Restrictions on Their Growth, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2017, vol. 28, no. 2, pp. 127–151. DOI: 10.1090/spmj/1442.
13. *Khabibullin, B. N. and Shmelyova, A. V.* Balayage of Measures and Subharmonic Functions on a System of Rays. I. Classic Case, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2020, vol. 31, no. 1, pp. 117–156. DOI: 10.1090/spmj/1589.
14. *Khabibullin, B. N. and Kudasheva, E. G.* Subharmonic Additions to the Beurling–Malliavin Theorems. I. On the Multiplier. *Matematika i teoreticheskie komp'iuterny'e nauki* [Mathematics and Theoretical Computer Science], 2023, vol. 1, no. 3, pp. 59–76 (in Russian).
15. *Khabibullin, B. N. and Kudasheva, E. G.* Subharmonic Additions to the Beurling–Malliavin Theorems. I. On the Multiplier, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2024, vol. 45, no. 4, pp. 1841–1849. DOI: 10.1134/S1995080224601395.
16. *Khabibullin, B. N. and Kudasheva, E. G.* Subharmonic Additions to the Beurling–Malliavin Theorems. I. On the Radius of Completeness, *Matematika i teoreticheskie komp'iuterny'e nauki* [Mathematics and Theoretical Computer Science], 2023, vol. 1, no. 4, pp. 104–115 (in Russian). DOI: 10.26907/2949-3919.2023.4.105-117.
17. *Abanin, A. V. Ul'tradifferentciruemy'e funktcii i ul'traraspredeleniia* [Ultradifferentiable functions and ultradistributions], Moscow, Nauka, 2007, 222 p.
18. *Abanin, A. V* Ω-Ultradistributions, *Izvestiya: Mathematics*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 207–240. DOI: 10.1070/IM2008v072n02ABEH002398.
19. *Beurling, A. and Malliavin, P.* On Fourier Transforms of Measures with Compact Support, *Acta Mathematica*, 1962, vol. 107, pp. 291–309. DOI: 10.1007/BF02545792.
20. *Beurling, A. and Malliavin, P.* On the Closure of Characters and the Zeros of Entire Functions, *Acta Mathematica*, 1967, vol. 118, pp. 79–93. DOI: 10.1007/BF02392477.
21. *Kahane J.-P.* Travaux de Beurling et Malliavin, *Séminaire Bourbaki* (14e année, 1961/62, exposés 223–240, Talk no. 225), 1962, no. 7, pp. 27–39.
22. *Redheffer, R. M.* Completeness of Sets of Complex Exponentials, *Advances in Mathematics*, 1977, vol. 24, pp. 1–62.
23. *de Branges, L. Hilbert Spaces of Entire Functions*, Englewood Cliffs. N.J., Prentice-Hall, 1968.
24. *Krasichkov-Ternovskii, I. F.* An Interpretation of the Beurling–Malliavin Theorem on the Radius of Completeness, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1990, vol. 66, no. 2, pp. 405–429. DOI: 10.1070/SM1990v066n02ABEH001178.
25. *Khabibullin, B. N.* Nonconstructive Proofs of the Beurling–Malliavin Theorem on the Radius of Completeness, and Nonuniqueness Theorems for Entire Functions, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1995, vol. 45, no. 1, pp. 125–149. DOI: 10.1070/IM1995v045n01ABEH001622.
26. *Mashreghi, J., Nazarov, F. L. and Havin, V. P.* Beurling–Malliavin Multiplier Theorem: the Seventh Proof, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2006, vol. 17, no. 5, pp. 699–744. DOI: 10.1090/S1061-0022-06-00926-5.
27. *Khabibullin, B. N. and Tamindarova, N. R.* Subharmonic Test Functions and the Distribution of Zero Sets of Holomorphic Functions, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2017, vol. 38, no. 1, pp. 38–43. DOI: 10.1134/S1995080217010115.

Received October 24, 2024

Bulat N. Khabibullin
Institute of Mathematics with Computing Centre
of the Ufa Federal Research Centre of RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Chief Scientific Officer;

Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla,
3 a October Revolution St., Ufa 450077, Russia,
Professor
E-mail: khabib-bulat@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-1308-4461

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 127–149

УДК 510.8
DOI 10.46698/e7265-7012-8069-r

ОДНОСТОРОННИЕ ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

А. Б. Шишкин[1], **Б. А. Шишкин**[2]

[1] Кубанский государственный университет,
Россия, 353560, Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200;
[2] ООО «ПРАЙ»,
Россия, 353563, Славянск-на-Кубани, ул. Строителей, 1
E-mail: shishkin-home@mail.ru, shishkinb13@gmail.com

Посвящается 70-летию профессора А. В. Абанина

Аннотация. Феномен двойственности присущ всем разделам математики и лежит в основе многих специальных теорем двойственности, утверждающих возможность двойственных переходов — переносов математических высказываний из одной области математики в другую. Все известные теоремы двойственности опираются на свойства специальных математических структур и носят двусторонний характер, то есть предполагают двойственные переходы в одну и другую стороны. Настоящая статья посвящена новому пониманию двойственных переходов как переходов от внутренних (соответственно внешних) описаний множеств к внешним (соответственно внутренним) описаниям двойственных им множеств. Особое внимание уделяется двойственным переходам в одну сторону — односторонним теоремам двойственности. При этом в основу абстрактных построений (односторонней теории двойственности) положено понятие дуальной схемы, в основе которого, в свою очередь, лежит понятие ослабленной инволюции — вполне изотонного отображения. При этом любое вполне изотонное отображение имеет условно обратное отображения, которое тоже является вполне изотонным. Авторы различают четыре дуальные схемы, каждая из которых играет свою строго определенную роль в вопросах внешнего и внутреннего описания множеств. Любая дуальная схема представляется как совокупность из двух диаграмм, связанных между собой взаимно обратными переходами к условно обратным отображениям.

Ключевые слова: двойственность, интериоризация, экстериоризация.

AMS Subject Classification: 03E15.

Образец цитирования: *Шишкин А. Б., Шишкин Б. А.* Односторонние теоремы двойственности // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 1.—С. 127–149. DOI: 10.46698/e7265-7012-8069-r.

1. Введение

Понимание двойственных переходов как переходов от инъективного описания множеств к их проективному описанию возникло в условиях задачи спектрального синтеза в комплексной области. Исследования по спектральному синтезу в комплексной области опираются на свойства дуальной бипары $\langle\langle O, O^*\rangle, \langle P, P^*\rangle\rangle$, где $O := O(G)$ — пространство аналитических функций в односвязной области $G \subseteq \mathbf{C}$, O^* — его сильное сопряженное пространство, $P := P(G)$ — интерпретация O^* в терминах оператора Лапласа, P^* — его сильное сопряженное пространство. Новое понимание двойственных переходов позволило в ряде случаев свести задачу спектрального синтеза в комплексной области (для дифференциального оператора бесконечного порядка) к задаче проективного описания замкнутых подмодулей целых функций (над кольцами многочленов от целой функции) [1, 2]. Используемый при этом двойственный переход является двусторонним и существенным образом опирается на рефлексивность локально выпуклых пространств O и P.

Первая попытка осуществить односторонний двойственный переход в комплексной области предпринята в монографии [3]. Эти исследования несут яркий отпечаток задачи спектрального синтеза в комплексной области и тесно связаны с основными положениями локально выпуклого анализа. Попытка общематематического описания односторонних двойственных переходов предпринята в работе [4]. В этой работе разработана общая *односторонняя схема двойственности*, предполагающая двойственные переходы лишь в одну сторону. Такие переходы предполагают ослабление начальных условий и их использование приводит к существенному расширению области применения двойственных переходов в исследовательской практике. Упомянутая односторонняя схема двойственности основана на понятии вполне изотонного отображения (проекции, инъекции) и условно обратного отображения. Эти понятия, в свою очередь, лежат в основе понятия *дескриптора*, понятия инъективного описания (*интериоризации*) и понятия проективного описания (*экстериоризации*). Рассмотренная в работе [4] односторонняя схема двойственности связывает эти понятия одним предложением, утверждающим саму возможность односторонних двойственных переходов.

Однако упомянутая теорема (схема) носит характер общих рекомендаций по организации односторонних двойственных переходов и может вызвать затруднения при ее использовании в конкретных условиях. Этим вызвана необходимость конкретизации ее отдельных положений. Во-первых, требуется уточнить определение дескриптора (интериоризатора, экстериоризатора). Во-вторых, требуется конкретизировать процедуры внутреннего и внешнего описания множеств. В данной работе эти процедуры базируются на ключевом понятии *дуальной схемы*, в основе которого лежит понятие *полукоммутативной диаграммы* (*вполне изотонного неравенства*). Доказанные в данной статье *односторонние теоремы двойственности* являются конструктивными. Они уже не носят характер общих рекомендаций и могут быть легко применены в любых конкретных ситуациях. Их использование не требует каких-либо дополнительных построений и сводится лишь к проверке выполнимости конкретных условий.

2. Вполне изотонные отображения

2.1. Проекции и инъекции. Пусть $X := (X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Элемент $x \in X$ называем *частичной минорантой* (соответственно *частичной мажорантой*) множества $A \subseteq X$, если множество $\{a \in A : x \leqslant a\}$ (соответственно $\{a \in A : a \leqslant x\}$) не является пустым. Согласно этому определению любая точка из произвольного множества $A \subseteq X$ является и частичной мажорантой, и частичной минорантой этого множества. Множество $A \subseteq X$, обладающее свойством

$$x \leqslant a,\ a \in A \Rightarrow x \in A \quad (\text{соответственно } a \leqslant x,\ a \in A \Rightarrow x \in A),$$

принято называть *прямым* (соответственно *обратным*) *порядковым идеалом.* Согласно этому определению прямой (соответственно обратный) порядковый идеал $A \subseteq X$ совпадает с совокупностью всех своих частичных минорант (соответственно частичных мажорант).

Пусть $Y := (Y, \leqslant)$ — тоже частично упорядоченное множество, $m : X \to Y$ — некоторое отображение. Для любого $y \in Y$ символом $X(y \leqslant m(x))$ (соответственно $X(m(x) \leqslant y)$) обозначим множество

$$\{x \in \operatorname{Dom} m :\ y \leqslant m(x)\} \quad \bigl(\text{соответственно } \{x \in \operatorname{Dom} m :\ m(x) \leqslant y\}\bigr),$$

где $\operatorname{Dom} m$ — область определения отображения m. Элемент $y \in Y$ называем *частичной минорантой* (соответственно *частичной мажорантой*) отображения m, если он является частичной минорантой (соответственно частичной мажорантой) области изменения $\operatorname{Im} m$ отображения m. Элемент $y \in Y$ является частичной минорантой (соответственно частичной мажорантой) отображения m тогда и только тогда, когда множество $X(y \leqslant m(x))$ (соответственно $X(m(x) \leqslant y)$) не является пустым.

Отображение $m : X \to Y$ называется *изотонным* (соответственно *строго изотонным*), если для любых $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} m$, удовлетворяющих условию $x_1 \leqslant x_2$ (соответственно $x_1 < x_2$), выполняется неравенство $m(x_1) \leqslant m(x_2)$ (соответственно $m(x_1) < m(x_2)$). Отображение $m : X \to Y$ называется *антитонным* (соответственно *строго антитонным*), если для любых $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} m$, удовлетворяющих условию $x_1 \leqslant x_2$ (соответственно $x_1 < x_2$), выполняется неравенство $m(x_2) \leqslant m(x_1)$ (соответственно $m(x_2) < m(x_1)$). Если отображение $m : X \to Y$ является антитонным (соответственно строго антитонным), то отображения $m : \overline{X} \to Y$ и $m : X \to \overline{Y}$ являются изотонными (соответственно строго изотонными) и наоборот. Здесь $\overline{X} := (X, \geqslant)$ и $\overline{Y} := (Y, \geqslant)$ — частично упорядоченные множества X и Y с обратными порядками.

Изотонное отображение $m : X \to Y$ называется *проекцией* (соответственно *инъекцией*) из X в Y, если множество $\operatorname{Dom} m$ является прямым (соответственно обратным) порядковым идеалом и для любой частичной мажоранты (соответственно миноранты) $y \in Y$ отображения m множество $X(m(x) \leqslant y)$ (соответственно $X(y \leqslant m(x))$) обладает наибольшим (соответственно наименьшим) элементом. Проекции и инъекции из X в Y называем *вполне изотонными отображениями* из X в Y. Отмечаем, что любой порядковый изоморфизм является проекцией и инъекцией одновременно.

При замене порядков в множествах X и Y их обратными порядками проекция (соответственно инъекция) из X в Y становится инъекцией (соответственно проекцией) из X в Y. Другими словами, если отображение $m : X \to Y$ является проекцией (соответственно инъекцией), то отображение $\overline{m} :\ \overline{X} \to \overline{Y}\,\big|\, x \mapsto m(x)$ является инъекцией (соответственно проекцией). Разные символы X и $\overline{X}$ (соответственно Y и $\overline{Y}$) обозначают разные частично упорядоченные множества $(X, \leqslant)$ и $(X, \geqslant)$ (соответственно $(Y, \leqslant)$ и $(Y, \geqslant)$). Носители структур $(X, \leqslant)$ и $(X, \geqslant)$ (соответственно $(Y, \leqslant)$ и $(Y, \geqslant)$) совпадают, значит, символы m и $\overline{m}$ обозначают одно отображение. Необходимость использования разных символов m и $\overline{m}$ связана с возможным разночтением функциональных неравенств и полукоммутативных диаграмм. Например, неравенство $m(x) \leqslant y$ при переходе к обратным порядкам превращается в неравенство $y \leqslant \overline{m}(x)$. При этом множество $X(m(x) \leqslant y)$ будет совпадать с множеством $\overline{X}(y \leqslant \overline{m}(x))$.

2.2. Примеры вполне изотонных отображений. Рассмотрим несколько ключевых примеров вполне изотонных отображений. Первый пример связан с переходами к обратному порядку.

Пример 2.1. Пусть A — непустое множество, 2^A — булеан множества A, $X := (2^A, \subseteq)$ и $\overline{X} := (2^A, \supseteq)$ — частично упорядоченные множества с взаимно обратными порядками. Рассмотрим изотонное отображение

$$l :\ X \to \overline{X}\,\big|\, x \mapsto \overline{x} := A \setminus x.$$

Оно осуществляет порядковый изоморфизм X на $\overline{X}$. Следовательно, отображение l является проекцией и инъекцией X на $\overline{X}$ одновременно. Обратное отображение $l^{-1} : \overline{X} \to X$ обладает аналогичным свойством.

Следующие примеры показывают, что понятие вполне изотонного отображения тесно связано с понятием многозначного отображения (соответственно бинарного отношения). Пусть A и B — непустые множества, $X := (2^A, \subseteq)$ и $Y := (2^B, \subseteq)$ — их частично упорядоченные булеаны, $F : A \to B$ — некоторое многозначное отображение, $F^{-1} : B \to A$ — его обратное многозначное отображение.

Пример 2.2. Многозначное отображение F можно рассматривать как однозначное отображение $n : X \to Y \,\big|\, x \mapsto F(x)$, где $F(x) := \{b \in B : b \in F(a), a \in x\}$ — образ множества $x \in X$ при отображении F. Считаем, что $F(\varnothing) := \varnothing$. Значит, область определения $\operatorname{Dom} n$ отображения n совпадает с X и является прямым (и обратным) порядковым идеалом. Отображение n является изотонным. Покажем, что оно является проекцией X в Y. В самом деле, так как $n(\varnothing) = \varnothing \subseteq y$ для любого $y \in Y$, то любой элемент $y \in Y$ является частичной мажорантой отображения n. При этом для любого $y \in Y$ множество $X(n(x) \subseteq y)$ обладает наибольшим элементом. Этим элементом является *условный прообраз* $F^{-}(y) := \{a \in A : F(a) \subseteq y\}$ множества y при отображении F. Действительно, с одной стороны, $n(F^{-}(y)) = F(F^{-}(y)) \subseteq y$, т. е. множество $F^{-}(y)$ лежит в совокупности $X(n(x) \subseteq y)$. С другой стороны, если $n(x) \subseteq y$ для некоторого $x \in X$, то для любого $a \in x$ имеем $n(a) = F(a) \subseteq y$, т. е. $a \in F^{-}(y)$. Это означает, что $x \subseteq F^{-}(y)$.

Пример 2.3. Рассмотрим однозначное отображение $p : Y \to X \,\big|\, y \mapsto F^{-1}(y)$, где $F^{-1}(y) := \{a \in A : F(a) \cap y \neq \varnothing\}$ — прообраз множества $y \in Y$ при отображении F. Так как прообраз $F^{-1}(y)$ множества $y \in Y$ при отображении F совпадает с образом этого множества при отображении F^{-1}, то как уже показано в предыдущем примере отображение p является проекцией Y в X.

Пример 2.4. Далее рассмотрим однозначное отображение $m : Y \to X \,\big|\, y \mapsto F^{-}(y)$, где $F^{-}(y) := \{a \in A : F(a) \subseteq y\}$ — условный прообраз множества $y \in Y$ при отображении F. Отображение m является изотонным. Область определения $\operatorname{Dom} m$ отображения m совпадает с Y и является обратным (и прямым) порядковым идеалом. Покажем, что отображение m является инъекцией Y в X. В самом деле, так как $B \in Y$ и $x \subseteq A = m(B)$ для любого $x \in X$, то любой элемент $x \in X$ является частичной минорантой отображения m. При этом для любого $x \in X$ множество $Y(x \subseteq m(y))$ обладает наименьшим элементом. Этим элементом является образ $F(x)$ множества x. Действительно, с одной стороны, $x \subseteq F^{-}(F(x)) = m(F(x))$, т. е. множество $F(x)$ лежит в совокупности $Y(x \subseteq m(y))$. С другой стороны, если $x \subseteq m(y)$ для некоторого $y \in Y$, то для любого $b \in F(x)$ имеем $b \in F(m(y)) = F(F^{-}(y)) \subseteq y$, т. е. $b \in y$. Это означает, что $F(x) \subseteq y$.

Если отображение F является однозначным, то условный прообраз $F^{-}(y)$ множества $y \in Y$ при отображении F совпадает с прообразом $F^{-1}(y)$ этого множества при отображении F. Значит, отображение m совпадает с отображением $p : Y \to X \mid y \mapsto F^{-1}(y)$. Следовательно, в этом случае отображение m является еще и проекцией Y в X.

Пример 2.5. Затем рассмотрим однозначное отображение $q : X \to Y \,\big|\, x \mapsto F^{+}(x)$, где $F^{+}(x) := \{b \in B : F^{-1}(b) \subseteq x\}$ — *условный образ* множества $x \in X$ при отображении F. При этом условный образ $F^{+}(x)$ множества $x \in X$ при отображении F совпадает с условным прообразом $(F^{-1})^{-}(x)$ множества $x \in X$ при отображении F^{-1}. Действительно, если $b \in F^{+}(x)$, то $F^{-1}(b) \subseteq x$ и $b \in (F^{-1})^{-}(x)$. Обратно, если $b \in (F^{-1})^{-}(x)$, то $F^{-1}(b) \subseteq x$ и $b \in F^{+}(x)$. Значит, как уже показано в предыдущем примере отображение q является инъекцией X в Y.

Если отображение F является расслоением (образы различных точек не пересекаются), то обратное отображение F^{-1} является однозначным. При этом условный образ $F^+(x)$ множества $x \in X$ при отображении F совпадает с образом $F(x)$ этого множества. Действительно, если $b \in F^+(x)$, то $F^{-1}(b) \in x$ и $b \in F(x)$. Обратно, если $b \in F(x)$, то $F^{-1}(b) \in x$ и $b \in F^+(x)$. Значит, отображение q совпадает с отображением $n : X \to Y \mid x \mapsto F(x)$. Следовательно, в этом случае отображение q является еще и проекцией множества Y в множество X.

Пусть Λ — непустое множество, X_λ, $\lambda \in \Lambda$, — семейство непустых множеств. Декартово произведение семейства множеств X_λ, $\lambda \in \Lambda$, обозначаем $X_\Lambda := \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, а его элементы обозначаем $x_\Lambda := (x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$. Если $X_\lambda = X$ для любого $\lambda \in \Lambda$, то декартово произведение семейства множеств X, $\lambda \in \Lambda$, называем декартовой степенью X и обозначаем X^Λ, а его элементы вида $(x : \lambda \in \Lambda)$ обозначаем x^Λ. Декартово произведение X_Λ частично упорядоченных множеств $X_\lambda := (X_\lambda, \leqslant)$, $\lambda \in \Lambda$, рассматриваем как частично упорядоченное множество $(X_\Lambda, \leqslant)$ с естественным порядком: $x_\Lambda \leqslant x'_\Lambda$ тогда и только тогда, когда $x_\lambda \leqslant x'_\lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Декартово произведение $X_\Lambda \to Y_\Lambda$ семейства отображений $m_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, обозначаем m_Λ. Декартову степень $X^\Lambda \to Y^\Lambda$ отображения $m : X \to Y$ обозначаем m^Λ.

Пример 2.6. Декартово произведение $m_\Lambda : X_\Lambda \to Y_\Lambda$ данного семейства проекций (соответственно инъекций) $m_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, является проекцией (соответственно инъекцией) декартова произведения X_Λ в декартово произведение Y_Λ. Декартова степень $m^\Lambda : X^\Lambda \to Y^\Lambda$ проекции (соответственно инъекции) $m : X \to Y$ является проекцией (соответственно инъекцией) из декартовой степени X^Λ в декартову степень Y^Λ.

3. Условно обратные отображения

3.1. Условно обратные отображения. Пусть X и Y — частично упорядоченные множества. Всякая проекция m (соответственно инъекция m) X в Y обладает *условно обратным* отображением $m^- : Y \to X$, которое каждой частичной мажоранте (соответственно частичной миноранте) $y \in Y$ отображения m ставит в соответствие наибольший (соответственно наименьший) элемент множества $X(m(x) \leqslant y)$ (соответственно $X(y \leqslant m(x))$).

Согласно этому определению область определения $\operatorname{Dom} m^- \subseteq Y$ условно обратного отображения m^- совпадает с множеством всех частичных мажорант (соответственно минорант) отображения m. При этом для любого вполне изотонного отображения $m : X \to Y$ имеют место очевидные вложения:

$$\operatorname{Im} m \subseteq \operatorname{Dom} m^- \subseteq Y, \quad \operatorname{Im} m^- \subseteq \operatorname{Dom} m \subseteq X. \tag{1}$$

Действительно, если $y \in \operatorname{Im} m$, то y — частичная мажоранта и частичная миноранта отображения m, значит, $y \in \operatorname{Dom} m^-$. С другой стороны, если $x \in \operatorname{Im} m^-$, то по определению условно обратного отображения m^- имеем $x \in X(m(x) \leqslant y)$ (соответственно $x \in X(y \leqslant m(x))$) при некотором $y \in \operatorname{Dom} m^-$. В любом случае $x \in \operatorname{Dom} m$.

Соотношения (1) будем далее использовать по умолчанию, т. е. не будем акцентировать на них внимание читателя.

3.2. Основные свойства условно обратных отображений. Рассмотрим простейшие свойства вполне изотонных отображений и их условно обратных отображений. Отметим, что каждое из омеченных ниже свойств является парным, т. е. состоит из двух параллельных утверждений. Так как в каждом случае второе утверждение является зеркальным отражением первого, то обоснование второго утверждения является фактическим повторением обоснования первого утверждения. Доказательства первых пяти свойств опустим (см. [4]).

Свойство 3.1. *Если m — проекция (соответственно инъекция) X в Y, то для любого $y \in \operatorname{Dom} m^-$ выполняется неравенство $m \circ m^-(y) \leqslant y$ (соответственно $y \leqslant m \circ m^-(y)$).*

Свойство 3.2. *Если m — проекция (соответственно инъекция) X в Y, то для любого $x \in \operatorname{Dom} m$ выполняется неравенство $x \leqslant m^- \circ m(x)$ (соответственно $m^- \circ m(x) \leqslant x$).*

Свойство 3.3. *Если $m : X \to Y$ — вполне изотонное отображение, то условно обратное отображение $m^- : Y \to X$ является изотонным.*

Свойство 3.4. *Если $m : X \to Y$ — вполне изотонное отображение, то для любого $x \in \operatorname{Im} m^-$ выполняется равенство $m^- \circ m(x) = x$, а для любого $y \in \operatorname{Im} m$ выполняется равенство $m \circ m^-(y) = y$.*

Свойство 3.5. *Изотонное отображение $m : X \to Y$ является проекцией (соответственно инъекцией) X в Y тогда и только тогда, когда область определения $\operatorname{Dom} m$ является прямым (соответственно обратным) порядковым идеалом и существует изотонное отображение $r : Y \to X$, удовлетворяющее условиям:*

1) $\operatorname{Dom} r$ *совпадает с множеством всех частичных мажорант (соответственно минорант) отображения m;*

2) $m \circ r(y) \leqslant y$ *(соответственно $y \leqslant m \circ r(y)$) для любого $y \in \operatorname{Dom} r$;*

3) $x \leqslant r \circ m(x)$ *(соответственно $r \circ m(x) \leqslant x$) для любого $x \in \operatorname{Dom} m$.*

Отображение r, удовлетворяющее условиям 1), 2), 3), и условно обратное отображение m^- совпадают.

Остальные свойства приведем с полным обоснованием.

Свойство 3.6. *Если отображение n — инъекция (соответственно проекция) Y в X, то условно обратное отображение n^- является проекцией (соответственно инъекцией) X в Y, а второе условно обратное отображение $(n^-)^-$ совпадает с отображением n.*

$\lhd$ Предположим, что n — инъекция Y в X и $n^- : X \to Y$ — его условно обратное отображение. Пусть $m := n^-$ и $r := n : Y \to X$. По определению отображения n^- область определения $\operatorname{Dom} m$ является прямым порядковым идеалом. Пусть y — частичная мажоранта отображения m. Значит, при некотором $x \in \operatorname{Dom} m$ имеем $y' := m(x) \leqslant y$. Из вложений (1) вытекает, что $y' \in \operatorname{Im} m = \operatorname{Im} n^- \subseteq \operatorname{Dom} n = \operatorname{Dom} r$. Значит, по определению вполне изотонного отображения $y \in \operatorname{Dom} r$. С другой стороны, пусть $y \in \operatorname{Dom} r$ и $x := r(y)$. Тогда $x \in \operatorname{Im} n \subseteq \operatorname{Dom} n^- = \operatorname{Dom} m$ и по свойству 3.2 имеем $m(x) = n^- \circ n(y) \leqslant y$, т. е. y — частичная мажоранта отображения m. Следовательно, отображения m и r удовлетворяют условию 1) из формулировки свойства 3.5. Далее, по свойству 3.2 для любого $y \in \operatorname{Dom} r = \operatorname{Dom} n$ выполняется неравенство $m \circ r(y) = n^- \circ n(y) \leqslant y$, т. е. отображения m и r удовлетворяют условию 2) из формулировки свойства 3.5. По свойству 3.1 для любого $x \in \operatorname{Dom} m = \operatorname{Dom} n^-$ выполняется неравенство $r \circ m(x) = n \circ n^-(x) \leqslant x$, т. е. отображения m и r удовлетворяют условию 3) из формулировки свойства 3.5. Следовательно, отображения m и r удовлетворяют всем условиям из формулировки свойства 3.5. По этому свойству условно обратное отображение n^- является проекцией X в Y и отображение n является условно обратным для отображения n^-. Свойство доказано. $\rhd$

Следующее свойство существенным образом дополняет отмеченные ранее вложения (1).

Свойство 3.7 *Если вполне изотонное отображение $m : X \to Y$ является строго изотонным, то имеют место вложения:*

$$\mathrm{Dom}\, m \subseteq \mathrm{Im}\, m^- \subseteq X, \quad \mathrm{Dom}\, m^- \subseteq \mathrm{Im}\, m \subseteq Y.$$

$\lhd$ Предположим, что проекция $m : X \to Y$ является строго изотонной и $x \in \mathrm{Dom}\, m$. Пусть $y := m(x)$. В силу (1) $y \in \mathrm{Dom}\, m^-$. Если $x \neq m^-(y)$, то по определению условно обратного отображения $x < m^-(y)$ и $y := m(x) < m \circ m^-(y)$. При этом строгое неравенство $y < m \circ m^-(y)$ противоречит свойству 3.4. Следовательно, $x = m^-(y)$ и $\mathrm{Dom}\, m \subseteq \mathrm{Im}\, m^-$. С другой стороны, пусть $y \in \mathrm{Dom}\, m^-$ и $x := m^-(y) \in \mathrm{Im}\, m^- \subseteq \mathrm{Dom}\, m$. Если $y \neq m(x)$, то по свойству 3.6 $m(x) < y$ и $m^- \circ m(x) < m^-(y) =: x$. Неравенство $m^- \circ m(x) < x$ противоречит свойству 3.4. Следовательно, $y = m(x)$ и $\mathrm{Dom}\, m^- \subseteq \mathrm{Im}\, m$. Свойство доказано. $\rhd$

3.3. Вполне изотонные неравенства. Пусть $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство отображений $m_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$. Областью определения семейства отображений $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ называем пересечение

$$\mathrm{Dom}\{m_\lambda :\ \lambda \in \Lambda\} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Dom}\, m_\lambda.$$

Область определения декартова произведения m_Λ совпадает с декартовым произведением $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Dom}\, m_\lambda$. Область определения декартовой степени m^Λ совпадает с декартовой степенью $(\mathrm{Dom}\, m)^\Lambda$.

Рассмотрим произвольные отображения $m : X \to Y$ и $n : Z \to T$. Говорим, что имеет место функциональное равенство $m = n$, если $m(x) = n(x)$ для любого $x \in \mathrm{Dom}\{m, n\}$. Говорим, что на множестве A имеет место функциональное равенство $m = n$ (отображения m и n совпадают на множестве A), если $A \subseteq \mathrm{Dom}\{m, n\}$ и $m(x) = n(x)$ для любого $x \in A$.

Пусть X, Y, Z и T — частично упорядоченные множества. Говорим, что имеет место функциональное неравенство $m \leqslant n$, если $m(x) \leqslant n(x)$ для любого $x \in \mathrm{Dom}\{m, n\}$. Говорим, что на множестве A имеет место функциональное неравенство $m \leqslant n$, если $A \subseteq \mathrm{Dom}\{m, n\}$ и $m(x) \leqslant n(x)$ для любого $x \in A$.

В дальнейших построениях существенную роль играют функциональные неравенства вида $m \leqslant n$, где $m : X \to Y$ и $n : X \to Y$ — проекции или инъекции одновременно. Такие функциональные неравенства мы называем *вполне изотонными неравенствами*. Рассмотрим ключевые свойства этих неравенств.

Свойство 3.8. *Пусть m и n — проекции. Неравенство $m(x) \leqslant n(x)$ выполняется для любых $x \in \mathrm{Dom}\, n$ тогда и только тогда, когда неравенство $n^-(y) \leqslant m^-(y)$ выполняется для любых $y \in \mathrm{Dom}\, n^-$.*

$\lhd$ Предположим, что для любого $x \in \mathrm{Dom}\, n$ выполняется неравенство $m(x) \leqslant n(x)$. Пусть $y \in \mathrm{Dom}\, n^-$. Тогда $n^-(y) \in \mathrm{Im}\, n^- \subseteq \mathrm{Dom}\, n$ и $m \circ n^-(y) \leqslant n \circ n^-(y)$. По свойству 3.1 имеем $m \circ n^-(y) \leqslant y$. Из этого неравенства вытекает, что y — частичная мажоранта проекции m. По свойству 3.5 $y \in \mathrm{Dom}\, m^-$ и $m^- \circ m \circ n^-(y) \leqslant m^-(y)$. При этом по свойству 3.2 $n^-(y) \leqslant m^- \circ m \circ n^-(y)$, значит, $n^-(y) \leqslant m^-(y)$.

С другой стороны, предположим, что $n^-(y) \leqslant m^-(y)$ для любого $y \in \mathrm{Dom}\, n^-$. Пусть $x \in \mathrm{Dom}\, n$. Тогда $n(x) \in \mathrm{Im}\, n \subseteq \mathrm{Dom}\, n^-$ и $n^- \circ n(x) \leqslant m^- \circ n(x)$. По свойству 3.2 имеем $x \leqslant m^- \circ n(x)$. Из этого неравенства вытекает, что x — частичная миноранта инъекции m^-. По свойству 3.5 $x \in \mathrm{Dom}\, m$ и $m(x) \leqslant m \circ m^- \circ n(x)$. При этом по свойству 3.1 $m(x) \leqslant n(x)$. Свойство доказано. $\rhd$

Свойство 3.9. *Пусть m и n — инъекции. Неравенство $m(x) \leqslant n(x)$ выполняется для любых $x \in \operatorname{Dom} m$ тогда и только тогда, когда неравенство $n^-(y) \leqslant m^-(y)$ выполняется для любых $y \in \operatorname{Dom} m^-$.*

$\lhd$ Предположим, что для любого $x \in \operatorname{Dom} m$ выполняется неравенство $m(x) \leqslant n(x)$. Пусть $y \in \operatorname{Dom} m^-$. Тогда $m^-(y) \in \operatorname{Im} m^- \subseteq \operatorname{Dom} m$ и $m \circ m^-(y) \leqslant n \circ m^-(y)$. По свойству 3.1 имеем $y \leqslant n \circ m^-(y)$. Из этого неравенства вытекает, что y — частичная миноранта инъекции n. По свойству 3.5 $y \in \operatorname{Dom} n^-$ и $n^-(y) \leqslant n^- \circ n \circ m^-(y)$. Значит, по свойству 3.2 имеем $n^-(y) \leqslant m^-(y)$.

С другой стороны, предположим, что $n^-(y) \leqslant m^-(y)$ для любого $y \in \operatorname{Dom} m^-$. Пусть $x \in \operatorname{Dom} m$. Тогда $m(x) \in \operatorname{Im} m \subseteq \operatorname{Dom} m^-$ и $n^- \circ m(x) \leqslant m^- \circ m(x)$. По свойству 3.2 имеем $n^- \circ m(x) \leqslant x$. Из этого неравенства вытекает, что x — частичная мажоранта проекции n^-. По свойству 3.5 $x \in \operatorname{Dom} n$ и $n \circ n^- \circ m(x) \leqslant n(x)$. Значит, по свойству 3.1 $m(x) \leqslant n(x)$. Свойство доказано. $\rhd$

Свойства 3.8 и 3.9 приводят к необходимости рассмотрения двух параллельных ситуаций:

- m, n — проекции и $\operatorname{Dom} n \subseteq \operatorname{Dom} m$;
- m, n — инъекции и $\operatorname{Dom} m \subseteq \operatorname{Dom} n$.

Объединим эти ситуации в используемой нами терминологии. Для этого дадим следующее определение. Пусть m и n — вполне изотонные отображения. Говорим, что *выполняется вполне изотонное неравенство* $m \leqslant n$, если имеет место одна из указанных ситуаций и выполнено функциональное неравенство $m \leqslant n$, т. е. $m(x) \leqslant n(x)$ для любого $x \in \operatorname{Dom}\{m, n\}$.

Из свойств 3.8 и 3.9 вытекает справедливость следующего утверждения.

Свойство 3.10. *Вполне изотонное неравенство $m \leqslant n$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется вполне изотонное неравенство $n^- \leqslant m^-$.*

Отметим, что обе рассмотренные выше параллельные ситуации реализуются одновременно, если, например, проекции (соответственно инъекции) m и n являются инъективными отображениями, т. е. имеют место равенства $\operatorname{Dom} m = \operatorname{Dom} n = X$.

4. Дуальные схемы

4.1. Композиции вполне изотонных отображений. Продолжим рассмотрение свойств вполне изотонных отображений. Пусть X, Y и Z — частично упорядоченные множества. Композиция $n \circ m$ отображений $m : X \to Y$ и $n : Y \to Z$ определяется как отображение $X \to Z \mid x \to n(m(x))$ с областью определения

$$\operatorname{Dom}(n \circ m) := \{x \in \operatorname{Dom} m :\, m(x) \in \operatorname{Dom} n\}.$$

При рассмотрении произвольной композиции $n \circ m$ всегда предполагаем, что выполнено условие ее существования $\operatorname{Im} m \cap \operatorname{Dom} n \neq \varnothing$. Справедливо следующее утверждение.

Свойство 4.1. *Если отображения $m : X \to Y$ и $n : Y \to Z$ являются проекциями (соответственно инъекциями), то композиция $n \circ m$ является проекцией (соответственно инъекцией) и ее условно обратное отображение совпадает с композицией $m^- \circ n^-$.*

$\lhd$ Предположим, что отображения m и n являются проекциями. По свойству 3.3 отображения m и n и их условно обратные отображения m^- и n^- являются изотонными, значит, отображения $n \circ m$ и $m^- \circ n^-$ тоже являются изотонными. Осталось убедиться, что отображение $n \circ m$ является проекцией из X в Z и его условно обратное отображение $(n \circ m)^-$ совпадает с отображением $m^- \circ n^-$. По свойству 3.5 для этого достаточно показать, что множество $\operatorname{Dom} n \circ m$ является прямым порядковым идеалом и изотонное отображение $m^- \circ n^-$ удовлетворяет условиям:

1) $\operatorname{Dom}(m^- \circ n^-)$ совпадает с множеством всех частичных мажорант отображения $n \circ m$;

2) $n \circ m \circ m^- \circ n^-(z) \leqslant z$ для любого $z \in \operatorname{Dom}(m^- \circ n^-)$;

3) $x \leqslant m^- \circ n^- \circ n \circ m(x)$ для любого $x \in \operatorname{Dom}(n \circ m)$.

Прежде всего, пусть $y \in \operatorname{Dom} n \circ m$ и $y' \leqslant y$. По определению композиции $y \in \operatorname{Dom} m$ и $m(y) \in \operatorname{Dom} n$. Значит, $y' \in \operatorname{Dom} m$ и $m(y') \leqslant m(y)$, т. е. $m(y') \in \operatorname{Dom} n$. Это означает, что $y' \in \operatorname{Dom} n \circ m$, т. е. множество $\operatorname{Dom} n \circ m$ является прямым порядковым идеалом.

Проверим выполнимость условия 1). Пусть $\operatorname{Dom}(n \circ m)^-$ — множество всех частичных мажорант отображения $n \circ m$ и $z \in \operatorname{Dom}(n \circ m)^-$. Значит, множество $X(n \circ m \leqslant z)$ не является пустым. Выберем произвольный элемент x из этого множества. Тогда по определению композиции $m(x) \in \operatorname{Dom} n$ и $n \circ m(x) \leqslant z$, значит, $z \in \operatorname{Dom} n^-$. Отображения m и n являются проекциями, значит, по свойству 3.2 выполняется неравенство $m(x) \leqslant n^- \circ n \circ m(x) \leqslant n^-(z)$, следовательно, $n^-(z) \in \operatorname{Dom} m^-$. Отсюда следует, что $z \in \operatorname{Dom}(m^- \circ n^-)$. Следовательно, $\operatorname{Dom}(n \circ m)^- \subseteq \operatorname{Dom}(m^- \circ n^-)$. С другой стороны, если $z \in \operatorname{Dom}(m^- \circ n^-)$, то по определению композиции $z \in \operatorname{Dom} n^-$ и $n^-(z) \in \operatorname{Dom} m^-$. Из включения $n^-(z) \in \operatorname{Dom} m^-$ вытекает, что при некотором $x \in \operatorname{Dom} m$ выполняется неравенство $m(x) \leqslant n^-(z)$. Значит, по свойству 3.1 из включения $z \in \operatorname{Dom} n^-$ следует выполнение неравенств $n \circ m(x) \leqslant n \circ n^-(z) \leqslant z$. Отсюда вытекает, что $z \in \operatorname{Dom}(n \circ m)^-$. Следовательно, $\operatorname{Dom}(m^- \circ n^-) \subseteq \operatorname{Dom}(n \circ m)^-$, т. е. $\operatorname{Dom}(m^- \circ n^-) = \operatorname{Dom}(n \circ m)^-$.

Покажем, что выполняется условие 2). Действительно, предположим, что $z \in \operatorname{Dom}(m^- \circ n^-)$. Тогда $m^- \circ n^-(z) \in \operatorname{Im} m^- \subseteq \operatorname{Dom} m$ и по определению композиции $n^-(z) \in \operatorname{Dom} m^-$. Так как отображение m является проекцией, то по свойству 3.1 выполняется неравенство $m \circ m^- \circ n^-(z) \leqslant n^-(z)$. Аналогично, так как отображение n является проекцией, то выполняются неравенства $n \circ m \circ m^- \circ n^-(z) \leqslant n \circ n^-(z) \leqslant z$.

Далее покажем, что выполняется условие 3). Действительно, пусть $x \in \operatorname{Dom}(n \circ m)$. Тогда $m(x) \in \operatorname{Dom} n$ и $n \circ m(x) \in \operatorname{Im} n \subseteq \operatorname{Dom} n^-$. Так как отображение n является проекцией, то по свойству 3.2 выполняется неравенство $m(x) \leqslant n^- \circ n \circ m(x)$. Аналогично, так как отображение m является проекцией, то по свойству 3.2 выполняются неравенства $x \leqslant m^- \circ m(x) \leqslant m^- \circ n^- \circ n \circ m(x)$. Таким образом, свойство доказано. $\triangleright$

4.2. Полукоммутативные диаграммы. Пусть X, Y и Z — частично упорядоченные множества. Предположим, что $k : X \to Y$, $l : Z \to Y$ и $m : X \to Z$ — произвольные проекции (соответственно инъекции); k^-, l^-, m^- — их условно обратные отображения. Рассмотрим диаграммы

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr, "l"] & \\ X \arrow[ur, "m"] \arrow[rr, "k"'] & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "k^-"] \arrow[dr, "l^-"'] & & X \\ & Z \arrow[ur, "m^-"'] & \end{tikzcd} . \tag{2}$$

Коммутативность первой из этих диаграмм означает выполнение функционального равенства $k = l \circ m$, а коммутативность второй из этих диаграмм означает выполнение функционального равенства $m^- \circ l^- = k^-$.

Отмечаем, что первая из диаграмм (2) коммутативна тогда и только тогда, когда вторая из этих диаграмм коммутативна. Действительно, предположим, что первая из диаграмм (2) коммутативна, т. е. $k = l \circ m$. По свойству 4.1 условно обратные отображение k^-, l^- и m^- являются инъекциями (соответственно проекциями). При этом инъекция k^- совпадает с композицией $m^- \circ l^-$, т. е. имеет место функциональное равенство

$m^- \circ l^- = k^-$, значит, вторая из диаграмм (2) тоже коммутативна. Далее предположим, что вторая из диаграмм (2) коммутативна. По свойству 4.1 $(k^-)^- = (l^-)^- \circ (m^-)^-$, где $(k^-)^-$, $(l^-)^-$ и $(m^-)^-$ — вторые условно обратные отображения. По свойству 3.6 отображения $(k^-)^-$, $(l^-)^-$ и $(m^-)^-$ совпадают с отображениями k, l и m соответственно. Значит, $k = l \circ m$. Следовательно, первая диаграмма тоже коммутативна.

Пусть X, Y, Z и T — частично упорядоченные множества. Рассмотрим диаграммы

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "m"] & Z \arrow[d, "l"] \\ X \arrow[u, "n"] \arrow[r, "k"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "k^-"] \arrow[d, "l^-"'] & X \\ Z \arrow[r, "m^-"'] & T \arrow[u, "n^-"'] \end{tikzcd}, \tag{3}$$

где k, l, m и n — проекции (соответственно инъекции). Вторая из этих диаграмм получена из первой диаграммы заменой вполне изотонных отображений k, l, m и n их условно обратными отображениями. Коммутативность этих диаграмм по определению означает выполнение функциональных равенств $k = l \circ m \circ n$ и $n^- \circ m^- \circ l^- = k^-$ соответственно.

Убедимся, что первая из диаграмм (3) коммутативна тогда и только тогда, когда вторая из этих диаграмм коммутативна. Действительно, предположим, что первая из диаграмм (3) коммутативна, т. е. $k = l \circ m \circ n$. По свойству 4.1 условно обратное отображение $(m \circ n)^-$ является инъекцией (соответственно проекцией) и совпадает с композицией $n^- \circ m^-$. Условно обратное отображение $(l \circ (m \circ n))^-$ тоже является инъекцией (соответственно проекцией) и совпадает с композицией $(m \circ n)^- \circ l^-$. Значит, условно обратное отображение k^- является инъекцией (соответственно проекцией) и совпадает с композицией $n^- \circ m^- \circ l^-$. Следовательно, вторая из диаграмм (3) тоже коммутативна. Далее предположим, что вторая из диаграмм (3) коммутативна. По уже доказанному имеет место функциональное равенство $(k^-)^- = (l^-)^- \circ (m^-)^- \circ (n^-)^-$, значит, по свойству 3.6 имеет место функциональное равенство $k = l \circ m \circ n$. Следовательно, первая диаграмма тоже коммутативна.

Осталось рассмотреть диаграммы

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "m"] & Z \\ X \arrow[u, "n"] \arrow[r, "k"'] & Y \arrow[u, "l"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "k^-"] & X \\ Z \arrow[u, "l^-"] \arrow[r, "m^-"'] & T \arrow[u, "n^-"'] \end{tikzcd}, \tag{4}$$

где k, l, m и n — проекции (соответственно инъекции). Вторая из этих диаграмм, как и прежде, получена из первой диаграммы заменой вполне изотонных отображений k, l, m и n их условно обратными отображениями. Коммутативность этих диаграмм по определению означает выполнение функциональных равенств $l \circ k = m \circ n$ и $n^- \circ m^- = k^- \circ l^-$ соответственно. Сейчас читатель сам может легко убедиться, что первая из диаграмм (4) коммутативна тогда и только тогда, когда вторая из этих диаграмм коммутативна.

Предположим, что k, l, и m — проекции или инъекции одновременно. Говорим, что первая (соответственно вторая) из диаграмм (2) *полукоммутативна*, если имеет место вполне изотонное неравенство $k \leqslant l \circ m$ (соответственно $m^- \circ l^- \leqslant k^-$).

Из свойства 3.10 вытекает, что первая из диаграмм (2) полукоммутативна тогда и только тогда, когда вторая из этих диаграмм полукоммутативна. Действительно, полукоммутативность первой из диаграмм (2) означает, что выполнено вполне изотонное неравенство $k \leqslant l \circ m$. По свойству 3.10 это условие равносильно выполнимости вполне изотонного неравенства $(l\circ m)^- \leqslant k^-$ или выполнимости вполне изотонного неравенства $m^-\circ l^- \leqslant k^-$, т. е. равносильно полукоммутативности второй из диаграмм (2).

Далее предположим, что отображения k, l, m и n — проекции или инъекции одновременно. Говорим, что первая (соответственно вторая) из диаграмм (3) *полукоммутативна*, если имеет место вполне изотонное неравенство $k \leqslant l\circ m\circ n$ (соответственно $n^-\circ m^-\circ l^- \leqslant k^-$). Легко убедиться, что первая из диаграмм (3) полукоммутативна тогда и только тогда, когда вторая из этих диаграмм полукоммутативна. Действительно, полукоммутативность первой из диаграмм (3) означает, что выполнено вполне изотонное неравенство $k \leqslant l\circ m\circ n$. По свойству 3.10 это условие равносильно выполнимости вполне изотонного неравенства $(l\circ m\circ n)^- \leqslant k^-$ или выполнимости вполне изотонного неравенства $n^-\circ m^-\circ l^- \leqslant k^-$, т. е. равносильно полукоммутативности второй из диаграмм (3).

Наконец, первая (соответственно вторая) из диаграмм (4) *полукоммутативна*, если имеет место вполне изотонное неравенство $l\circ k \leqslant m\circ n$ (соответственно $n^-\circ m^- \leqslant k^-\circ l^-$). При этом первая из диаграмм (4) полукоммутативна тогда и только тогда, когда вторая из этих диаграмм полукоммутативна.

4.3. Дуальные схемы. Пусть (X,Y) и (Z,T) — произвольные упорядоченные пары частично упорядоченных множеств. Выберем произвольные вполне изотонные отображения $k : X\to Z$ и $l : Y\to T$. Упорядоченную пару $((X,Y),(Z,T))$ называем *дуальной бипарой* и обозначаем символом $\langle(X,Y),(Z,T)\rangle$, а упорядоченную пару (k,l) при этом называем *дуальной парой* и обозначаем символом $\langle k,l\rangle$.

Рассмотрим конкретную дуальную бипару $\langle(X,Y),(Z,T)\rangle$, (обратную) дуальную бипару $\langle(Y,X),(T,Z)\rangle$ и диаграммы

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "n"] & T \\ X \arrow[u, "k"] \arrow[r, "m"'] & Y \arrow[u, "l"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "m^-"] & X \\ T \arrow[u, "l^-"] \arrow[r, "n^-"'] & Z \arrow[u, "k^-"'] \end{tikzcd}. \tag{5}$$

Здесь k, l, m и n — проекции или инъекции одновременно. Если первая из диаграмм (5) является полукоммутативной, то вполне изотонное отображение m называем *дуальным* к вполне изотонному отображению n относительно дуальной пары $\langle k,l\rangle$. По определению полукоммутативных диаграмм отображение m является дуальным к отображению n, если выполняется вполне изотонное неравенство $l\circ m \leqslant n\circ k$.

Далее рассмотрим диаграммы

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "n"] \arrow[d, "k^-"'] & T \arrow[d, "l^-"] \\ X \arrow[r, "m"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "m^-"] \arrow[d, "l"'] & X \arrow[d, "k"] \\ T \arrow[r, "n^-"'] & Z \end{tikzcd}. \tag{6}$$

Здесь k^-, l^-, m и n — проекции или инъекции одновременно. Если первая из диаграмм (6) является полукоммутативной, то вполне изотонное отображение m называем *дуальным* к вполне изотонному отображению n относительно дуальной пары $\langle k^-,l^-\rangle$. По определению полукоммутативных диаграмм отображение m является дуальным к отображению n, если выполняется вполне изотонное неравенство $m\circ k^- \leqslant l^-\circ n$.

Затем рассмотрим диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "n"] & T \arrow[d, "l^-"] \\
X \arrow[u, "k"] \arrow[r, "m"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "m^-"] \arrow[d, "l"'] & X \\
T \arrow[r, "n^-"'] & Z \arrow[u, "k^-"']
\end{tikzcd}
. \tag{7}
$$

Здесь k, l^-, m и n — проекции или инъекции одновременно. Если первая из диаграмм (7) является полукоммутативной, то вполне изотонное отображение m называем *дуальным* к отображению n относительно дуальной пары $\langle k, l^- \rangle$. По определению полукоммутативных диаграмм отображение m является дуальным к отображению n, если выполняется вполне изотонное неравенство $m \leqslant l^- \circ n \circ k$.

Наконец, рассмотрим диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "l"'] & Y \\
Z \arrow[r, "n"'] & T \arrow[u, "k^-"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "n^-"] & Z \arrow[d, "l^-"] \\
Y \arrow[u, "k"] \arrow[r, "m^-"'] & X
\end{tikzcd}
. \tag{8}
$$

Здесь k^-, l, m и n — проекции или инъекции одновременно. Если первая из диаграмм (8) является полукоммутативной, то вполне изотонное отображение m называем *дуальным* к отображению n относительно дуальной пары $\langle l, k^- \rangle$. По определению полукоммутативных диаграмм отображение m является дуальным к отображению n, если выполняется вполне изотонное неравенство $k \circ n \circ l^- \leqslant m$.

По свойствам полукоммутативных диаграмм полукоммутативность первой из диаграмм (5) равносильна полукоммутативности второй из этих диаграмм, которая означает выполнение вполне изотонного неравенства $k^- \circ n^- \leqslant m^- \circ l^-$. Аналогичное утверждение справедливо и по отношению к диаграммам (6), (7) и (8). Полукоммутативность второй из диаграмм (6) (соответственно (7) или (8)) означает выполнение вполне изотонного неравенства $n^- \circ l \leqslant k \circ m^-$ (соответственно $k^- \circ n^- \circ l \leqslant m^-$ или $m^- \leqslant l^- \circ n^- \circ k$). Это означает, что справедливо следующее утверждение.

Свойство 4.2. *Вполне изотонное отображение m является дуальным к вполне изотонному отображению n тогда и только тогда, когда условно обратное отображение m^- является дуальным к условно обратному отображению n^-.*

Полукоммутативные диаграммы (5), (6), (7) и (8) принято называть *дуальными схемами*. Каждая дуальная схема включает две полукоммутативные диаграммы, по любой из которых другая восстанавливается однозначно. Замечательным является то, что все четыре дуальные схемы объединяются одним построением, лежащим в основе доказательства односторонних теорем двойственности. При этом каждая из отмеченных дуальных схем играет в этом построении свою существенную роль и не может быть заменена другой без потери общности проводимых рассуждений.

5. Дескрипторы

5.1. Определение дескрипторов. Пусть Λ — непустое множество, X^Λ и Y^Λ — декартовы степени частично упорядоченных множеств X и Y соответственно. Инъекцию $u : X^\Lambda \to X$ называем *дескриптором* (на множестве X), если для любого $x \in X$, удовлетворяющего условию $x^\Lambda := (x : \lambda \in \Lambda) \in \operatorname{Dom} u$, выполняется неравенство

$$x \leqslant u\bigl(x^\Lambda\bigr).$$

Дескриптор u называем *экстериоризатором* в точке $x \in X$, если выполняется равенство $x = u(x^\Lambda)$. Проекцию $v : Y^\Lambda \to Y$ называем *дескриптором* (на множестве Y), если для любого $y \in Y$, удовлетворяющего условию $y^\Lambda := (y : \lambda \in \Lambda) \in \mathrm{Dom}\, v$, выполняется неравенство

$$v\big(y^\Lambda\big) \leqslant x.$$

Дескриптор v называем *интериоризатором* в точке $y \in Y$, если выполняется равенство $v(y^\Lambda) = y$.

Рассмотрим пример простейшего экстериоризатора и пример простейшего интериоризатора.

Пример 5.1. Пусть Λ и A — непустые множества, X — совокупность всех непустых подмножеств множества A (частично упорядоченная по вложению $\subseteq$), X^Λ — декартова степень частично упорядоченного множества X. Изотонное отображение

$$u : X^\Lambda \to X \,\big|\, x_\Lambda := (x_\lambda : \lambda \in \Lambda) \mapsto \bigcap_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$$

является инъекцией из множества X^Λ на множество X. Действительно, область определения $\mathrm{Dom}\, u$ отображения u совпадает с совокупностью всех элементов $x_\Lambda := (x_\lambda : \lambda \in \Lambda) \in X^\Lambda$, для которых пересечение $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ не является пустым. Эта совокупность является обратным порядковым идеалом. При этом для любого $y \in X$ множество $X^\Lambda(y \leqslant u(x_\Lambda))$ обладает наименьшим элементом. Этим элементом является элемент $y^\Lambda := (y : \lambda \in \Lambda) \in X^\Lambda$. Осталось заметить, что $x = u(x^\Lambda)$ для любого $x \in X$. Это означает, что инъекция u является дескриптором (на множестве X) и экстериоризатором в любой точке $x \in X$.

Пример 5.2. Пусть Λ и B — непустые множества, Y — совокупность всех непустых подмножеств множества B (частично упорядоченная по вложению $\subseteq$), Y^Λ — декартова степень частично упорядоченного множества Y. Изотонное отображение

$$v : Y^\Lambda \mapsto Y \,\big|\, y_\Lambda := (y_\lambda : \lambda \in \Lambda) \mapsto \bigcup_{\lambda \in \Lambda} y_\lambda$$

является проекцией множества Y^Λ на множество Y. Действительно, область определения $\mathrm{Dom}\, v$ отображения v совпадает с Y^Λ и является прямым порядковым идеалом. При этом для любого $x \in Y$ множество $Y^\Lambda(v(y_\Lambda) \leqslant x)$ обладает наибольшим элементом. Этим элементом является элемент $x^\Lambda := (x : \lambda \in \Lambda) \in Y^\Lambda$. При этом $v(y^\Lambda) = y$ для любого $y \in Y$. Это означает, что проекция v является дескриптором (на множестве Y) и интериоризатором в любой точке $y \in Y$.

5.2. Дуальные дескрипторы. Понятие дуального дескриптора требует обращения к дуальным схемам (7) и (8). Если Λ — множество и k — проекция (соответственно инъекция), то декартова степень $\mathbf{k} := k^\Lambda$ тоже является проекцией (соответственно инъекцией). При этом условно обратное отображение $\mathbf{k}^-$ совпадает с декартовой степенью условно обратного отображения k^-, т. е.

$$\mathbf{k}^- := \big(k^\Lambda\big)^- = \big(k^-\big)^\Lambda.$$

Пусть X и Y — частично упорядоченные множества, $\overline{Y}$ — частично упорядоченное множество Y с обратным отношением порядка. Рассмотрим дуальную бипару

$\langle (X^\Lambda, X), (\overline{Y}^\Lambda, \overline{Y})\rangle$ и две дуальные схемы

$$\begin{array}{ccc} X^\Lambda & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle \mathbf{l}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle k^-} \\ \overline{Y}^\Lambda & \xrightarrow[\bar v]{} & \overline{Y} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \overline{Y}^\Lambda & \xrightarrow{\bar v} & \overline{Y} \\ {\scriptstyle \mathbf{k}^-}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle l} \\ X^\Lambda & \xrightarrow[u]{} & X \end{array}, \tag{9}$$

где u, l и $\mathbf{l} := l^\Lambda$ — инъекции, а v, k и $\mathbf{k}$ — проекции. Символом $\bar v$ обозначаем инъекцию $\overline{Y}^\Lambda \to \overline{Y} \mid y \mapsto v(y)$. Полагаем, что u и v — дескрипторы.

Говорим, что дескриптор u является *дуальным* к дескриптору v относительно дуальной пары $\langle \mathbf{l}, k^-\rangle$, если инъекция u является дуальной к инъекции $\bar v$ относительно дуальной пары $\langle \mathbf{l}, k^-\rangle$. Это условие означает, что первая из диаграмм (9) является полукоммутативной, т. е. выполняется вполне изотонное неравенство $k^- \circ \bar v \circ \mathbf{l} \leqslant u$.

Говорим, что дескриптор v является *дуальным* к дескриптору u относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}^-, l\rangle$, если инъекция $\bar v$ является дуальной к инъекции u относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}^-, l\rangle$. Это условие означает, что вторая из диаграмм (9) является полукоммутативной, т. е. выполняется вполне изотонное неравенство $l \circ u \circ \mathbf{k}^- \leqslant \bar v$.

Теорема 5.1. *Если дескриптор u является дуальным к дескриптору v и является экстериоризатором в некоторой точке $x \in X$ $(k \leqslant l)$, то дескриптор v является интериоризатором в любой точке $y \in \overline{Y}$, удовлетворяющей условиям $k(x) \leqslant y \leqslant l(x)$ и $v(y^\Lambda) \in \operatorname{Im} k$.*

Если дескриптор v является дуальным к дескриптору u и является интериоризатором в некоторой точке $y \in \overline{Y}$ $(l^- \leqslant k^-)$, то дескриптор u является экстериоризатором в любой точке $x \in X$, удовлетворяющей условиям $l^-(y) \leqslant x \leqslant k^-(y)$ и $u(x^\Lambda) \in \operatorname{Im} l^-$.

$\lhd$ Во-первых, пусть дескриптор u является дуальным к дескриптору v. Значит, имеет место вполне изотонное неравенство $k^- \circ \bar v \circ \mathbf{l} \leqslant u$, т. е. для любого $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} k^- \circ \bar v \circ \mathbf{l}$ выполняется неравенство $k^- \circ \bar v \circ \mathbf{l}(x_\Lambda) \leqslant u(x_\Lambda)$. Предположим, что u — экстериоризатор в некоторой точке $x \in X$ $(k \leqslant l)$, значит, $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} u$ и $x = u(x^\Lambda)$. Выберем произвольную точку $y \in \overline{Y}$, которая удовлетворяет условиям $k(x) \leqslant y \leqslant l(x)$ и $v(y^\Lambda) \in \operatorname{Im} k$. Так как $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} \bar v$ и $y^\Lambda \leqslant \mathbf{l}(x^\Lambda)$, то по определению инъекции $\mathbf{l}(x^\Lambda) \in \operatorname{Dom} \bar v$ и выполняется неравенство $\bar v(y^\Lambda) \leqslant \bar v \circ \mathbf{l}(x^\Lambda)$. Так как $v(y^\Lambda) \in \operatorname{Im} k \subseteq \operatorname{Dom} k^-$ и k^- — инъекция, то $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} k^- \circ \bar v \circ \mathbf{l}$ и

$$k^- \circ \bar v\big(y^\Lambda\big) \leqslant k^- \circ \bar v \circ \mathbf{l}\big(x^\Lambda\big) \leqslant u\big(x^\Lambda\big) = x.$$

По свойству 3.4 из условия $v(y^\Lambda) \in \operatorname{Im} k$ вытекает, что

$$\bar v\big(y^\Lambda\big) = k \circ k^- \circ \bar v\big(y^\Lambda\big) \leqslant k(x) \leqslant y.$$

Это означает, что $y \leqslant v(y^\Lambda)$ в множестве Y. По определению дескриптора v выполняется обратное неравенство $v(y^\Lambda) \leqslant y$, значит, $v(y^\Lambda) = y$, т. е. дескриптор v является интериоризатором в точке y.

Во-вторых, пусть дескриптор v является дуальным к дескриптору u. Значит, имеет место вполне изотонное неравенство $l \circ u \circ \mathbf{k}^- \leqslant \bar v$, т. е. для любого $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} l \circ u \circ \mathbf{k}^-$ выполняется неравенство $l \circ u \circ \mathbf{k}^-(y_\Lambda) \leqslant \bar v(y_\Lambda)$. Предположим, что v — интериоризатор в некоторой точке $y \in \overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$, значит, $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} v$ и $v(y^\Lambda) = y$. Выберем произвольную точку $x \in X$, которая удовлетворяет условиям $l^-(y) \leqslant x \leqslant k^-(y)$ и $u(x^\Lambda) \in \operatorname{Im} l^-$. Так как $x^\Lambda \leqslant \mathbf{k}^-(y^\Lambda)$ и $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} u$, то по определению инъекции $\mathbf{k}^-(y^\Lambda) \in \operatorname{Dom} u$ и выполняется неравенство $u(x^\Lambda) \leqslant u \circ \mathbf{k}^-(y^\Lambda)$. Так как $u(x^\Lambda) \in \operatorname{Im} l^- \subseteq \operatorname{Dom} l$ и l — инъекция, то $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} l \circ u \circ \mathbf{k}^-$ и

$$l \circ u\big(x^\Lambda\big) \leqslant l \circ u \circ \mathbf{k}^-\big(y^\Lambda\big) \leqslant \bar{v}\big(y^\Lambda\big) = y.$$

По свойству 3.4 из условия $u(x^\Lambda) \in \operatorname{Im} l^-$ вытекает, что

$$u\big(x^\Lambda\big) = l^- \circ l \circ u\big(x^\Lambda\big) \leqslant l^- \circ \bar{v}\big(y^\Lambda\big) = l^-(y) \leqslant x.$$

Это означает, что $u(x^\Lambda) \leqslant x$. По определению дескриптора u выполняется обратное неравенство $x \leqslant u(x^\Lambda)$, значит, $x = u(x^\Lambda)$, т. е. дескриптор u является экстериоризатором в точке x. Таким образом, теорема доказана. $\rhd$

Из теоремы 5.1 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 5.2. *Если дескриптор u является дуальным к дескриптору v и является экстериоризатором в любой точке множества $X(k \leqslant l)$, то дескриптор v является интериоризатором в любой точке y множества $\overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$, удовлетворяющей условию $v(y^\Lambda) \in \operatorname{Im} k$.*

Если дескриптор v является дуальным к дескриптору u и является интериоризатором в любой точке множества $\overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$, то дескриптор u является экстериоризатором в любой точке x множества $X(k \leqslant l)$, удовлетворяющей условию $u(x^\Lambda) \in \operatorname{Im} l^-$.

$\lhd$ Во-первых, предположим, что дескриптор u является дуальным к дескриптору v и является экстериоризатором в любой точке множества $X(k \leqslant l)$. Выберем произвольную точку $y \in \overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$, удовлетворяющую условию $v(y^\Lambda) \in \operatorname{Im} k$, и произвольную точку x, удовлетворяющую неравенствам $l^-(y) \leqslant x \leqslant k^-(y)$. По свойствам вполне изотонных отображений $x \in \operatorname{Dom}\{k, l\}$ и

$$k(x) \leqslant k \circ k^-(y) \leqslant y \leqslant l \circ l^-(y) \leqslant l(x).$$

При этом $x \in X(k \leqslant l)$, следовательно, по теореме 5.1 дескриптор v является интериоризатором в точке y.

Во-вторых, предположим, что дескриптор v является дуальным к дескриптору u и является интериоризатором в любой точке y из множества $\overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$. Выберем произвольную точку $x \in X(k \leqslant l)$, удовлетворяющую условию $u(x^\Lambda) \in \operatorname{Im} l^-$, и произвольную точку y, удовлетворяющую неравенствам $k(x) \leqslant y \leqslant l(x)$. По свойствам вполне изотонных отображений $y \in \operatorname{Dom}\{l^-, k^-\}$ и

$$l^-(y) \leqslant l^- \circ l(x) \leqslant x \leqslant k^- \circ k(x) \leqslant k^-(y).$$

При этом $y \in \overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$, следовательно, по теореме 5.1 дескриптор u является экстериоризатором в точке x. Теорема доказана. $\rhd$

6. Односторонние теоремы двойственности

6.1. Экстериоризация и интериоризация. Пусть X — частично упорядоченное множество, $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство частично упорядоченных множеств. Выберем произвольное семейство $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ инъекций $m_\lambda : X_\lambda \to X$ и произвольное семейство $\{n_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ проекций $n_\lambda : X \to X_\lambda$. Декартовы произведения $\mathbf{m} : X_\Lambda \to X^\Lambda$ и $\mathbf{n} : X^\Lambda \to X_\Lambda$ этих семейств являются инъекцией и проекцией соответственно. Если $u : X^\Lambda \to X$ — какая-либо инъекция, то равенство

$$x = u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big) \tag{10}$$

называем правилом *внешнего описания* (*экстериоризации*), если для любого $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} u$ выполняется неравенство $x_\Lambda \leqslant \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x_\Lambda)$. Если равенство (10) выполнено для какого-либо элемента $x \in X$ и дескриптор u при этом является экстериоризатором в точке x, то говорим, что элемент x допускает *внешнее описание* (*экстериоризацию*) по правилу (10). Отметим, что неравенство $x_\Lambda \leqslant \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x_\Lambda)$ будет выполнено для любого $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} u$, например, если проекция $\mathbf{n}$ совпадает с условно обратным отображением $\mathbf{m}^-$ и выполнены вложения $\operatorname{Im} \mathbf{m} \subseteq \operatorname{Dom} u \subseteq \operatorname{Dom} \mathbf{m}^-$.

Пусть Y — тоже частично упорядоченное множество, $\{Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство частично упорядоченных множеств. Выберем произвольное семейство $\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ проекций $p_\lambda : Y_\lambda \to Y$ и произвольное семейство $\{q_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ инъекций $q_\lambda : Y \to Y_\lambda$. Декартовы произведения $\mathbf{p} : Y_\Lambda \to Y^\Lambda$ и $\mathbf{q} : Y^\Lambda \to Y_\Lambda$ этих семейств являются проекцией и инъекцией соответственно. Если $v : Y^\Lambda \to Y$ — какая-либо проекция, то равенство

$$v \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{q}\big(y^\Lambda\big) = y \tag{11}$$

называем правилом *внутреннего описания* (*интериоризации*), если для любого $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} v$ выполняется неравенство $\mathbf{p} \circ \mathbf{q}(y_\Lambda) \leqslant y_\Lambda$. Если равенство (11) выполнено для какого-либо элемента $y \in Y$ и дескриптор v при этом является интериоризатором в точке y, то говорим, что элемент y допускает *внутреннее описание* (*интериоризацию*) по правилу (11). Отметим, что неравенство $\mathbf{p} \circ \mathbf{q}(y_\Lambda) \leqslant y_\Lambda$ будет выполнено для любого $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} v$, например, если инъекция $\mathbf{q}$ совпадает с условно обратным отображением $\mathbf{p}^-$ и $\operatorname{Im} \mathbf{p} \subseteq \operatorname{Dom} v \subseteq \operatorname{Dom} \mathbf{p}^-$.

6.2. Дуальные описания. Понятие дуального описания требует обращения к дуальным схемам (5) и (6). Пусть $\{h_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство вполне изотонных отображений $h_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$. Будем считать, что отображения $h_\lambda : X_\lambda \to \overline{Y}_\lambda$ являются инъекциями, значит, декартово произведение $\mathbf{h} : X_\Lambda \to \overline{Y}_\Lambda$ тоже является инъекцией Здесь символы $\overline{Y}_\lambda$ и $\overline{Y}_\Lambda$ обозначают частично упорядоченные множества Y_λ и Y_Λ, соответственно, с обратными порядками. Далее рассмотрим две дуальные бипары

$$\big\langle \big(X_\Lambda, X^\Lambda\big), \big(\overline{Y}_\Lambda, \overline{Y}^\Lambda\big)\big\rangle, \quad \big\langle \big(X^\Lambda, X_\Lambda\big), \big(\overline{Y}^\Lambda, \overline{Y}_\Lambda\big)\big\rangle$$

и две дуальные схемы

$$\begin{tikzcd} X_\Lambda \arrow[r, "\mathbf{m}"] \arrow[d, "\mathbf{h}"'] & X^\Lambda \arrow[d, "\mathbf{l}"] \\ \overline{Y}_\Lambda \arrow[r, "\bar{\mathbf{p}}"'] & \overline{Y}^\Lambda \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X^\Lambda \arrow[r, "\mathbf{n}"] & X_\Lambda \\ \overline{Y}^\Lambda \arrow[u, "\mathbf{l}^-"] \arrow[r, "\bar{\mathbf{q}}"'] & \overline{Y}_\Lambda \arrow[u, "\mathbf{h}^-"'] \end{tikzcd}. \tag{12}$$

Если дескриптор u является дуальным к дескриптору v относительно дуальной пары $\langle \mathbf{l}, k^- \rangle$ и диаграммы (12) полукоммутативны, то правило внешнего описания (10) называем *дуальным* к правилу внутреннего описания (11). Полукоммутативность первой из представленных диаграмм означает, что инъекция $\mathbf{m}$ является дуальной к инъекции

$$\bar{\mathbf{p}} : \overline{Y}_\Lambda \to \overline{Y}^\Lambda \,\Big|\, y_\Lambda \mapsto \mathbf{p}(y_\Lambda)$$

относительно дуальной пары $\langle \mathbf{h}, \mathbf{l} \rangle$, т. е. выполняется вполне изотонное неравенство $\bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{h} \leqslant \mathbf{l} \circ \mathbf{m}$. Полукоммутативность второй из диаграмм (12) означает, что проекция $\mathbf{n}$ является дуальной к проекции

$$\bar{\mathbf{q}} : \overline{Y}^\Lambda \to \overline{Y}_\Lambda \,\Big|\, y_\Lambda \mapsto \mathbf{q}(y_\Lambda)$$

относительно дуальной пары $\langle \mathbf{l}^-, \mathbf{h}^- \rangle$, т. е. выполняется вполне изотонное неравенство $\mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}} \leqslant \mathbf{n} \circ \mathbf{l}^-$.

Пусть $\{r_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — тоже произвольное семейство вполне изотонных отображений $r_\lambda : X_\lambda \to \overline{Y}_\lambda$. Будем считать, что отображения $r_\lambda : X_\lambda \to \overline{Y}_\lambda$ являются проекциями, значит, декартово произведение $\mathbf{r} : X_\Lambda \to \overline{Y}_\Lambda$ тоже является проекцией. Затем рассмотрим две дуальные бипары

$$\big\langle (X_\Lambda, X^\Lambda), (\overline{Y}_\Lambda, \overline{Y}^\Lambda) \big\rangle, \quad \big\langle (X^\Lambda, X_\Lambda), (\overline{Y}^\Lambda, \overline{Y}_\Lambda) \big\rangle$$

и две дуальные схемы

$$\begin{tikzcd} \overline{Y}_\Lambda \arrow[r, "\bar{\mathbf{p}}"] \arrow[d, "\mathbf{r}^-"'] & \overline{Y}^\Lambda \arrow[d, "\mathbf{k}^-"] \\ X_\Lambda \arrow[r, "\mathbf{m}"'] & X^\Lambda \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{Y}^\Lambda \arrow[r, "\bar{\mathbf{q}}"] & \overline{Y}_\Lambda \\ X^\Lambda \arrow[r, "\mathbf{n}"'] \arrow[u, "\mathbf{k}"] & X_\Lambda \arrow[u, "\mathbf{r}"'] \end{tikzcd} . \tag{13}$$

Если дескриптор v является дуальным к дескриптору u относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}^-, l \rangle$ и диаграммы (13) полукоммутативны, то правило внутреннего описания (11) называем *дуальным* к правилу внешнего описания (10). Полукоммутативность первой из диаграмм (13) означает, что инъекция $\bar{\mathbf{p}}$ является дуальной к инъекции $\mathbf{m}$ относительно дуальной пары $\langle \mathbf{r}^-, \mathbf{k}^- \rangle$, т. е. выполняется вполне изотонное неравенство $\mathbf{m} \circ \mathbf{r}^- \leqslant \mathbf{k}^- \circ \bar{\mathbf{p}}$. Полукоммутативность второй из диаграмм (13) означает, что проекция $\bar{\mathbf{q}}$ является дуальной к проекции $\mathbf{n}$ относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}, \mathbf{r} \rangle$, т. е. выполняется вполне изотонное неравенство $\mathbf{r} \circ \mathbf{n} \leqslant \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}$.

6.3. Односторонние теоремы двойственности. В этом разделе мы докажем основные теоремы, связанные с описанием односторонних двойственных переходов.

Теорема 6.1. *Пусть* $\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} k$. *Если правило внешнего описания* (10) *является дуальным к правилу внутреннего описания* (11) *и некоторый элемент* $x \in X(k \leqslant l)$ *допускает экстериоризацию по правилу* (10), *то любой элемент* $y \in \overline{Y}$, *удовлетворяющий неравенствам* $k(x) \leqslant y \leqslant l(x)$, *допускает интериоризацию по правилу* (11).

Пусть $\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Im} l^-$. *Если правило внутреннего описания* (11) *является дуальным к правилу внешнего описания* (10) *и некоторый элемент* $y \in \overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$ *допускает интериоризацию по правилу* (11), *то любой элемент* $x \in X$, *удовлетворяющий неравенствам* $l^-(y) \leqslant x \leqslant k^-(y)$, *допускает экстериоризацию по правилу* (10).

$\lhd$ Во-первых, предположим, что правило внешнего описания (10) является дуальным к правилу внутреннего описания (11), т. е. выполняются вполне изотонные неравенства

$$k^- \circ \bar{v} \circ \mathbf{l} \leqslant u, \quad \bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{h} \leqslant \mathbf{l} \circ \mathbf{m}, \quad \mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}} \leqslant \mathbf{n} \circ \mathbf{l}^-.$$

Допустим, что некоторый элемент $x \in X(k \leqslant l)$ допускает экстериоризацию по правилу (10). Это означает, что выполняются следующие соотношения:

$$x = u\big(x^\Lambda\big), \quad x = u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big).$$

При этом условие $x \in X(k \leqslant l)$ означает, что $k(x) \leqslant l(x)$ в множестве $\overline{Y}$. Выберем произвольное $y \in \overline{Y}$, удовлетворяющее неравенствам $k(x) \leqslant y \leqslant l(x)$. Так как дескриптор u является дуальным к дескриптору v, то по теореме 5.1 дескриптор v является интериоризатором в точке y. Значит, $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} v$ и

$$v\big(y^\Lambda\big) = y.$$

При этом по определению правила внутреннего описания (11) для любого $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} v$ в множестве Y_Λ выполняется неравенство $\mathbf{p} \circ \mathbf{q}(y_\Lambda) \leqslant y_\Lambda$. Значит, $\mathbf{p} \circ \mathbf{q}(y^\Lambda) \leqslant y^\Lambda$ и по определению проекции имеем $\mathbf{p} \circ \mathbf{q}(y^\Lambda) \in \operatorname{Dom} v$. Следовательно, $v \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{q}(y^\Lambda) \leqslant v(y^\Lambda) = y$ в множестве Y или

$$y \leqslant \bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big)$$

в множестве $\overline{Y}$.

С другой стороны, так как $\mathbf{l}^-(y^\Lambda) \leqslant \mathbf{l}^- \circ \mathbf{l}(x^\Lambda) \leqslant x^\Lambda$ и $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} \mathbf{n}$, то по определению проекции имеем $\mathbf{l}^-(y^\Lambda) \in \operatorname{Dom} \mathbf{n}$ и $\mathbf{n} \circ \mathbf{l}^-(y^\Lambda) \leqslant \mathbf{n}(x^\Lambda)$. Значит, $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} \mathbf{n} \circ \mathbf{l}^-$. По определению вполне изотонного неравенства $\mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}} \leqslant \mathbf{n} \circ \mathbf{l}^-$ имеем $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} \mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}}$ и выполняются неравенства $\mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}}(y^\Lambda) \leqslant \mathbf{n} \circ \mathbf{l}^-(y^\Lambda) \leqslant \mathbf{n}(x^\Lambda)$. Следовательно,

$$\bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big) \leqslant \bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{h} \circ \mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big) \leqslant \bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{h} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big) \leqslant \bar{v} \circ \mathbf{l} \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big).$$

Из неравенства $y \leqslant \bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}(y^\Lambda)$ вытекает, что $\bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}(y^\Lambda) \in \operatorname{Dom} k^-$, значит,

$$k^- \circ \bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big) \leqslant k^- \circ \bar{v} \circ \mathbf{l} \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big) \leqslant u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big) = x$$

По условию теоремы выполняется вложение $\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} k$, значит,

$$\bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big) = k \circ k^- \circ \bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big) \leqslant k(x) \leqslant y.$$

Следовательно, $\bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}(y^\Lambda) = y$ или $v \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{q}(y^\Lambda) = y$.

Во-вторых, предположим, что правило внутреннего описания (11) является дуальным к правилу внешнего описания (10), т. е. выполняются вполне изотонные неравенства

$$l \circ u \circ \mathbf{k}^- \leqslant \bar{v}, \quad \mathbf{m} \circ \mathbf{r}^- \leqslant \mathbf{k}^- \circ \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{r} \circ \mathbf{n} \leqslant \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}.$$

Допустим, что некоторый элемент $y \in \overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$ допускает интериоризацию по правилу (11). Это означает, что выполняются следующие соотношения:

$$y = v\big(y^\Lambda\big), \quad y = v \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{q}\big(y^\Lambda\big).$$

При этом условие $y \in \overline{Y}(l^- \leqslant k^-)$ означает, что $l^-(y) \leqslant k^-(y)$ в множестве X. Выберем произвольное $x \in X$, удовлетворяющее неравенствам $l^-(y) \leqslant x \leqslant k^-(y)$. Так как дескриптор v является дуальным к дескриптору u, то по теореме 5.1 дескриптор u является экстериоризатором в точке x. Значит, $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} u$ и

$$x = u\big(x^\Lambda\big).$$

При этом по определению правила внешнего описания (10) для любого $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} u$ в множестве Y_Λ выполняется неравенство $x_\Lambda \leqslant \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x_\Lambda)$. Значит, $x^\Lambda \leqslant \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x^\Lambda)$ и по определению инъекции имеем $\mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x^\Lambda) \in \operatorname{Dom} u$. Следовательно, $u(x^\Lambda) \leqslant u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x^\Lambda)$ и

$$x \leqslant u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big).$$

С другой стороны, так как $\mathbf{k}(x^\Lambda) \leqslant \mathbf{k} \circ \mathbf{k}^-(y^\Lambda) \leqslant y^\Lambda$ и $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} \mathbf{q}$, то по определению проекции имеем $\mathbf{k}(x^\Lambda) \in \operatorname{Dom} \mathbf{q}$ и $\bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}(x^\Lambda) \leqslant \bar{\mathbf{q}}(y^\Lambda)$. Значит, $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}$. По определению вполне изотонного неравенства $\mathbf{r} \circ \mathbf{n} \leqslant \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}$ имеем $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} \mathbf{r} \circ \mathbf{n}$ и выполняются неравенства $\mathbf{r} \circ \mathbf{n}(x^\Lambda) \leqslant \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}(x^\Lambda) \leqslant \bar{\mathbf{q}}(y^\Lambda)$. Следовательно,

$$u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big) \leqslant u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{r}^- \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{n}\big(x^\Lambda\big) \leqslant u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{r}^- \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big) \leqslant u \circ \mathbf{k}^- \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^\Lambda\big).$$

Из неравенства $x \leqslant u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x^{\Lambda})$ вытекает, что $u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x^{\Lambda}) \in \operatorname{Dom} l$, значит,

$$l \circ u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^{\Lambda}\big) \leqslant l \circ u \circ \mathbf{k}^{-} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^{\Lambda}\big) \leqslant \bar{v} \circ \bar{\mathbf{p}} \circ \bar{\mathbf{q}}\big(y^{\Lambda}\big) = y.$$

По условию теоремы выполняется вложение $\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Im} l^{-}$, значит,

$$u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x^{\Lambda}) = l^{-} \circ l \circ u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}\big(x^{\Lambda}\big) \leqslant l^{-}(y) \leqslant x.$$

Следовательно, $x = u \circ \mathbf{m} \circ \mathbf{n}(x^{\Lambda})$. Теорема доказана. $\rhd$

Из теоремы 6.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 6.2. *Пусть* $\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} k$. *Если правило внешнего описания* (10) *является дуальным к правилу внутреннего описания* (11) *и любой элемент множества* $X(k \leqslant l)$ *допускает экстериоризацию по правилу* (10), *то любой элемент множества* $\overline{Y}(l^{-} \leqslant k^{-})$ *допускает интериоризацию по правилу* (11).

Пусть $\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Im} l^{-}$. *Если правило внутреннего описания* (11) *является дуальным к правилу внешнего описания* (10) *и любой элемент множества* $\overline{Y}(l^{-} \leqslant k^{-})$ *допускает интериоризацию по правилу* (11), *то любой элемент множества* $X(k \leqslant l)$ *допускает экстериоризацию по правилу* (10).

$\lhd$ Во-первых, предположим, что правило внешнего описания (10) является дуальным к правилу внутреннего описания (11) и любой элемент множества $X(k \leqslant l)$ допускает экстериоризацию по правилу (10). Выберем произвольную точку $y \in \overline{Y}(l^{-} \leqslant k^{-})$ и произвольную точку $x \in X$, удовлетворяющую неравенствам $l^{-}(y) \leqslant x \leqslant k^{-}(y)$. По свойствам вполне изотонных отображений

$$k(x) \leqslant y \leqslant l(x), \quad x \in X(k \leqslant l)$$

и $v(y^{\Lambda}) \in \operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} k$, следовательно, по теореме 6.1 элемент y допускает интериоризацию по правилу (11).

Во-вторых, предположим, что правило внутреннего описания (11) является дуальным к правилу внешнего описания (10) и любой элемент множества $\overline{Y}(l^{-} \leqslant k^{-})$ допускает интериоризацию по правилу (11). Выберем произвольную точку $x \in X(k \leqslant l)$ и произвольную точку $y \in \overline{Y}$, удовлетворяющую неравенствам $k(x) \leqslant y \leqslant l(x)$. По свойствам вполне изотонных отображений

$$l^{-}(y) \leqslant x \leqslant k^{-}(y), \quad y \in \overline{Y}(l^{-} \leqslant k^{-})$$

и $u(x^{\Lambda}) \in \operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Im} l^{-}$, следовательно, по теореме 6.1 элемент x допускает экстериоризацию по правилу (10). Теорема доказана. $\rhd$

7. Двусторонняя теорема двойственности

7.1. Принцип двойственности. В исследовательской практике, как правило, двойственные переходы осуществляются по упрощенной схеме. Будем называть ее *двусторонней схемой* двойственности. Упрощение достигается путем отождествления вполне изотонных отображений k и l. Пусть $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ — частично упорядоченные множества, $t : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ — вполне изотонное отображение, $t^{-} : \widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ — его условно обратное отображение. Символом X обозначим полный образ $\operatorname{Im} t^{-} \subseteq \widetilde{X}$, а символом Y обозначим полный образ $\operatorname{Im} t \subseteq \tilde{Y}$.

Справедлива следующая теорема (принцип двойственности).

Теорема 7.1. *Между элементами x и y множеств X и Y, соответственно, можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу:*

$$y = t(x), \quad x = t^-(y).$$

$\lhd$ Во-первых, убедимся, что образ $t(X)$ совпадает с Y. Действительно, $t(X) \subseteq t(\widetilde{X}) =: Y$. С другой стороны, если $y \in Y$, то по свойству 3.4 $y = t \circ t^-(y) = t(x)$, где $x := t^-(y) \in X$, значит, $y \in t(X)$, т. е. $Y \subseteq t(X)$. Следовательно, $t(X) = Y$. Во-вторых. убедимся, что образ $t^-(Y)$ совпадает с X. Действительно, $t^-(Y) \subseteq t^-(\widetilde{Y}) =: X$. С другой стороны, если $x \in X$, то по свойству 3.4 $x = t^- \circ t(x) = t^-(y)$, где $y := t(x) \in Y$, значит, $x \in t^-(Y)$, т. е. $X \subseteq t^-(Y)$. Следовательно, $t^-(Y) = X$. Таким образом, из свойства 3.4 вытекает, что сужение отображения t^- на образ Y и сужение отображения t на образ X являются взаимно обратными отображениями. Теорема доказана. $\rhd$

Символом k обозначим отображение

$$X \mapsto Y \,\big|\, x \mapsto t(x),$$

а символом k^- обозначим отображение

$$Y \mapsto X \,\big|\, y \mapsto t^-(y).$$

Из доказанного принципа двойственности следует, что отображение k является порядковым изоморфизмом X на Y, а отображение k^- совпадает с обратным отображением и является порядковым изоморфизмом Y на X. Отображения k и k^- являются проекциями и инъекциями одновременно и условно обратное к отображению k совпадает с отображением k^-, а условно обратное к отображению k^- совпадает с отображением k.

7.2. Взаимно дуальные дескрипторы. Пусть Λ — непустое множество, X^Λ и Y^Λ — декартовы степени частично упорядоченных множеств X и Y соответственно, $\mathbf{k}$ — декартова степень отображения k, $\mathbf{k}^-$ — декартова степень отображения k^-. Отображения $\mathbf{k} : X^\Lambda \mapsto Y^\Lambda$ и $\mathbf{k}^- : X^\Lambda \mapsto Y^\Lambda$ являются порядковыми изоморфизмами.

Пусть $u : X^\Lambda \to X$ — инъекция, $v : Y^\Lambda \to Y$ — проекция. Рассмотрим дуальную бипару $\langle (X^\Lambda, X), (\overline{Y}^\Lambda, \overline{Y}) \rangle$ и две дуальные схемы

$$\begin{tikzcd} X^\Lambda \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathbf{k}"'] & X \\ \overline{Y}^\Lambda \arrow[r, "\bar v"'] & \overline{Y} \arrow[u, "k^-"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{Y}^\Lambda \arrow[r, "\bar v"] \arrow[d, "\mathbf{k}^-"'] & \overline{Y} \\ X^\Lambda \arrow[r, "u"'] & X \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd},$$

где символом $\bar v$ мы обозначаем инъекцию $\overline{Y}^\Lambda \to \overline{Y} \mid y \mapsto v(y)$. Дескриптор u является дуальным к дескриптору v относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}, k^- \rangle$, если выполняется вполне изотонное неравенство $k^- \circ \bar v \circ \mathbf{k} \leqslant u$. Дескриптор v является дуальным к дескриптору u относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}^-, k \rangle$, если выполняется вполне изотонное неравенство $k \circ u \circ \mathbf{k}^- \leqslant \bar v$. Если дескриптор u является дуальным к дескриптору v, а дескриптор v является дуальным к дескриптору u, то дескрипторы u и v называем *взаимно дуальными*. Если дескрипторы u и v являются взаимно дуальными, то по определению вполне изотонных неравенств выполняются вложения

$$\operatorname{Dom} k^- \circ \bar v \circ \mathbf{k} \subseteq \operatorname{Dom} u, \quad \operatorname{Dom} k \circ u \circ \mathbf{k}^- \subseteq \operatorname{Dom} v.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.2. *Дескрипторы u и v являются взаимно дуальными тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Dom} k^{-} \circ \bar{v} \circ \mathbf{k} = \operatorname{Dom} u, \quad \operatorname{Dom} k \circ u \circ \mathbf{k}^{-} = \operatorname{Dom} v$$

и выполняются функциональные равенства

$$u = k^{-} \circ \bar{v} \circ \mathbf{k}, \quad \bar{v} = k \circ u \circ \mathbf{k}^{-}.$$

$\lhd$ Докажем первое функциональное равенство. Пусть $x^{\Lambda} \in \operatorname{Dom} u$ и $y := k(x)$. Тогда $u(x^{\Lambda}) = k^{-} \circ k \circ u \circ \mathbf{k}^{-}(y^{\Lambda})$, т. е. $y^{\Lambda} \in \operatorname{Dom} k \circ u \circ \mathbf{k}^{-}$. Значит, $u(x^{\Lambda}) \leqslant k^{-} \circ \bar{v}(y^{\Lambda}) = k^{-} \circ \bar{v} \circ \mathbf{k}(x^{\Lambda})$. Это означает, что выполняются обратное вложение $\operatorname{Dom} u \subseteq \operatorname{Dom} k^{-} \circ \bar{v} \circ \mathbf{k}$ и функциональное равенство $u(x^{\Lambda}) = k^{-} \circ \bar{v} \circ \mathbf{k}(x^{\Lambda})$.

Докажем второе функциональное равенство. Пусть $y^{\Lambda} \in \operatorname{Dom} v$ и $x := k^{-}(y)$. Тогда $\bar{v}(y^{\Lambda}) = k \circ k^{-} \circ \bar{v} \circ \mathbf{k}(x^{\Lambda})$, т. е. $x^{\Lambda} \in \operatorname{Dom} k^{-} \circ \bar{v} \circ \mathbf{k}$. Значит, $\bar{v}(y^{\Lambda}) \leqslant k \circ u(x^{\Lambda}) = k \circ u \circ \mathbf{k}^{-}(y^{\Lambda})$, т. е. выполняется обратное вложение $\operatorname{Dom} \bar{v} \subseteq \operatorname{Dom} k \circ u \circ \mathbf{k}^{-}$ и выполняется функциональное равенство $\bar{v}(y^{\Lambda}) = k \circ u \circ \mathbf{k}^{-}(y^{\Lambda})$. Теорема доказана. $\rhd$

Из теорем 5.2 и 7.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.3. *Если дескрипторы u и v являются взаимно дуальными, то дескриптор u является интериоризатором в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда дескриптор v является экстериоризатором в точке $y := k(x) \in Y$.*

7.3. Взаимно дуальные описания. Пусть $\{h_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство порядковых изоморфизмов $h_{\lambda} : X_{\lambda} \mapsto \overline{Y}_{\lambda}$, значит, декартово произведение $\mathbf{h} : X_{\Lambda} \to \overline{Y}_{\Lambda}$ тоже является порядковым изоморфизмом. Здесь символы $\overline{Y}_{\lambda}$ и $\overline{Y}_{\Lambda}$ обозначают частично упорядоченные множества Y_{λ} и Y_{Λ} соответственно с обратными порядками. Рассмотрим дуальную бипару $\langle (X_{\Lambda}, X^{\Lambda}), (\overline{Y}_{\Lambda}, \overline{Y}^{\Lambda}) \rangle$ и две дуальные схемы

$$\begin{tikzcd} X_{\Lambda} \arrow[r, "\mathbf{m}"] \arrow[d, "\mathbf{h}"'] & X^{\Lambda} \arrow[d, "\mathbf{k}"] \\ \overline{Y}_{\Lambda} \arrow[r, "\bar{\mathbf{p}}"'] & \overline{Y}^{\Lambda} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{Y}_{\Lambda} \arrow[r, "\bar{\mathbf{p}}"] \arrow[d, "\mathbf{h}^{-}"'] & \overline{Y}^{\Lambda} \arrow[d, "\mathbf{k}^{-}"] \\ X_{\Lambda} \arrow[r, "\mathbf{m}"'] & X^{\Lambda} \end{tikzcd} .$$

По определению инъекция $\mathbf{m}$ является дуальной к инъекции $\bar{\mathbf{p}}$ относительно дуальной пары $\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle$, если выполняется вполне изотонное неравенство $\bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{h} \leqslant \mathbf{k} \circ \mathbf{m}$. Инъекция $\bar{\mathbf{p}}$ является дуальной к проекции $\mathbf{m}$ относительно дуальной пары $\langle \mathbf{h}^{-}, \mathbf{k}^{-} \rangle$, если выполняется вполне изотонное неравенство $\mathbf{m} \circ \mathbf{h}^{-} \leqslant \mathbf{k}^{-} \circ \bar{\mathbf{p}}$. Если инъекция $\mathbf{m}$ является дуальной к инъекции $\bar{\mathbf{p}}$, а инъекция $\bar{\mathbf{p}}$ является дуальной к инъекции $\mathbf{m}$, то инъекции $\mathbf{m}$ и $\bar{\mathbf{p}}$ называем *взаимно дуальными.* Легко убедиться, что инъекции $\mathbf{m}$ и $\bar{\mathbf{p}}$ являются взаимно дуальными тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Dom} \bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{h} = \operatorname{Dom} \mathbf{k} \circ \mathbf{m}, \quad \operatorname{Dom} \mathbf{m} \circ \mathbf{h}^{-} = \operatorname{Dom} \mathbf{k}^{-} \circ \bar{\mathbf{p}}$$

и выполняются функциональные равенства

$$\bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{h} = \mathbf{k} \circ \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} \circ \mathbf{h}^{-} = \mathbf{k}^{-} \circ \bar{\mathbf{p}}.$$

Затем рассмотрим дуальную бипару $\langle (X^{\Lambda}, X_{\Lambda}), (\overline{Y}^{\Lambda}, \overline{Y}_{\Lambda}) \rangle$ и две дуальные схемы

$$\begin{tikzcd} X^{\Lambda} \arrow[r, "\mathbf{n}"] & X_{\Lambda} \\ \overline{Y}^{\Lambda} \arrow[r, "\bar{\mathbf{q}}"'] \arrow[u, "\mathbf{k}^{-}"] & \overline{Y}_{\Lambda} \arrow[u, "\mathbf{h}^{-}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{Y}^{\Lambda} \arrow[r, "\bar{\mathbf{q}}"] & \overline{Y}_{\Lambda} \\ X^{\Lambda} \arrow[r, "\mathbf{n}"'] \arrow[u, "\mathbf{k}"] & X_{\Lambda} \arrow[u, "\mathbf{h}"'] \end{tikzcd}$$

Проекция $\mathbf{n}$ является дуальной к проекции $\bar{\mathbf{q}}$ относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}^-, \mathbf{h}^- \rangle$, если выполняется вполне изотонное неравенство $\mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}} \leqslant \mathbf{n} \circ \mathbf{k}^-$. Проекция $\bar{\mathbf{q}}$ является дуальной к проекции $\mathbf{n}$ относительно дуальной пары $\langle \mathbf{k}, \mathbf{h} \rangle$, если выполняется вполне изотонное неравенство $\mathbf{h} \circ \mathbf{n} \leqslant \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}$. Если проекция $\mathbf{n}$ является дуальной к проекции $\bar{\mathbf{q}}$, а проекция $\bar{\mathbf{q}}$ является дуальной к проекции $\mathbf{n}$, то проекции $\mathbf{n}$ и $\bar{\mathbf{q}}$ называем *взаимно дуальными.* Легко убедиться, что проекции $\mathbf{n}$ и $\bar{\mathbf{q}}$ являются взаимно дуальными тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Dom} \mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}} = \operatorname{Dom} \mathbf{n} \circ \mathbf{k}^-, \quad \operatorname{Dom} \mathbf{h} \circ \mathbf{n} = \operatorname{Dom} \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}$$

и выполняются функциональные равенства

$$\mathbf{h}^- \circ \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{n} \circ \mathbf{k}^-, \quad \mathbf{h} \circ \mathbf{n} = \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{k}.$$

7.4. Двусторонняя теорема двойственности. Если дескрипторы u и v, инъекции $\mathbf{m}$ и $\bar{\mathbf{p}}$ и проекции $\mathbf{n}$ и $\bar{\mathbf{q}}$, соответственно, являются взаимно дуальными, то правило внешнего описания (10) и правило внутреннего описания (11) называем *взаимно дуальными.* Из теорем 6.2, 7.1 и 7.3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 7.4. *Если правило внешнего описания* (10) *и правило внутреннего описания* (11) *являются взаимно дуальными, то элемент $x \in X$ допускает экстериоризацию по правилу* (10) *тогда и только тогда, когда элемент $y := k(x) \in Y$ допускает интериоризацию по правилу* (11).

Литература

1. *Шишкин А. Б.* Экспоненциальный синтез в ядре оператора симметричной свертки // Зап. науч. сем. ПОМИ.—2016.—Т. 447.—С. 129–170.
2. *Шишкин А. Б.* О непрерывных эндоморфизмах целых функций // Мат. сб.—2021.—Т. 212, № 4.—С. 131–158. DOI: 10.4213/sm9316.
3. *Шишкин А. Б.* Проективное и инъективное описания в комплексной области.—Saarbrucken: Lambert Academic Publ. GmbH & Co. KG, 2011.—309 с.
4. *Шишкин А. Б.* Односторонние схемы двойственности // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, № 3.—С. 124–150. DOI: 10.46698/i3178-1119-0009-t.

Статья поступила 13 января 2025 г.

Шишкин Андрей Борисович
Кубанский государственный университет,
профессор кафедры МИЕОД
Россия, 353560, Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200;
E-mail: `shishkin-home@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-7114-0524

Шишкин Борис Андреевич
ООО «ПРАЙ»,
технический директор
РОССИЯ, 353563, Славянск-на-Кубани, ул. Строителей, 1
E-mail: `shishkinb13@gmail.com`
https://orcid.org/0009-0005-4303-8628

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 1, P. 127–149

ONE-SIDED DUALITY THEOREMS

Shishkin, A. B.[1] and Shishkin, B. A.[2]

[1] Kuban State University
200 Kuban St., Slavyansk-on-Kuban 353560, Russia;
[2] "PRAI" LLS, 1 Stroiteley St., Slavyansk-on-Kuban 353563, Russia

E-mail: shishkin-home@mail.ru, shishkinb13@gmail.com

Abstract. The phenomenon of duality is inherent in all sections of mathematics and underlies many special duality theorems that assert the possibility of dual transitions – transfers of mathematical statements from one area of mathematics to another. All known duality theorems are based on properties of special mathematical structures and are bilateral in nature, i. e. they assume dual transitions in one and other directions. The present paper is devoted to a new understanding of dual transitions as transitions from internal (respectively external) descriptions of sets to external (respectively internal) descriptions of sets dual to them. Special attention is paid to one-way dual transitions, one-way duality theorems. The abstract constructions (one-sided duality theory) are based on the notion of dual scheme, which, in turn, is based on the notion of weakened involution – a fully isotone mapping. In this case, any fully isotone mapping has a conditionally inverse mapping which is also fully isotone. The authors distinguish four dual schemes, each of which plays its strictly defined role in matters of external and internal description of sets. Any dual scheme is represented as a set of two diagrams connected by mutually inverse transitions to conditionally inverse mappings.

Keywords: duality, interiorization, exteriorization.

AMS Subject Classification: 03E15.

For citation: *Shishkin, A. B. and Shishkin, B. A.* One-Sided Duality Theorems, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 127–149 (in Russian). DOI: 10.46698/e7265-7012-8069-r.

References

1. *Shishkin, A. B.* Exponential Synthesis in the Kernel of a Symmetric Convolution, *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*), 2018, vol. 229, no. 5, pp. 572–599. DOI: 10.1007/s10958-018-3700-9.
2. *Shishkin, A. B.* On Continuous Endomorphisms of Entire Functions, *Sbornik: Mathematics*, 2021, vol. 212, no. 4, pp. 567–591. DOI: 10.1070/SM9316.
3. *Shishkin, A. B. Proektivnoe i in"ektivnoe opisaniya v kompleksnoy oblasti* [Projective and Injective Descriptions in the Complex Domain], Saarbrucken, Lambert Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2011, 309 p. (in Russian).
4. *Shishkin, A. B.* One-Sided Dual Schemes, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 124–150 (in Russian). DOI: 10.46698/i3178-1119-0009-t.

Received January 13, 2025

Andrey B. Shishkin
Kuban State University
200 Kuban St., Slavyansk-on-Kuban 353560, Russia,
Professor
E-mail: shishkin-home@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-7114-0524

Boris A. Shishkin
"PRAI" LLS,
1 Stroiteley St., Slavyansk-on-Kuban 353563, Russia
Technical Director
E-mail: shishkinb13@gmail.com
https://orcid.org/0009-0005-4303-8628

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 150–153

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

А. В. АБАНИНУ — 70 ЛЕТ

6 февраля 2025 г. исполнилось 70 лет известному российскому математику, доктору физико-математических наук, профессору, заведующему кафедрой математического анализа и геометрии Института математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича Южного Федерального университета, заведующему отделом математического анализа Южного математического института ВНЦ РАН Александру Васильевичу Абанину.

А. В. Абанин является одним из ярких представителей ростовской научной школы по теории функций и функциональному анализу, сформировавшейся во второй половине прошлого века под руководством крупных математиков того времени, профессоров М. Г. Хапланова, Ю. Ф. Коробейника и М. М. Драгилева. Ему принадлежат первоклассные результаты по широкому спектру задач современного вещественного, комплексного и функционального анализа.

Первоначально его научные интересы были сосредоточены на теории абсолютно представляющих систем, основы которой в 1975–1980 гг. заложил его научный руководитель Ю. Ф. Коробейник. В 1981 г. А. В. Абанин успешно защищает кандидатскую диссертацию «Некоторые свойства представляющих систем и базисов», результаты которой сыграли решающую роль в развитии ряда ключевых направлений в данной тематике. В частности, им было проведено систематическое исследование нового объекта — эффективных множеств, и установлены необходимые условия геометрического характера на распределение в плоскости показателей абсолютно представляющих систем экспонент в пространствах функций, голоморфных в выпуклой области. В это время имелось два основных подхода к теории представления голоморфных функций рядами экспонент и их обобщений. Первый был развит в фундаментальных работах А. Ф. Леонтьева; он основывался на методах теории функций комплексного переменного. Его ключевыми моментами были использование специальной интерполирующей функции и рядов Лагранжа, построенных по целым функциям вполне регулярного роста с максимально возможным ростом производных в нулях. Второй был предложен американским математиком Л. Эренпрайсом; он заключался в привлечении теории двойственности и интегральных представлениях функций из рассматриваемых пространств. Здесь ключевую роль сыграло введенное Л. Эренпрайсом понятие достаточных множеств для сопряженных пространств. Впоследствии, в 1974 г., Д. М. Шнайдер ввел более простое и удобное для исследований понятие слабо достаточных множеств. Каждый из этих подходов имел свои преимущества, и до начала 80-х годов они развивались практически независимо друг от друга, пока в результате исследований Ю. Ф. Коробейника и В. В. Напалкова не было установлено их совпадение. В этом отношении модельный критерий выглядит следующим образом. Система экспонент $(\exp \lambda_k z)_{k\in\mathbb{N}}$ является абсолютно представляющей в пространстве $H(G)$ функций, голоморфных в выпуклой области G, тогда и только тогда, когда последовательность $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ образует достаточное или, что одно и то же, слабо достаточное множество для подходящей реализации сопряженного пространства с помощью преобразования Лапласа функционалов. При этом слабо достаточные множества можно определить для любого внутреннего индуктивного предела весовых пространств целых функций без взаимосвязи с тем, имеется или нет какая-либо двойственность пространств. Кроме того, из предшествующих исследований следовало, что такие множества играют важную роль в решении ряда классических задач теории целых функций — теорем деления, различных интерпретаций принципа Фрагмена — Линделефа, теорем типа Левинсона и др.

В связи с вышеизложенным основные усилия А. В. Абанина в течение следующих после защиты кандидатской диссертации 10–15 лет были сосредоточены на развитии теории слабо достаточных множеств в различных по структуре пространствах целых функций одной и многих переменных и разработке их приложений к абсолютно представляющим системам и уравнениям свертки. В первую очередь им было доказано, что классы слабо достаточных и определяющих (в другой терминологии — эффективных по Ийеру) множеств совпадают между собой. Этот факт стал полной неожиданностью, поскольку слабо достаточные множества имеют топологическую природу, а в основе определения эффективных лежит возможность вычисления классических характеристик целых функций (например, типа или индикатора) не по всей плоскости, а по заданному, как правило дискретному, множеству. Затем были введены и изучены понятия продолжения слабо достаточных множеств из одного пространства в другое и их устойчивости относительно предельного перехода. При этом были разработаны новые методы, основанные на использовании мультипликаторов весовых пространств целых функций и построении специальных семейств целых функций с равномерными глобальными оценками сверху и близкими к ним индивидуальными оценками снизу в каждой фиксированной точке пространства. Впоследствии эти семейства также сыграли ключевую роль в решении ряда других задач, связанных с теорией уравнений свертки, интерполяцией и теоремами деления целых функций. Перечисленные результаты составили основное содержание защищенной в 1995 г. докторской диссертации «Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы».

Следующим направлением исследований А. В. Абанина стала проблема описания порождающих идеалов в кольцах целых функций. Начиная со знаменитой теоремы Л. Карлесона о короне, характеризация таких идеалов давалась через подходящую оценку снизу суммы модулей их образующих. А. В. Абанину в данной задаче впервые удалось получить критерии, формулируемые в терминах массивности нулевых множеств образующих. Кроме того, им был выделен класс весов, для которых в соответствующих кольцах совпадают семейства порождающих и дифференциальных идеалов.

Значительный цикл работ А. В. Абанина связан с теорией ультрадифференцируемых функций и ультрараспределений. Сначала им было дано полное описание пространств ультрадифференцируемых функций, допускающих аналоги классической теоремы Уитни о продолжении джетов с компакта во все пространство, а впоследствии построена теория ультрараспределений, содержащая в качестве частных случаев как классические теории Берлинга — Бьорка и Румье — Коматсу, так и их обобщения, разработанные Циоранеску–Жидо и Брауном–Майзе–Тейлором. Итогом этого цикла стала монография «Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения», вышедшая в издательстве «Наука» в 2007 г.

В 2009–2013 гг. А. В. Абанин проводил совместные исследования, связанные с уравнениями свертки и теоремами деления, с известными зарубежными математиками Ле Хай Хоем и Р. Ишимурой. Ими были установлены критерии разрешимости уравнений свертки в пространстве голоморфных в выпуклой области функций полиномиального роста и доказано существование экспоненциально-полиномиального базиса в ядре соответствующего оператора. Следует отметить, что рассмотренное ими пространство по своей топологической структуре относится к внутренним индуктивным пределам последовательностей банаховых пространств (так называемым LB-пространствам), в то время как все предыдущие исследования подобного рода относились к более простому двойственному случаю пространств Фреше.

В эти же годы в совместных работах с Лей Хай Хоем была установлена двойственность пространств голоморфных функций полиномиального роста и пространств Фреше голоморфных функций заданной граничной гладкости. Через несколько лет в совместной статье с Т. М. Андреевой аналогичная двойственность была установлена уже для пространств, задаваемых весами общего вида. Кроме того, были развиты методы описания сопряженных пространств для индуктивных пределов последовательностей банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций и проективных спектров таких пространств (совместно с И. А. Филипьевым).

Следующим центром научных интересов А. В. Абанина стало развитие структурной теории весовых пространств голоморфных функций. Им получено далеко идущее обобщение классической теоремы Л. Хермандера о продолжении целых функций с оценками роста, разработаны ее приложения к описанию канонических систем весов, установлены критерии принадлежности весовых пространств голоморфных функций к компактным спектрам, найдена непосредственная связь между топологической и алгебраической структурами индуктивных пределов весовых пространств голоморфных функций и их проективных оболочек. Все эти результаты получены совместно с вьетнамским математиком Фам Тронг Тиеном, защитившим кандидатскую диссертацию под руководством А. В. Абанина в 2013 г.

В последние 10 лет исследования А. В. Абанина сосредоточены на изучении топологических и динамических свойств классических операторов в весовых банаховых пространствах голоморфных функций. Совместно со своими коллегами, Фам Тронг Тиеном и Ле Хай Хоем, ему удалось окончательно решить ряд известных открытых проблем в этой области. Были полностью охарактеризованы непрерывные и компактные операторы дифференцирования и интегрирования и их инвариантные подпространства, описаны линейно связные компоненты семейства операторов весовой композиции в пространствах Бергмана и доказано существование в этих семействах изолированных элементов.

Почти за 50 лет активной научной деятельности он опубликовал более 200 научных работ, значительную часть из которых вместе со своими учениками. Сегодня можно с полной уверенностью утверждать, что им создана собственная научная школа — 11 кандидатов наук, многочисленные магистры, написавшие свои диссертации под его руководством. Немало учеников А. В. Абанина работает сегодня в вузах Ростова-на-Дону и Ростовской области, и все они в полной мере следуют основным принципам учителя — высокая требовательность к себе и своим ученикам, преданность делу, большая самоотдача и высокий профессионализм.

Наряду с педагогической и научной деятельностью А. В. Абанин активно участвует в организации научной и учебной работы в Южном федеральном университете и Южном математическом институте ВНЦ РАН. Он возглавляет специализированный совет ЮФУ по защите докторских диссертаций, входит в состав редколлегий таких известных изданий как «Владикавказский математический журнал» и «Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки». Он регулярно участвует в работе организационных комитетов различных международных конференций, выступает с докладами на Международных и Всероссийских конференциях, симпозиумах, школах.

Александр Васильевич является не только известным ученым и талантливым преподавателем, но и образцом порядочности, скромности, доброжелательности и верности традициям российской науки и образования. Благодаря этому он пользуется заслуженным авторитетом и уважением среди своих учеников и коллег.

Отмечая юбилей нашего товарища и коллеги, от всей души желаем Александру Васильевичу здоровья, семейного благополучия и новых творческих достижений!

А. О. Ватульян, М. И. Карякин, А. Г. Кусраев,
И. Х. Мусин, Ю. С. Налбандян, Д. М. Поляков,
Д. А. Полякова, Р. С. Юлмухаметов

Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 1, С. 154–157

ПАМЯТИ СЕМЁНА САМСОНОВИЧА КУТАТЕЛАДЗЕ
(02.10.1945 — 15.01.2025)

15 января 2025 г. на 80-м году ушел из жизни Семён Самсонович Кутателадзе — российский и советский математик, доктор физико-математических наук, профессор, Заслуженный ветеран Сибирского отделения Академии наук СССР, главный научный сотрудник лаборатории функционального анализа Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отведения Российской академии наук.

С. С. Кутателадзе родился в г. Ленинграде в семье выдающегося советского ученого-теплофизика Самсона Семёновича Кутателадзе. В 1962 г. вместе с отцом он переехал в Новосибирский академгородок, где закончил школу. В 1968 г. он с отличием окончил механико-математический факультет Новосибирского государственного университета; в 1970 г. защитил кандидатскую диссертацию «Смежные вопросы геометрии и математического программирования» и в 1978 г. — докторскую диссертацию «Линейные задачи выпуклого анализа». С 1968 г. до конца жизни работал в Институте математики Сибирского отделения Академии наук СССР (Российской академии наук); с 1987 по 2006 г. заведовал лабораторией функционального анализа, которой до него руководил С. Л. Соболев. С. С. Кутателадзе был заместителем главного редактора «Сибирского математического журнала», «Сибирского журнала индустриальной математики», журнала «Siberian Advances in Mathematics», а также членом редколлегии Трудов Института математики им. С. Л. Соболева и редколлегий других известных изданий, среди которых «Математические заметки», «Владикавказский математический журнал», международный журнал «Positivity», японский журнал «Scientiae Mathematicae Japonicae». Был членом Американского и Европейского математических обществ, ряда международных рабочих групп по математике. Среди его публикаций более 400 научных работ, более 20 монографий и учебных пособий.

С. С. Кутателадзе — специалист в области функционального анализа. Функциональный анализ возник на стыке геометрии, алгебры и классических исчислений. Пограничные разделы этих составляющих стали предметом творчества С. С. Кутателадзе. Он продолжал и развивал синтетические подходы к задачам анализа и геометрии, характерные для ленинградской-петербургской математической школы. Образцы для себя Семён Самсонович черпал из творчества А. Д. Александрова, Л. В. Канторовича, Ю. Г. Решетняка и С. Л. Соболева, с которыми он был близок и тесно сотрудничал многие годы. Л. В. Канторович называл С. С. Кутателадзе своим учеником.

Основные результаты С. С. Кутателадзе относятся к проблемам функционального анализа в векторных решетках, к задачам изопериметрического типа в теории выпуклых поверхностей, к теории операторов, негладкому анализу и оптимизации. Ему принадлежат яркие достижения в этих областях.

Первые научные результаты С. С. Кутателадзе связаны с развитием идей двойственности Г. Минковского в выпуклом анализе. Им описаны положительные функционалы над различными классами выпуклых тел. Комбинация найденных описаний с теорией смешанных объемов и поверхностных функций А. Д. Александрова позволила ему предложить новые методы «программирования» экстремальных задач изопериметрического типа с произвольным числом ограничений, к которым неприменимы классические методы симметризаций. Фактически был предъявлен обширный класс геометрических вариационных задач, решения которых можно выписать в явном виде за счет превращения их в выпуклые программы в подходящих функциональных пространствах. Следует особо выделить найденное Кутателадзе решение внутренней задачи Урысона, представляющее собой сумму Бляшке некоторого шара и специального критического тела. В 1995 г. А. В. Погорелов нашел форму «мыльного пузыря» в трехмерном тетраэдре. Им оказалась обкатка шаром гототета найденного С. С. Кутателадзе решения задачи Урысона в этом тетраэдре.

В следующем цикле работ С. С. Кутателадзе построена теория границ Шоке в упорядоченных векторных пространствах. Классическая задача Шоке об описании максимальных относительно некоторого упорядочения функционалов была расширена до ее естественных пределов, позволяющих изучать строение максимальных операторов. Само понятие границы Шоке было рассмотрено как компонента пробного пространства Канторовича, внешнего по отношению к исходному упорядоченному векторному пространству. Полученные результаты дали новую информацию даже в случае пространств непрерывных функций. Далее были рассмотрены приложения к абстрактной задаче Дирихле в ее связи с бесконечномерными геометрическими симплексами, к задаче описания обнаруженных новых объектов — супремальных генераторов пространств функций, имеющих значение в теории сходимости аппроксимаций положительными операторами. Идея супремального генератора оказалась близка методологии идемпотентного анализа, возникшего несколько позже в работах В. П. Маслова и его учеников. Крупный цикл работ С. С. Кутателадзе относится к выпуклому анализу, одному из основных разделов прикладного нелинейного анализа. Найдены наиболее общие и полные правила субдифференциального исчисления — явные формулы для пересчета значений и решений выпуклых экстремальных задач при сохраняющих их выпуклость заменах переменных. При этом предложен принципиально новый прием представления произвольного выпуклого оператора как результата аффинной подстановки в конкретный сублинейный оператор (из семейства, нумерующего кардиналы). В литературе используется термин *«канонический оператор Кутателадзе»*. На основе указанных правил установлен принцип Лагранжа для нового класса задач векторной оптимизации и предложена теория выпуклого ε-программирования. Названные результаты вызвали большой резонанс и неоднократно передоказывались за рубежом со ссылками на отечественный приоритет.

Для исследовательского стиля С. С. Кутателадзе характерен поиск и разработка пограничных математических технологий. В Новосибирском научном центре со времен А. И. Мальцева ведутся первоклассные исследования в области алгебры и логики. Неудивительно поэтому, что Семёна Самсоновича увлекла задача развития методов функционального анализа на основе современной логической техники нестандартных моделей теории множеств. Он предложил оригинальные идеи и методы, нашел новые сферы приложений и опубликовал вместе с учениками, коллегами и последователями целую серию монографий.

Перечислим некоторые результаты С. С. Кутателадзе, получившие международное признание и резонанс. Было дано полное описание модулей над решеточно-упорядоченными кольцами, в которых сохраняются теоремы типа Хана — Банаха (иначе говоря, можно использовать теорию двойственности топологических векторных пространств или метод линейного программирования). Такими оказались пространства Канторовича, рассматриваемые над почти рациональными кольцами своих ортоморфизмов. Приведенный результат объясняет роль гипотезы «делимость продуктов» в математической экономике. Другие приложения найденное описание нашло в теоремах типа Крейна — Мильмана для некомпактных множеств операторов и в булевозначном анализе. С помощью подходящей адаптации и развития нестандартных методов анализа (техника спусков и подъемов, теория циклических монад, комбинирование нестандартных моделей) были решены разнообразные сложные задачи геометрического и прикладного функционального анализа: дана принципиально новая классификация односторонних приближений кларковского типа для произвольных множеств и установлены соответствующие правила подсчета инфинитезимальных касательных; предложен нестандартный подход к приближенному решению выпуклых программ, базирующийся на теории внутренних множеств Э. Нельсона, в форме теории инфинитезимального программирования; найдены новые общие формулы проектирования на главные компоненты в пространствах регулярных операторов, свободные от принятых в литературе условий на порядково сопряженное пространство и т. п. Из результатов самых последних лет можно отметить решение геометрических задач урысоновского типа с текущими гиперплоскостями в произвольных многомерных выпуклых областях и найденное в 2005 г. парадоксальное описание порядково ограниченных операторов, ядра слоев которых служат подпространствами Гротендика.

Многолетняя педагогическая деятельность С. С. Кутателадзе была связана с кафедрой математического анализа механико-математического факультета Новосибирского государственного университета. Более четверти века он бессменный лектор по функциональному анализу. С самого начала он приступил к перестройке курса функционального анализа. Чутко уловив серьезные качественные сдвиги, происшедшие в современном функциональном анализе, и сохранив лучшие традиции знаменитого «Канторовича — Акилова», он создал новый учебник по функциональному анализу, который вобрал в себя многолетний опыт преподавания в НГУ. Тщательный отбор современного материала и евклидова лапидарность стиля позволили этой книге опередить время и сохранять актуальность уже в течение более двадцати лет. Семён Самсонович постоянно руководил научной работой дипломников и аспирантов, консультировал докторантов. Среди его формальных учеников около двух десятков кандидатов и докторов наук. Сотни студентов учили функциональный анализ по учебнику Кутателадзе. Многим читателям помогли в трудную минуту его книги, популярные статьи и эссе о науке, ее творцах и проблемах.

Следует отметить усилия С. С. Кутателадзе по сохранению математической культуры в России с помощью программы математических переводов. При его активном участии было организовано издание на английском языке серии трудов Института математики и образована группа специалистов, обеспечивающих перевод «Сибирского математического журнала». Написанное Семёном Самсоновичем для коллег пособие по английской грамматике и технике научного перевода стало весьма востребованным учеными разных специальностей, выдержало ряд переизданий и много лет распространяется Европейским математическим обществом.

Семён Самсонович внес значительный вклад в укрепление фундаментальной науки на Юге России: был одним из разработчиков стратегии создания и развития Владикавказского научного центра Российской академии наук, членом оргкомитете (программного комитета) «Владикавказского математического форума» (18 раз), членом редколлегии и одним из самых активных авторов «Вестника Владикавказского научного центра».

С. С. Кутателадзе всегда был энергичен, целеустремлен, полон новых идей, которыми щедро делился со всеми. Исключительно эрудированный и работоспособный, стремительный и увлекающийся, увлекал и вдохновлял других, генерируя вокруг себя интеллектуальное поле большой притягательной силы. До последних дней он сохранил ясность ума и творческий потенциал.

В лице Семёна Самсоновича Кутателадзе российская наука понесла невосполнимую утрату. Светлая память о нем как о ярчайшем представителе отечественной науки, навсегда останется в сердцах его коллег, друзей и учеников.

А. В. Абанин, С. К. Водопьянов, Е. И. Гордон, А. Е. Гутман, В. Н. Дятлов, Э. Ю. Емельянов, А. И. Кожанов, А. Г. Кусраев, Г. Г. Магарил-Ильяев, Ю. Г. Никаноров, В. М. Тихомиров, В. Г. Троицкий, С. М. Умархаджиев

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Общие положения

1. Периодическое издание «Владикавказский математический журнал» публикует оригинальные научные статьи отечественных и зарубежных авторов, содержащие новые математические результаты по функциональному и комплексному анализу, алгебре, геометрии, дифференциальным уравнениям и математической физике. По заказу редакционной коллегии журнал также публикует обзорные статьи. Журнал предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре выпуска в год. «Владикавказский математический журнал» публикует статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более 2 усл.п.л. (17 страниц формата A4). Работы, превышающие 2 усл.п.л., принимаются к публикации по специальному решению Редколлегии журнала. Срок рассмотрения статей обычно не превышает 8 месяцев. При подготовке статей для ускорения их рассмотрения и публикации следует соблюдать правила для авторов.

2. К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Результаты иных авторов, использованные в статье, следует должным образом отразить в ссылках. Направляя статью в журнал, авторы тем самым подтверждают, что для нее выполнены указанные требования.

3. Направляя статью в журнал, каждый из авторов подтверждает, что статья соответствует наивысшим стандартам публикационной этики для авторов и соавторов, разработанным COPE (Committee on Publication Ethics), см. http://publicationethics.org/about.

4. Все материалы, поступившие для публикации в журнале, подлежат регистрации с указанием даты поступления рукописи в редакцию журнала. Решение о публикации, отказе в публикации или направлении рукописи автору для доработки должно быть принято главным редактором и сообщено автору не позднее 4 месяцев со дня поступления рукописи в редакцию журнала. Подробнее см. в разделе Рецензирование.

5. Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего окончательный макет статьи в формате PDF направляется автору на корректуру.

6. Условием публикации статей, принятых к печати, является подписанием авторами договора о передаче авторских прав. Бланк договора можно скачать по ссылке.

7. Полнотекстовые версии статей, публикуемых в журнале, размещаются в Интернете в свободном доступе на официальном сайте журнала http://www.vlmj.ru, а также на сайтах Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка».

8. Статьи журнала реферируются и индексируются в Scopus (Elsevier), zbMATH (Springer), MathSciNet (AMS), Russian Science Citation Index (Web of Science), EBSCO, РЖМат (ВИНИТИ РАН), Math-Net.Ru, РИНЦ (eLibrary.Ru).

9. Публикации в журнале для авторов бесплатны.

Подготовка и представление рукописи статьи

1. Все материалы предоставляются в редакцию в электронном виде. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая рисунки, таблицы и список литературы, следует пронумеровать.

2. Работа должна быть подготовлена на компьютере в издательской системе LaTeX. Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX, не рассматриваются. Файлы статьи *.tex и *.ps (*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте rio@smath.ru.

3. В тексте статьи указывается индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся аннотации на русском и английском языках (объемом не менее 200 слов, достаточную для понимания содержания статьи), даются списки ключевых слов на русском и английском языках, а также коды согласно Mathematics Subjects Classifications (2010). Далее в файле приводятся полностью Фамилия, Имя, Отчество каждого автора, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты и ORCID.

4. Датой поступления статьи считается дата поступления электронной копии статьи на официальный e-mail журнала. Текст электронного сообщения должен быть оформлен как сопроводительное письмо, из текста которого ясно следует, что авторы направляют свою статью во Владикавказский математический журнал. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

5. В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

6. При подготовке файла статьи особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета LaTeX. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела.

7. Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков. Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова «Рис. » с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отформатированной слева надписью «Таблица» с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

8. Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы печатается в конце текста статьи, оформленные в соответствии с правилами издания, на основании требований, предусмотренных действующими ГОСТами. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

9. Список литературы полностью дублируется на английском языке, приводится полностью отдельным блоком в конце статьи, повторяя список литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются в списке, готовящемся в романском алфавите. Список References используется международными библиографическими базами (Scopus, WoS и др.) для учета цитирования авторов.

Примечание: более подробную информацию можно найти на официальном сайте журнала http://www.vlmj.ru.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 27

Выпуск 1

Главный редактор А. Г. Кусраев

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

Подписано в печать 24.03.2025. Дата выхода в свет 28.03.2025.
Формат бумаги А4. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 18,6. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный научный центр «Владикавказский научный центр
Российской академии наук» (ВНЦ РАН)

Издатель:
Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»

Адрес издателя:
362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

Индекс 57380